गणित

कक्षा 7

राजकीय विद्यालयों में निःशुल्क वितरण हेतु

राजस्थान राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण संस्थान, उदयपुर

प्रकाशक

राजस्थान राज्य पाठ्यपुस्तक मण्डल, जयपुर

संस्करण : 2016

मूल्य :

पेपर उपयोग : आर. एस. टी. बी. वाटरमार्क
80 जी. एस. एम. पेपर पर मुद्रित

प्रकाशक : राजस्थान राज्य पाठ्यपुस्तक मण्डल
2–2 ए, झालाना डूंगरी, जयपुर

मुद्रक :

मुद्रण संख्या :

पाठ्यपुस्तक निर्माण
वित्तीय सहयोगः
यूनिसेफ राजस्थान, जयपुर

प्राक्कथन

बदलती हुई परिस्थितियों के अनुरूप शिक्षा में परिवर्तन होना जरूरी है, तभी विकास की गति तेज होती है। विकास में सहायक कई तत्त्वों के अलावा शिक्षा भी एक प्रमुख तत्त्व है। विद्‌यालयी शिक्षा को प्रभावशाली बनाने के लिए पाठ्‌यचर्या को समय–समय पर बदलना एक आवश्यक कदम है। वर्तमान में राष्ट्रीय पाठ्‌यचर्या की रूपरेखा 2005 तथा निःशुल्क एवं अनिवार्य बाल शिक्षा अधिकार अधिनियम 2009 के द्‌वारा यह स्पष्ट है कि समस्त शिक्षण क्रियाओं में 'बालक' केन्द्र के रूप में हैं। हमारी सिखाने की प्रक्रिया इस प्रकार हो कि बालक स्वयं अपने अनुभवों के आधार पर समझ कर ज्ञान का निर्माण करें। उसके सीखने की प्रक्रिया को ज्यादा से ज्यादा स्वतंत्रता दी जाए, इसके लिए शिक्षक एक सहयोगी के रूप में कार्य करें। पाठ्‌यचर्या को सही रूप में पहुँचाने के लिए पाठ्‌यपुस्तक महत्त्वपूर्ण साधन है। अतः बदलती पाठ्‌यचर्या के अनुरूप ही पाठ्‌यपुस्तकों में परिवर्तन कर राज्य सरकार द्वारा नवीन पाठ्‌यपुस्तक तैयार कराई गई है।

पाठ्‌यपुस्तक तैयार करने में यह ध्यान रखा गया है कि पाठ्‌यपुस्तक सरल, सुगम, सुरुचिपूर्ण, सुग्राह्‌य एवं आकर्षक हो, जिससे बालक सरल भाषा, चित्रों एवं विभिन्न गतिविधियों के माध्यम से इनमें उपलब्ध ज्ञान को आत्मसात् कर सके। साथ ही वह अपने सामाजिक एवं स्थानीय परिवेश से जुड़े तथा ऐतिहासिक एवं सांस्कृतिक गौरव, संवैधानिक मूल्यों के प्रति समझ एवं निष्ठा बनाते हुए एक अच्छे नागरिक के रूप में अपने आप को स्थापित कर सके।

शिक्षकों से मेरा विशेष आग्रह है कि इस पुस्तक को पूर्ण कराने तक ही सीमित नहीं रखें, अपितु पाठ्‌यक्रम एवं अपने अनुभव को आधार बना कर इस प्रकार प्रस्तुत करें कि बालक को सीखने के पर्याप्त अवसर मिले एवं विषय शिक्षण के उद्‌देश्यों की प्राप्ति की जा सके।

राजस्थान राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण संस्थान (एस.आई.ई.आर.टी.) उदयपुर पाठ्‌यपुस्तक विकास में सहयोग के लिए उन समस्त राजकीय एवं निजी संस्थानों, संगठनों यथा एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली, राज्य सरकार, भारतीय जनगणना विभाग, आहड़ संग्रहालय उदयपुर, जनसंपर्क निदेशालय जयपुर, राजस्थान राज्य पाठ्‌यपुस्तक मण्डल जयपुर, विद्‌या भारती, विद्‌याभवन संदर्भ केन्द्र पुस्तकालय, उदयपुर एवं लेखकों, समाचार पत्र–पत्रिकाओं, प्रकाशकों तथा विभिन्न वेबसाइट्‌स के प्रति आभार व्यक्त करता है जिन्होंने पाठ्‌यपुस्तक निर्माण में सामग्री उपलब्ध कराने एवं चयन में सहयोग दिया। हमारे प्रयासों के बावजूद किसी लेखक, प्रकाशक, संस्था, संगठन और वेबसाइट का नाम छूट गया हो तो हम उनके आभारी रहते हुए क्षमा प्रार्थी हैं। इस संबंध में जानकारी प्राप्त होने पर आगामी संस्करणों में उनका नाम शामिल कर लिया जाएगा।

पाठ्यपुस्तकों की गुणवत्ता बढ़ाने हेतु श्री कुंजीलाल मीणा, शासन सचिव, प्रारंभिक शिक्षा, श्री नरेशपाल गंगवार, शासन सचिव, माध्यमिक शिक्षा एवं आयुक्त राष्ट्रीय माध्यमिक शिक्षा परिषद्, श्री बाबूलाल मीणा, निदेशक प्रारंभिक शिक्षा एवं श्री सुवालाल, निदेशक माध्यमिक शिक्षा, श्री बी. एल. जाटावत, आयुक्त, राजस्थान प्रारम्भिक शिक्षा परिषद्, जयपुर, राजस्थान सरकार का सतत् मार्गदर्शन एवं अमूल्य सुझाव संस्थान को प्राप्त होते रहे हैं। अतः संस्थान हृदय से आभार व्यक्त करता है।

इस पाठ्यपुस्तक का निर्माण यूनिसेफ के वित्तीय एवं तकनीकी सहयोग से किया गया है। इसमें सेम्युअल एम., चीफ यूनिसेफ राजस्थान जयपुर, सुलग्ना रॉय शिक्षा विशेषज्ञ एवं यूनिसेफ से संबंधित अन्य सभी अधिकारियों के सहयोग के लिए संस्थान आभारी है। संस्थान उन सभी अधिकारियों एवं कार्मिकों का, जिनका प्रत्यक्ष एवं अप्रत्यक्ष रूप से इस कार्य संपादन में सहयोग रहा है, उनकी प्रशंसा करता है।

मुझे इस पुस्तक को प्रस्तुत करते हुए प्रसन्नता हो रही है, साथ ही यह विश्वास है कि यह पाठ्यपुस्तक विद्यार्थियों एवं शिक्षकों के लिए उपयोगी सिद्ध होगी और अध्ययन–अध्यापन एवं विद्यार्थी के व्यक्तित्व विकास की एक प्रभावशाली कड़ी के रूप में कार्य करेगी।

विचारों एवं सुझावों को महत्त्व देना लोकतंत्र का गुण है अतः राजस्थान राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण संस्थान उदयपुर सदैव इस पुस्तक को और श्रेष्ठ एवं गुणवत्तापूर्ण बनाने के लिए आपके बहुमूल्य सुझावों का स्वागत करेगा।

निदेशक
राजस्थान राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं
प्रशिक्षण संस्थान, उदयपुर

पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति

संरक्षक : विनीता बोहरा, निदेशक, राजस्थान राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण संस्थान (एस.आई.ई.आर.टी.,) उदयपुर

मुख्य समन्वयक: नारायण लाल प्रजापत, उपनिदेशक, एस.आई.ई.आर.टी., उदयपुर

समन्वयक: डॉ. ममता बोल्या, अनुसंधान सहायक, एस.आई.ई.आर.टी., उदयपुर

संयोजक: उमंग पण्ड्या, वरिष्ठ अध्यापक, रा.मा.वि. वाका, बाँसवाड़ा

लेखकगण: रूपेन्द्र मोहन शर्मा, जिला सचिव, विद्या भारती, बा.उ.मा. आदर्श विद्या मंदिर, दौसा

ओंकार दास वैष्णव, से.नि. प्रधानाचार्य, चित्तौड़गढ़

रणवीर सिंह, उपप्रधानाचार्य, डाइट, कोटा

लालाराम सेन, वरि. व्या., डाइट, जालोर

सुशीला मेनारिया, व्या., डाइट, उदयपुर

संजय बोल्या, व.अ.,रा.उ.मा.वि. छाली, गोगुन्दा, उदयपुर

कमलकान्त स्वामी, व.अ.,रा.उ.मा.वि. सर्वोदय बस्ती, बीकानेर

कौशल डी. पण्ड्या, कार्यक्रम अधिकारी, रमसा, बाँसवाड़ा

जनक जोशी, ब्लॉक संदर्भ्य व्यक्ति, एस.एस.ए.,घाटोल, बाँसवाड़ा

महेन्द्र सोनी, व.अ.,रा.मा.वि. बुद्धनगर, जोधपुर

कमल अरोड़ा, व.अ.,रा.मा.वि. झाड़ोली, गोगुन्दा, उदयपुर

यशवन्त दवे, व.अ.,रा.उ.मा.वि. बम्बोरा, उदयपुर

रियाज अहमद, व.अ.रा.उ.मा.वि. बाड़ी, धोलपुर

सीमा महता, व.अ.रा.उ.मा.वि. रावलिया खुर्द, गोगुन्दा, उदयपुर

शहनाज, अध्या.,रा.उ.प्रा.वि. गाडरियावास, भीण्डर

बृजराज चौधरी, अध्या.,रा.उ.प्रा.वि. भटवाड़ा, खैराबाद, कोटा

कपिल पुरोहित, अध्या.,रा.उ.प्रा.वि. सिवड़िया, गोगुन्दा, उदयपुर

दुर्गेश कुमार जोशी, अध्या., रा.उ.प्रा.वि. उदलियास (माफी), भीलवाडा

इन्दर मोहन सिंह छाबड़ा, अध्या.,रा.उ.प्रा.वि. मेवाड़ों का मठ, कोटड़ा

अरविन्द शर्मा, अध्या.,रा.उ.प्रा.वि. साकरिया, प्रतापगढ़

कल्याण सिंह पंवार, अध्या. रा.उ.प्रा.वि. भीमाखेड़ा, रेलमगरा, राजसमंद

आवरण एवं सज्जा: डॉ. जगदीश कुमावत, प्राध्यापक, एस.आई.ई.आर.टी., उदयपुर

चित्रांकन: शाहिद मोहम्मद, अजमेर

तकनीकी सहयोग: हेमन्त आमेटा, व्याख्याता, एस.आई.ई.आर.टी. उदयपुर

कम्प्यूटर ग्राफिक्स: अनुभव ग्राफिक, अजमेर

नि:शुल्क वितरण हेतु

शिक्षकों के लिए

वर्तमान वैश्विक परिदृश्य में बदलते परिवेश के साथ गणित शिक्षण का सामन्जस्य बिठाने एवं राज्य के विद्यार्थियों को अधिगम के उन स्तरों तक दक्षता प्रदान करने के लिए नवीन पाठ्यक्रम एवं पाठ्यपुस्तकों का निर्माण किया गया हैं।

बालक की शैक्षिक जगत के प्रति समझ विकसित करने के साथ–साथ बालक की अन्तर्निहित क्षमताओं को विकसित करने, उच्च मानवीय मूल्यों व नैतिक गुणों का विकास करने, राष्ट्र के लिए भविष्य में निष्ठावान, देशभक्त एवं संवेदनशील नागरिक तैयार करने के उद्देश्य से इस पाठ्यक्रम का सृजन किया गया हैं।
राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रुपरेखा–2005 के मुख्य मार्ग–दर्शक सिद्धान्तों को शिक्षक आत्मसात कर उनकी मूल भावना के अनुरुप पाठ्यपुस्तक की विषयवस्तु को बालकों तक पहुँचाए, शिक्षक से यह अपेक्षा की गई है।

इस पाठ्यपुस्तक की प्रमुख विशेषताएँ निम्नलिखित है– विद्यार्थियों को विषय से परिचय उनके आसपास से संबंधित उदाहरणों से कराया गया हैं। इसमें यह भी ध्यान रखा गया है कि अधिगम हेतु आवश्यक सामग्री कम लागत या आसपास के परिवेश से उपलब्ध हो सके ताकि कक्षा शिक्षण में अध्यापक उन सामग्रियों का उपयोग कर, गतिविधि के माध्यम से बालकों की सहभागिता के साथ अधिगम को प्रभावी बना सके।

बालक को केंद्र बिन्दु मानकर सीखने की प्रक्रिया में बालक का भागीदारी सुनिश्चित कर उन्हें स्वयं करके देखने अपनी गलतियों को स्वयं ठीक करने के लिए समुचित अवसर उपलब्धा करवाने एवं उनमें समझ विकसित करने के लिए कार्य किया जाए।

निःशुल्क एवं अनिवार्य बाल शिक्षा अधिकार अधिनियम–2009 के प्रावधानानुसार सतत् एंव व्यापक मूल्यांकन के अनुसार विषयवस्तु निर्मित की गई है। अतः बालकों को स्तरानुसार समूह में बाँटकर समूह शिक्षण पर बल देकर बालकों में दक्षताएँ विकसित की जाए।

पाठ्यपुस्तक में अवधारणाओं का विस्तारपूर्वक वर्णन किया गया है तथा अधिक संख्या में चित्रों के माध्यम से समझाया गया है। उदाहरण और अभ्यास सम्मिलित किए गए हैं, ताकि विद्यार्थियों में अवधारणाओं को अपने स्तर पर समझ कर प्रश्नों को बेहतर ढ़ंग से हल करने की दक्षता में वृद्धि हो सके तथा समस्याओं को हल करने में उनकी भागीदारी बढ़ सके।

बालकों में गणितीय सोच विकसित करने, गणितीय तथ्यों की पुनः खोज करने, आरेखण एवं मापन के लिए उपयुक्त दक्षता के विकास हेतु अनेक गतिविधियाँ दी गई हैं जिन्हें '**करो और सीखो**' का नाम दिया गया है। बालकों को यह गतिविधियाँ इसी भावना जिम्मेदारी, सहिष्णुता एंव सहयोग के अनुरुप करवाया जाना अपेक्षित है।

पाठ्यपुस्तक में राष्ट्रीय सरोकार यथा पर्यावरण संरक्षण, सड़क सुरक्षा, जेण्डर संवेदनशीलता, बेटी बचाओ बेटी पढ़ाओ, सामाजिक अवरोधों की समाप्ति की आवश्यकता एवं जागरूकता आदि का ध्यान में रखा गया है। अध्यापकों को इन तथ्यों के प्रति सचेत रहना चाहिए। उन्हें विद्यार्थियों के मस्तिष्क में उक्त प्रमुख संदेशों को गणितीय समस्याओं की शब्दावली के माध्यम से पहुँचाने चाहिए। बालकों को इन राष्ट्रीय सरोकारों के साथ जोड़ने एवं इनके प्रति उनमें समझ बनाने का प्रयास किया जाना अपेक्षित है।

अध्यापक अपनी सुविधानुसार कक्षा के बालकों को छोटे – छोटे समूह एवं उपसमूह बनाकर उन्हें गतिविधि करने का मौका दें ताकि स्व–अध्ययन कि प्रवृत्ति को बढ़ाकर एक सहयोगी के रूप में अपनी जिम्मेदारी तय कर सके। पाठ्यपुस्तक में विद्यार्थियों के अवबोधन एवं परिपक्वता के स्तर के अनुरूप शब्दावली एवं पारिभाषिक शब्दों का प्रयोग किया गया है। प्रत्येक अध्याय के अंत में महत्त्वपूर्ण संकल्पनाओं एवं परिणामों को ''**हमने सीखा**'' के रूप में स्थान दिया गया है।

भारतीय गणितज्ञों का जीवन परिचय एवं उनका गणित में योगदान का भी उल्लेख किया गया है ताकि बालक भारत की समृद्ध परम्पराओं और भारतीयों द्वारा गणित में किये गए योगदान के प्रति अपनी समझ बना सकें।

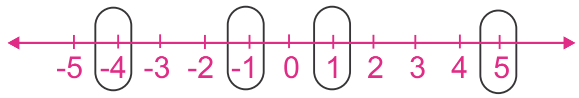
पाठ्यपुस्तक एवं पाठ्यक्रम को तैयार करने में बालक को केंद्र में मानकर शिक्षक पर सर्वाधिक विश्वास इस भावना के साथ किया गया है कि शिक्षक इन संप्रयत्नों की पूर्ति हेतु पूर्ण निष्ठा लगन एवं ईमानदारी के साथ बालक के साथ कार्य करेगा। लेखक समूह शिक्षक पर भरोसा कर यह पाठ्यपुस्तक राज्य के शिक्षकों एवं बालकों को समर्पित करता है।

भारत में गणित की समृद्ध परम्परा रही है। आदिकाल से ही भारतीय मनीषियों एवं गणितज्ञों ने इस क्षेत्र में श्रेष्ठ कार्य किया है। पुरातन ज्ञान का उपयोग आधुनिक गणित में किया जा सके एवं प्राचीन उपलब्धियों का तारतम्य आधुनिक गणित को उन्नत बनाने के लिए किया जा सके, इसी उद्देश्य से पाठ्यपुस्तक में भारतीय अंक प्रणाली (देवनागरी) एवं वैदिक गणित का समावेश किया गया है। वैदिक गणित के द्वारा गणनाओं को सरल करने का प्रयास किया गया है।

अनुक्रमणिका

अध्याय 1 पूर्णांक

1.1 कक्षा VI में पूर्ण संख्याओं व पूर्णांकों के बारे में अध्ययन कर चुके हैं, हम जानते हैं कि पूर्णांक में ऋणात्मक एवं पूर्ण संख्याओं का संग्रह है। इस अध्याय में हम पूर्णांकों के गुण एवं संक्रियाओं के बारे में विस्तृत अध्ययन करेंगे। नीचे संख्या रेखा पर पूर्णांकों को प्रदर्शित किया गया है।



उक्त पूर्णांकों को आरोही (बढ़ते) क्रम में लिखें।

हम यह जानते हैं कि संख्या रेखा में दाईं ओर जाने पर संख्याएँ बढ़ती है।

अतः $-4 < -1 < 1 < 5$

साथ ही कक्षा 6 में हमने यह भी पढ़ा है कि किसी संख्या रेखा पर जब हम

1. एक धनात्मक पूर्णांक को जोड़ते हैं तो दाईं ओर चलते हैं।
2. एक ऋणात्मक पूर्णांक को जोड़ते हैं तो बाईं ओर चलते हैं।
3. एक धनात्मक पूर्णांक को घटाते हैं तो बाईं ओर चलते हैं।
4. एक ऋणात्मक पूर्णांक को घटाते हैं तो दाईं ओर चलते हैं।

करो और सीखो

1. -5 को जोड़ने के लिए संख्या रेखा पर किस ओर जाएँगे ?
2. 3 में से (-5) को घटाने के लिए संख्या रेखा पर किस ओर जाएँगे तथा किस संख्या पर पहुँचेंगे ?

   $3 - (-5) =$ ....
3. 3 में 5 जोड़ने के लिए किस ओर जाएँगे एवं किस संख्या पर पहुँचेंगे ?
4. -3 में से $+5$ घटाने के लिए किस ओर चलना होगा तथा कहाँ पहुँचेंगे ?

बताइए निम्नलिखित में से कौनसा कथन सत्य है और कौन सा कथन असत्य है ?

1. जब दो धनात्मक पूर्णांकों को जोड़ा जाता है तो हमें एक धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है। (   )
2. जब दो ऋणात्मक पूर्णांकों को जोड़ा जाता है तो हमें एक धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।(   )
3. जब एक धनात्मक पूर्णांक एवं एक ऋणात्मक पूर्णांक को जोड़ा जाता है तब सदैव ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है। (   )
4. पूर्णांक (8) का योज्य प्रतिलोम (-8) है। (   )
5. $(-7) + 3 = 7 - 3$ (   )
6. $8 + (-7) - (-4) \neq 8 + 7 - 4$ (   )

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

उपर्युक्त कथनों की सत्यता की जाँच निम्नानुसार करते हैं।

(1) कथन 1 सत्य है, उदाहरण के लिए

(i) 7+4 = 11 (ii) 4 + 11 = 15 (iii) 6 + 7 = 13 आदि

(2) कथन 2 असत्य है, उदाहरण के लिए

(i) (-6) + (-3) = (-9)

जब दो ऋणात्मक पूर्णांकों को जोड़ते है तो सदैव एक ऋणात्मक पूर्णांक ही प्राप्त होता है।

(3) कथन 3 असत्य है,

उदाहरण के लिए $-10 + 15 = 5$ जो कि ऋणात्मक पूर्णांक नहीं है।

इस हेतु सही कथन है कि एक ऋणात्मक एवं एक धनात्मक पूर्णांक को जोड़ने पर हम उनका अंतर लेते हैं और बड़े पूर्णांक के चिह्न को अंतर के पहले रखा जाता है। बड़े पूर्णांक का चयन करते समय पूर्णांक के चिह्न नहीं देखे जाएँगे।

उदाहरण के लिए

(1) $(-50) + (70) = 20$ (2) $12 + (-20) = -8$

(3) $16 + (-7) = 9$ (4) $(-14) + (10) = -4$

(4) कथन सत्य है क्योंकि

$-8 + (8) = 0 = 8 + (-8)$

योज्य प्रतिलोम का योग करने पर योज्य तत्समक 0 प्राप्त होता है। आप भी इस प्रकार के उदाहरण और दीजिए।

अतः किसी पूर्णांक a का योज्य प्रतिलोम (-a) तथा (-a) का योज्य प्रतिलोम (a) है।

(5) कथन असत्य है क्योंकि

$(-7) + 3 = -4$

तथा $7 + (-3) = 4$

(6) कथन सत्य है क्योंकि

$8 + (-7) - (-4) = 5$

तथा $8 + 7 - 4 = 11$

अतः $8 + (-7) - (-4) \neq 8 + 7 - 4$

1.2 पूर्णांकों के जोड़ एवं घटाव के गुणधर्म

1.2.1 योग के लिए संवृत गुणधर्म

पूर्ण संख्याओं के समूह में हमने देखा है कि किन्हीं दो पूर्ण संख्याओं का योगफल सदैव एक पूर्ण संख्या ही होती है और हम कहते हैं कि पूर्ण संख्याएँ योग के लिए संवृत होती है।

क्या पूर्णांक भी योग संक्रिया के लिए संवृत है आइए जाँच करे।

क्र.सं.	पूर्णांक 1	पूर्णांक 2	योगफल	योगफल पूर्णांक है/नहीं
1.	+2	+5	+7	है
2.	–3	+7		
3.	–4	+4		
4.	3	–5		

भिन्न–भिन्न पूर्णांकों को लेकर जाँच कीजिए क्या यह केवल धनात्मक पूर्णांकों के लिए सत्य है या ऋणात्मक के लिए भी सत्य है। सारणी से हम यह पाते हैं कि **सभी पूर्णांक चाहे वह ऋणात्मक हो अथवा धनात्मक, योग हेतु संवृत है।** क्या आप ऐसे दो पूर्णांक बता सकते हैं जिनका योग पूर्णांक न हो ? पूर्णांक a तथा b के लिए (a + b) भी सदैव पूर्णांक होगा।

1.2.2 घटाव के अंतर्गत संवृत गुणधर्म

जब हम एक पूर्णांक में से दूसरे पूर्णांक को घटाते हैं तो क्या होता है ? क्या उनका अंतर भी पूर्णांक ही प्राप्त होता है। निम्नलिखित सारणी को देखकर उसे पूरा कीजिए।

कथन	प्रेक्षण
1. 7 – 5 = 2	परिणाम एक पूर्णांक है।
2. 4 – 9 = –5	....
3. (–4) – (–5) = ...	परिणाम एक पूर्णांक है।
4. (–18) – (–18) = ...	....
5. 17 – 0 = ...	....

आप क्या देखते हैं ? क्या हम ऐसा कोई पूर्णांक युग्म ज्ञात कर सकते हैं जिसका अंतर पूर्णांक नहीं हो ? क्या हम यह कह सकते हैं कि पूर्णांक घटाव के अंतर्गत संवृत है ? हाँ, हम यह कह सकते हैं कि **पूर्णांक घटाव के अंतर्गत संवृत है।**

अतः पूर्णांक a तथा b के लिए (a - b) भी सदैव पूर्णांक ही प्राप्त होता है।

यहाँ ध्यान देने योग्य बात है कि पूर्ण संख्याएँ घटाव के लिए संवृत नहीं होती है।

1.2.3 क्रम विनिमेय गुणधर्म

हम जानते हैं कि 2 + 4 = 4 + 2 = 6 अर्थात् पूर्ण संख्याओं के योग में क्रम बदलने से परिणाम में कोई परिवर्तन नहीं आता है अतः क्रम विनिमेय गुणधर्म का पालन होता है।

क्या इसी प्रकार पूर्णांक में भी क्रम विनिमेय गुणधर्म का पालन होता है ?

आइए जाँच करें।

क्या निम्नलिखित समान है

(–8) + (–4) व (–4) + (–8)

(–2) + 5 व 5 + (–2)

12 + 0 व 0 + 12

आप भी अन्य इसी प्रकार के योग अलग–अलग पूर्णांकों के साथ करें तथा देखें कि क्या ऐसा कोई युग्म है जिसमें क्रम बदलने से परिणाम में कोई परिवर्तन आता है।

हमने यह देखा कि क्रम बदलने से योग में कोई परिवर्तन नहीं आता है अर्थात् **पूर्णांक योग संक्रिया के लिए क्रम विनिमेय गुणधर्म का पालन करते हैं।**

व्यापक रुप में, दो पूर्णांकों a तथा b के लिए हम कह सकते हैं कि

$$a + b = b + a$$

हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं के लिए घटाव की संक्रिया में क्रम विनिमेय गुणधर्म लागू नहीं होता है। पूर्णांकों के लिए घटाव की संक्रिया में क्रम विनिमेयता लागू होती है अथवा नहीं ? कोई दो पूर्णांक (–6) और (+4) लीजिए।

क्या (–6) – (+4) एवं (+4) – (–6) समान है ?

नहीं क्योंकि

–6 – (+4) = –10 एवं +4 + 6 = +10

एवं –10, +10 बराबर नहीं होता है।

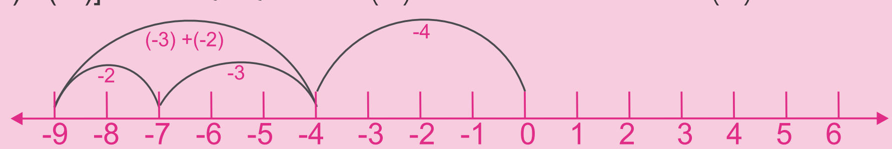
अतः हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि **घटाव पूर्णांकों के लिए क्रम विनिमेय नहीं है।**

1.2.4 साहचर्य गुणधर्म

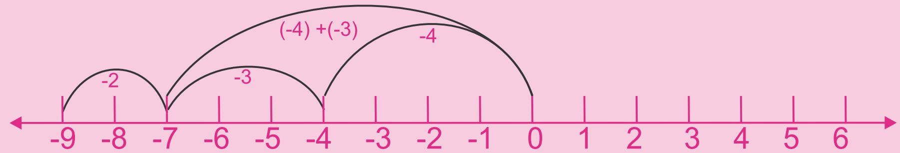
पूर्णांकों –4, –3 व –2 के लिए साहचर्य गुणधर्म की जाँच

-4 + [(-3) +(-2)] और [(-4) + (-3)] +(-2) की गणना कीजिए।

-4 + [(-3) +(-2)] का अर्थ है पहले -3 व (-2) का योग कर परिणाम को (-4) के साथ जोड़ना।



[(-4) + (-3)] +(-2) का अर्थ है पहले (–4) व –3 का योग कर परिणाम में –2 को जोड़ना।



दोनों ही परिस्थितियों में परिणाम (–9) ही प्राप्त होता है। इस प्रकार के 3 उदाहरण और दीजिए। आप ऐसा कोई उदाहरण नहीं पाएँगे जिसके लिए यह योगफल अलग–अलग प्राप्त हो। यह दर्शाता है कि **पूर्णांकों का योग साहचर्य नियम का पालन करता है।** अर्थात्

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

1.2.5 योज्य तत्समक

निम्नलिखित को देखकर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

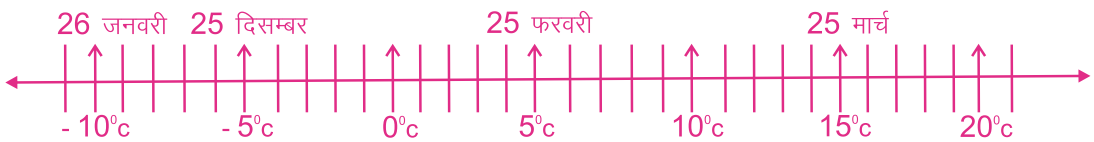
(i) (-4) + 0 = -4 (ii) 7 + 0 = 7 (iii) 0 + (-14) = -----------

(iv) - 8 + --------- = -8 (v) ----------- + 0 = 15 (vi) -23 + ---------- = -23

उपर्युक्त उदाहरणों से यह स्पष्ट होता है कि किसी भी पूर्णांक में 0 जोड़ने से योगफल वही पूर्णांक प्राप्त होता है **अतः '0' पूर्णांकों के लिए योज्य तत्समक है।** आप कुछ और उदाहरण लेकर उक्त तथ्य की पुष्टि कीजिए।

प्रश्नावली 1.1

1. चुरु का तापमान अलग–अलग समय में अंकित कर डिग्री सेन्टिग्रेड (C^0) में संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया गया है।



(i) संख्या रेखा को देखकर निम्न दिनांकों पर चुरु का तापमान बताइए।

(a) 26 जनवरी .... (b) 25 दिसम्बर ....

(c) 25 फरवरी .... (d) 25 मार्च ....

(ii) सबसे गर्म व सबसे ठण्डे दिन के तापमान में कितना अंतर है ?

(iii) 26 जनवरी का तापमान, 25 फरवरी के तापमान से कितना कम है ?

(iv) क्या हम कह सकते हैं 25 दिसम्बर और 25 फरवरी के तापमान का योग 26 जनवरी के तापमान से अधिक है ?

2. शीला डाकघर में 5000 रुपये जमा करती है। एक महीने बाद 3700 रुपये निकाल लेती है। यदि निकाली हुई रकम ऋणात्मक संख्या के रुप में लिखी जाए तो जमा की गई राशि किस रुप में निरुपित करेंगे ? निकासी के पश्चात कितनी राशि खाते में शेष रहेगी ?

3. हल कीजिए– (i) (-4) + (-3) (ii) 15 - 8 + (-9)

(iii) 400 + (-1000) + (-500) (iv) 23 - 41 - 11

(v) -27 + (-3) + 30

4. निम्न कथनों में बॉक्स में उपयुक्त चिन्ह (<, >, =) लगाइए।

(i) -14 + 11 + 5 ☐ 14 - 11 - 5

(ii) 30 + (-5) + (-8) ☐ (-5) + (-8) + 30

(iii) 7 + 11 + (-5) ☐ (-7) - 11 + 5

(iv) (-14) + 11 + (-12) ☐ 14 + 11 + 12

(v) 6 + 7 - 13 ☐ 6 + 7 + (-13)

5. ऐसे दो पूर्णांक लिखिए जिनका

(i) योग (-7) हो। (ii) अंतर 4 हो। (iii) योग 0 हो । (iv) अंतर - 2 हो।

6. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(i) (-3) + 5 = 5 + --------------

(ii) 17 + ------------- = 17

(iii) ----------- + (-5) = 0

(iv) -11 + [(-12) + 4) = [(-11) + (-12)] + ...

7. नीचे पूर्णांकों के कुछ गुणधर्म एवं उनके उदाहरण दिए जा रहे हैं। उदाहरणों को सही गुणधर्म से मिलान कीजिए।

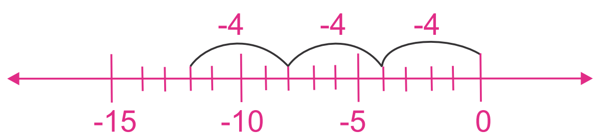
उदाहरण	गुणधर्म
(i) $(a + b) + c = a + (b + c)$	(a) तत्समक
(ii) $3 + 4 = 4 + 3$	(b) साहचर्य
(iii) $(-4) + 0 = (-4)$	(c) क्रम विनिमेय

1.3 पूर्णांकों का गुणन

1.3.1 धनात्मक पूर्णांक का ऋणात्मक पूर्णांक से गुणन

$3 \times 4 = 4 + 4 + 4 = 12$

$3 \times (-4) = (-4) + (-4) + (-4) = -12$



इसी प्रकार $5 \times (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -15$

करो और सीखो

हल कीजिए।

(i) $4 \times (-8) =$ ...... = ... (ii) $3 \times (-3) =$ ...... = ...

(iii) $5 \times (-9) =$ ...... = ...

इस विधि का उपयोग करते हुए हमने पाया कि धनात्मक पूर्णांक को ऋणात्मक पूर्णांक से गुणा करने पर ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है। परन्तु क्या होता है जब ऋणात्मक पूर्णांक को धनात्मक पूर्णांक से गुणा करते हैं ?

निम्न पैटर्न को देखिए।

$3 \times 4 = 12$

$2 \times 4 = 8 = 12 - 4$

$1 \times 4 = 4 = 8 - 4$

$0 \times 4 = 0 = 4 - 4$

$-1 \times 4 = -4 = 0 - 4$

$-2 \times 4 = -8 = -4 - 4$

$-3 \times 4 = -12 = -8 - 4$

हम पहले ही प्राप्त कर चुके हैं कि $3 \times (-4) = -12$

अतः हम जानते हैं कि $(-3) \times 4 = -12 = 3 \times (-4)$

इसी प्रकार हम $(-5) \times 3 = -15 = 3 \times (-5)$ भी प्राप्त कर सकते हैं।

करो और सीखो

(1) ज्ञात कीजिए –

(i) 15 x (-5) (ii) 27 x (-10)

(iii) -12 x 12 (iv) -7 x 4

1.3.2 दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणन

निम्नलिखित को देखिए

-3 x 4 = -12

-3 x 3 = -9 = -12 – (-3)

-3 x 2 = -6 = -9 – (-3)

-3 x 1 = -3 = -6 – (-3)

-3 x 0 = 0 = -3 – (-3)

-3 x -1 = 3 = 0 – (-3)

-3 x -2 = 6 = 3 – (-3)

इसी प्रकार निम्न को पूरा कीजिए

(i) -3 x -3 = ………….. (ii) -3 x -4 = …………

इसी प्रकार आप इन गुणनफल को देखकर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

-5 x 3 = -15

-5 x 2 = -10 = -15 - (-5)

-5 x 1 = -5 = -10 - (-5)

-5 x 0 = 0 = ……

-5 x -1 = ……….. =

-5 x -2 = ……….. =

-5 x -3 = ……….. =

उक्त पैटर्न को देखकर हम यह कह सकते हैं कि दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक होता है। हम दो ऋणात्मक पूर्णांकों को पूर्ण संख्याओं के रुप में गुणा करते हैं तथा गुणनफल के पूर्व में (+) का चिन्ह लगाते हैं।

उदाहरणतः (-10) x (-14) = 140, (-5) x (-6) = 30

व्यापक रुप में दो धनात्मक पूर्णांकों a तथा b के लिए

(-a) x (-b) = a x b

करो और सीखो

निम्न गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(i) (-12) x (-15) (ii) (-25) x (-4) (iii) (-17) x (-11)

1.3.3 तीन अथवा अधिक ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल

हमने देखा कि दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल धनात्मक पूर्णांक होता है। तीन या तीन से अधिक ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल क्या होगा ? आइए निम्न उदाहरणों को देखते हैं।

(i) $(-2) \times (-3) = 6$

(ii) $(-2) \times (-3) \times (-4) = [(-2) \times (-3)] \times (-4) = (6) \times (-4) = -24$

(iii) $(-2) \times (-3) \times (-4) \times (-5) = [(-2) \times (-3)] \times [(-4) \times (-5)] = 6 \times 20 = 120$

(iv) $(-2) \times (-3) \times (-4) \times (-5) \times (-6) = [(-2) \times (-3)] \times [(-4) \times (-5)] \times (-6)$

$= 6 \times 20 \times (-6)$

$= 120 \times (-6)$

$= -720$

उक्त उदाहरणों से हम देखते हैं कि

(i) दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक होता है।

(ii) तीन ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक ऋणात्मक पूर्णांक है।

(iii) चार ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक है।

(iv) पाँच ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल क्या है ?

(v) इसी क्रम में छः ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल क्या होगा ?

उक्त उदाहरणों के परिणाम से हम इस निष्कर्ष पर पहुँच सकते हैं कि यदि ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या सम (2,4,6,....) हो तब उनका गुणनफल धनात्मक पूर्णांक एवं ऋणात्मक पूर्णांक की संख्या विषम (1,3,5,7,...............) होने की स्थिति में परिणाम ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।

करो और सीखो

हल कीजिए।

(i) $(-1) \times (-1) \times (-1) =$ ....   (ii) $(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) =$ ....

1.3.4 शून्य से गुणन

नीचे दिए गए पैटर्न को देखिए एवं रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

$-4 \times 3 = -12$, $-4 \times 2 = -8 = -12 - (-4)$

$-4 \times 1 = -4 = -8 - (-4)$, $-4 \times 0 = 0 = -4 - (-4)$

हम पाते हैं कि $-4 \times 0 = 0$ इसी प्रकार आप भी अन्य संख्याओं के साथ पैटर्न बनाएँ एवं जाँच करें

पुनः $3 \times (-5) = -15$

$2 \times (-5) = -10 = -15 - (-5)$

$1 \times (-5) = -5 = -10 - (-5)$

$0 \times (-5) = 0 = -5 - (-5)$

उक्त पैटर्न से हम यह कह सकते हैं कि किसी भी पूर्णांक को शून्य से गुणा करने पर शून्य प्राप्त होता है।

व्यापक रुप में हम कह सकते हैं कि किसी भी पूर्णांक a के लिए

$\boxed{a \times 0 = 0 = 0 \times a}$

1.4 पूर्णांकों का विभाजन

हम जानते हैं कि विभाजन गुणन की विपरीत प्रक्रिया है। उदाहरण के लिए $4 \times 5 = 20$, $20 \div 4 = 5$ या $20 \div 5 = 4$ । इस प्रकार हम यह कह सकते हैं कि पूर्णांकों के प्रत्येक गुणन कथन के लिए एक विभाजन कथन है।

गुणन कथन	संगत भाग कथन
$3 \times (-5) = (-15)$	$(-15) \div (3) = -5$, $(-15) \div (-5) = 3$
$(-3) \times 4 = (-12)$	$(-12) \div (-3) = 4$, $(-12) \div 4 = -3$
$(-2) \times (-7) = 14$ ...	$14 \div (-7) = -2$,...............
$(-4) \times 5 = (-20)$	$(-20) \div (-4) = 5$,...............
$5 \times (-9) = -45$ ...... ,	.... ,...............
$(-6) \times 5 =$,...............	.... ,...............
$(+5) \times (+2) =$,...............	.... ,...............

सारणी के भाजन के कथनों को देखिए तथा इस आधार पर निम्न कथनों की जाँच कीजिए [✓ अथवा x] चिह्न लगाइए।

(1) ऋणात्मक पूर्णांक ÷ धनात्मक पूर्णांक = ऋणात्मक पूर्णांक ( )

(2) धनात्मक पूर्णांक ÷ ऋणात्मक पूर्णांक = ऋणात्मक पूर्णांक ( )

(3) धनात्मक पूर्णांक ÷ धनात्मक पूर्णांक = धनात्मक पूर्णांक ( )

(4) ऋणात्मक पूर्णांक ÷ ऋणात्मक पूर्णांक = धनात्मक पूर्णांक ( )

पूर्णांकों का भाग भी पूर्ण संख्याओं के भाग की तरह ही करते हैं। केवल हमें यह ध्यान रखना होता है कि परिणाम धनात्मक होगा अथवा ऋणात्मक।

व्यापक रुप में, $a \div (-b) = (-a) \div (b)$ (जहाँ b, -b शून्य नहीं हो)

प्रश्नावली 1.2

1. निम्नलिखित का गुणनफल ज्ञात कीजिए।
   (i) $(-3) \times 4$ (ii) $(-1) \times 24$
   (iii) $(-30) \times (-24)$ (iv) $(-214) \times 0$
   (v) $(-15) \times (-7) \times 6$ (vi) $(-5) \times (-7) \times (-4)$
   (vii) $(-3) \times (-2) \times (-1) \times (-5)$
2. $(-1) \times 5$ से आरम्भ कर पैटर्न द्वारा दर्शाइए कि $(-1) \times (-1) = +1$
3. किसी प्रशीतक में तापमान कम होने की दर 3^0c प्रति मिनट है। एक वस्तु जिसका तापमान 25^0c है को प्रशीतक में रखा जाता है। कितने मिनट बाद उस वस्तु का तापमान -2^0c होगा।
4. एक खेल में नीला कार्ड चुनने पर 2 गोटियाँ देनी पड़ती है तथा लाल कार्ड चुनने पर 3 गोटियाँ मिलती है। शीतल के पास 27 गोटियाँ थी, खेल के दौरान लगातार 9 नीले कार्ड आते हैं। बताइए उसके पास कितनी गोटियाँ है ?

5. निम्न भाग के सवालों को हल कीजिए।
   (i) (-35) ÷ 7 (ii) 15 ÷ (-3)
   (iii) -25 ÷ (-25) (iv) 25 ÷ (-1)
   (v) 0 ÷ (-3) (vi) 15 ÷ [(-2) +1]
   (vii) [(-6) + 3] ÷ [(-2) + 1]
6. एक दुकानदार को 1 पेन बेचने पर 1 रुपये का लाभ तथा 1 पेंसिल बेचने पर 50 पैसे की हानि होती है। लाभ, हानि को पूर्णांकों के रुप में प्रदर्शित कीजिए।
   (i) एक माह में उसे 5 रुपये की हानि होती है। यदि उसने 45 पेन बेचे तो उस माह उसके द्वारा बेची जाने वाली पेंसिलों की संख्या ज्ञात कीजिए।
   (ii) दूसरे माह उसे कोई नुकसान या लाभ नहीं हुआ। यदि उसने 70 पेन बेचे हो तो बेची गई पेंसिलों की संख्या ज्ञात कीजिए।
7. पूर्णांकों का गुणा कर निम्न सारणी को भरिए।

x	2	3	- 4	- 2	1
3					
-2					
-1					
4					
2					

8. एक 60 फीट ऊँची बहुमंजिला इमारत में लिफ्ट में ऊपर जाने को धनात्मक पूर्णांक से दर्शाया जाए तो–
   (i) 60 फीट ऊपर स्थित फ्लैट की ऊँचाई कैसे दर्शाएँगे ?
   (ii) 15 फीट नीचे स्थित पार्किंग को पूर्णांक से दर्शाइए।
   (iii) लिफ्ट 5 फीट प्रति सैकण्ड से ऊपर की ओर जाती है तो + 5 और विपरीत आती है तो उसके उतरने को किस पूर्णांक से दर्शाएँगे।

1.4 पूर्णांकों के गुणन के गुणधर्म

1.4.1 गुणन में संवृतता

पूर्णांक – 1	पूर्णांक –2	गुणनफल	गुणनफल पूर्णांक हैं/नहीं
2	-3	-6	पूर्णांक है।
-3	4	-12	पूर्णांक है।
-2	-3	......	....
5	4	......	....
-5	3	......	....

आप क्या देखते हैं ? क्या आप ऐसे कोई दो पूर्णांक ज्ञात कर सकते हैं जिनका गुणनफल एक पूर्णांक नहीं हो ?

नहीं। अतः हम यह कह सकते हैं कि दो पूर्णांकों का गुणनफल भी एक पूर्णांक ही प्राप्त होता है। अर्थात् **पूर्णांक गुणन संक्रिया के लिए संवृत गुणधर्म का पालन करते हैं।**

1.4.2 क्रम विनिमेयता

हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं में गुणन क्रम विनिमेय होता है। क्या पूर्णांक के लिए भी गुणन क्रम विनिमेय है ?

नीचे दी गई सारणी को देखिए ओर इसे पूरा कीजिए।

पूर्णांक युग्म	गुणन	गुणन क्रम बदलकर	निष्कर्ष
5, -4	5 x (-4) = -20	-4 x 5 = -20	5 x -4 = -4 x 5
-10, 12	(-10) x 12 = ...	12 x (-10) = ...	
-3, -4	(-3) x (-4) =		
-5, -7		(-7) x (-5) =	
+8, -3	(+8) x (-3)		

आप क्या देखते हैं ? आप पाएँगे पूर्णांकों का गुणनफल उनके क्रम पर निर्भर नहीं करता है, अतः **पूर्णांकों के गुणन क्रम विनिमेय है।** व्यापक रुप में किन्हीं दो पूर्णांकों के लिए

$$\boxed{a \times b = b \times a}$$

1.4.3 गुणात्मक तत्समक

हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं के लिए गुणात्मक तत्समक 1 है। पूर्णांकों के लिए जाँच कीजिए।

(-3) x 1 = -3	1 x 5 = 5
(-4) x 1 =	1 x 8 =
1 x (-5) =	3 x 1 =
1 x (-6) =	7 x 1 =

यह दर्शाता है कि 1 पूर्णांकों के लिए भी गुणात्मक तत्समक है।
व्यापक रुप में किसी भी पूर्णांक के लिए

$$\boxed{a \times 1 = a = 1 \times a}$$

यदि किसी पूर्णांक में -1 से गुणा किया जाए तो क्या होगा ? -3 x (-1) = 3
3 x -1 = -3
-6 x -1 = 6
-1 x 13 = -13
क्या -1 पूर्णांकों के लिए गुणात्मक तत्समक है ?

1.4.4 गुणन का साहचर्य गुणधर्म

3, -4, -2 को लीजिए।

[3 x (-4)] x (-2)

पहले 3 एवं -4 का गुणन करेंगे। तत्पश्चात प्राप्त गुणनफल को (-2) से गुणा करेंगे।

= (-12) x (-2) = 24

(3) x [(-4) x (-2)] पर विचार कीजिए।

सर्वप्रथम (-4) व (-2) का गुणा करेंगे। तत्पश्चात गुणनफल को 3 से गुणा करेंगे।

= 3 x (+8) = 24

अतः [3 x (-4)] x (-2) = 3 x [(-4) x (-2)]

आप ऐसे ही तीन अन्य पूर्णांकों के समूह लीजिए व उपर्युक्त गतिविधि दोहराइए। क्या पूर्णांकों के विभिन्न प्रकार के समूहों से गुणनफल प्रभावित होता है ? व्यापक रुप में किन्हीं तीन पूर्णांकों a, b तथा c के लिए

$$\boxed{(a \times b) \times c = a \times (b \times c)}$$

1.4.5 वितरण गुण

पूर्ण संख्याओं के लिए वितरण का गुणधर्म हमने देखा

a (b + c) = a x b + a x c

क्या यह पूर्णांकों के लिए भी सत्य है आइए जाँच करें।

(i) (-7) x [2 + (-5)] = (-7) x (-3) = +21	(-7) x 2 + (-7) x (-5) -14+35 = +21
(ii) (-4) x [(-3) + (-7)] = (-4)x(-10) = 40	(-4) x (-3) + (-4)x(-7) 12 + 28 = 40
(iii) (-8) x [(-2) + (-1)] = (-8) x (-3) = 24	(-8) x (-2) + (-8)x(-1) = +16 +8 = 24

क्या हम कह सकते हैं कि पूर्णांकों के लिए भी योग पर गुणन का वितरण नियम सत्य है ? हाँ।

व्यापक रुप में $\boxed{a \times (b + c) = a \times b + a \times c}$

1.4.6 पूर्णांक के भाग के गुण

निम्न सारणी को देखकर इसे पूरा कीजिए।

कथन	निष्कर्ष	कथन	निष्कर्ष
(-8) ÷ (-2) = 4	परिणाम एक पूर्णांक है	(-8) ÷ 4	----------
(-2) ÷ (-8) = $\frac{-2}{-8}$	परिणाम एक पूर्णांक नहीं है	(3) ÷ (-8) = $\frac{3}{-8}$	----------

आप क्या देखते हैं ? हम देखते हैं कि **पूर्णांक भाग के अंतर्गत संवृत नहीं है** अर्थात् दो पूर्णांकों का भाग भी एक पूर्णांक हो ऐसा आवश्यक नहीं है।

क्रम विनिमेयता – हम यह जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं के लिए भाग क्रम विनिमेय नहीं है। आइए, पूर्णांक के लिए इसकी जाँच करें आप ऊपर दी गई सारणी में देख सकते हैं कि

(-8) ÷ (-2) ≠ (-2) ÷ (-8)

क्या [(-6) ÷ 2] एवं [2 ÷ (-6)] एक समान है?

अतः हम यह कह सकते हैं कि **पूर्णांकों के लिए भाग क्रम विनिमेय नहीं है।**

प्रश्नावली 1.3

1. नीचे पूर्णांकों के गुणन के गुणधर्म दिए हैं तथा सामने उदाहरण दिया गया है। सही उदाहरण को सही गुणधर्म से मिलाइए।

(i) (-4) x (5) = 5 x (-4)	(a) साहचर्य गुणधर्म
(ii) (-4) x [(-3) +(-2)] = (-4) x (-3) + (-4) x (-2)	(b) क्रम विनिमेय
(iii) -4 एक पूर्णांक,+7 दूसरा पूर्णांक, गुणनफल (-4) x (+7) = (-28) भी पूर्णांक	(c) वितरण गुण
(iv) (-4) x [(-7) x (5)] = [(-4) x (-7)] x (5)	(d) संवृत गुण

2. पूर्णांकों के गुणन के गुणधर्म को ध्यान में रख कर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(i) 26 x (-48) = (-48) x ……………..	क्रमविनिमेय
(ii) (-6) x [(-2) + (-1)] = (-6) x (-2) + (-6) x ………….	वितरण गुण
(iii) 100 x [(-4) x (-52)] = [100 x ………] x (-52)	साहचर्य

3. उचित गुणधर्मों का प्रयोग कर गुणनफल ज्ञात कीजिए।
   (i) 26 x (-48) + (-48) x (-56)   (ii) 8 x (78) x (-125)
   (iii) 9 x (50-2)   (iv) 999 x 45
4. सही/गलत बताइए। गलत कथनों को सही करके लिखिए।
   (i) पूर्णांकों का गुणन संवृत है।
   (ii) पूर्णांकों में भाग संवृत होता है।
   (iii) पूर्णांकों में भाग क्रम विनिमेय नहीं होता जबकि गुणन में क्रम विनिमेयता होती है।
   (iv) पूर्णांकों का गुणा योग पर वितरित होता है।
   (v) पूर्णांकों का भाग घटाव पर वितरित होता है।

हमने सीखा

1. पूर्णांक, संख्याओं का एक विशाल संग्रह है जिसमें पूर्ण संख्याएँ और उनके ऋणात्मक सम्मिलित हैं।
2. दो धनात्मक पूर्णांकों को जोड़ने पर धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है तथा दो ऋणात्मक पूर्णांकों को जोड़ने पर ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।
3. हमने योग एवं घटाव द्वारा संतुष्ट होने वाले गुणों का अध्ययन किया है।
   (i) पूर्णांक संख्याएँ योग एवं घटाव दोनों के लिए संवृत हैं। अर्थात् a + b और a - b दोनों पुनः पूर्णांक होते हैं, जहाँ a और b कोई भी पूर्णांक है।
   (ii) पूर्णांकों के लिये योग क्रमविनिमेय है, अर्थात् सभी पूर्णांकों a तथा b के लिए
   a + b = b + a
   (iii) पूर्णांकों के लिए योग साहचर्य है, अर्थात् सभी पूर्णांकों a, b तथा c के लिए
   (a + b) + c = a + (b + c) होता है।
   (iv) योग के अंतर्गत पूर्णांक शून्य तत्समक है, किसी विपरीत चिन्ह के पूर्णांकों के योग में पूर्णांकों के परिमाणों का घटाव होता है। परिणाम धनात्मक होगा यदि धनात्मक पूर्णांक का परिमाण ज्यादा होगा और ऋणात्मक होगा यदि ऋणात्मक पूर्णांक का परिमाण अधिक होगा।
4. हमने यह भी सीखा कि पूर्णांकों का गुणा कैसे होता है। हमने पाया कि एक धनात्मक पूर्णांक का ऋणात्मक पूर्णांक से गुणा करने पर ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है तथा ऋणात्मक पूर्णांक को ऋणात्मक पूर्णांक से गुणा करने पर गुणनफल के रूप में धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।
5. पूर्णांक गुणन के अन्तर्गत कुछ गुण दर्शाते है –
   (i) पूर्णांक गुणन के अन्तर्गत संवृत होते हैं। यदि a तथा b पूर्णांक हैं तो a x b भी पूर्णांक होंगे।
   (ii) पूर्णांकों के लिए गुणन क्रम विनिमेय होता है। यदि a तथा b पूर्णांक है तो a x b = b x a
   (iii) गुणन के अन्तर्गत पूर्णांक 1, तत्समक है, अर्थात् किसी भी पूर्णांक के लिए a x 1 = 1 x a
   (iv) पूर्णांकों के लिए गुणन साहचर्य होता है, अर्थात् किन्हीं तीन पूर्णांकों के लिए
   (a x b) x c = a x (b x c)
6. योग एवं गुणन के लिए पूर्णांक वितरण गुण दर्शाते हैं। अर्थात् किन्हीं तीन पूर्णांकों a, b तथा c के लिए
   a x (b + c) = a x b + a x c
7. योग एवं गुणन के अन्तर्गत क्रम विनिमेयता, सहचारिता एवं वितरण गुण हमारे परिकलन को आसान बनाते हैं।
8. हमने यह भी सीखा कि पूर्णांकों का भाग कैसे होता है। हमने पाया कि (a) धनात्मक पूर्णांकों को ऋणात्मक पूर्णांक से भाग दिया जाए या ऋणात्मक पूर्णांक को धनात्मक पूर्णांक से भाग दिया जाए तो भागफल ऋणात्मक होगा। (b) एक ऋणात्मक पूर्णांक का ऋणात्मक पूर्णांक से भाग देने पर भागफल धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।
9. किसी भी पूर्णांक a के लिए, हम पाते हैं कि (i) a ÷ o परिभाषित नहीं है।
   (ii) a ÷ 1 = a है।

अध्याय 2 भिन्न एवं दशमलव संख्याएँ

2.1 आपने पिछली कक्षाओं में भिन्न और दशमलव संख्याओं के बारे में अध्ययन किया है। आप निम्न में से उचित और अनुचित भिन्न को वर्गीकृत कीजिए।

$\frac{5}{3}, \frac{6}{11}, \frac{1}{5}, \frac{3}{2}, \frac{3}{7}, \frac{11}{12}, \frac{25}{2}$

प्राप्त अनुचित भिन्नों को मिश्र भिन्नों में बदलिए।

पिछली कक्षा में आपने तुल्य भिन्न लिखना और भिन्नों को जोड़ना एवं घटाना सीख लिया है, आइए इनका दोहरान करते हैं।

उदाहरण 1 भिन्न $\frac{2}{5}$ की तीन तुल्य भिन्न लिखिए।

हल $\frac{2}{5}$ की तुल्य भिन्न $= \frac{2 \times 2}{5 \times 2} = \frac{4}{10}$ और $\frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{6}{15}$

व $\frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{8}{20}$ उत्तर $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{8}{20}$

उदाहरण 2 रमेश ने रोटी का $\frac{4}{5}$ भाग और सुरेश ने रोटी का $\frac{5}{7}$ भाग खाया। बताओ किसने अधिक रोटी खायी?

हल $\frac{4}{5}$ व $\frac{5}{7}$ में कौनसा भाग बड़ा है इसे हम तुल्य भिन्न द्वारा पता लगाते हैं।

$\frac{4}{5}$ की तुल्य भिन्न $= \frac{4 \times 7}{5 \times 7} = \frac{28}{35}$

$\frac{5}{7}$ की तुल्य भिन्न $= \frac{5 \times 5}{7 \times 5} = \frac{25}{35}$

हर 5 व 7 का ल.स.प.
$= 5 \times 7 = 35$
अर्थात् तुल्य भिन्नों का हर 35 होना चाहिए।

स्पष्ट है कि $\frac{28}{35} > \frac{25}{35}$

सरलतम रूप में

$\frac{4}{5} > \frac{5}{7}$ अर्थात् रमेश का भाग सुरेश के भाग से अधिक था।

करो और सीखो

1. $\frac{4}{7}$ की पाँच तुल्य भिन्न ज्ञात कीजिए।
2. तुलना कीजिए और (< , > , =) का प्रयोग कीजिए।

(i) $\frac{3}{4} \square \frac{3}{7}$ (ii) $\frac{2}{5} \square \frac{3}{8}$ (iii) $\frac{5}{9} \square \frac{15}{27}$

पिछली कक्षा में आपने भिन्नों का योग एवं व्यवकलन सीखा था। आइए दोहराते हैं।

उदाहरण 3 रमन का घर स्कूल से $\frac{4}{5}$ किमी दूर है और उसकी मौसी का घर स्कूल से $\frac{2}{3}$ किमी की दूरी पर है ? रमन आज स्कूल के बाद मौसी के घर जाना चाहता है? तो वह घर से स्कूल तथा वहाँ से मौसी के घर जाने में कुल कितनी दूरी तय करेगा।

हल रमन के घर की स्कूल से दूरी = $\frac{4}{5}$ किमी

मौसी के घर की स्कूल से दूरी = $\frac{2}{3}$ किमी

कुल तय दूरी = $\frac{4}{5} + \frac{2}{3}$

$= \frac{(4 \times 3) + (2 \times 5)}{15}$

हर 5 व 3 का ल.स.प. = 15

$= \frac{12 + 10}{15}$

$= \frac{22}{15}$

$= 1\frac{7}{15}$ किमी

उदाहरण 4 दिनेश प्रतिदिन स्कूल के बाद शाम को $3\frac{3}{4}$ घंटे पढ़ता है। इस समय में वह $1\frac{7}{8}$ घंटे विज्ञान और गणित विषय पढ़ता है। शेष समय दूसरे विषयों को देता है? दूसरे विषयों के अध्ययन में लगा समय ज्ञात कीजिए?

हल दिनेश के पढ़ने का कुल समय = $3\frac{3}{4}$ घंटे

विज्ञान और गणित को दिया समय = $1\frac{7}{8}$ घंटे

शेष बचा समय = $3\frac{3}{4} - 1\frac{7}{8}$

$= \frac{15}{4} - \frac{15}{8}$

$= \frac{(15 \times 2) - (15 \times 1)}{8}$

हर 4 व 8 का ल.स.प. = 8

$= \frac{30 - 15}{8}$

$= \frac{15}{8}$

$= 1\frac{7}{8}$ अर्थात् दिनेश $1\frac{7}{8}$ घण्टे दूसरे विषय पढ़ता है।

प्रश्नावली 2.1

1. नीचे दिए गए भिन्नों के पाँच – पाँच तुल्य भिन्न ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{2}{8}$ (ii) $\frac{6}{7}$ (iii) $\frac{7}{4}$ (iv) $\frac{100}{45}$

2. तुलना करने के लिए >, < व = चिह्न का प्रयोग कीजिए।

(i) $\frac{3}{7} \square \frac{2}{5}$ (ii) $\frac{6}{8} \square \frac{12}{16}$

(iii) $\frac{11}{15} \square \frac{12}{17}$ (iv) $\frac{3}{9} \square \frac{15}{40}$

3. निम्नलिखित को आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए।

(i) $\frac{1}{5}, \frac{3}{7}, \frac{7}{10}$ (ii) $\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, \frac{8}{21}$

4. हल कीजिए।

(i) $2 + \frac{3}{5}$ (ii) $4 + \frac{7}{8}$ (iii) $\frac{3}{5} + \frac{2}{7}$

(iv) $8\frac{1}{2} - 3\frac{5}{8}$ (v) $2\frac{2}{3} + 3\frac{1}{2}$ (vi) $\frac{7}{10} + \frac{2}{5} + \frac{3}{2}$

5. एक आयताकार फोटो की लम्बाई $2\frac{3}{4}$ इंच और चौड़ाई $\frac{7}{6}$ इंच है, इसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

6. शीला ने एक दुकान की पुताई करने में $3\frac{3}{5}$ घंटे का समय लिया और नीला ने ऐसी ही दुकान की पुताई $3\frac{5}{7}$ घंटे में पूरी की। दोनों में से किसने अधिक समय लिया और कितना?

7. रीना, टीना और मीना में जन्म दिन के केक का बँटवारा करते हुए $\frac{2}{5}$ भाग रीना को और $\frac{1}{3}$ भाग टीना को और शेष भाग मीना को दिया। मीना का भाग ज्ञात कीजिए।

2.2 भिन्न संख्याओं का गुणा

' आप जानते हैं कि आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौड़ाई से ज्ञात किया जाता है, परन्तु यदि लम्बाई या चौड़ाई भिन्न संख्याओं में दी गई हो तो क्षेत्रफल किस प्रकार ज्ञात करेंगे?

क्या आप इस बात से सहमत हैं कि इसके लिए हमें भिन्न संख्याओं का गुणा किस प्रकार किया जाता है, इसकी जानकारी होनी चाहिए?

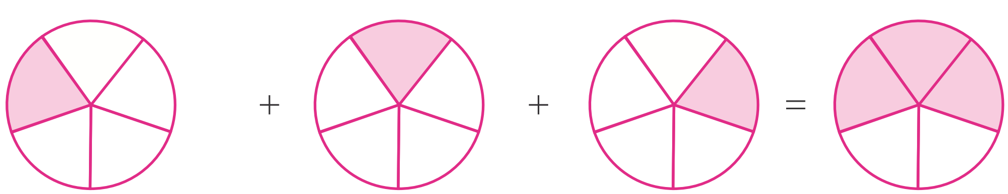
2.2.1 एक भिन्न का पूर्ण संख्या से गुणा

यदि हमें संख्या 3 का गुणा भिन्न $\frac{1}{5}$ से करना है अर्थात् $\frac{1}{5}$ को 3 बार जोड़ना है।

$$3\text{x}\frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{1+1+1}{5} = \frac{3\text{x}1}{5} = \frac{3}{5}$$

हम जानते हैं कि गुणा का अर्थ है बार–बार जोड़ना जैसे 3 x 4 = 4 + 4 + 4 = 12

आलेखीय निरूपण में

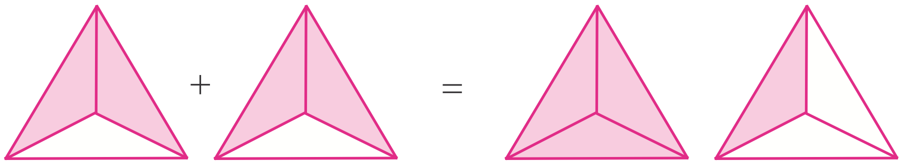


$$3\text{x}\frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3\text{x}1}{5} = \frac{3}{5}$$

इसी प्रकार

$$2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2+2}{3} = \frac{2 \times 2}{3} = \frac{4}{3} \text{ या } 1\frac{1}{3}$$

आलेखीय निरूपण में



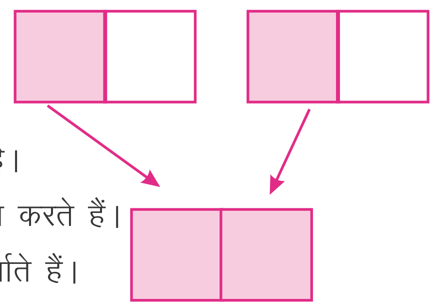
$$2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$$

इसी प्रकार

$$\frac{2}{7} \times 3 = \frac{2 \times 3}{7} = \frac{6}{7}$$

इसी प्रकार अनुचित भिन्न के लिए भी

$$4 \times \frac{5}{3} = \frac{4 \times 5}{3} = \frac{20}{3} \text{ या } 6\frac{2}{3}$$



चित्र में दो समान आयत दिए है।

प्रत्येक छायांकित टुकड़ा आयत के $\frac{1}{2}$ को निरूपित करता है।

इसलिए दोनों छायांकित टुकड़े मिलकर 2 के $\frac{1}{2}$ को निरूपित करते हैं।

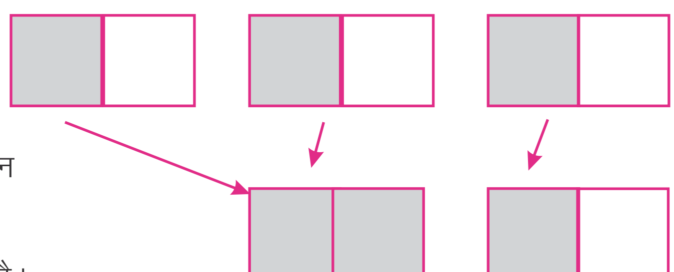
2 छायांकित $\frac{1}{2}$ भागों को संयोजित करने पर यह 1 को दर्शाते हैं।

इस प्रकार हम देखते हैं कि 2 का $\frac{1}{2}$ भाग 1 है।

हम इसे $2 \times \frac{1}{2} = 1$ के रूप में भी प्राप्त कर सकते हैं।

अतः 2 का $\frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

इसी प्रकार सामने दिए गए आयतों को देखें।



प्रत्येक छायांकित टुकड़ा

एक के $\frac{1}{2}$ भाग को दर्शाता है।

इसलिए तीन छायांकित टुकड़े मिलकर

3 के $\frac{1}{2}$ भाग को निरूपित करते है। तीन

छायांकित भागों को संयोजित करने पर

यह $1\frac{1}{2}$ अर्थात् $\frac{3}{2}$ को निरूपित करता है।

इसीलिए 3 का $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ है और $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

इस प्रकार हम देखते हैं कि **"का"** गुणन को निरूपित करता है।

करो और सीखो ◆ हल कीजिए –

(i) $3 \times \frac{8}{7}$ (ii) $\frac{9}{7} \times 6$ (iii) $4 \times \frac{7}{5}$ (iv) $4 \times \frac{4}{9}$

यदि भिन्न मिश्रित रूप में हो तो

$$7\frac{1}{2} \times 5 = \frac{15}{2} \times 5 = \frac{15 \times 5}{2} = \frac{75}{2} = 37\frac{1}{2}$$

$$3 \times 2\frac{5}{6} = 3 \times \frac{17}{6} = \frac{3 \times 17}{3 \times 2} = \frac{17}{2} = 8\frac{1}{2}$$

करो और सीखो ◆ हल कीजिए –

(i) $5 \times 2\frac{3}{7} = ?$ (ii) $1\frac{4}{9} \times 6 = ?$

अब बताओ 10 का $\frac{1}{2}$ कितना होगा ?

रमेश बोला 5 होगा,

क्योंकि 10 का $\frac{1}{2} = 10 \times \frac{1}{2} = \frac{10}{2} = 5$ ही होता है।

करो और सीखो ◆ क्या आप बता सकते हैं कि

(i) 5 का $\frac{1}{2}$ (ii) 16 का $\frac{1}{4}$ (iii) 25 का $\frac{2}{5}$, का मान क्या है?

2.2.2 भिन्नों का भिन्नों से गुणा

एक दर्जी के पास 13 मीटर कपड़ा था। कपड़े सिलने के लिए उसने पहले 13 मी में 4 समान हिस्से किए, प्रत्येक हिस्सा हुआ $\frac{13}{4}$ मीटर। अब उसने एक $\frac{13}{4}$ मीटर कपड़ा लेकर उसे बीच में से दो बराबर भागों में बाँट दिया। सोचिए इन दो टुकड़ों में से एक टुकड़ा क्या निरूपित करेगा?

यह $\frac{13}{4}$ का $\frac{1}{2}$ अर्थात् $\frac{13}{4} \times \frac{1}{2}$ को निरूपित करेगा।

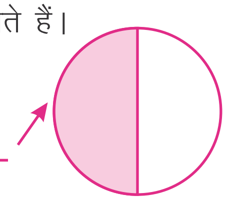
इसे हल करने से पहले एक सरल उदाहरण से भिन्नों के गुणनफल को समझते हैं।

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ से अर्थ $\frac{1}{2}$ का $\frac{1}{3}$

(i) अतः सर्वप्रथम किसी सम्पूर्ण का $\frac{1}{2}$ ज्ञात करते हैं।

चित्र में छायांकित भाग $\frac{1}{2}$ को दर्शा रहा है।

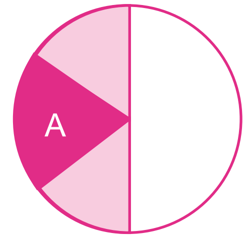
$\frac{1}{2}$



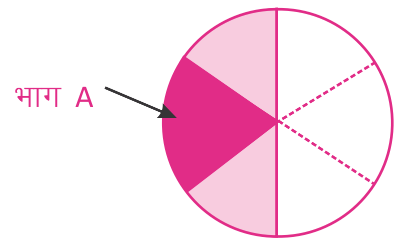
(ii) अब आप इस छायांकित भाग का $\frac{1}{3}$ कैसे ज्ञात करेंगे? इस छायांकित ($\frac{1}{2}$ भाग) को पुनः 3 समान भागों में विभाजित करके उसमें से 1 भाग लेंगे, जो कि $\frac{1}{2}$ का $\frac{1}{3}$ होगा। हम जानते हैं कि

$\frac{1}{2}$ का $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$

चित्र में भाग A, $\frac{1}{2}$ के $\frac{1}{3}$ को निरूपित करता है।



(iii) यह भाग A कुल का कितना भाग है ? इसे ज्ञात करने के लिए भाग A के समान ही अछायांकित भाग को विभाजित करेंगे। इस प्रकार पूरी इकाई के छः समान भाग हो जाते हैं और भाग A इस पूरी इकाई का छठवाँ भाग है। अतः



$$\text{भाग A} = \frac{1}{6}$$

$$\text{इस प्रकार } \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

इसे निम्न प्रकार भी ज्ञात किया जा सकता है।

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1 \times 1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$$

इसी प्रकार $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ ज्ञात कीजिए, देखिए क्या उत्तर समान है ?

अतः $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

इसी प्रकार $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$ और $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$;

करो और सीखो ◆ **ज्ञात कीजिए –**

(i) $\frac{1}{3} \times \frac{1}{7} = \frac{1 \times 1}{3 \times 7} = \boxed{\frac{}{}}$ (ii) $\frac{3}{2} \times \frac{4}{7} = \boxed{\frac{}{}} = \boxed{}$

(iii) $\frac{1}{7} \times \frac{1}{5} = \frac{1 \times 1}{7 \times 5} = \boxed{\frac{}{}}$ (iv) $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{}{}} = \boxed{}$

भिन्नों के गुणनफल का मान

आपने देखा है कि दो प्राकृत संख्याओं का गुणनफल उन दोनों संख्याओं से बड़ा या बराबर होता है। क्या भिन्नों में भी ऐसा ही होता है आइए देखते हैं ?

(i) उचित भिन्नों का गुणा

तालिका को पूर्ण कीजिए –

$\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$	$\frac{2}{15} < \frac{1}{3}$	$\frac{2}{15} < \frac{2}{5}$	गुणनफल प्रत्येक भिन्न से कम है।
$\frac{1}{5} \times \frac{2}{7} =$	....	....	....
$\frac{3}{5} \times \frac{7}{8} =$	....	....	....
$\frac{2}{5} \times \frac{4}{9} =$	....	....	....

तालिका पूरी करने के बाद क्या आप इस बात से सहमत है कि दो उचित भिन्नों के गुणनफल का मान सदैव दी गई भिन्नों से कम होता है।

(ii) आइए, अब हम दो **अनुचित (विषम) भिन्नों को गुणा** करते हैं।

$\frac{7}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{35}{6}$	$\frac{35}{6} > \frac{7}{3}$	$\frac{35}{6} > \frac{5}{2}$	गुणनफल प्रत्येक भिन्न से बडा है।
$\frac{6}{5} \times \frac{4}{3} =$	....	....	....
$\frac{9}{2} \times \frac{7}{4} =$	....	....	....
$\frac{3}{2} \times \frac{8}{7} =$	....	....	....

सारणी पूरी करने के बाद हम यह कह सकते हैं कि दो अनुचित भिन्नों का गुणनफल उनमें से प्रत्येक भिन्न से अधिक है।

करो और सीखो

(i) एक उचित और एक अनुचित भिन्न के गुणनफल के लिए इसी प्रकार सारणी बनाकर निष्कर्ष निकालिए ?

धीरज के पास 25 रूपये है, वह अपने धन का $\frac{2}{5}$ भाग कॉपी–पेन खरीदने पर खर्च करता है, तो उसने कितने रूपये खर्च किए।

जैसा कि हम जानते है 'का' गुणन को दर्शाता हैं।

इसलिए धीरज ने कॉपी–पेन खरीदने पर खर्च किए

$$25 \text{ का } \frac{2}{5} = 25 \times \frac{2}{5} = \frac{25 \times 2}{5} = 5 \times 2 = 10 \text{ रूपये}$$

अब धीरज के पास बचे रूपये $25 - 10 = 15$, यह 25 का कितना हिस्सा है ? पता लगाइए।

उदाहरण 5 30 विद्यार्थियों की एक कक्षा में कुल विद्यार्थियों में से $\frac{1}{5}$ भाग विद्यार्थी अंग्रेजी पढ़ना पसंद करते हैं, कुल संख्या का $\frac{2}{5}$ गणित पढ़ना पसंद करते हैं और शेष विज्ञान पढ़ना पसंद करते हैं

(i) कितने विद्यार्थी अंग्रेजी पढ़ना पसंद करते हैं ?

(ii) कितने विद्यार्थी गणित पढ़ना पसंद करते है ?

(iii) कुल विद्यार्थियों की संख्या का कितना हिस्सा विज्ञान पढ़ना पसंद करता है ?

हल कक्षा के कुल विद्यार्थियों की संख्या = 30

(i) इसमे से कुल संख्या का $\frac{1}{5}$ अंग्रेजी पढ़ना पसंद करता है।

अतः अंग्रेजी पढ़ना पसंद करने वाले विद्यार्थियों की संख्या = 30 का $\frac{1}{5} = 30 \times \frac{1}{5} = 6$

(ii) गणित पढ़ना पसंद करने वाले विद्यार्थियों की संख्या = 30 का $\frac{2}{5} = 30 \times \frac{2}{5} = 12$

(iii) अंग्रेजी एवं गणित पसंद करने वाले विद्यार्थियों की संख्या = 6 + 12 = 18 है।

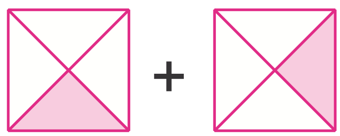
अतः विज्ञान पसंद करने वाले विद्यार्थियों की संख्या = 30 − 18 = 12 है।

अतः वांछित भिन्न = $\frac{12}{30}$ है। अर्थात् $\frac{2}{5}$ हिस्सा विज्ञान पढ़ना पसंद करता है।

प्रश्नावली 2.2

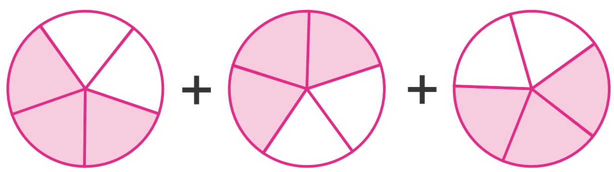
1. रेखाचित्रों से उचित गुणन का मिलान कीजिए।

(i)



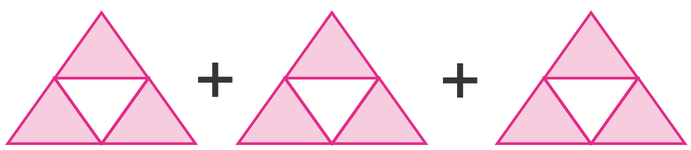
(a) $\frac{3}{4} \times 3$

(ii)



(b) $\frac{1}{4} \times 2$

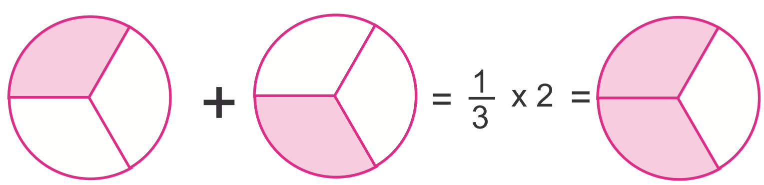
(iii)



(c) $\frac{3}{5} \times 3$

2. गुणन (बारम्बार जोड़) के रूप में निम्नलिखित चित्रों को दर्शाइए।

(i)

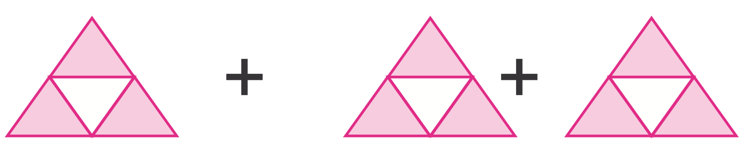


$= \frac{1}{3} \times 2 =$ ... = ...

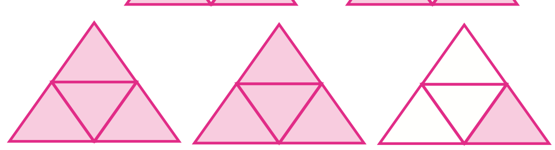
(ii)

= .... = ...

(iii)



= .... =



= ....

3. गुणा करके सरलतम रूप में लिखिए।

(i) $8 \times \frac{3}{5}$ (ii) $\frac{2}{3} \times 4$ (iii) $\frac{5}{2} \times 6$ (iv) $15 \times \frac{3}{5}$ (v) $20 \times \frac{2}{3}$

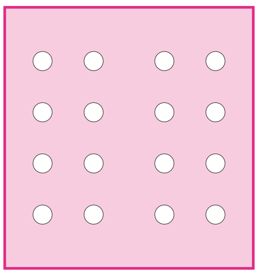
(vi) $18 \times \frac{1}{9}$ (vii) $2\frac{2}{3} \times \frac{6}{7}$ (viii) $12 \times \frac{5}{3}$ (ix) $\frac{3}{8} \times \frac{6}{4}$ (x) $\frac{4}{5} \times \frac{12}{7}$

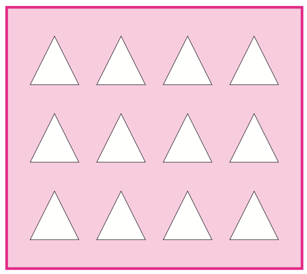
4. छायांकित कीजिए।

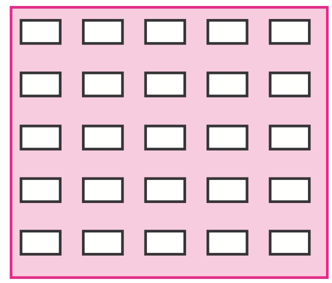
(i) बॉक्स (a) में वृत्तों की संख्या के $\frac{1}{2}$ भाग को रंगिए।

(ii) बॉक्स (b) में त्रिभुजों की संख्या के $\frac{2}{3}$ भाग को रंगिए।

(iii) बॉक्स (c) में चोकोर आकारों की संख्या के $\frac{1}{5}$ भाग को रंगिए।


(a)


(b)


(c)

5. निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए।

(i) 27 का $\frac{1}{3}$ (ii) 18 का $\frac{1}{3}$ (iii) 50 का $\frac{1}{5}$ (iv) 24 का $\frac{3}{4}$ (v) 32 का $\frac{5}{4}$ (vi) 28 का $\frac{3}{7}$

6. ज्ञात कीजिए।

(i) 4 का $1\frac{3}{5}$ (ii) $5\frac{1}{5}$ का $\frac{2}{3}$ (iii) $3\frac{2}{5}$ का $\frac{8}{17}$ (iv) $9\frac{2}{3}$ का $\frac{3}{8}$ (v) $\frac{3}{5}$ का $\frac{1}{5}$ (vi) $\frac{3}{10}$ का $\frac{1}{7}$

7. निम्नलिखित भिन्नों का गुणा कीजिए।

(i) $3\frac{4}{5} \times \frac{1}{4}$ (ii) $\frac{3}{2} \times 6\frac{2}{5}$ (iii) $3\frac{4}{7} \times \frac{3}{5}$ (iv) $3\frac{2}{5} \times 4\frac{3}{8}$

8. कौन बड़ा है ?

(i) $\frac{3}{4}$ का $\frac{2}{5}$ अथवा $\frac{5}{8}$ का $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{6}{7}$ का $\frac{1}{2}$ अथवा $\frac{3}{7}$ का $\frac{2}{3}$

9. मनीषा घर से 15 लीटर दूध से भरा केन लेकर निकली। उसने कंचन के यहाँ $\frac{2}{5}$ भाग दूध दिया और भावना के घर $\frac{1}{5}$ भाग दूध दिया और शेष दूध होटल पर बेच दिया, तो बताइए कि–

(i) कंचन के घर कितने लीटर दूध दिया।

(ii) भावना के घर कितने लीटर दूध दिया।

(iii) कितने लीटर दूध मनीषा ने होटल पर बेचा।

10. स्वतंत्रता दिवस पर पीटी प्रदर्शन में 7 बच्चों में प्रत्येक को $\frac{3}{4}$ मीटर की दूरी छोड़ते हुए खड़ा किया गया, तो बताइए पहले और आखरी बच्चे के बीच में दूरी कितनी है ?

11. राहुल एक पेन्टिंग पर रोजाना $2\frac{3}{4}$ घंटे काम करता है यदि वह उसे पूरा करने में 8 दिन लगाता है तो बताइए। उसने कुल कितने घंटे काम किया।

12. एक कार एक लीटर पेट्रोल में $23\frac{1}{5}$ किमी दूरी तय करती है तो $2\frac{3}{4}$ लीटर पेट्रोल में कितनी किमी चल पाएगी।

13. (i) $\boxed{}$ में संख्या लिखिए, ताकि $\frac{3}{4} \times \boxed{} = \frac{6}{40}$

(ii) $\boxed{}$ में प्राप्त संख्या का सरलतम रूप ....है।

14. (i) $\boxed{}$ में संख्या लिखिए, ताकि $\boxed{} \times \frac{5}{8} = \frac{10}{24}$

(ii) $\boxed{}$ में प्राप्त संख्या का सरलतम रूप ....है।

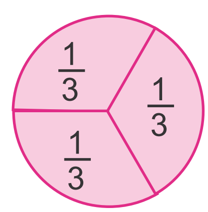
2.3 भिन्न संख्या का भाग

सुमित के पास 8 सेमी लम्बी कागज की एक पट्टी है। वह इस पट्टी को 2 सेमी लम्बी छोटी पट्टियों में काटता हैं। आप जानते है कि वह $8 \div 2 = 4$ पट्टी प्राप्त करेगा। यदि वह 8 सेमी लम्बी पट्टी से $\frac{3}{2}$ सेमी लम्बाई वाली छोटी पट्टियाँ काटता है अब उसको कितनी छोटी पट्टियाँ प्राप्त होती है? वह $8 \div \frac{3}{2}$ पट्टियाँ प्राप्त करेगा। इसी प्रकार $\frac{15}{4}$ सेमी लम्बी पट्टी को $\frac{3}{2}$ सेमी लम्बाई वाली छोटी पट्टियों में काटा जा सकता है। जिससे हमें $\frac{15}{4} \div \frac{3}{2}$ टुकड़े प्राप्त होंगे।

अतः हमें इन स्थितियों में पूर्ण से भिन्न व भिन्न से भिन्न में भाग देने की आवश्यकता पड़ती है। आइए इसे कैसे करना है? समझते हैं।

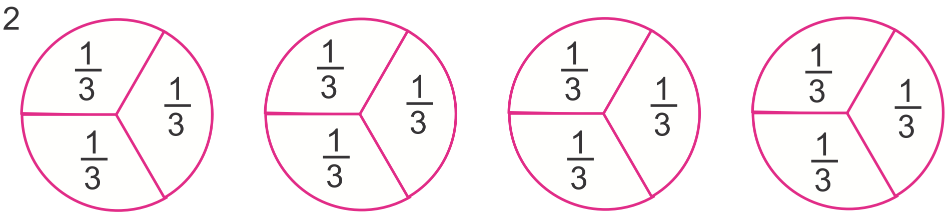
2.3.1 पूर्ण संख्या में भिन्न का भाग

जैसे $1 \div \frac{1}{3}$ ज्ञात करते हैं। इसका अर्थ है 1 में $\frac{1}{3}$ कितनी बार है। आपको इस चित्र में कितने $\frac{1}{3}$ भाग दिखाई दे रहे हैं।



1 में ऐसे $\frac{1}{3}$ के तीन भाग है अतः $1 \div \frac{1}{3} = 3$

इसी प्रकार $4 \div \frac{1}{3} = 4$ संपूर्ण में से प्रत्येक को समान $\frac{1}{3}$ भागों में बाँटने पर, $\frac{1}{3}$ भागों की संख्या = 12



अर्थात् $4 \div \frac{1}{3} = 12$ साथ ही $4 \div \frac{1}{3} = 4 \times \frac{3}{1} = 12$

इसी प्रकार चित्रों द्वारा आप $2 \div \frac{1}{5}$ व $5 \div \frac{1}{2}$ ज्ञात कीजिए।

2.3.2 भिन्नों का व्युत्क्रम

$\frac{1}{3}$ के अंश व हर को परस्पर बदलने पर $\frac{3}{1}$ प्राप्त होता है। इसी प्रकार आप $\frac{1}{5}$ और $\frac{2}{3}$ के अंश व हर को परस्पर बदलिए।

$\frac{1}{3} \text{x} \frac{3}{1} = 1$, $\frac{1}{5} \text{x} \frac{5}{1} = \text{..............}$, $\frac{2}{3} \text{x} \frac{3}{2} = \text{..............}$

ऐसी शून्येत्तर ($\neq 0$) संख्याएँ जिनका परस्पर गुणनफल 1 है, एक दूसरे के व्युत्क्रम कहलाते हैं।

आपने देखा है कि

$$1 \div \frac{1}{3} = 1\text{x}\frac{3}{1} = 1\text{x} \left(\frac{1}{3} \text{ का व्युत्क्रम}\right)$$

$$4 \div \frac{1}{3} = 4\text{x}\frac{3}{1} = 4\text{x} \left(\frac{1}{3} \text{ का व्युत्क्रम}\right)$$

$$5 \div 1\frac{1}{2} = 5 \div \frac{3}{2} = 5\text{x}\frac{2}{3} = 5\text{x} \left(\frac{3}{2} \text{ का व्युत्क्रम}\right)$$

$$2 \div \frac{3}{4} = 2\text{....................} = \text{......................}$$

इस प्रकार **किसी पूर्ण संख्या को एक भिन्न से भाग करने के लिए उस पूर्ण संख्या को उस भिन्न के व्युत्क्रम से गुणा कर देते हैं।**

करो और सीखो ◆ **हल कीजिए–**

(i) $5 \div \frac{2}{3}$ (ii) $7 \div \frac{3}{4}$ (iii) $6 \div \frac{1}{5}$

2.3.3 पूर्ण संख्या से भिन्न का भाग

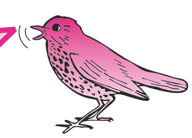
$\frac{3}{5} \div 4$ का मान क्या होगा ?

इसे हम निम्न प्रकार से भी लिख सकते हैं।

$$\frac{3}{5} \div \frac{4}{1} = \frac{3}{5} \text{x} \frac{1}{4} = \frac{3}{5} \text{x} \left(\frac{4}{1} \text{ का व्युत्क्रम}\right)$$

$= \frac{3}{20}$ होगा।

इसी प्रकार $3\frac{2}{3} \div 5 = \frac{11}{3} \div \frac{5}{1} = \frac{11}{3} \text{ x } \frac{1}{5} = \frac{11}{15}$ उत्तर



किसी भी संख्या में 1 का भाग देने पर वही संख्या प्राप्त होती है।

करो और सीखो ◆ **रिक्त स्थान भरिए–**

(i) $2\frac{3}{5} \div 2 = \frac{13}{5} \div 2 = \text{..................}$ (ii) $\frac{8}{3} \div 5 = \text{.....................} = \text{.....................}$

(iii) $2\frac{2}{3} \div 3 = \text{.................} = \text{...................}$

2.3.4 एक भिन्न से दूसरी भिन्न का भाग

$$\frac{1}{2} \div \frac{3}{5} = \frac{1}{2} \text{x} \left(\frac{3}{5} \text{ का व्युत्क्रम}\right)$$

$= \frac{1}{2} \text{x} \frac{5}{3} = \frac{5}{6}$ उत्तर

इसी प्रकार

$2\frac{1}{3} \div 1\frac{1}{4} = \frac{7}{3} \div \frac{5}{4} = ?$

करो और सीखो हल कीजिए–

(i) $\frac{3}{5} \div \frac{1}{2}$ (ii) $2\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$ (iii) $5\frac{1}{6} \div \frac{9}{2}$

प्रश्नावली 2.3

1. ज्ञात कीजिए।

(i) $12 \div \frac{2}{3}$ (ii) $5 \div 3\frac{4}{7}$ (iii) $3 \div 1\frac{1}{3}$

(iv) $4 \div \frac{8}{3}$ (v) $6 \div \frac{2}{3}$ (vi) $15 \div \frac{5}{7}$

2. निम्नलिखित भिन्नों में से प्रत्येक का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{3}{7}$ (ii) $\frac{1}{8}$ (iii) $\frac{12}{7}$ (iv) $\frac{5}{8}$ (v) $\frac{9}{7}$

3. ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{3}{7} \div 2$ (ii) $4\frac{3}{7} \div 7$ (iii) $\frac{6}{13} \div 5$

(iv) $3\frac{1}{2} \div 4$ (v) $\frac{6}{5} \div 3$ (vi) $\frac{7}{3} \div 4$

4. ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{7}{3} \div \frac{8}{7}$ (ii) $2\frac{1}{5} \div \frac{3}{5}$ (iii) $\frac{2}{5} \div 1\frac{1}{2}$

(iv) $3\frac{1}{5} \div 1\frac{1}{5}$ (v) $3\frac{1}{5} \div 2\frac{1}{3}$ (vi) $\frac{3}{5} \div \frac{5}{7}$

5. 6 रोटियों में से प्रत्येक रोटी को $\frac{1}{4}$ के टुकड़ों में बाँटने पर रोटी के $\frac{1}{4}$ भागों की संख्या कितनी होगी?

6. $11\frac{1}{2}$ सेमी लम्बी रिबन में से $\frac{1}{2}$ सेमी लम्बे कितने टुकड़े काटे जा सकते हैं ?

2.4 दशमलव संख्याओं का पुनरावलोकन

आपने पिछली कक्षाओं में दशमलव संख्याओं के बारे में अध्ययन किया है। चलिए उसका दोहरान करते हैं। निम्न संख्याओं को आप कैसे पढ़ेंगे।

(i) 24.2 = चौबीस दशमलव दो

(ii) 2.04 = दो दशमलव शून्य चार

(iii) 325.52 = ...

(iv) 56.32 = ...

निम्न सारणी को देखिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

सैकड़ा (100)	दहाई (10)	इकाई (1)	दशांश $\left(\frac{1}{10}\right)$	शतांश $\left(\frac{1}{100}\right)$	सहस्त्रांश $\left(\frac{1}{1000}\right)$	संख्या
4	2	1	2	5	8	421.258
6	0	8	5	0	7	608.507
-------	0	3	2	1	0	303.210
8	-------	6	-------	7	0	876.170
7	8	---------	---------	3	--------	784.035
0	1	2	3	4	5	-------------

इन संख्याओं को हम विस्तारित रूप में इस प्रकार भी लिख सकते हैं –

$421.258 = 4 \times 100 + 2 \times 10 + 1 \times 1 + 2\times\frac{1}{10} + 5\times\frac{1}{100} + 8\times\frac{1}{1000}$

इसी प्रकार ऊपर दी गई सारणी की शेष संख्याओं को लिखिए।

$5\times\frac{1}{100} = \frac{5}{100}$ दी गई संख्या में 5 का स्थानीय मान कहलाता है।

2.4.1 दशमलव संख्याओं की तुलना, जोड़ एवं घटाव

शहर A की, शहर B से दूरी 38.750 किमी. है और शहर C से दूरी 38.075 किमी.है, शहर A की कौनसे शहर से दूरी अधिक है ?

(i) दशमलव के बाईं ओर की संख्या समान है अतः हम दशमलव के दाईं ओर के अंकों की तुलना करते हैं।

(ii) दशांश स्थान से शुरू करते हुए दशमलव बिन्दु के दाईं तरफ के अंकों की तुलना करने पर हम पाते हैं 7 > 0 अतः 38.750 > 38.075 होगी।

अतः शहर A की शहर B से दूरी अधिक है।

करो और सीखो ◆ **कौनसी संख्या छोटी है ?**

(i) 35.37 और 35.07 (ii) 262.327 और 262.372

मुद्रा, लम्बाई और भार आदि की छोटी इकाई को बड़ी इकाई में परिवर्तित करने के लिए हम दशमलव का प्रयोग करते हैं। उदाहरणतः

24 ग्राम $= \frac{27}{1000}$ किग्रा = 0.027 किग्रा

550 पैसे $= \frac{550}{100}$ रूपये = 5.50 रूपये

1 मी. 25 सेमी = 1 मी. + $\frac{25}{100}$ मी. = 1.25 मी.

120 मीटर $= \frac{120}{1000}$ किमी = ...किमी

1 किग्रा = 1000 ग्राम
1 रूपये = 100 पैसे
1 मीटर = 100 सेमी
1 किमी = 1000 मीटर

उदाहरण 6 घीसू ने एक टोकरी में 12 किग्रा 400 ग्राम अमरूद और एक अन्य टोकरी में 6 किग्रा 750 ग्राम जामुन रखे हैं। शहर ले जाते समय उसे कुल कितना वजन उठाना पड़ेगा?

हल टोकरी में अमरूद का वजन = 12 किग्रा 400 ग्राम = 12.400 किग्रा

टोकरी में जामुन का वजन = 6 किग्रा 750 ग्राम = 6.750 किग्रा

कुल वजन = 19.150 किग्रा उत्तर

उदाहरण 7 दुर्गा और विमला ने सलवार सूट बनवाने के लिए 5 मी 25 सेमी कपड़ा खरीदा। यदि दुर्गा के सूट बनाने में 2 मी 75 सेमी कपड़े की जरूरत पड़ी तो बताइए विमला के सूट के लिए कितना कपड़ा बचा ?

हल कुल खरीदा गया कपड़ा = 5 मी 25 सेमी = 5.25 मीटर

दुर्गा के सूट में काम आया = 2 मी 75 सेमी = 2.75 मीटर

विमला के लिए बचा कपड़ा = 5.25 − 2.75 = 2.50 मीटर

प्रश्नावली 2.4

1. तुलना कीजिए कौन बड़ा है ?

   (i) 0.7 और 0.07 (ii) 2.03 और 2.30 (iii) 7 और 0.7

   (iv) 1.35 और 1.49 (v) 3.507 और 3.570 (vi) 85.2 और 85.02

2. निम्नलिखित छोटी इकाईयों को बड़ी इकाईयों में बदलिए।

   (i) 7 पैसे को रूपये में (ii) 800 ग्राम को किग्रा में (iii) 75 मीटर को किमी में

   (iv) 3470 मीटर को किमी में (v) 7 किग्रा 7 ग्राम को किग्रा में

   (vi) 47 किमी 75 मीटर को किमी में

3. निम्नलिखित दशमलव को विस्तारित रूप में लिखिए।

   (i) 25.03 (ii) 2.503 (iii) 205.3 (iv) 2.053

4. निम्नलिखित संख्याओं में 3 का स्थानीयमान ज्ञात कीजिए।

   (i) 34.82 (ii) 643.45 (iii) 547.03 (iv) 24.203

5. पारस के पिताजी सब्जी मण्डी से 7 किग्रा 250 ग्राम हरी मिर्च, 15 किग्रा 750 ग्राम टमाटर और 950 ग्राम धनिया लाए तो बताइए, वे कुल कितने किलोग्राम सब्जी लाए ?

6. भावना के बैंक खाते में ब्याज के 37.25 रूपये जमा हुए और अनिता के बैक खाते में ब्याज के 25.50 रूपये जमा हुए। बताइए किसे अधिक ब्याज मिला और कितना अधिक ?

7. 48 किमी से 42.7 किमी कितना कम है ?

8. 24.57 और 36.3 के योग में क्या जोड़ा जाए कि 70 प्राप्त हो ?

2.4.2 दशमलव संख्याओं का गुणन

मनोज ने अपनी गाड़ी में 2.5 लीटर पेट्रोल भरवाया, यदि पेट्रोल की कीमत 66.25 रूपये प्रति लीटर है तो मनोज को पेट्रोल के लिए कितना भुगतान करना होगा ?

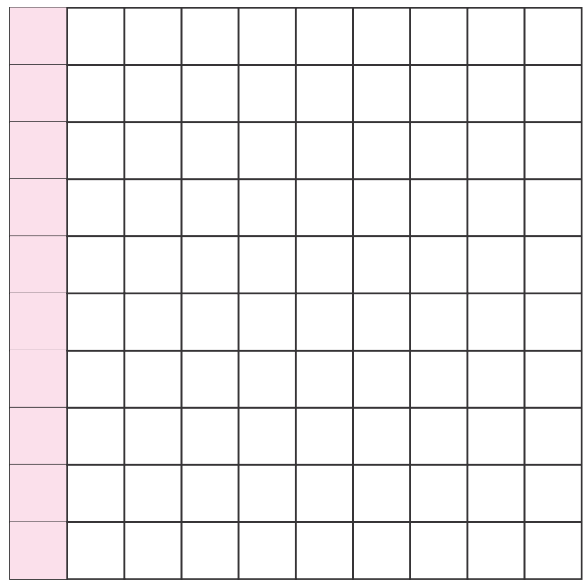
यहाँ 66.25 व 2.5 दोनों ही दशमलव संख्याएँ है। इस प्रकार कई परिस्थितियों में हमें दशमलव संख्याओं को गुणा करने की आवश्यकता पड़ती है। आइए अब हम दो दशमलव संख्याओं के गुणन को सीखते हैं। सर्वप्रथम 0.1 x 0.1 का मान ज्ञात करते हैं।

हम जानते हैं। $0.1 \times 0.1 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1 \times 1}{100} = \frac{1}{100} = 0.01$

आइए इसका चित्र निरूपण देखते हैं।

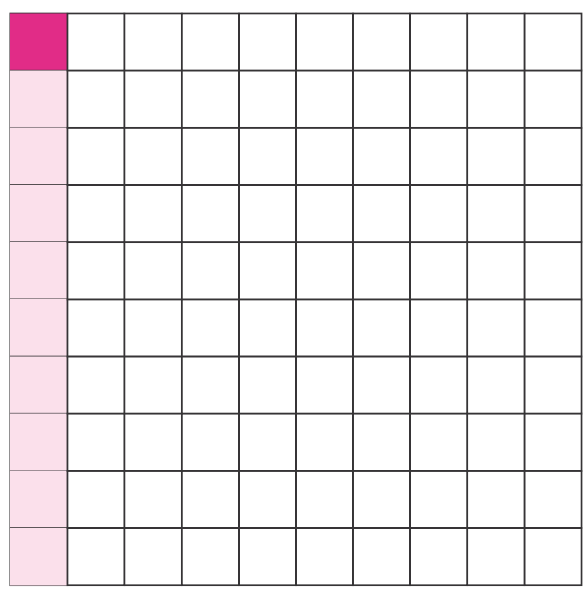
$$0.1 \times 0.1 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$$
$$= \frac{1}{10} \text{ का } \frac{1}{10}$$

अतः पहले हम $\frac{1}{10}$ को चित्र में दर्शाते हैं।



$\frac{1}{10}$

अब हम $\frac{1}{10}$ का $\frac{1}{10}$ अतः रंगे गए भाग के 10, हिस्से कर एक हिस्से को दर्शाते हैं।



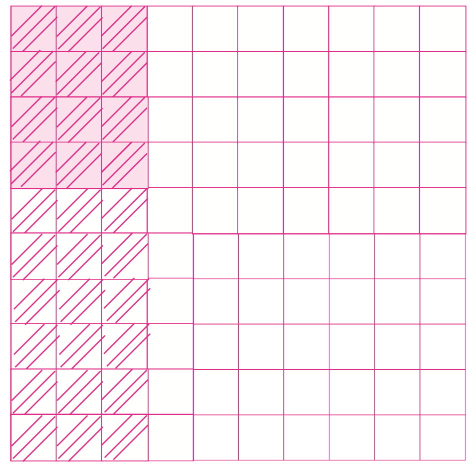
$\frac{1}{10}$ का $\frac{1}{10}$

अतः $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ या $\frac{1}{10}$ का $\frac{1}{10}$ कुल इकाई के $\frac{1}{100}$ को दर्शाता है जिसे .01 भी लिखते है।

अतः $0.1 \times 0.1 = 0.01$

इसी प्रकार $0.3 \times 0.4 = \frac{3}{10} \times \frac{4}{10}$

या $\frac{3}{10}$ का $\frac{4}{10}$



$\frac{3}{10} \times \frac{4}{10}$ का चित्र द्वारा निरूपण करने पर छायांकित भाग कुल 100 छोटे खाने में से 12 खाने को दर्शाता है अतः

$\frac{3}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{12}{100}$ या $0.3 \times 0.4 = 0.12$

इसे इस प्रकार भी किया जा सकता है 0.3 x 0.4 के लिए पहले 03 x 04 = 12 प्राप्त कर लेते हैं, उसके बाद गुणा होने वाली संख्याओं में दशमलव के बाद के अंक गिनकर प्राप्त परिणाम (जैसे 12) में दाईं और से उतने ही अंक छोड़कर दशमलव लगा दिया जाता है अर्थात् 0.12 प्राप्त होगा।

इसी प्रकार 1.4 x 2 के लिए 14 x 2 = 28 प्राप्त करेंगे और उसके बाद दशमलव के बाद के अंक गिनकर परिणाम के दाईं और से उतने ही अंक छोड़कर दशमलव लगाएँ। अर्थात् 2.8 प्राप्त होगा।

करो और सीखो ◆ **मान ज्ञात कीजिए–**

(i) 2.3 x 3.5 (ii) 3.7 x 5 (iii) 2.4 x 7.35

उदाहरण 8 गणेशी प्रतिदिन 7.5 किग्रा गेहूँ साफ करती है। दस दिन में वो कितने गेहूँ साफ कर लेगी?

हल गणेशी एक दिन में गेंहूँ साफ करती है = 7.5 किग्रा

10 दिन में गेहूँ साफ करेगी = 7.5 x 10

= 75.0 किग्रा उत्तर

उदाहरण 9 एक आयताकार फोटो फ्रेम की लम्बाई 2.25 मीटर और चौड़ाई 1.5 मीटर है, उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल आयताकार फ्रेम की लम्बाई = 2.25 मीटर

फ्रेम की चौड़ाई = 1.5 मीटर

फ्रेम का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौड़ाई

= 2.25 x 1.5

= 3.375 वर्ग मीटर उत्तर

इसे भी समझिए –

(i) 1.52 x 10 (ii) 1.52 x 100 (iii) 1.52 x 1000

हल (i) जैसा हमने पहले भी किया था उसी प्रकार

152 x 10 = 1520

अब दशमलव के बाद के अंक गिनकर

1.52 x 10 = 15.20

(ii) ठीक इसी प्रकार

152 x 100 = 15200

दशमलव के बाद के अंक गिनकर

1.52 x 100 = 152.00

(iii) इसी प्रकार

152 x 1000 = 152000

1.52 x 1000 =............... इसमें दशमलव स्वयं लगाइए।

किसी दशमलव संख्या को 10, या 100 या 1000 से गुणा करने पर परिणाम में दशमलव उतने ही बार दाईं और खिसक जाता है जितने 10, या 100 या 1000 में शून्य है।

उपर्युक्त के परिणामों से क्या निष्कर्ष निकाला जा सकता है। क्या आप ▢ में बताए गए पैटर्न से सन्तुष्ट हैं ? चर्चा कीजिए।

प्रश्नावली 2.5

1. ज्ञात कीजिए ।

; (i) 7 x 5.4 (ii) 80.1 x 2 (iii) 0.08 x 5

(iv) 3 x 0.86 (v) 312.05 x 4 (vi) 6.08 x 8

2. ज्ञात कीजिए।

(i) 3.72 x 10 (ii) 0.37 x 10 (iii) 0.5 x 10

(iv) 1.08 x 100 (v) 73.8 x 10 (vi) 0.06 x 100

(vii) 47.03 x 1000 (viii) 0.03 x 1000 (ix) 42.7 x 1000

3. ज्ञात कीजिए।

(i) 4.2 x 3.5 (ii) 6.25 x 0.5 (iii) 11.2 x 0.15

(iv) 0.08 x 0.5 (v) 101.01 x 0.01 (vi) 20.05 x 4.8

4. एक आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी लम्बाई 6.4 सेमी और चौड़ाई 3.2 सेमी है ?
5. एक कार 1 लीटर पेट्रोल में 25.17 किलोमीटर चलती है तो 10.5 लीटर में कितना चल पाएगी ?
6. प्रकाश प्रतिमाह राजू को 2.500 किलोग्राम घी बेचता है। 10 माह में प्रकाश राजू को कुल कितना घी बेच चुका होगा ?
7. एक समबाहु त्रिभुज की एक भुजा 4.5 सेमी है तो उसका परिमाप ज्ञात कीजिए।
8. दीपिका सब्जी मण्डी से 16.50 रू. प्रति किलोग्राम के थोक भाव से टमाटर का एक कैरेट (बक्सा) खरीदती है। यदि इस कैरेट के टमाटरों का वजन 22.5 किलोग्राम निकलता है, तो थोक विक्रेता को दीपिका कितने रूपये चुकाएगी ?

2.5 दशमलव संख्याओं का भाग

शकुन्तला अपने घर में सजावट के लिए रंगीन पट्टियाँ खरीद कर लाई है, जिनमें से प्रत्येक की लम्बाई 8.5 सेमी है इन पट्टियों से वह सजावट के लिए 1.7 सेमी लम्बाई के टुकड़े काटना चाहती है। एक पट्टी से कितने टुकड़े प्राप्त किए जा सकेंगे ?

इसके लिए $8.5 \div 1.7$ प्राप्त करना होगा। आइए सरल उदाहरणों से दशमलव संख्याओं का भाग किस प्रकार किया जाता है, जानने की कोशिश करते हैं।

2.5.1 दशमलव भिन्न में पूर्ण संख्या से भाग

$8.4 \div 2$ ज्ञात करते हैं। हम जानते हैं कि 8.4 को $\frac{84}{10}$ के रूप में लिखा जा सकता है क्योंकि 8.4 का विस्तारित रूप $(8 \times 1 + 4 \times \frac{1}{10})$ में लिखा जाता है। अतः

$$8.4 \div 2 = \frac{84}{10} \div 2$$

$$= \frac{84}{10} \div \frac{2}{1}$$

भिन्नों के भाग में हमने सीखा था भाग के लिए 2 के व्युत्क्रम से गुणा करना होगा।

$$= \frac{84}{10} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{84 \times 1}{10 \times 2}$$

$$= \frac{42}{10} = 4.2$$

$$4.2 = 4 \times 1 + 2 \times \frac{1}{10}$$

$$4.2 = \frac{42}{10}$$

इसे भी समझिए –

(i) $45.32 \div 10$ (ii) $45.32 \div 100$ (iii) $73.25 \div 1000$

हल (i) $45.32 \div 10$

$$= \frac{4532}{100} \div \frac{10}{1}$$

$$= \frac{4532}{100} \times \frac{1}{10}$$

$(\frac{10}{1}$ का व्युत्क्रम $= \frac{1}{10})$

$$= \frac{4532}{1000} = 4.532$$

(ii) $45.32 \div 100$

$$= \frac{4532}{100} \div \frac{100}{1}$$

$$= \frac{4532}{100} \times \frac{1}{100}$$

$$= \frac{4532}{10000}$$

$$= 0.4532$$

(iii) $73.25 \div 1000$

$$= \frac{7325}{100} \div \frac{1000}{1}$$

$$= \frac{7325}{100} \times \frac{1}{1000}$$

$$= \frac{7325}{100000}$$

$$= 0.07325$$

क्या आपको 10, 100 व 1000 से दशमलव संख्याओं में भाग देने पर दशमलव के स्थान पर आए बदलाव में कोई नियम दिखता है ?

आपने ठीक पहचाना, संख्या एवं भागफल के अंक एक जैसे हैं परंतु **भागफल में दशमलव बिन्दु बाईं तरफ उतने ही स्थानों से विस्थापित हो जाता है जितने 1 के साथ शून्य होते हैं।**

करो और सीखो ◆ दी गई दशमलव संख्याओं में 10, 100 एवं 1000 से भाग दीजिए।
(i) 132.4 (iii) 1.03 (ii) 40.033 (iv) 4.321

2.5.2 किसी पूर्ण संख्या में दशमलव भिन्न से भाग

$32 \div 0.4$ पर विचार कीजिए

$$32 \div 0.4 = 32 \div \frac{4}{10} = 32 \times \frac{10}{4}$$

$\left(\frac{4}{10}\right.$ का व्युत्क्रम $= \left.\frac{10}{4}\right)$

$$= 32 \times \frac{10}{4}$$

$$= \frac{(4 \times 8) \times 10}{4} = 8 \times 10 = 80 \text{ उत्तर}$$

इसी प्रकार $7 \div 1.6 = 7 \div \frac{16}{10} = 7 \times \frac{10}{16}$

$$= 7 \times \frac{5}{8} = \frac{35}{8} = 4.375$$

करो और सीखो ◆ हल कीजिए–
(i) $6 \div 1.2$ (ii) $9 \div 4.5$ (iii) $48 \div 0.8$

2.5.3 किसी दशमलव संख्या में दशमलव संख्या से भाग

$32 \div 0.5$ पर विचार कीजिए

$$32 \div 0.5 = \frac{325}{100} \times \frac{5}{10}$$

$$= \frac{325}{100} \times \frac{10}{5} = \frac{325 \times 10}{100 \times 5} = \frac{65}{10} = 6.5 \text{ उत्तर}$$

इसी प्रकार

$$37.8 \div 0.14 = \frac{378}{10} \div \frac{14}{100} = \frac{378}{10} \times \frac{100}{14}$$

$$= \frac{378 \times 100}{10 \times 14} = 27 \times 10 = 270$$ उत्तर

करो और सीखो ◆ **हल कीजिए–**

(i) $7.75 \div 0.25$ (ii) $5.6 \div 1.4$ (iii) $42.8 \div 0.02$

अन्य रोचक विधि

$$2.73 \div 1.3 = \frac{2.73}{1.3}$$

$$= \frac{2.73}{1.30}$$

$$= \frac{273}{130}$$

$$= \frac{21}{10} = 2.1$$ उत्तर (उभयनिष्ठ गुणनखण्ड 13 छोड़ने पर)

$2.73 \div 1.3$ को $\frac{2.73}{1.3}$ लिखा जा सकता है।

दशमलव के बाद अंक समान करने के लिए 0 लगाए जा सकते हैं। और फिर दशमलव हटाया जा सकता है।

प्रश्नावली 2.6

1. ज्ञात कीजिए।

   (i) $0.8 \div 4$ (ii) $0.42 \div 7$ (iii) $3.96 \div 6$ (iv) $842.4 \div 4$

   (v) $14.49 \div 7$ (vi) $36 \div 0.2$ (vii) $7 \div 3.5$ (viii) $0.09 \div 3$

2. ज्ञात कीजिए।

   (i) $4.2 \div 10$ (ii) $98.6 \div 10$ (iii) $0.2 \div 10$

   (iv) $143.2 \div 100$ (v) $86 \div 100$ (vi) $8.05 \div 100$

   (vii) $44.32 \div 100$ (viii) $1.3 \div 1000$ (ix) $0.06 \div 1000$

3. ज्ञात कीजिए।

   (i) $1.2 \div 0.3$ (ii) $3.64 \div 0.4$ (iii) $9.6 \div 1.6$

   (iv) $1.25 \div 2.5$ (v) $30.75 \div 1.5$ (vi) $4.08 \div 1.2$

   (vii) $30.94 \div 0.7$ (viii) $76.5 \div 0.15$ (ix) $7.75 \div 0.25$

4. एक स्कूटर 5 लीटर पेट्रोल में 212.5 किमी चल जाता है, तो एक लीटर पेट्रोल में कितनी दूरी तय करेगा ?

5. गोपाल, नारायण और कृष्णा के घर की स्कूल से दूरियाँ क्रमशः 1.5 किमी, 0.7 किमी और 1.4 किमी है, तीनों दूरियों का औसत ज्ञात कीजिए। $\left(\text{औसत} = \frac{\text{राशियों का योग}}{\text{राशियों की संख्या}}\right)$

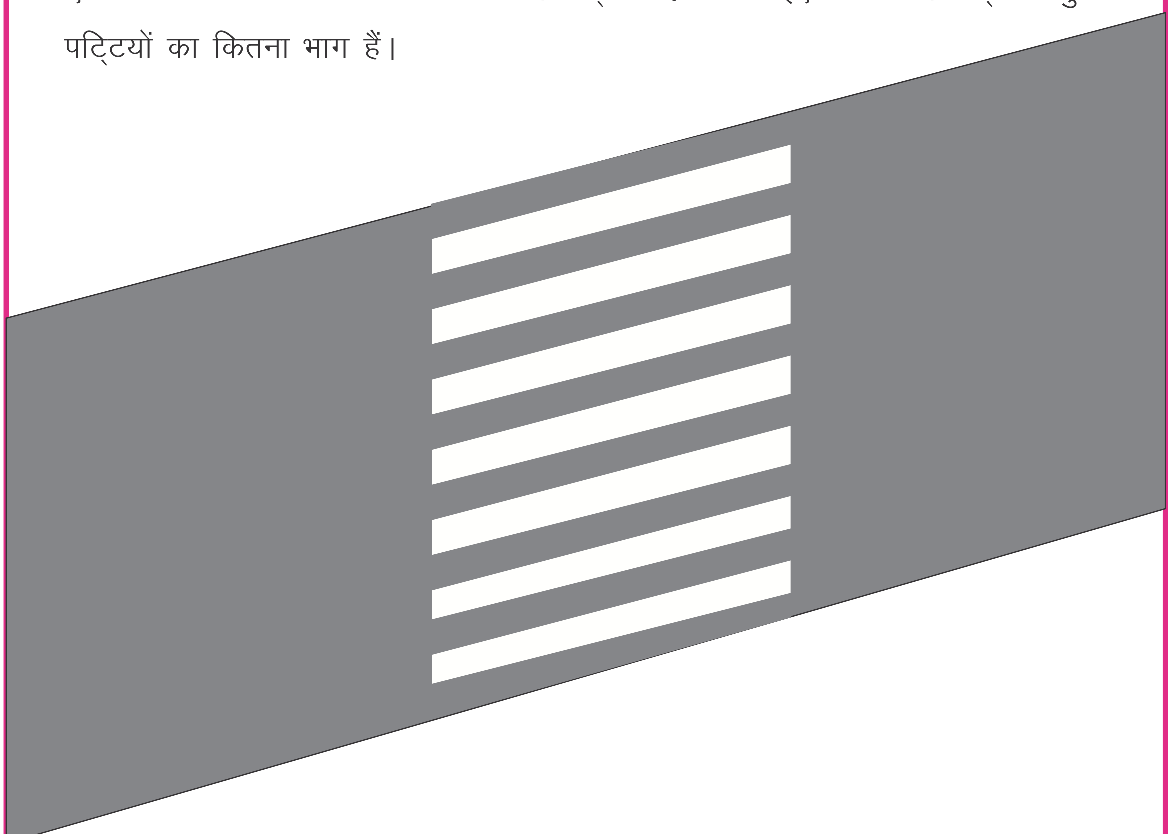
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

6. एक कार 2.2 घण्टे में 89.1 किमी दूरी तय करती है, तो कार द्वारा 1 घण्टे में तय दूरी ज्ञात कीजिए।
7. एक वर्ग का परिमाप 44.08 मीटर है तो उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
8. एक आयत का क्षेत्रफल 93.6 वर्ग मीटर है और चौड़ाई 3.6 मी. है,तो आयत का परिमाप ज्ञात कीजिए।

सड़क सुरक्षा

पैदल सड़क पार करने के लिए पदयात्रियों को जेब्रा रेखाओं (जेब्रालाईन) का प्रयोग करना चाहिए, इससे पदयात्रियों के दुर्घटनाग्रस्त होने की संभावना कम हो जाती है। जेब्रा रेखाएँ सड़क पर बनाई गई आयताकार पट्टियाँ होती है। जहाँ वाहन चालक वाहन को रोक कर धीमी गति से आगे बढता है। साथ ही चौराहों पर लाल लाईट के समय पैदल यात्री सड़क पार करने के लिए भी उपयोग करते हैं।

1. एक जेब्रा क्रोसिंग में 8 काली व 7 सफेद पट्टियाँ है तो बताइए कि सफेद पट्टियाँ कुल पट्टियों का कितना भाग हैं।



2. किसी दिन 100 लोगों ने एक जेब्रा क्रोसिंग से सड़क पार की जिसमें 20 पुरुष, 30 महिलाएँ, 10 छोटे बच्चे और 40 विद्यार्थी थे इन सभी आँकडों को दशमलव में दर्शाइए।

हमने सीखा

1. इस अध्याय में हमने भिन्नों एवं दशमलवों पर गुणन एवं भाग की संक्रियाओं का अध्ययन किया है।

2. भिन्नों का गुणनफल $= \dfrac{\text{अंशों का गुणनफल}}{\text{हर का गुणनफल}}$

3. दो उचित भिन्नों का गुणनफल गुणा किए गए प्रत्येक भिन्न से छोटा होता हैं। उचित तथा अनुचित भिन्नों का गुणनफल गुणा किए उचित भिन्न से अधिक होता है। दो अनुचित भिन्नों का गुणनफल गुणा किए गए प्रत्येक भिन्न से बड़ा होता है।
4. एक भिन्न के अंश और हर को आपस में बदल देने से व्युत्क्रम भिन्न प्राप्त होता है।
5. हमने सीखा कि दो भिन्नों का भाजन किस प्रकार किया जाता है।
   (i) एक वर्ग संख्या को भिन्न से भाजन करने का तात्पर्य है कि पूर्ण संख्या को भिन्न के व्युत्क्रम से गुणा करना।
   (ii) एक भिन्न को पूर्ण संख्या से भाजन करने का तात्पर्य है कि भिन्न को पूर्ण संख्या के व्युत्क्रम से गुणा करना।
   (iii) एक भिन्न को दूसरे भिन्न से भाजन करने का तात्पर्य है कि भिन्न को दूसरे भिन्न के व्युत्क्रम से गुणा करना।
6. जब किन्हीं दो दशमलव संख्याओं का गुणा किया जाता है तो सर्वप्रथम हम उन्हें पूर्ण संख्याओं को तरह ही गुणा करते हैं। इसके बाद गुणा होने वाली संख्याओं के दशमलव के दाहिनी ओर से अंकों को गिन कर प्राप्त गुणनफल संख्या के दाहिनी और से कुल उतने ही अंकों के बाद दशमलव लगा देते हैं।
7. दशमलव संख्या से 10,100,1000 का गुणा करते समय हम जितने शून्य वाली संख्या से गुणा करते हैं। उतना ही आगे दशमलव बिन्दु बढाया जाता है।
8. हमने दशमलव संख्याओं के भाजन को भी सीखा है।

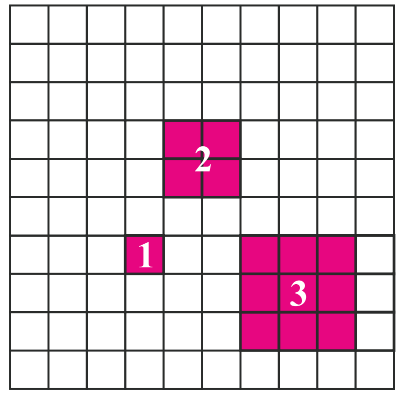
(i) दो दशमलव संख्याओं के भाजन करने के लिए दोनों संख्याओं में दशमलव के बाद अंकों की संख्या समान कर दशमलव को हटा सकते हैं तथा उसके बाद सामान्य रीति से भाग देते हैं।

(ii) दशमलव संख्या को 10,100,1000 से भाजन के लिए दशमलव बिन्दु से जितने शून्य होते है उतनी बार दशमलव से बाईं और बढ़ते हैं।

अध्याय 3

वर्ग एवं वर्गमूल

3.1 सोनू तथा दीनू वर्ग शीट पर वर्ग बना रहे हैं तथा उनका क्षेत्रफल वर्ग गिनकर लिख रहे हैं।



एक इकाई भुजा के वर्ग (वर्ग–1) का क्षेत्रफल= 1 वर्ग इकाई

दो इकाई भुजा के वर्ग (वर्ग–2) का क्षेत्रफल = 4 वर्ग इकाई

तीन इकाई भुजा के (वर्ग–3) का क्षेत्रफल = 9 वर्ग इकाई

आप भी वर्ग शीट पर 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 इकाई के वर्ग बनाइए व उनका क्षेत्रफल इकाई वर्गों को गिनकर ज्ञात कीजिए। नीचे दी गई सारणी को पूरा कीजिए –

वर्ग की भुजा	1	2	3	4	5	6					
वर्ग का क्षेत्रफल	1	4	9								

तालिका 3.1

संख्याएँ 1, 4, 9, 16, 25, ... और इसी प्रकार की संख्याओं में क्या विशेष है?

चूंकि इन्हें $1 = 1 \times 1 = 1^2$; $4 = 2 \times 2 = 2^2$; $9 = 3 \times 3 = 3^2$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। अतः हम पाते हैं कि इन संख्याओं को, एक संख्या को उसी से गुणा करके प्राप्त किया जाता है। इस प्रकार की संख्याओं 1, 4, 9, 16, ... को **वर्ग संख्याएँ** कहते हैं।

व्यापक रूप में $s = r^2$ है तो s एक वर्ग संख्या है। क्या 24 एक वर्ग संख्या है?

निम्न संख्याओं एवं उनके वर्गों के बारे में विचार कीजिए एवं रिक्त स्थानों को भरिए।

संख्याएँ	वर्ग
1	1 × 1 = 1
2	2 × 2 = 4
3	3 × 3 = 9
4	4 × 4 = 16
5	5 × 5 = 25
6	....
7	....
8	....
9	....
10	

तालिका 3.2

उपर्युक्त तालिका में आप पाएँगे कि 1 से 100 के बीच मात्र 10 संख्याएँ ही वर्ग संख्याएँ हैं, शेष संख्याएँ वर्ग संख्या नहीं हैं।

संख्याएँ 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, एवं 100 वर्ग संख्याएँ हैं तथा इन्हें पूर्ण वर्ग संख्याएँ भी कहते हैं।

करो और सीखो दी गई संख्याओं के बीच की पूर्ण वर्ग संख्या लिखिए।

(i) 20 व 30 (ii) 40 व 50

3.2 वर्ग संख्याओं के गुणधर्म

नीचे 1 से 20 तक की संख्याओं की वर्ग संख्याओं को दिखाया गया है–

संख्याएँ	वर्ग	संख्याएँ	वर्ग
1	1	11	121
2	4	12	144
3	9	13	169
4	16	14	196
5	25	15	225
6	36	16	256
7	49	17	289
8	64	18	324
9	81	19	361
10	100	20	400

तालिका 3.3

उक्त तालिका में वर्ग संख्याओं के इकाई स्थान के अंकों को समूह A के रूप में नीचे लिखिए।

A = { 0, 1, 4, ... }

0 से 9 के बीच के जो अंक समूह A में नहीं आए हैं उन्हें समूह B में लिखिए –

B = { 2, 3, ... }

आप समूह A तथा समूह B की संख्याओं के आधार पर यह कह सकते हैं कि संख्याएँ जिनके इकाई का अंक 2, 3, 7, 8 हो वे वर्ग संख्याएँ नहीं हो सकती हैं।

करो और सीखो

(1) इकाई के अंक के आधार पर यह बताइए निम्न में से कौन–कौन सी संख्याएँ पूर्ण वर्ग संख्या नहीं हो सकती है?

(i) 2304 (ii) 402 (iii) 3003 (iv) 100 (v) 1008

(2) ऐसी तीन संख्याएँ बताइए जिनमें आप निश्चयपूर्वक कह सकते हैं कि वह पूर्ण वर्ग संख्याएँ नहीं है।

(i) .... (ii) .... (iii) ....

तालिका 3.3 में दी गई सम एवं विषम संख्याओं के पूर्ण वर्ग किस प्रकार के हैं ?

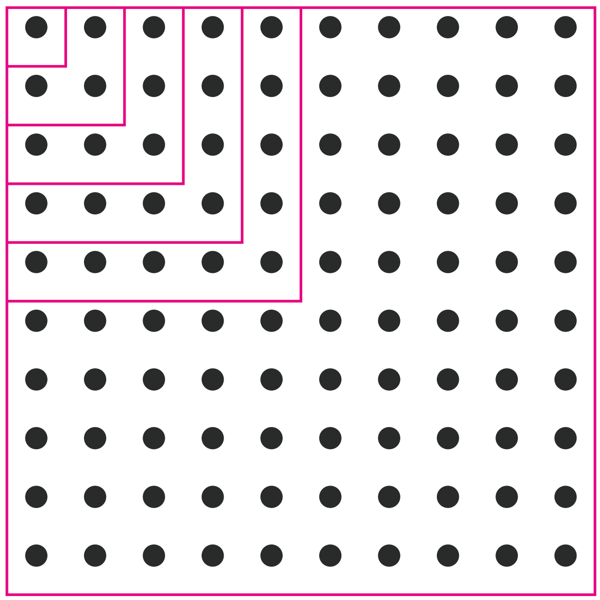
विषम संख्याओं का पूर्ण वर्ग –सम / विषम

सम संख्याओं का पूर्ण वर्ग –सम / विषम

उक्त गतिविधि से हम यह कह सकते हैं कि **सभी सम संख्याओं के वर्ग सम संख्या तथा विषम संख्याओं के वर्ग विषम संख्या ही प्राप्त होती है।**

1. वर्ग संख्याओं के रोचक प्रतिरूप

(i)



चित्र में एक कोने से प्रारम्भ करते हुए विभिन्न आकार के वर्ग बनाए गए हैं। इन वर्गों को ध्यान से देखिए तथा बिन्दुओं की संख्याएँ लिखिए –

पहला वर्ग	1	=	1	=	1^2
दूसरा वर्ग	1+3	=	4	=	2^2
तीसरा वर्ग	1+3+5	=	9	=	3^2
चौथा वर्ग	1+3+5+7	=	....	=	....
पाँचवा वर्ग	1+3+5+7+9	=	....	=	....
छठा वर्ग	....	=	....	=	....
सातवाँ वर्ग	....	=	....	=	....

हमने देखा कि पहला वर्ग = पहली विषम संख्या = 1^2

दूसरा वर्ग = पहली दो विषम संख्याओं का योग = 2^2

तीसरा वर्ग = पहली तीन विषम संख्याओं का योग = 3^2

इसी तरह आगे बढ़ने पर प्रथम आठ विषम संख्याओं का योग = 8^2 = 64 होगा।

2. 1, 11, 111, ... की वर्ग संख्याओं को देखें।

$1^2=1$

$11^2=121$

$111^2=12321$

$1111^2=1234321$

$11111^2=$.........................

$111111^2=$.........................

3. दो क्रमागत संख्याएँ लिखिए, जैसे 4 व 5

उनके वर्ग करें $4^2 = 16$, $5^2 = 25$

वर्गों का अन्तर $25 - 16 = 9$

संख्याओं का योग $4 + 5 = 9$

ऐसी कुछ और क्रमागत संख्याएँ लिखिए।

आप पाएँगे कि क्रमागत संख्याओं के वर्गों का अन्तर = संख्याओं का योग

4. पाइथागोरियन त्रिक $3^2 + 4^2$

$9 + 16 = 25 = (5)^2$

$6^2 + 8^2$

$36 + 64 = 100 = (10)^2$

आप देखेंगे कि हर उदाहरण में संख्याओं की एक तिकड़ी है प्रत्येक तिकड़ी में बड़ी संख्या का वर्ग शेष दोनों संख्याओं के वर्गों के योग के बराबर है।

इस प्रकार की संख्याएँ **पाइथागोरियन त्रिक** कहलाती है।

ऊपर दिए गए उदाहरण में 3, 4, 5, और 6, 8,10 पाइथोगोरियन त्रिक है।

उदाहरण 1 जाँच कीजिए 9, 40, 41 पाइथोगोरियन त्रिक हैं अथवा नहीं ?

हल $(9)^2 + (40)^2$

$= 81 + 1600$

$= 1681 = (41)^2$

अतः $(9)^2 + (40)^2 = (41)^2$ है अर्थात् 9, 40 व 41 एक पाइथोगोरियन त्रिक है।

प्रश्नावली 3.1

1. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गों के इकाई के अंक क्या होंगे?

(i) 24 (ii) 17 (iii) 100 (iv) 55 (v) 111

(vi) 1023 (vii) 5678 (viii) 12796 (ix) 2412

2. नीचे दी गई संख्याओं का वर्ग ज्ञात कीजिए।

(i) 18 (ii) 11 (iii) 107 (iv) 15 (v) 200 (vi) 27

3. निम्न में से कौन–कौन सी संख्याओं का वर्ग सम संख्या होगा।

(i) 235 (ii) 396 (iii) 5508

(iv) 2001 (v) 82003 (vi) 10224

4. बिना संक्रिया किए निम्न का योग ज्ञात कीजिए ।

(i) 1 + 3 + 5 + 7

(ii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13

(iii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19

5. संख्या 64 को आठ विषम संख्याओं के योग के रूप में लिखिए।

6. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गों के बीच में कितनी संख्याएँ है?

(i) 10 व 11 (ii) 17 व 18 (iii) 30 व 31

7. जाँच कीजिए कि दी गई तीन संख्याएँ पाइथागोरियन त्रिक है अथवा नहीं।

(i) 9, 12, 15 (ii) 7, 11, 13 (iii) 10, 24, 26

3.3 वर्गमूल

निम्न संख्याओं के वर्गों पर ध्यान दीजिए–

$(4)^2 = 4 \times 4 = 16$

$(5)^2 = 5 \times 5 = 25$

$(6)^2 = 6 \times 6 = 36$

उपर्युक्त उदाहरणों में हम देखते हैं कि 4 का वर्ग 16 है, इसके विपरीत हम कह सकते हैं कि 16 का वर्गमूल 4 है, इसी प्रकार का 5 का वर्ग 25 है, तो 25 का वर्गमूल 5 होगा। अर्थात् **वर्गमूल, वर्ग की प्रतिलोम संक्रिया है।**

वर्गमूल को " $\sqrt{\ }$ " चिह्न "करणी चिह्न" द्वारा दर्शाते हैं।

जैसे – 81 का वर्गमूल $= \sqrt{81} = 9$

करो और सीखो तालिका 3.3 देखकर बताइए कि निम्न के वर्गमूल क्या होंगे ?

(i) 49 (ii) 64 (iii) 100

हम पूर्व उदाहरणों में देख चुके है कि 'n' विषम संख्याओं का योग n^2 के बराबर होता है।

जैसे $5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$

जिस प्रकार पाँच प्रारम्भिक विषम संख्याओं को जोड़कर 5 का वर्ग ज्ञात किया जा सकता है, उसी प्रकार 25 में से विषम संख्याओं को घटाकर 25 का वर्गमूल ज्ञात कर सकते हैं, आइए देखें।

$25 - 1 = 24 \quad 24 - 3 = 21 \quad 21 - 5 = 16$

$16 - 7 = 9 \quad 9 - 9 = 0$

यहाँ 25 में से उत्तरोत्तर प्रारम्भिक पाँच विषम संख्याओं को घटाने पर शेषफल शून्य (0) प्राप्त हुआ है, इसका अर्थ हुआ कि 25 का वर्गमूल 5 है। अर्थात् $\sqrt{25} = 5$

आप भी इसी प्रकार कुछ पूर्ण वर्ग संख्याओं का इस प्रक्रिया से वर्गमूल ज्ञात करने का प्रयास कीजिए।

3.4 अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा वर्गमूल ज्ञात करना

नीचे कुछ संख्याओं तथा उनके वर्गों के गुणनखण्ड दिए गए हैं।

संख्या	संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड	वर्ग संख्या	वर्ग संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड
6	2×3	36	$2 \times 2 \times 3 \times 3$
8	$2 \times 2 \times 2$	64	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
12	$2 \times 2 \times 3$	144	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

आप पाएँगे कि संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड ही उसके वर्ग के अभाज्य गुणनखण्ड में दो बार आते हैं, जैसे 6 के अभाज्य गुणनखण्ड 2 व 3 हैं तो इसके वर्ग संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड में 2×2 तथा 3×3 आ रहे हैं।

इसके विपरीत वर्गमूल में अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या उनके वर्ग के अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या की आधी होती है।

आइए हम एक दी गई वर्ग संख्या 144 का वर्गमूल ज्ञात करते हैं।

$$\begin{array}{r|l} 2 & 144 \\ \hline 2 & 72 \\ \hline 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

हम जानते है कि 144 का अभाज्य गुणनखण्ड

$$144 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3}$$

अभाज्य गुणनखण्ड के युग्म बनाने पर हम पाते है :

$$144 = (2 \times 2 \times 3)^2$$

$$\sqrt{144} = 2 \times 2 \times 3$$

$$\sqrt{144} = 12$$

इसी तरह संख्या 192 के अभाज्य गुणनखण्ड पर ध्यान दीजिए ।

$$192 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

यहाँ सारे गुणनखण्ड युग्म में नहीं है। अतः 192 एक पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है। यदि इसे पूर्ण बनाना है तो या तो उसे 3 से गुणा करना पड़ेगा या 3 से भाग करना पड़ेगा।

$$192 \times 3 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3}$$

$$\sqrt{192 \times 3} = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$\sqrt{576} = 24$$

इसी प्रकार $\dfrac{192}{3} = \dfrac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3}{3}$

$$\sqrt{\frac{192}{3}} = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

उदाहरण 3 संख्या 6400 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए ।

हल

2	6400
2	3200
2	1600
2	800
2	400
2	200
2	100
2	50
5	25
5	5
	1

$$6400 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{5 \times 5}$$
$$\sqrt{6400} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$$
$$= 80$$

उदाहरण 4 क्या 60 एक पूर्ण वर्ग संख्या है ?

हल

2	60
2	30
3	15
5	5
	1

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

अभाज्य गुणनखण्ड में 3 और 5 युग्म में नहीं है। अतः 60 पूर्ण वर्ग संख्या नही है। जिसे यथार्थ रूप में हम इस प्रकार भी देख सकते हैं कि इसमें केवल एक शून्य है।

उदाहरण 5 क्या 1800 एक पूर्ण वर्ग संख्या है। यदि नहीं तो 1800 का सबसे छोटा गुणज प्राप्त कीजिए, जो कि पूर्ण वर्ग संख्या हो तथा नई संख्या का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि $1800 = \underline{2 \times 2} \times 2 \times \underline{3 \times 3} \times \underline{5 \times 5}$

अभाज्य गुणनखण्ड के अनुसार 2 के युग्म नहीं हैं, अतः 1800 एक पूर्ण वर्ग नहीं है। यदि 2 का एक जोड़ा और बनाते हैं तब संख्या पूर्ण वर्ग हो जाएगी। अतः 1800 का 2 से गुणा करने पर हम पाएँगे।

$$1800 \times 2 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{5 \times 5}$$

अब प्रत्येक अभाज्य गुणनखण्ड युग्म में है अतः

$1800 \times 2 = 3600$ पूर्ण वर्ग संख्या है।

$$\sqrt{3600} = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$
$$= 60$$

उदाहरण 6 सबसे छोटी वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए जो 6, 9, 15 प्रत्येक संख्या से विभाजित हो जाए।

हल इसे दो चरणों में हल करेंगे पहले 6, 9 व 15 से विभाजित संख्या के लिए ल.स. ज्ञात करेंगे तत्पश्चात् ल.स. का वह गुणज ज्ञात करेंगे जो पूर्ण वर्ग हो –

6, 9, 15 का ल.स. 2 x 3 x 3 x 5

= 90

2	6, 9, 15
3	3, 9, 15
3	1, 3, 5
5	1, 1, 5
	1, 1, 1

चूंकि 90 के गुणनखण्ड युग्मों में नहीं हैं।

अतः युग्म बनाने के लिए 2 व 5 से गुणा करना होगा।

90 × 2 x 5 = 2 x $\underline{2}$ x 3 x 3 x 5 x $\underline{5}$

अतः 900 सबसे छोटी वर्ग संख्या है, जो 6, 9, 15 से विभाजित होती है।

प्रश्नावली 3.2

1. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल में इकाई का अंक क्या हो सकता है?
   (i) 9604 (ii) 65536 (iii) 998001 (iv) 60481729
2. अनुमान लगाकर बताइए निम्नलिखित में कौन–2 सी संख्याएँ पूर्ण वर्ग संख्या नहीं हो सकती है?
   (i) 48 (ii) 81 (iii) 102 (iv) 24636
3. अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा वर्गमूल ज्ञात कीजिए।
   (i) 1296 (ii) 729 (iii) 1764 (iv) 3969 (v) 4356 (vi) 1600
4. नीचे दी गई संख्याएँ पूर्ण वर्ग संख्याएँ नहीं है। वह सबसे छोटी पूर्ण संख्या बताइए जिससे गुणा करने पर ये पूर्ण वर्ग संख्या बन जाएगी।
   (i) 252 (ii) 396 (iii) 1620
5. नीचे दी गई संख्याएँ पूर्ण वर्ग नहीं है। अभाज्य गुणनखण्ड करके पता लगाएँ कि इनमें किस संख्या का भाग दिया जाए कि यह पूर्ण वर्ग संख्या बन जाएगी ?
   (i) 1000 (ii) 867 (iii) 4375
6. एक वर्गाकार बाग में गुलाब के पौधे लगाए जाने हैं। प्रत्येक पंक्ति में पौधों की संख्या उतनी है, जितनी की पंक्तियों की संख्या। यदि बाग में 2401 पौधे लगे हों तो उसमें पंक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए।
7. वह सबसे छोटी वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए जो 4, 9 व 10 से पूर्णतः विभाजित हो।

3.5 भागफल विधि से वर्गमूल ज्ञात करना

जब संख्याएँ बहुत बड़ी हो तब अभाज्य गुणनखण्ड विधि लम्बी तथा बोझिल हो जाती है। इसके लिए हम भाग विधि का उपयोग कर वर्गमूल ज्ञात करते हैं।

उदाहरण 7 संख्या 576 का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए निम्न चरणों पर विचार कीजिए।

हल **चरण 1** इकाई स्थान से प्रारम्भ करते हुए 2–2 अंकों का जोड़ा बनाएँगे।
जैसे 576 में $5\ \overline{76}$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & \overline{5}\ \overline{76} \\ & -4 \\ \cline{2-2} & 1 \end{array}$$

चरण 2 वह सबसे बड़ी संख्या चुनिए जिसका वर्ग सबसे बाईं ओर की संख्या के बराबर अथवा छोटा हो।
अतः हमें 5 से छोटी वर्ग संख्या ढूँढ़नी है, जो कि 2 है

$$(2)^2 < 5 < (3)^2$$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & \overline{5}\ \overline{76} \\ +2 & -4 \\ \cline{2-2} 4 & 176 \end{array}$$

उस संख्या को भागफल के रूप में ऊपर तथा उसके वर्ग को 5 के नीचे लिखकर घटाएँ ।

चरण 3 पुनः शेषफल के आगे अंकों का अगला जोड़ा लिखें। जैसे भाग की संक्रिया में करते हैं। (ध्यान रहे भाग में केवल 1 अंक लिखा जाता है, जबकि वर्गमूल में जोड़ा लिखा जाता है।)

चरण 4 भाजक को उसी संख्या में जोड़कर नीचे लिखिए ।

$$\begin{array}{r|l} & 2\ 4 \\ \hline 2 & \overline{5}\ \overline{76} \\ +2 & 4 \\ \cline{2-2} 44 & 176 \\ 4 & 176 \\ \cline{2-2} & 0 \end{array}$$

चरण 5 उक्त उदाहरण में भाजक 4 के आगे रिक्त स्थान में एक अंक (0 से 9 के मध्य कोई एक) लिखना होगा जिससे हमारा भाजक (40, 41, 42, ... 49) तक हो सकता है साथ ही हमें वही अंक भागफल (0 से 9) में मिलेगा जिसे भागफल में 2 के आगे लिखेंगे। नए भाजक तथा इस अंक (0 से 9) का गुणनफल ऐसी संख्या होनी चाहिए, जो हमारे भाज्य 176 के बराबर या उससे छोटी हो।

चरण 6 इस स्थिति में 44 × 4 = 176 है। अब चूँकि शेषफल 0 है तथा दी गई संख्या में कोई अंक शेष नहीं है, अतः 576 = 24 प्राप्त होता है।

उदाहरण 8 संख्या 7056 का वर्गमूल भाग विधि से ज्ञात कीजिए।

हल **चरण 1** इकाई से प्रारम्भ करते हुए दो–दो संख्या के जोड़े बनाएँगे। $\overline{70}\ \overline{56}$

$$\begin{array}{r|l} & \\ \hline & \overline{70}\ \overline{56} \end{array}$$

चरण 2 उस सबसे बड़ी संख्या का चयन करते हैं, जिसका वर्ग 70 के बराबर अथवा उससे कम हो –

$$(8)^2 < 70 < (9)^2$$

इस संख्या को भाजक में तथा इसके वर्ग 64 को 70 के नीचे लिखते हैं।

चरण 3 भाजक 8 को पुनः 8 जोड़कर लिखा जाता है और नया भाजक 16 प्राप्त होता है।

$$\begin{array}{r|l} & 8 \\ \hline 8 & \overline{70}\ \overline{56} \\ +8 & 64 \\ \cline{1-2} 16 & 6 \end{array}$$

चरण 4 अब संख्याओं का अगला जोड़ा 56 उतारते हैं। अब हमें नया भाज्य 656 प्राप्त होता है।

$$\begin{array}{r|l} & 8 \\ \hline 8 & \overline{70}\ \overline{56} \\ +8 & 64 \\ \hline 16\_ & 6\ 56 \end{array}$$

चरण 5 पुनः भाजक (16) में रिक्त स्थान हेतु एक अंक (0–9 के मध्य) का चयन करना होगा, जो (160, 161,....169) तक हो सकती है, तथा उसे उसी अंक से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल 656 से कम अथवा उसके बराबर हो।

$$\begin{array}{r|l} & 8 \\ \hline 8 & \overline{70}\ \overline{56} \\ +8 & 64 \\ \hline 164 & 6\ 56 \\ 4 & -6\ 56 \\ \hline & 0\ 00 \end{array}$$

जो कि उक्त उदाहरण में 4 होगी, क्योंकि 164 × 4 = 656 प्राप्त होगा।

अतः 7056 = 84 प्राप्त होगा।

उदाहरण 9 एक वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल 1089 मी^{2} है तो मैदान की भुजा ज्ञात कीजिए।

हल वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल = 1089 मी^{2}

इसलिए मैदान की भुजा = $\sqrt{1089}$

अतः = $\sqrt{1089}$ = 33 मी

अतः मैदान की भुजा = 33 मी

$$\begin{array}{r|l} & 3\ 3 \\ \hline 3 & \overline{10}\ \overline{89} \\ 3 & 9 \\ \hline 63 & 1\ 89 \\ 3 & 1\ 89 \\ \hline & 0 \end{array}$$

उदाहरण 10 वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसको 1989 में से घटाने पर वह पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए तथा उस पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।

हल आइए 1989 का वर्गमूल ज्ञात करने का प्रयास करते हैं –

$$\begin{array}{r|l} & 4\ 4 \\ \hline 4 & \overline{19}\ \overline{89} \\ +4 & 16 \\ \hline 84 & 3\ 89 \\ +4 & 3\ 36 \\ \hline & 53 \end{array}$$

यहाँ हम देखते है कि 1989 पूर्ण वर्ग संख्या से 53 अधिक है।

अतः 1989 में से 53 घटाने पर हमें पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो जाएगी।

1989 – 53 = 1936

जिसका वर्ग मूल $\sqrt{1936}$ = 44 होगा।

इसी प्रकार यदि हमें वह संख्या ज्ञात करनी है जिसे 1989 में जोड़ने से पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो तो हम 44 के स्थान पर 45 के वर्ग पर विचार करेंगे जो की 45^2 = 2025 है। अतः हमें **2025** – 1989 = 36 जोड़ना होगा

उदाहरण 11 चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए, जो पूर्ण वर्ग हो।

हल हम जानते हैं कि चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या 9999 है। भाग विधि से वर्गमूल ज्ञात करने का प्रयास करते हैं। शेषफल 198 है यह दर्शाता है कि 99^2, 9999 से 198 कम हो।

अतः अभीष्ट संख्या $9999 - 198 = 9801$

$$\begin{array}{r|l} & 9\ 9 \\ \hline 9 & \overline{99}\ \overline{99} \\ +9 & 81 \\ \hline 189 & 18\ 99 \\ 9 & 17\ 01 \\ \hline & 1\ 98 \end{array}$$

3.6 दशमलव संख्या का वर्गमूल

उदाहरण 12 संख्या $\sqrt{51.84}$ पर विचार कीजिए।

हल **चरण 1** दशमलव संख्या का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए भी दो–दो अंकों के जोड़े बनाएँगे। चूँकि किसी भी दशमलव संख्या में दो भाग होते है पूर्ण भाग एवं दशमलव भाग। पूर्ण भाग में जोड़े वैसे ही बनेंगे, जैसे उपर्युक्त उदाहरणों में बनाए गए है इकाई स्थान से। परन्तु दशमलव भाग में ये जोड़े दशांश से बनेंगे अर्थात दशांश व शतांश एक जोड़ा, हजारवाँ व दस हजारवाँ एक साथ एवं इसी प्रकार आगे भी।

ऊपर के उदाहरण में $\overline{51}$ व $\overline{84}$ के जोड़े बनेंगे।

चरण 2 पूर्व की भाँति ही एक संख्या चुनेंगे, जिसका वर्ग 51 से कम या बराबर हो। $7^2 < 51 < 8^2$ इसे भाजक व भागफल दोनों में लिखेंगे।

$$\begin{array}{r|l} & 7 \\ \hline 7 & \overline{51}.\overline{84} \\ 7 & 49 \\ \hline & 284 \end{array}$$

चरण 3 7 को 7 से गुणा कर भाज्य के नीचे लिखेंगे व 7 को 7 में जोड़कर भाजक वाले कॉलम में लिखेंगे।

चरण 4 शेषफल 2 है। अगली बार नीचे की संख्या में 84 शेषफल के दाएँ लिखेंगे। जिससे 284 प्राप्त होता है। क्योंकि 84 दशमलव भाग में था, अतः भागफल में दशमलव रखेंगे।

$$\begin{array}{r|l} & 7.2 \\ \hline 7 & \overline{51}.\overline{84} \\ 7 & 49 \\ \hline 142 & 284 \\ 2 & 284 \\ \hline 144 & 0\ 00 \end{array}$$

चरण 5 अब 14 को आगे रिक्त स्थान में पूर्व की भाँति 0 से 9 के बीच की संख्या चुनेंगे। जिससे नया भाजक (140, 141, ... 149) तक बने और उसे उसी संख्या से गुणा करने पर 284 से बड़ी संख्या प्राप्त न हो।

यह हमारे भागफल को दर्शाता है।

उक्त उदाहरण में वह संख्या 2 होगी, जिससे $142 \times 2 = 284$ ।

अतः $\sqrt{51.84} = 7.2$

किस तरफ बढ़ें

संख्या 176.341 पर ध्यान दीजिए। पूर्ण संख्या और दशमलव संख्या के दोनों भागों पर बार लगाइए। अब 176 पर ध्यान दीजिए हम दशमलव के पास के इकाई स्थान से प्रारम्भ करके बाईं तरफ जाते है, प्रथम बार 76 के ऊपर और दूसरा बार 1 के ऊपर है, 0.341 के लिए हम दशमलव से प्रारम्भ करके दाईं तरफ जाते है।

पहला बार 34 के ऊपर और दूसरा बार लगाने के लिए हम 1 के बाद 0 रखते है और इस प्रकार $0.\overline{34}\ \overline{10}$ बनाते हैं।

3.7 वर्गमूल का अनुमान लगाना

(i) वर्गमूल में अंकों की संख्या

निम्न सारणी पर विचार कीजिए –

$1^2 = 1$	$99^2 = 9801$
$9^2 = 81$	$100^2 = 10000$
$10^2 = 100$	$999^2 = 9898001$

1 अंक वाली संख्या के वर्ग में कितने अंक है ? 1 अथवा 2

2 अंकों वाली संख्या के वर्ग में कितने अंक है ? 3 अथवा 4

3 अंकों वाली संख्या के वर्ग में कितने अंक है ? ....

इसके विपरित 1 अंक वाली संख्या के वर्गमूल में 1 अंक होगा। जबकि दो अंकों वाली संख्या के वर्गमूल में 1 अथवा 2 अंक होंगे। इसी प्रकार आगे भी।

करो और सीखो

बताइए निम्न संख्याओं के वर्गमूल में कितने अंक होंगे?

(i)1369 (ii)15376 (iii) 6031936

कई बार हमें दैनिक जीवन में वर्गमूल निकालने की आवश्यकता होती है।

एक विद्यालय में 350 बच्चे है स्वतंत्रता दिवस समारोह में उन्हें वर्गाकार जमावट में खड़ा करना है तथा शेष विद्यार्थी व्यवस्था देखेंगे। ऐसे में हमें पूर्ण वर्ग संख्या का अनुमान लगाने की आवश्यकता होगी। हम जानते है कि $100 < 350 < 400$ और

$\sqrt{100} = 10$ तथा $\sqrt{400} = 20$

अतः $10 < \sqrt{350} < 20$ लेकिन फिर भी हम वर्ग संख्या के करीब नहीं है। हम जानते हैं कि

$18^2 = 324$ व $19^2 = 361$

अतः $18 < \sqrt{350} < 19$

अतः $\sqrt{350}$ में हम 18 छात्रों की पक्तियाँ बनवा सकते हैं।

प्रश्नावली 3.3

1. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल भाग विधि से ज्ञात कीजिए।
   (i) 441 (ii) 576 (iii) 1225 (iv) 2916 (v) 4624 (vi) 7921
2. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल बिना गणना के ज्ञात कीजिए।
   (i) 121 (ii) 256 (iii) 4489 (iv) 60025
3. निम्नलिखित दशमलव संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए।
   (i) 6.25 (ii) 2.89 (iii) 32.49 (iv) 31.36 (v) 57.76
4. निम्न संख्याओं में क्या जोड़ा जाए कि यह पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए।
   (i) 420 (ii) 2000 (iii) 837 (iv) 3500
5. निम्न संख्याओं में से क्या घटाया जाए कि यह पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए।
   (i) 555 (ii) 252 (iii) 1650 (iv) 6410
6. एक विवाह समारोह में वर्गाकार जमावट में कुर्सियाँ लगायी जानी है। 1000 कुर्सियाँ उपलब्ध है। वर्गाकार जमावट के लिए और कितनी कुर्सियों की आवश्यकता होगी। साथ ही यह भी बताएँ, प्रत्येक पक्ति में कुल कितनी कुर्सियाँ होंगी।
7. एक वर्गाकार खेत का क्षेत्रफल 361 मी ^{2} है तो उस खेत के चारों ओर तारबंदी हेतु कितने मीटर तार की आवश्यकता होगी ?
8. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसका 2352 में भाग देने पर भागफल पूर्ण वर्ग बन जाए ?

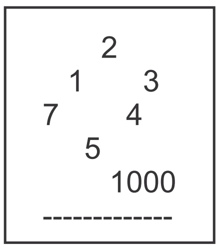
हमने सीखा

1. साधारणतया यदि एक संख्या m को n^2 से व्यक्त किया जाए (जहाँ m एवं n दोनों प्राकृत संख्याएँ हो) तो m एक वर्ग संख्या होती है। जैसे $n = 5$ एवं $m = 5^2 = 25$ ।
2. वे संख्याएँ जिनके इकाई का अंक 2, 3, 7, 8 हो वे कभी वर्ग संख्याएँ नहीं हो सकती अर्थात् सभी वर्ग संख्याओं में इकाई का अंक सदैव 0, 1, 4, 5, 6 या 9 होता है।
3. वर्ग संख्याओं के अंत में शून्यों की संख्या केवल सम होती है।
4. वर्गमूल, वर्ग की प्रतिलोम संक्रिया है।
5. एक पूर्ण वर्ग संख्या के दो पूर्ण वर्गमूल होते हैं एक धनात्मक एवं एक ऋणात्मक। धनात्मक वर्गमूल को संकेत $\sqrt{\ }$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

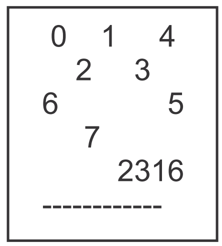
अध्याय 4

परिमेय संख्याएँ

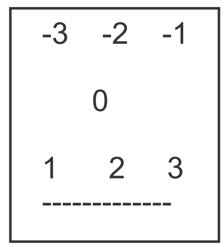
4.1 हमने आसपास की वस्तुओं को गिनने से प्रारम्भ कर संख्याओं को सीखा है। गिनने में प्रयोग की गई संख्याओं को प्राकृत संख्याएँ कहा गया। 1, 2, 3, 4, 5, ... प्राकृत संख्याओं में 0 को सम्मिलित करने पर हमें पूर्ण संख्याएँ प्राप्त हुई। इसके बाद 0, 1, 2, 3, 4, ... पूर्ण संख्याओं में प्राकृत संख्याओं के ऋणात्मक को सम्मिलित करने पर हमें पूर्णांक .... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... प्राप्त होते हैं। इस प्रकार हमने संख्या पद्धति का पूर्णांक तक विस्तार किया।



प्राकृत संख्या



पूर्ण संख्याएँ



पूर्णांक

पिछली कक्षाओं में हम भिन्नों से भी परिचित हुए हैं। इस इकाई में हम संख्या पद्धति का और आगे विस्तार करेंगे। हम परिमेय संख्याओं की अवधारणा के बारे में जानकारी, परिमेय संख्याओं का संख्या रेखा पर निरूपण, उनकी तुलना और दो परिमेय संख्याओं के बीच की परिमेय संख्याएँ ज्ञात करना सीखेंगे।

4.2 परिमेय संख्याओं की आवश्यकता

हम पढ़ चुके हैं कि विपरीत स्थितियों को व्यक्त करने के लिए पूर्णांकों का उपयोग किया जाता है।

उदाहरण 1 यदि 250 रु. के लाभ को +250 से व्यक्त किया जाए, तो 250 रु. की हानि को –250 से व्यक्त किया जाता है।

उदाहरण 2 समुद्र तल से किसी स्थान की ऊँचाई 800 मी. को हम $\frac{4}{5}$ किमी से व्यक्त करें तो समुद्र तल से 800 मी. की गहराई को $-\frac{4}{5}$ किमी से व्यक्त किया जा सकता है।

हम समझ सकते हैं कि $-\frac{4}{5}$ न तो एक पूर्णांक है और न ही एक भिन्न। ऐसी संख्याओं को परिभाषित करने के लिए हमें संख्या पद्धति को विस्तार देने की आवश्यकता है।

4.3 परिमेय संख्याएँ क्या है?

परिमेय शब्द की उत्पत्ति अनुपात से हुई है। हम जानते हैं कि अनुपात 2 : 5 को $\frac{2}{5}$ भी लिखा जा सकता है। यहाँ 2 और 5 प्राकृत संख्याएँ हैं। परन्तु $\frac{-2}{5}$ को –2 : 5 में व्यक्त नहीं किया जा सकता है। कोई भी दो पूर्णांकों p और q (जहाँ $q \neq 0$) को $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता है। परिमेय संख्याएँ इसी रूप में व्यक्त की जाती है।

एक परिमेय संख्या को ऐसी संख्या के रूप में परिभाषित किया जाता है, जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सके, जहाँ p और q पूर्णांक है तथा $q \neq 0$ है।

इस प्रकार, $\frac{3}{7}$ एक परिमेय संख्या है। यहाँ $p = 3$ और $q = 7$ है।

सोचिए और बताइए – क्या $\frac{-3}{7}$ एक परिमेय संख्या है?

4.4 भिन्न और परिमेय संख्याएँ

अलग–अलग भिन्न यथा $\frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{4}{9}, 1\frac{3}{5},$ .... इत्यादि लिखिए।

प्रत्येक की $\frac{p}{q}$ से तुलना कीजिए।

$\frac{3}{8}$ में $p = 3; q = 8$

$\frac{7}{11}$ में $p = 7; q = 11$

भिन्नों के अन्य उदाहरण लेकर उनके रूप की $\frac{p}{q}$ से तुलना कीजिए। हम पाते हैं कि प्रत्येक भिन्न का रूप $\frac{p}{q}$ जैसा है, जहाँ p और q पूर्णांक है तथा $q \neq 0$ । इससे हम कह सकते हैं कि ये सभी भिन्न परिमेय संख्याएँ हैं।

करो और सीखो

परिमेय संख्याओं को लिखिए जिनमें –

1. अंश एक ऋणात्मक पूर्णांक हो और हर एक धनात्मक पूर्णांक हो।
2. अंश एक धनात्मक पूर्णांक हो और हर एक ऋणात्मक पूर्णांक हो।
3. अंश और हर दोनों धनात्मक पूर्णांक हो।
4. अंश और हर दोनों ऋणात्मक पूर्णांक हो।

- क्या पूर्णांक भी परिमेय संख्याएँ है?

किसी भी पूर्णांक को एक परिमेय संख्या माना जा सकता है। उदाहरणार्थ पूर्णांक –3 एक परिमेय संख्या है, क्योंकि आप इसे $\frac{-3}{1}$ के रूप में लिख सकते हैं। पूर्णांक 0 को भी $0 = \frac{0}{1}$ या $\frac{0}{2}$ इत्यादि के रूप में लिखा जा सकता है। अतः 0 भी एक परिमेय संख्या है।

- शून्य एक परिमेय संख्या है।
- संख्या शून्य न तो धनात्मक परिमेय संख्या हैं, न ही ऋणात्मक परिमेय संख्या।
- परिमेय संख्याओं में पूर्णांक और भिन्न सम्मिलित है।

सोचें! क्या $\frac{-3}{-5}$ एक परिमेय संख्या है ?

सभी परिमेय संख्याएँ भिन्न नहीं होती हैं, परन्तु प्रत्येक भिन्न परिमेय संख्या होती है।

परिमेय संख्या $\frac{-2}{-9}$ भिन्न नहीं है। जबकि $\frac{-2}{-9}$ का दूसरा रूप $\frac{2}{9}$ भिन्न है।

4.5 समतुल्य परिमेय संख्याएँ

किसी परिमेय संख्या के अंश और हर को समान संख्या से गुणा करके अथवा भाग देकर इन्हें इच्छित अंश अथवा हर में बदल सकते हैं।

परिमेय संख्या $\frac{-5}{7}$ पर विचार कीजिए –

$$\frac{-5}{7}=\frac{(-5)\times 2}{7\times 2}=\frac{-10}{14}$$

$$\frac{-5}{7}=\frac{(-5)\times 3}{7\times 3}=\frac{-15}{21}$$

$$\frac{-5}{7}=\frac{(-5)\times(-2)}{7\times(-2)}=\frac{10}{-14}$$

इस प्रकार $\frac{-5}{7}=\frac{-10}{14}=\frac{-15}{21}=\frac{10}{-14}$ है।

ऐसी परिमेय संख्याएँ जो परस्पर बराबर हो, एक दूसरे के समतुल्य या तुल्य कही जाती है।

$$\frac{10}{-15}=\frac{10\div 5}{-15\div 5}=\frac{2}{-3}$$

$$\frac{10}{-15}=\frac{10\div(-5)}{(-15)\div(-5)}=\frac{-2}{3}$$

इस प्रकार $\frac{10}{-15}=\frac{2}{-3}=\frac{-2}{3}$ समतुल्य हैं।

करो और सीखो ◆ रिक्त स्थानों को भरिए –

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{\ldots\ldots}=\frac{\ldots\ldots}{12}=\frac{10}{\ldots\ldots}=\frac{\ldots\ldots}{24}$$

$$\frac{5}{7}=\frac{\ldots\ldots}{14}=\frac{25}{\ldots\ldots}=\frac{\ldots\ldots}{63}=\frac{100}{\ldots\ldots}$$

$$\frac{25}{50}=\frac{\ldots\ldots}{10}=\frac{1}{\ldots\ldots}=\frac{\ldots\ldots}{150}=\frac{250}{\ldots\ldots}$$

4.6 धनात्मक और ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ

परिमेय संख्याओं $\frac{2}{3}, \frac{3}{7}, \frac{5}{8}$ और $\frac{2}{9}$ के अंश और हर दोनों ही धनात्मक पूर्णांक हैं। ऐसी परिमेय संख्या को धनात्मक परिमेय संख्या कहते हैं।

ऐसी परिमेय संख्याएँ जिनमें अंश अथवा हर कोई एक ऋणात्मक पूर्णांक हैं, ऐसी परिमेय संख्या को ऋणात्मक परिमेय संख्या कहते हैं। जैसे – $\frac{-3}{7}, \frac{4}{-5}, -\frac{1}{3}$ आदि।

आप $\frac{-5}{-7}$ के बारे में क्या सोचते हैं?

$$\frac{-5}{-7} = \frac{5\times(-1)}{7\times(-1)} = \frac{5}{7}$$

अतः $\frac{-5}{-7}$ एक धनात्मक परिमेय संख्या है।

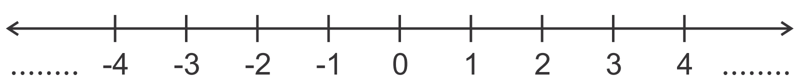
करो और सीखो

1. तीन धनात्मक परिमेय संख्याएँ लिखिए।
2. दो ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ लिखिए।
3. क्या $\frac{-15}{-1}$ एक धनात्मक परिमेय संख्या है? (उत्तर की पुष्टि में कारण बताएँ)
4. क्या –7 एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है ? (उत्तर की पुष्टि में कारण बताएँ)
5. निम्नलिखित में से कौन सी धनात्मक परिमेय संख्याएँ हैं?

   (i) $\frac{-4}{5}$ (ii) $\frac{-7}{-9}$ (iii) $1\frac{2}{3}$ (iv) $\frac{3}{-7}$ (v) $\frac{1}{3}$

4.7 एक संख्या रेखा पर परिमेय संख्याएँ

हम संख्या रेखा पर पूर्णांकों को निरूपित करना सीख चुके हैं। आइए ऐसी ही संख्या रेखा को देखें –

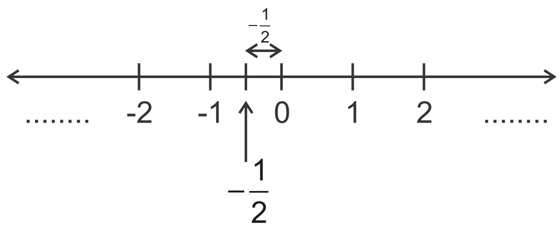


संख्या रेखा में शून्य के दाईं ओर धनात्मक पूर्णांक हैं जिन्हें '+' चिह्न से व्यक्त करते हैं। शून्य के बाईं ओर ऋणात्मक पूर्णांक हैं, जिन्हें '–' चिह्न से व्यक्त करते हैं।

पूर्व की कक्षाओं में संख्या रेखा पर भिन्नों का निरूपण कर चुके हैं।

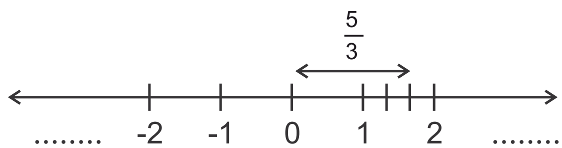
आइए अब हम संख्या रेखा पर परिमेय संख्या $-\frac{1}{2}$ को निरूपित करें।

चूंकि $-\frac{1}{2}$ एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है, इसलिए इसका स्थान 0 (शून्य) के बाईं ओर होगा। $-\frac{1}{2}$ संख्या रेखा के 0 और −1 के बीच होगा।

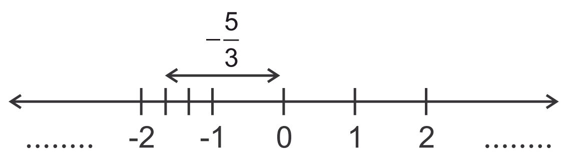


अतः 0 और −1 के बीच दो बराबर–बराबर भाग करते हैं। फिर 0 और −1 के ठीक बीच में $-\frac{1}{2}$ अंकित करते हैं।

हम जानते हैं कि $\frac{5}{3}$ को संख्या रेखा पर किस प्रकार अंकित किया जाता है। 0 के दाईं ओर 1 और 2 के बीच में तीन बराबर–बराबर भाग करते हैं और 1 के दाईं ओर से दूसरा भाग $\frac{5}{3}$ को निरूपित करता है।



आइए अब संख्या रेखा पर $\frac{-5}{3}$ को निरूपित करते हैं। यह 0 के बाईं ओर उतनी ही दूरी पर अंकित होगा, जितनी दूरी 0 और $\frac{5}{3}$ के बीच है।



करो और सीखो

निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शाइए –

(i) $-\frac{5}{4}$ (ii) $-\frac{7}{2}$ (iii) $-\frac{11}{3}$ (iv) $\frac{2}{5}$ (v) $\frac{4}{3}$

4.8 सरलतम रूप में परिमेय संख्याएँ

निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को ध्यान से देखिए –

$\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{-2}{7}, \frac{5}{8}, \frac{-9}{11}$

इन सभी परिमेय संख्याओं में –

(i) हर धनात्मक पूर्णांक है, तथा

(ii) अंश और हर के बीच में केवल 1 उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है।

ऐसी परिमेय संख्याओं को सरलतम रूप में व्यक्त की गई परिमेय संख्याएँ कहा जाता है।

प्रत्येक परिमेय संख्या को सरलतम रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरण 3 $\frac{-36}{24}$ को सरलतम रूप में व्यक्त कीजिए।

हल

$$\frac{-36}{24}=\frac{-36\div 3}{24\div 3}=\frac{-12}{8}=\frac{-12\div 4}{8\div 4}=\frac{-3}{2}$$

अथवा

$$\frac{-36}{24}=\frac{-36\div 12}{24\div 12}=\frac{-3}{2}$$

$\frac{-36}{24}$ का सरलतम रूप $\frac{-3}{2}$ है।

करो और सीखो

निम्नलिखित को सरलतम रूप में व्यक्त कीजिए –

(i) $\frac{3}{15}$ (ii) $\frac{-6}{20}$ (iii) $\frac{10}{-35}$ (iv) $\frac{-45}{30}$ (v) $\frac{18}{-45}$

4.9 परिमेय संख्याओं की तुलना

हम जानते हैं कि दो पूर्णांकों या दो भिन्नों की तुलना किस प्रकार की जाती है तथा यह भी कि इनमें कौन बड़ा है और कौन छोटा है। आइए अब हम दो परिमेय संख्या की तुलना करते हैं –

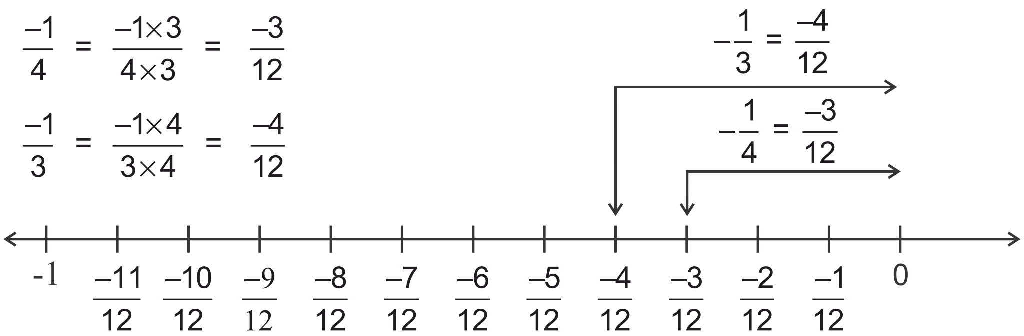
$\frac{5}{7}$ और $\frac{7}{9}$ जैसी दो धनात्मक परिमेय संख्याओं की तुलना ठीक उसी प्रकार की जा सकती है, जैसा कि हम भिन्नों की तुलना में कर चुके हैं।

आइए दो ऋणात्मक परिमेय संख्याओं $\frac{-1}{4}$ और $\frac{-1}{3}$ की तुलना संख्या रेखा पर करके देखें।

हमने पूर्णांक संख्याओं की तुलना के संदर्भ में देखा है कि संख्या रेखा पर दाईं तरफ का पूर्णांक बाईं तरफ के पूर्णांक से बड़ा होता है। उसी प्रकार $\frac{-1}{4}$ और $\frac{-1}{3}$ को संख्या रेखा पर निरूपित करके तुलना की जा सकती है। दोनों की ऐसी तुल्य परिमेय संख्या लीजिए, जिनके हर समान हो। जैसे –

$$\frac{-1}{4} = \frac{-1\times3}{4\times3} = \frac{-3}{12}$$

$$\frac{-1}{3} = \frac{-1\times4}{3\times4} = \frac{-4}{12}$$



चूंकि संख्या रेखा पर $\frac{-1}{4}$, $\frac{-1}{3}$ के दाईं तरफ है। अतः $\frac{-1}{4}$, $\frac{-1}{3}$ से बड़ा होगा।

$$-\frac{1}{4} > -\frac{1}{3}$$

जबकि भिन्नों के अध्ययन से हमने यह जाना है कि

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$$

करो और सीखो

आप भी $\frac{-3}{4}$ और $-\frac{2}{3}$ की तथा $-\frac{1}{3}$ और $-\frac{1}{5}$ की तुलना कीजिए।

ऋणात्मक परिमेय संख्याओं के युग्मों की स्थिति भी ठीक इसी प्रकार है। दो ऋणात्मक परिमेय संख्याओं की तुलना करने के लिए, हम उनकी तुलना उनके चिह्नों को छोड़ते हुए करते है और बाद में असमिका के चिह्न को उल्टा कर (बदल) देते हैं।

जैसे – $-\frac{3}{7}$ और $-\frac{5}{9}$ की तुलना करने के लिए पहले हम $\frac{3}{7}$ और $\frac{5}{9}$ की तुलना करते हैं।

$\frac{3 \times 9}{7 \times 9} = \frac{27}{63}$, $\frac{5 \times 7}{9 \times 7} = \frac{35}{63}$ अतः $\frac{27}{63} < \frac{35}{63}$

या $\frac{3}{7} < \frac{5}{9}$ इससे हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $-\frac{3}{7} > -\frac{5}{9}$ है।

करो और सीखो कौनसी परिमेय संख्या बड़ी है ?

1. $-\frac{3}{8}$ या $-\frac{2}{7}$
2. $-\frac{7}{5}$ या $-\frac{5}{3}$
3. $-\frac{5}{6}$ या $-\frac{7}{8}$

एक ऋणात्मक और धनात्मक परिमेय संख्या की तुलना सुस्पष्ट है। संख्या रेखा पर एक ऋणात्मक परिमेय संख्या शून्य के बाईं ओर स्थित होती है तथा एक धनात्मक परिमेय संख्या शून्य के दाईं ओर स्थित होती है। अतः एक ऋणात्मक परिमेय संख्या सदैव एक धनात्मक परिमेय संख्या से छोटी होती है।

इस प्रकार

$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{3}{5} < \frac{1}{5}$$

$$-\frac{9}{4} < \frac{3}{2}$$

परिमेय संख्याओं $\frac{-4}{-7}$ और $\frac{-3}{-5}$ की तुलना करने के लिए पहले उन्हें मानक रूप में बदलने के बाद तुलना करते हैं।

$\frac{-4}{-7}$ और $\frac{-3}{-5}$ का मानक रूप क्रमशः $\frac{4}{7}$ और $\frac{3}{5}$ है।

अब $\frac{4}{7} < \frac{3}{5}$

करो और सीखो

क्या $\frac{4}{-9}$ और $\frac{-20}{45}$ एक ही परिमेय संख्या को निरूपित करते है?

4.10 दो परिमेय संख्याओं के बीच की परिमेय संख्याएँ

हम जानते हैं कि 5 और 12 के बीच की पूर्णांक संख्याएँ 6, 7, 8, 9, 10, 11 है। –3 और 3 के बीच की पूर्णांक संख्याएँ –2, –1, 0, 1, 2 है। इस प्रकार दो पूर्णांकों के बीच में पूर्णांकों की संख्या सीमित होती है।

क्या यह परिमेय संख्याओं की स्थिति में भी होता है ? इसे उदाहरण द्वारा देखते हैं।

किरण ने दो परिमेय संख्याएँ $-\frac{4}{3}$ और $-\frac{1}{2}$ ली।

इन्हें समान हर वाली परिमेय संख्याओं में बदल लिया।

अतः $-\frac{4}{3} = -\frac{8}{6}$ और $-\frac{1}{2} = -\frac{3}{6}$

उसने $-\frac{8}{6}$ और $-\frac{3}{6}$ के बीच की परिमेय संख्याएँ लिखी –

$$-\frac{7}{6} < -\frac{6}{6} < -\frac{5}{6} < -\frac{4}{6}$$

इस प्रकार उसने $-\frac{4}{3}$ और $-\frac{1}{2}$ के बीच में परिमेय संख्याएँ $-\frac{7}{6}, -\frac{6}{6}, -\frac{5}{6}, -\frac{4}{6}$ ज्ञात की।

सोचें! क्या $-\frac{4}{3}$ और $-\frac{1}{2}$ के बीच में केवल परिमेय संख्याएँ $-\frac{7}{6}, -\frac{1}{1}, -\frac{5}{6}, -\frac{2}{3}$ ही हैं?

आइए देखते हैं –

$$-\frac{4}{3} = -\frac{8}{6} = -\frac{16}{12} \text{ और } -\frac{1}{2} = -\frac{3}{6} = -\frac{6}{12}$$

अब $-\frac{16}{12}$ और $-\frac{6}{12}$ के बीच की परिमेय संख्याएँ –

$$-\frac{15}{12} < -\frac{14}{12} < -\frac{13}{12} < -\frac{12}{12} < -\frac{11}{12} < -\frac{10}{12} < -\frac{9}{12} < -\frac{8}{12} < -\frac{7}{12}$$

या $-\frac{5}{4} < -\frac{7}{6} < -\frac{13}{12} < -\frac{1}{1} < -\frac{11}{12} < -\frac{5}{6} < -\frac{3}{4} < -\frac{2}{3} < -\frac{7}{12}$

इस प्रकार हम $-\frac{4}{3}$ और $-\frac{1}{2}$ के बीच पाँच और परिमेय संख्याएँ $-\frac{5}{4}, -\frac{13}{12}, -\frac{11}{12}, -\frac{3}{4}$, $-\frac{7}{12}$ ज्ञात करने में सफल हुए।

इस विधि का प्रयोग करते हुए हम दो परिमेय संख्याओं के बीच में जितनी चाहें उतनी (असीमित) परिमेय संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं।

करो और सीखो

(i) $-\frac{5}{7}$ और $-\frac{3}{8}$ के बीच में पाँच परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

(ii) $-\frac{5}{3}$ और $-\frac{8}{7}$ के बीच में पाँच परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 5 परिमेय संख्याएँ –2 और –1 के बीच की दो परिमेय संख्याएँ लिखिए।

हल सर्वप्रथम हम –2 और –1 को समान हर वाली परिमेय संख्या के रूप में लिखते हैं।

$-2 = -\frac{10}{5}$ और $-1 = -\frac{5}{5}$

अब $-\frac{10}{5}$ और $-\frac{5}{5}$ के बीच की परिमेय संख्याएँ $-\frac{9}{5} < -\frac{8}{5} < -\frac{7}{5} < -\frac{6}{5}$ हैं।

अतः –2 और –1 के बीच की दो परिमेय संख्याएँ $-\frac{8}{5}$ और $-\frac{7}{5}$ हैं।

(हम $-\frac{9}{5}$, $-\frac{8}{5}$, $-\frac{7}{5}$, $-\frac{6}{5}$ में से कोई भी दो परिमेय संख्याएँ ले सकते हैं।)

प्रश्नावली 4

1. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के समतुल्य पाँच–पाँच परिमेय संख्याएँ लिखिए।

   (i) $-\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{1}{5}$ (iii) $\frac{-5}{3}$ (iv) $\frac{4}{-9}$

2. $\frac{-5}{12}$ की तीन ऐसी समतुल्य परिमेय संख्याएँ लिखिए जिनका हर क्रमशः 60, –96 व 108 हो।

3. $\frac{-3}{7}$ की तीन ऐसी समतुल्य परिमेय संख्याएँ लिखिए जिनका अंश क्रमशः 24, –60 व 75 हो।

4. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को उनके सरलतम रूप (मानक रूप) में लिखिए।

   (i) $\frac{-18}{30}$ (ii) $\frac{44}{-72}$ (iii) $\frac{55}{22}$ (iv) $\frac{-16}{20}$

5. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए।

   (i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{7}{8}$ (iii) $\frac{-8}{3}$ (iv) $-2\frac{1}{2}$ (v) $\frac{5}{7}$

6. संकेतों >, < और = में से सही संकेत चुन कर रिक्त स्थान भरिए।

   (i) $\frac{2}{3}$ ☐ $\frac{-5}{7}$ (ii) $\frac{-1}{4}$ ☐ $\frac{1}{-3}$ (iii) $\frac{-3}{5}$ ☐ $\frac{-1}{3}$

   (iv) $\frac{2}{7}$ ☐ $\frac{1}{2}$ (v) $\frac{-1}{2}$ ☐ $\frac{1}{-2}$ (vi) $\frac{-5}{4}$ ☐ $\frac{3}{5}$

7. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के बीच पाँच परिमेय संख्याएँ लिखिए।

(i) -3 और -1 (ii) 0 और -1 (iii) $\frac{-4}{5}$ और $\frac{-5}{7}$

(iv) $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{4}$ (v) $\frac{2}{5}$ और $\frac{-4}{5}$ (vi) -2 और 0

8. निम्नलिखित प्रत्येक प्रतिरूप में तीन और परिमेय संख्याएँ लिखिए।

(i) $\frac{-2}{5}, \frac{-4}{10}, \frac{-6}{15}$, ___ , ___ , ___ (ii) $\frac{2}{-3}, \frac{4}{-6}, \frac{6}{-9}$, ___ , ___ , ___

(iii) $\frac{1}{-3}, \frac{2}{-6}, \frac{3}{-9}$, ___ , ___ , ___ (iv) $\frac{1}{-5}, \frac{2}{-10}, \frac{3}{-15}$, ___ , ___ , ___

9. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को आरोही क्रम में लिखिए।

(i) $\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{3}{4}$ (ii) $\frac{-3}{4}, \frac{-3}{7}, \frac{-3}{2}$ (iii) $\frac{-7}{11}, \frac{7}{15}, 0, -2, \frac{-2}{15}$ (iv) $\frac{2}{5}, \frac{4}{7}, \frac{1}{6}, \frac{5}{9}$

10. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को अवरोही क्रम में लिखिए।

(i) $\frac{9}{-24}, \frac{-3}{4}, \frac{5}{-12}, \frac{-7}{16}$ (ii) $\frac{-5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{-8}{9}, \frac{-11}{12}$ (iii) $\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-5}{6}, \frac{4}{-3}$ (iv) $\frac{3}{5}, \frac{-17}{-30}, \frac{-7}{10}, \frac{8}{-15}$

हमने सीखा

1. परिमेय संख्याएँ $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जाता है, यहाँ p और q पूर्णांक है तथा $q \neq 0$ ।

2. सभी भिन्न संख्याएँ एवं पूर्णांक परिमेय संख्याएँ होती है। संख्याएँ $\frac{7}{8}, \frac{-2}{3}, 5$ इत्यादि परिमेय संख्याएँ हैं।

3. यदि किसी परिमेय संख्या के अंश और हर को किसी एक ही पूर्णांक (शून्य के अतिरिक्त) से गुणा किया जाए या भाग दिया जाए, तो प्राप्त होने वाली परिमेय संख्या को समतुल्य परिमेय संख्या कहा जाता है, जैसे $\frac{5}{6} = \frac{5\times3}{6\times3} = \frac{15}{18}$

4. परिमेय संख्याओं को धनात्मक और ऋणात्मक परिमेय संख्याओं के रूप में वर्गीकृत किया जाता है। जब अंश और हर दोनों ही धनात्मक पूर्णांक हो या ऋणात्मक पूर्णांक हो, तो यह परिमेय संख्या धनात्मक परिमेय संख्या कहलाती है। जब अंश या हर में से एक ऋणात्मक पूर्णांक हो, तो वह परिमेय संख्या एक ऋणात्मक परिमेय संख्या कहलाती है। उदाहरणार्थ, $\frac{2}{3}$ एक धनात्मक परिमेय संख्या है तथा $-\frac{2}{3}$ एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है।

5. संख्या 0 एक परिमेय संख्या है, किन्तु यह न तो धनात्मक परिमेय संख्या है और न ही ऋणात्मक परिमेय संख्या।

6. दो परिमेय संख्याओं के मध्य असीमित परिमेय संख्याएँ होती हैं।

अध्याय 5

घात और घातांक

5.1 रवि ने मोहन से प्रश्न किया कि बताओ 2011 में भारत की जनसंख्या कितनी थी ? उसने उत्तर दिया लगभग 120 करोड़। रवि ने फिर प्रश्न किया सूर्य और पृथ्वी के मध्य की दूरी कितनी है ? उसने तुरन्त जवाब दिया – लगभग 15 करोड़ किमी। रवि ने फिर प्रश्न किया – प्रकाश एक सेकण्ड में लगभग कितनी दूरी तय करता है ? उसने जवाब दिया – 3 करोड़ मी.। रवि ने फिर से प्रश्न किया– अब बताओ, राजस्थान की जनसंख्या 2011 की जनगणना के अनुसार लगभग कितनी है?

मोहन ने जवाब दिया – राजस्थान की जनसंख्या 2011 में लगभग 7 करोड़ हो गयी है। अब इनको संख्या के रूप में लिखकर बताओ तो मोहन ने कहा इन संख्याओं को लिखना कठिन है। क्या इन संख्याओं को आसानी से पढ़ा, लिखा व समझा जा सकता है? हम ऐसी बड़ी संख्याओं को घात और घातांक की सहायता से आसानी से पढ़ व लिख सकते हैं। इस अध्याय में हम पूर्णांक आधार एवं घातांक पूर्ण संख्या वाली संख्याओं के बारे में अध्ययन करेंगे।

5.2 घातांक

निम्न में बार–बार दोहराए जाने वाली संख्याओं पर विचार करते हैं,

$4 + 4 + 4 + 4 + 4$, $\quad 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$, $\quad 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7$

गुणा के नियमानुसार संक्षिप्त में हम बार–बार दोहराई जाने वाली समान संख्याओं के योग को 5×4, 6×5, 8×7 के रूप में लिखते हैं।

क्या हम गुणांक विधि से दोहराई गई संख्याओं को सरलता से जान सकेंगे? निम्न संख्याओं पर विचार करते हैं।

$4 = 2 \times 2 \qquad 8 = 2 \times 2 \times 2 \qquad 16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

इन्हें इस प्रकार भी लिख सकते हैं।

$2 \times 2 = 2^2 \qquad 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \qquad 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$

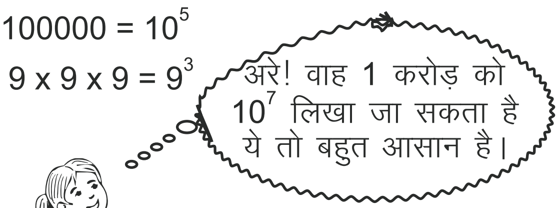
$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$

इसी प्रकार $100 = 10 \times 10 = 10^2 \qquad 10000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$

$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3 \qquad 100000 = 10^5$

इसी प्रकार $9 \times 9 = 9^2 \qquad 9 \times 9 \times 9 = 9^3$

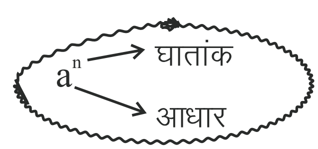
$9 \times 9 \times 9 \times$ -------------- n गुणनखण्डों तक



यहाँ 2^3 में आधार 2 तथा घात 3 है।

2^5 में 2 आधार और 5 घातांक है।

2^5 को "2 की घात 5" पढ़ते हैं।



उदाहरण 1 64 को घातांक रूप में लिखिए।

हल $64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

अतः $64 = 2^6$

उदाहरण 2 3^4 और 4^3 में कौन सी संख्या बड़ी है और क्यों?

$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$= 81$

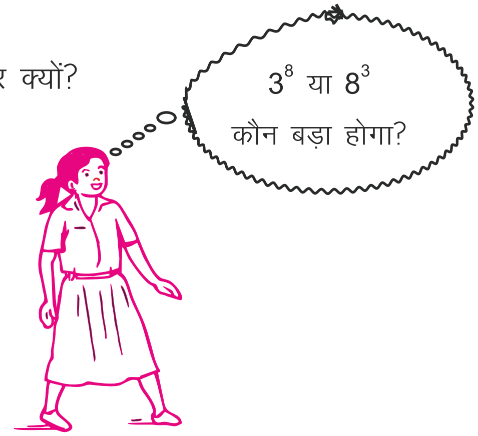
$4^3 = 4 \times 4 \times 4$

$= 64$

आप जानते हैं $81 > 64$

अतः $3^4 > 4^3$

अर्थात् 3^4 तथा 4^3 में 3^4 बड़ी संख्या है।



उदाहरण 3 निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखण्डों की घातों के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) 36 (ii) 256 (iii) 1000

(i) 36

$= 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$= 2^2 \times 3^2$

2	36
2	18
3	9
3	3
	1

(ii) 256

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^8$

2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

(iii) 1000

$= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

$= 2^3 \times 5^3$

2	1000
2	500
2	250
5	125
5	25
5	5
	1

उदाहरण 4 सरल कीजिए।

(i) 3×10^3 (ii) $5^2 \times 2^3$

हल (i) $3 \times 10^3 = 3 \times 10 \times 10 \times 10$

$= 3 \times 1000$

$= 3000$

(ii) $5^2 \times 2^3 = 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 25 \times 8$

$= 200$

उदाहरण 5 निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $(-1)^5$ (ii) $(-3)^4$

हल (i) $(-1)^5 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

(ii) $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

$= 9 \times 9 = 81$

प्रश्नावली 5.1

1. निम्नलिखित को घातांक रूप में व्यक्त कीजिए।

   (i) $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$ (ii) $3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7$

   (iii) $a \times a \times a \times b \times b$ (iv) $5 \times 5 \times t \times t \times t$

2. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक को घातांक रूप में व्यक्त कीजिए।

   (i) 32 (ii) 81 (iii) 343 (iv) 125

3. निम्नलिखित में बड़ी संख्या को पहचानिए।

   (i) 2^5 या 5^2 (ii) 3^5 या 5^3 (iii) 3^{10} या 10^3 (iv) 7^3 या 3^7

4. निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखण्डों की घातों के रूप में व्यक्त कीजिए।

   (i) 324 (ii) 625 (iii) 1080 (iv) 1800

5. सरल कीजिए।

   (i) 2×3^4 (ii) $7^3 \times 5$ (iii) $5^3 \times 2^2$ (iv) $3^2 \times 10^3$

   (v) 0×10^4

6. मान ज्ञात कीजिए।

   (i) $(-1)^3$ (ii) $(-5)^4$ (iii) $(-4)^2 \times (-2)^3$

5.3 घातांकों के नियम

नियम 1 एक ही आधार वाली घातीय संख्याओं का गुणा

उदाहरण 6 $2^3 \times 2^4$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल
$$2^3 \times 2^4 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2)$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$
$$= 2^7$$
$$2^3 \times 2^4 = 2^{(3+4)}$$
$$= 2^7$$

ध्यान दीजिए यहाँ 2^3 और 2^4 में आधार समान है और घातांकों 3 और 4 का योगफल 7 है।

उदाहरण 7 $(-5)^2 \times (-5)^3$ को हल कीजिए।

हल
$$(-5)^2 \times (-5)^3 = [(-5) \times (-5)] \times [(-5) \times (-5) \times (-5)]$$
$$= (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5)$$
$$= (-5)^5$$
$$(-5)^2 \times (-5)^3 = (-5)^{2+3}$$
$$= (-5)^5$$

हम व्यापक रूप से कह सकते हैं कि एक शून्येतर संख्या a के लिए, जहाँ m और n कोई दो घनात्मक पूर्णांक हो, तो $a^m \times a^n = a^{m+n}$

नियम 2 एक ही आधार वाली घातीय संख्याओं का भाग

आइए समान आधार परन्तु पृथक–पृथक घातों की संख्याओं का भाग करें।

उदाहरण 8 $2^7 \div 2^3$ को हल कीजिए।

हल
$$2^7 \div 2^3 = \frac{2^7}{2^3} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2}$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2$$
$$= 2^4$$

इस प्रकार $2^7 \div 2^3 = \frac{2^7}{2^3} = 2^{7-3} = 2^4$

अत: $2^7 \div 2^3 = 2^4$

उदाहरण 9 $a^4 \div a^2$ को ज्ञात कीजिए।

हल
$$a^4 \div a^2 = \frac{a^4}{a^2} = \frac{a \times a \times a \times a}{a \times a}$$

अतः $a^4 \div a^2 = \frac{a^4}{a^2} = a^{4-2} = a^2$

यदि a एक शून्येतर संख्या तथा m और n कोई दो धनात्मक पूर्णांक हों, जहाँ m>n, तो $a^m \div a^n = a^{m-n}$

पुनः देखिए

उदाहरण 10 $3^3 \div 3^7$ को सरल कीजिए।

हल $3^3 \div 3^7 = \frac{3^3}{3^7} = \frac{\cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}$

$= \frac{1}{3^4}$

अर्थात् $\frac{3^3}{3^7} = \frac{1}{3^{7-3}} = \frac{1}{3^4}$

यदि a एक शून्येतर संख्या तथा m और n कोई दो धनात्मक पूर्णांक हो, जहाँ m < n, तो

$a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$

शून्य घातांक

निम्नलिखित क्रिया को देखें।

$3^2 \div 3^2 = 3^{2-2} = 3^0$

परन्तु $3^2 \div 3^2 = \frac{3^2}{3^2} = \frac{3 \times 3}{3 \times 3} = 1$

अतः $3^0 = 1$

उपर्युक्त में $3^0 = 1$ प्राप्त हुआ है, इसी प्रकार किसी भी आधार पर घातांक 0 (शून्य) होने पर उसका मान 1 ही होता है।

यदि a एक शून्येतर संख्या है तो $a^0 = 1$

नियम 3 घातीय संख्या की घातांक

उदाहरण 11 $[(5)^3]^4$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $[(5)^3]^4 = (5^3) \times (5^3) \times (5^3) \times (5^3)$

$= 5^{3+3+3+3}$

$= 5^{(3\times4)}$

अर्थात् $[(5)^3]^4 = 5^{3\times4}$

उपर्युक्त से यह निष्कर्ष प्राप्त होता है कि

यदि a एक शून्येतर संख्या तथा m और n कोई दो धन पूर्णांक हो, तो $(a^m)^n = a^{m\times n}$

नियम 4 पृथक आधार किन्तु समान घातांक वाली संख्याओं का गुणन

उदाहरण 12 क्या आप $2^4 \times 3^4$ को सरल कर सकते है?

ध्यान दीजिए कि यहाँ पर दोनों पदों के घातांक समान है किन्तु आधार अलग हैं।

हल $2^4 \times 3^4$

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$

$= (2 \times 3)^4$

अर्थात् $2^4 \times 3^4 = (2 \times 3)^4$

उपर्युक्त उदाहरण से यह निष्कर्ष निकलता है कि

> नोट : ध्यान रहे कि
> $a^m + b^m \neq (a+b)^m$
> $a^m - b^m \neq (a-b)^m$
> जैसे
> $2^3 + 5^3 \neq (2+5)^3$
> $2^3 - 5^3 \neq (2-5)^3$

> यदि a और b कोई दो शून्येतर संख्याएँ हो तथा m एक धन पूर्णांक हो, तो
> $a^m \times b^m = (a \times b)^m$

नियम 5 पृथक आधार किन्तु समान घातांक वाली संख्याओं का भाग

उदाहरण 13 $8^5 \div 9^5$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल

$$8^5 \div 9^5 = \frac{8^5}{9^5} = \frac{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8}{9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9}$$

$$= \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9}$$

$$= \left(\frac{8}{9}\right)^5$$

अर्थात् $8^5 \div 9^5 = \dfrac{8^5}{9^5} = \left(\dfrac{8}{9}\right)^5$

> यदि a और b कोई दो शून्येतर परिमेय संख्याएँ हो तथा m एक धन पूर्णांक हो, तो
> $a^m \div b^m = \dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

प्रश्नावली 5.2

1. घातांक नियमों का प्रयोग करते हुए हल कीजिए।

(i)	$3^7 \times 3^8$	(ii)	$(4)^7 \times (4)^2$	(iii)	$a^5 \times a^4$
(iv)	$3^{15} \div 3^9$	(v)	$t^7 \div t^4$	(vi)	$(6^4 \times 6^2) \div 6^5$
(vii)	$(2^6)^3$	(viii)	$(a^5)^4$	(ix)	$5^5 \times 8^5$

(x) $a^3 \times b^3$ (xi) $7^5 \div 6^5$ (xii) $(25^3 \times 25^7) \div 25^{10}$

(xiii) $7^5 \div 7^8$ (xiv) $(9^3)^0$

2. सरल कीजिए–

(i) $\{(3^2)^3 \times 3^4\} \div 3^7$ (ii) $16^4 \div 4^2$ (iii) $\dfrac{5^7}{5^4 \times 5^3}$

(iv) $4^0 \times 5^0 \times 6^0$ (v) $\dfrac{3^9 \times a^6}{9^2 \times a^3}$ (vi) $(7^3 \times 7)^3$

(vii) $\dfrac{3^{10}}{3^5 \times 3^7}$ (viii) $\dfrac{a^9}{a^6} \times a^8$ (ix) $2^0 + 3^0 + 4^0$

3. सरल कीजिए–

(i) $\dfrac{2^3 \times 7^2 \times 13^8}{56 \times 13^7}$ (ii) $\dfrac{(3^2)^3 \times 5^3}{9^2 \times 25}$ (iii) $\dfrac{2^5 \times 10^5 \times 5}{5^4 \times 4^3}$

5.4 बड़ी संख्याओं को घातांकों में प्रकट करना

निम्नांकित को देखिए।

$$54 = \frac{54 \times 10}{10} = 5.4 \times 10^1$$

$$540 = \frac{540 \times 100}{100} = 5.4 \times 10^2$$

$$5400 = \frac{5400 \times 1000}{1000} = 5.4 \times 10^3$$

$$54000 = \frac{54000 \times 10000}{10000} = 5.4 \times 10^4$$

यहाँ हमने 54, 540, 5400, 54000 को मानक रूप (Standard form) में व्यक्त किया है।

प्रकाश का वेग 300,000,000 मी/से है इसे मानक रूप में निम्न प्रकार व्यक्त कर सकते हैं।

मानक रूप $= 3 \times 10^8$ मी./से.

जब किसी संख्या को 1.0 या 1.0 से बड़ी या 10 से छोटी एक दशमलव संख्या और 10 की घात के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाता है, तो संख्या के इस रूप को मानक रूप कहते हैं।

5.5 किसी बड़ी संख्या को मानक रूप में व्यक्त करना

आप जानते हैं कि बड़ी संख्याओं की घातांकों का प्रयोग करके सुविधाजनक रूप में व्यक्त किया जा सकता है, आइए बड़ी संख्याओं को घातांकों के प्रयोग से मानक रूप में लिखें।

संख्या 7465 को मानक रूप में लिखते हैं।

$$7465 = 7.465 \times 1000$$
$$= 7.465 \times 10^3$$

(दशमलव चिह्न तीन स्थान बाईं ओर खिसक गया है।)

(दशमलव चिह्न तीन स्थान बाईं ओर खिसक गया है।)

पृथ्वी का द्रव्यमान = 5976,000,000,000,000,000,000,000 किग्रा

पृथ्वी का द्रव्यमान = 5.976×10^{24} किग्रा है।

अब आप इस बात से सहमत होंगे कि पढ़ने, समझने और तुलना करने की दृष्टि से मानक रूप में लिखी यह संख्या 25 अंकों की संख्या की अपेक्षा बहुत अधिक सरल है।

उदाहरण 14 संख्या 150,000,000,000 को मानक रूप में लिखिए।

हल $150,000,000,000 = 1.5 \times 10^{11}$

(दशमलव बिन्दु 11 स्थान बाईं ओर खिसक गया है)

मानक रूप में लिखी संख्याओं को जोड़ते समय संख्याओं को 10 के समान घात में बदलते है।

उदाहरण 15 निम्नांकित संख्याओं को मानक रूप में लिखिए।

(i) 63000 (ii) 100000 (iii) 425000

हल (i) $63000 = 6.3 \times 10000 = 6.3 \times 10^4$

(ii) $100000 = 1 \times 100000 = 1 \times 10^5$

(iii) $425000 = 4.25 \times 100000 = 4.25 \times 10^5$

उदाहरण 16 जनसंख्या गणना के अनुसार किसी वर्ष भारत की जनसंख्या 1,00,84,35,405 थी। इसे वैज्ञानिक संकेतन में लिखिए।

हल भारत की जनसंख्या = 1,00,84,35,405

= 1.00,84,35,405 × 1,00,00,00,000

= 1.008435405×10^9

= 1.008×10^9 लगभग

प्रश्नावली 5.3

1. निम्नलिखित संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) 50,0000 (ii) 48,30,000

(iii) 3,94,00,00,00,000 (iv) 30000000

(v) 180000

2. पृथ्वी की सूर्य से दूरी लगभग 15,00,00,000 किमी है। इस दूरी को वैज्ञानिक संकेतन द्वारा व्यक्त कीजिए।

3. एक व्यक्ति अपने दैनिक भोजन से प्रतिदिन औसतन 3000 कैलोरी ऊर्जा ग्रहण करता है। वैज्ञानिक संकेतन में प्रदर्शित कीजिए कि वह पूरे 1 वर्ष में कितनी कैलोरी ऊर्जा ग्रहण करेगा ?

4. एक अनुमान के अनुसार भारतीय रेल एक दिन में लगभग 1 करोड़ 30 लाख यात्रियों को एक स्थान से दूसरे स्थान पर पहुँचाती है। बताइए कि 30 दिनों में कितने यात्री रेल से यात्रा करते हैं। उत्तर मानक रूप में दीजिए।

5. निम्नांकित को सरल रूप में लिखिए।

(i) $2.5 \times (10)^4$ (ii) $1.75 \times (10)^6$

(iii) $1.21 \times (10)^{-8}$ (iv) $4.50 \times (10)^{-5}$

हमने सीखा

1. संख्याएँ घातांकीय रूप में प्रकट की जा सकती हैं। घातांकों के प्रयोग से बहुत बड़ी और बहुत छोटी संख्याओं को पढ़ना, समझना, तुलना करना और उन पर संक्रियाएँ करना सरल होता है।

2. घातांकीय रूप में संख्याएँ कुछ नियमों का पालन करती हैं, जो संक्षेप में इस प्रकार है। किन्हीं शून्येतर संख्याओं a और b तथा धनात्मक पूर्णांकों m और n के लिए,

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ यदि m>n या $a^m \div a^n = \dfrac{1}{a^{n-m}}$ यदि n > m

(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iv) $a^m \times b^m = (ab)^m$

(v) $a^m \div b^m = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

(vi) $a^0 = 1$

3. वैज्ञानिक संकेतन या मानक रूप में किसी संख्या को व्यक्त करने के लिए संख्या को 1.0 और 10.0 के बीच की एक दशमलव संख्या (जिसमें 1.0 सम्मिलित है तथा 10.0 सम्मिलित नहीं है) और 10 की किसी घात के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाता है।

अध्याय 6

वैदिक गणित

6.1 पूर्व कक्षा में एकाधिकेन पूर्वेण, एकन्यूनेन पूर्वेण, निखिलम् से गुणा करना सीखा था। इस अध्याय में आप पुनः योग, व्यवकलन, गुणा एवं भाग, भिन्न, वर्ग व वर्गमूल की अन्य विधियों का अध्ययन करेंगे। इस अध्याय की सभी क्रियाओं का अभ्यास मौखिक करवाया जाए तो गणना सरल व अतिशीघ्र हो जाती है।

6.2 संकलन – व्यवकलनाभ्याम्

दैनिक जीवन में इस विधि का उपयोग गणना को आसान बनाने के लिए करते हैं। इस विधि का उपयोग आधार संख्या की पूर्णता पर आधारित है जो कि 10 या 10 का गुणक होता है। इसमें पूर्ण आधार वाली संख्याओं के साथ विचलन कर बड़ी गणनाओं को आसान बनाया जाता है।

उदाहरण 1 8 + 11 + 7+ 12 + 9 + 13 का योग कीजिए।

हल इन संख्याओं को ध्यान से देखने पर पता चलता है कि 8, 10 से 2 कम है एवं 12, 10 से 2 अधिक है। इसी तरह 9, 10 से 1 कम है एवं 11, 10 से 1 अधिक है।

$$(10-2) + (10+1) + (10-3) + (10+2) + (10-1) + (10+3)$$

पूर्ण आधार वाली संख्याओं के रूप में दर्शा कर व्यवस्थित करने पर

$$(10-\cancel{2}) + (10+\cancel{2}) + (10+\cancel{1}) + (10-\cancel{1}) + (10-\cancel{3}) + (10+\cancel{3})$$

$= 20 + 20 + 20$

$= 60$

यहाँ पर – 2, 2 1, -1 एवं –3, 3 ऐसे युग्म हैं जिनके योग –2 + 2, 1–1, –3 + 3 शून्य है।

उदाहरण 2 26 + 48 + 107 + 63 + 13 + 44 को जोड़िए।

हल संख्याओं का पूर्ण संख्या बनाने के लिए युग्म 10 या 10 के गुणज बनाने का प्रयास करते हैं।

26 + 63 + 48 + 13 + 107 + 44

संकलन व्यवकलनाभ्याम से

$= 30 - 4 + 60 + 3 + 50 - 2 + 10 + 3 + 110 - 3 + 40 + 4$

$= 30 + 60 + 10 + 50 + 110 + 40 - 4 + 3 - 2 + 3 - 3 + 4$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

= 90 + 10 + 50 + 150 + 1

= 100 + 200 + 1

= 300 + 1 = 301

संकलन व्यवकलनाभ्याम विधि में विचलन करते जाएँ एवं योग करते जाएँ तो योग आसान हो जाता है।

6.3 पूरणापूरणाभ्याम्

संख्याओं के ऐसे युग्म बनाएँ जिनसे संख्याएँ 10 के गुणित में हो जाएँ।

उदाहरण 3 27 + 58 + 392 + 68 + 32 + 23 का योग कीजिए।

हल = (27+23)+(58+392)+(68+32) (10 के गुणित में बनाने का प्रयास)

= 50 + 450 + 100

= (50 + 450) + 100

= 500 + 100

= 600

उदाहरण 4 45 + 67 + 38 + 55 + 62 + 33 का योग कीजिए।

हल 10 के गुणित युग्म में जमाने पर

= (45 + 55) + (67 + 33) + 38 + 62

= 100 + 100 + 100

= 300

प्रश्नावली 6.1

1. संकलन व्यवकलनाभ्याम एवं पूरणापूरणाभ्याम का उपयोग करते हुए योग कीजिए –
   (i) 282 + 718 + 796 + 524 + 804 + 376
   (ii) 52 + 136 + 48 + 64
   (iii) 135 + 248 + 322 + 65

6.4 घटाव (सूत्र निखिलम्)

(सूत्र निखिलम् नवतः चरमं दशतः का उपयोग करते हुए हम घटाव करते हैं)

यदि हम 1000 में से 362 घटाना चाहे तो हमारी पारम्परिक विधि में कई हासिल के चरणों से गुजरना होगा एवं समय भी अधिक लगेगा फिर भी गलत होने का भय बना रहेगा। आइए वैदिक विधि से देखते हैं –

दाहिने से प्रारम्भ करते हुए बाईं ओर गणना करें। बाईं ओर के प्रत्येक शून्य के बदले 9 लिखें और अंतिम शून्य की जगह 10 लिखें। शून्य के पहले एकदम बाईं ओर का अंक 1 कम हो जाएगा।

1000	इस प्रकार बन जाएगा	0 9 9 10
– 362		0 3 6 2
		0 6 3 8

उदाहरण 5 70,000 में से 1837 घटाइए।

हल सबसे बाईं ओर का अंक (7) में से 1 कम = 6

अब 9 में से 1 कम = 8

9 में से 8 कम = 1

9 में से 3 कम = 6

अंतिम अंक 10 में से 7 कम = 3

अर्थात् शेषफल 68163 रहेगा।

अतः 70000 – 1837 = 68613 अभीष्ट हल है।

उदाहरण 6 संख्या 854 में से 569 घटाइए।

हल 854 – 569

चरण 1 यहाँ 4 < 9

इसलिए अन्तर 9 – 4 = 5 का पूरक लेते हैं।

पूरक 10 से लिया जाएगा। अतः 5 का पूरक 5 है जो इकाई के स्थान पर लिख जाएगा।

चरण 2 पुनः 5 जो 6 से छोटा है अतः 5 व 6 का अन्तर 1 है पूरक 9 से 1 को घटाने पर 8 आएगा।

चरण 3 8 से एक कम 8 – 1 = 7 में से 5 घटाने पर 2 शेष आएगा जिसे सैकड़ा के स्थान पर लिखेंगे।

854 – 569 = 285

6.5 मनोरंजक गुणन विधियाँ

कक्षा VI में आपने निखिलम् विधि से गुणा करना सीखा था। इस कक्षा में गुणा की सरल विधियों का अध्ययन करेंगे ।

6.5.1 किसी भी संख्या को 10 से गुणा

जैसे $5 \times 10 = 50$ $10 \times 10 = 100$

$68 \times 10 = 680$

तीनों उदाहरणों को ध्यान से देखिए और अपने साथियों से चर्चा कीजिए कि किसी संख्या को 10 से गुणा करने पर गुणनफल व मूल संख्या (5, 10, 68) में क्या फर्क दिखता है? शायद आप सहमत होंगे कि इकाई के स्थान पर शून्य आ जाता हैं एवं मूल संख्या दहाई व दहाई के आगे खिसक जाती है।

करो और सीखो

1. यदि संख्या को 100 व 1000 से गुणा किया जाए तो गुणनफल में मूल संख्या से क्या परिवर्तन दिखता है, साथियों से चर्चा कीजिए।

2. आप कक्षा में दो समूह में विभक्त हो जाए संख्याओं को 10,100 या 1000 से गुणा करने के सवाल एक समूह पूछे दूसरा समूह उसका उत्तर दें। फिर दूसरा समूह प्रश्न पूछे एवं पहला उत्तर दें। इस तरह अन्त्याक्षरी की तरह खेल खेलें।

6.5.2 किसी संख्या का 5 से गुणा

1. किसी संख्या को 10 से गुणा करना आपने सीखा हैं। आइए संख्या को 5 से गुणा करने के मनोरंजक एवं सरल तरीके को देखेंगे।

(i) 18 x 5

$= 18 \times \frac{10}{2}$ (5, 10 का आधार है अतः $5 = \frac{10}{2}$ लिखा जाता है।)

$= \frac{18}{2} \times 10 = 9 \times 10 \left(\frac{18}{2} = 9\right)$

$= 90$

(ii) 29×5

$= 29 \times \frac{10}{2}$ $\left(5 = \frac{10}{2}\right)$

$= \frac{29}{2} \times 10$ $\left(\frac{29}{2} = 14.5\right)$

$= 14.5 \times 10$ $\left(14.5 = \frac{145}{10}\right)$

$= \frac{145}{10} \times 10 = 145$

अर्थात् किसी संख्या को 5 से गुणा करते समय संख्या का आधा और उसका दस गुना करने पर गुणनफल प्राप्त होता है।

करो और सीखो

1. क्या 50 व 500 से किसी संख्या को गुणा करने में 5 का तरीका प्रयोग किया जा सकता है?
2. किसी संख्या को 25 से गुणा करने के लिए $\frac{100}{4}$ के रूप में गुणा किया जा सकता है? कक्षा में चर्चा कीजिए।

6.5.3 किसी संख्या को 9 से गुणा (सूत्र–एक न्यूनेन पूर्वेण विधि से)

उदाहरण 7 6 को 9 से गुणा कीजिए।

हल

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times\ 9 \\ \hline \dot{6}/9-\dot{6} \\ 5/4 \\ =54 \end{array}$$

(i) एक न्यूनेन पूर्वेण सूत्र का उपयोग होता है। अतः 6 में एक न्यूनेन का चिह्न तिरछी रेखा के बाएँ पक्ष में लगाया।

(ii) दाएँ पक्ष में 9 में से एक न्यूनेन लगा गुण्य 6 को घटाया गया।

उदाहरण 8 12 को 9 से गुणा कीजिए।

हल

12 × 9	(1)	यहाँ पर गुणक 9 ही है परन्तु गुण्य 9 से बड़ा है।
$1\dot{2}$ / 9 – $1\dot{2}$	(2)	एकन्यूनेन पूर्वेण सूत्र का उपयोग करते हुए 12 का एक न्यून = 11 तिरछी रेखा के बाईं ओर लगाया।
11 / 9 – 11	(3)	तिरछी रेखा के दाएँ ओर 9 में से 12 का एक न्यून(9–11) को घटाया।
11 / –2 या $(\bar{2})$	(4)	तिरछी रेखा के बाएँ भाग में दहाई 11 व दाएँ भाग में –2 या $\bar{2}$ है।
$11\bar{2}$ = 108	(5)	तिरछी रेखा को हटाकर $11\bar{2}$ में $\bar{2}$ को सामान्य संख्या में बदलने पर 108 प्राप्त होता है।

6.5.4 किसी संख्या का 99 से गुणा

आपने संख्या को 9 से गुणा करना सीखा है आइए अब 99 से गुणा करते हैं। 99 से गुणा करने की विधि भी वही है जो 9 से गुणा करने की विधि है। अतः एक उदाहरण से वैदिक गणित में इसे एक न्यूनेन पूर्वेण के रूप में देखते है।

उदाहरण 9 18 × 99 को हल कीजिए।

हल

18
×99 (संकेत पूर्वानुसार)
$1\dot{8}$/99-$1\dot{8}$
17/99-17
17/82
=1782

उदाहरण 10 99 × 99 को हल कीजिए।

99
×99
$9\dot{9}$/99-$9\dot{9}$
98/99-98
98/1

[99×99 = 981 सही है यदि नहीं तो क्या आप खोजने का प्रयास करेंगे कि भूल कहाँ हुई? जी हाँ आप सही है तिरछी रेखा के दाएँ पक्ष में आधार 100 है अतः यहाँ दो अंकों की संख्या होगी लेकिन यहाँ एक ही है इसलिए इसे 01 लिखेंगे।]

अतः हल 9801 होगा।

क्या आप 999 व 9999 से भी किसी संख्या का गुणा कर सकते हैं ?

करो और सीखो

• किसी संख्या को 999 व 9999 से गुणा स्वयं करके देखें एवं समस्या आने पर अपने अध्यापक जी से सहयोग लें।

6.5.5 किसी संख्या का 11 से गुणा

आइए 11 से गुणा करने की एक सीधी विधि सीखते हैं ।

72 को 11 से गुणा कीजिए –

$$\begin{array}{r} 72 \\ \times 11 \\ \hline 72 \\ 72\times \\ \hline =7(7+2)2 \\ =7\ 9\ 2 \end{array}$$

एक और विधि देखते हैं –

72×11

$72 \times (10+1)$

$720+72$

यानि $7(7+2)\,2$

$= 792$

इन दोनों विधि से हम देखते हैं कि गुण्य के दोनों अंकों के मध्य में गुण्य के दोनों अंकों का योग होता है।

उदाहरण 11 81 को 11 से गुणा कीजिए।

हल

$$\begin{array}{c} 81 \\ \times 11 \\ \hline 8/(8+1)/1 \\ 891 \end{array}$$

जाँच करे कि क्या 81×11 = 891 होता है?

उदाहरण 12 99 को 11 से गुणा कीजिए।

हल

$$\begin{array}{c} 99 \\ \times 11 \\ \hline 9/(9+9)/9 \\ 9/18/9 \\ =1089 \end{array}$$

(18 में 8 को दहाई स्थान पर एवं 1 को सैंकड़े की संख्या के साथ जोड़ेंगे।)

क्या तीन या तीन से अधिक अंकों की संख्या के लिए भी यह नियम लागू होता है? चर्चा करें एवं उन पर आधारित सवालों का अभ्यास कीजिए।

प्रश्नावली 6.2

1. निखिलम् सूत्र से घटाव कीजिए।

(i) $\begin{array}{r} 9000 \\ -3768 \\ \hline \end{array}$ (ii) $\begin{array}{r} 5872 \\ -2987 \\ \hline \end{array}$ (iii) $\begin{array}{r} 4987 \\ -1898 \\ \hline \end{array}$

2. उपयुक्त सूत्र लगाकर गुणा कीजिए।

(i) 87×10 (ii) 53×100 (iii) 432×1000 (iv) 64×5

(v) 72×50 (vi) 81×99 (vii) 99×999 (viii) 99×9

6.6 भिन्न

भिन्नों से आप परिचित हैं हम भिन्नों को वैदिक गणित के कुछ तरीकों से आसान बनाते हैं। निम्न भिन्नों को ध्यान से देखिए –

उदाहरण 13 $\frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{8}$ को आरोही क्रम में लिखिए।

हल इनके हर समान है एवं अंश अलग–अलग हैं।

इस भिन्न को बढ़ते क्रम में लिख सकते हैं।

$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$

भिन्न जिनके हर समान है, तब जिस भिन्न का अंश बड़ा होगा वह भिन्न बड़ी भिन्न होगी। यदि भिन्नों के अंश परस्पर समान है तो जिसका हर बड़ा है वह छोटी भिन्न होगी।

$\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ को बढ़ते क्रम में जमाइए।

यहाँ हर 5 सबसे बड़ी संख्या है अतः सबसे छोटी भिन्न $\frac{1}{5}$ होगी, एवं सबसे बड़ी भिन्न $\frac{1}{2}$ होगी।

आरोही क्रम में जमाने पर

$\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

उदाहरण 14 $\frac{3}{4}$ व $\frac{4}{5}$ में बड़ी भिन्न बताइए।

हल

$\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ \hline 15 & 16 \end{array}$

(i) बिना रेखा के भिन्नों के अंश व हर लिखिए।

(ii) तिर्यक गुणनफल बने $3\times5 = 15$ तथा $4\times4 = 16$

(iii) जिस तरफ का गुणनफल बड़ा वह भिन्न बड़ी होगी।

(iv) $\because$ $15<16$ अतः भिन्न $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$

उदाहरण 15 $\frac{2}{3}$ व $\frac{6}{9}$ में भिन्न का क्रम बताइए।

हल

$$\begin{array}{cc} 2 & 6 \\ 3 & 9 \\ \hline 18 & 18 \end{array}$$

(i) तिर्यक गुणा करने पर बने 9 X 2 = 18 तथा 6 X 3 = 18

(ii) गुणनफल परस्पर समान अतः भिन्न बराबर

(iii) अतः यह तुल्य भिन्न है।

प्रश्नावली 6.3

1. निम्न भिन्नों के मध्य सही चिन्ह लगाएँ। (>, =, < में से एक)

(i) $\frac{4}{9} \square \frac{3}{9}$ (ii) $\frac{4}{5} \square \frac{4}{10}$ (iii) $\frac{3}{5} \square \frac{6}{10}$

(iv) $\frac{5}{7} \square \frac{6}{7}$ (v) $\frac{2}{3} \square \frac{3}{2}$

2. निम्न भिन्नों को आरोही क्रम में लिखिए।

(i) $\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{2}{7}, \frac{5}{7}$ (ii) $\frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}$

3. निम्न भिन्न को अवरोही क्रम में लिखिए।

(i) $\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ (ii) $\frac{4}{6}, \frac{4}{7}, \frac{4}{8}, \frac{4}{5}$

6.6.1 भिन्नों का योग

यदि भिन्नों का हर परस्पर समान है तो–

उदाहरण 16 $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}$ भिन्नों का योग कीजिए।

हल $= \frac{1+2}{5}$ $\frac{\text{अंशों का योग}}{\text{हर}}$

अतः भिन्नों का योग = $\frac{\text{अंशों का योग}}{\text{हर}}$

यदि दी गई भिन्नों के हर परस्पर समान नहीं है–

उदाहरण 17 $\frac{2}{3}$ व $\frac{4}{5}$ का योग कीजिए।

हल $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$

$= \frac{2\times5+3\times4}{3\times5}$ बनने वाले तिर्यक गुणन 2×5 तथा 3×4

हरों का गुणनफल $3 \times 5 = 15$

$$=\frac{10+12}{15} \quad =\frac{22}{15} \quad =1\frac{7}{15}$$

उदाहरण 18 $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$ योग कीजिए।

हल $\frac{1\times3\times5+2\times2\times5+4\times2\times3}{2\times3\times5}$ यहाँ योग में बनने वाले तिर्यक गुणन – $1\times3\times5$, $2\times2\times5$ तथा $4\times2\times3$ हैं।

$=\frac{15+20+24}{30}$ हरों का गुणनफल – $2\times3\times5$ हैं।

$=\frac{59}{30} \quad =1\frac{29}{30}$

जब दी हुई भिन्नों के हर परस्पर समान नहीं हों और उनमें उभयनिष्ठ गुणनखण्ड भी हो।

उदाहरण 19 $\frac{1}{4}+\frac{1}{10}$ हल कीजिए।

हल $\frac{1\times10+1\times4}{4\times10} \quad =\frac{10+4}{40} \quad =\frac{14}{40}$ (सरलतम रूप में बनाने के लिए अंश व हर को समान संख्या में भाग देना होगा)

$=\frac{14\div2}{40\div2} \quad =\frac{7}{20}$ (सरलतम रूप में लिखने पर)

6.6.2 मिश्र भिन्नों का योग (सूत्र विलोकनम् एवं तिर्यक गुणन से)

मिश्र भिन्नों का योग विलोकनम् तथा तिर्यक गुणन के प्रयोग से बड़ी सरलता से निकाला जा सकता है।

$1\frac{3}{4}+2\frac{1}{3}$ (विलोकनम सूत्र से मिश्र भिन्न के दो टुकड़े करें)

$1\frac{3}{4}=1+\frac{3}{4}$ तथा $2\frac{1}{3}=2+\frac{1}{3}$

$=1+\frac{3}{4}+2+\frac{1}{3}$

$=(1+2)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\right)$ ($\frac{3}{4}+\frac{1}{3}$ का तिर्यक गुणन से योग)

$=3+\frac{3\times3+1\times4}{4\times3} \quad =3+\frac{9+4}{12} \quad =3+\frac{13}{12} \quad =3+1\frac{1}{12}$ (विलोकनम् का उपयोग)

$=(3+1)+\frac{1}{12} \quad =4+\frac{1}{12}$ या $4\frac{1}{12}$

6.7 भिन्नों का व्यवकलन

भिन्नों की व्यवकलन संक्रिया भिन्नों की योग संक्रिया से मिलती जुलती है। योग संक्रिया में योग चिह्न (+) एवं व्यवकलन संक्रिया में व्यवकलन चिह्न (–) का उपयोग करेंगे।

6.7.1 भिन्नों का व्यवकलन जब भिन्नों का हर परस्पर समान हो

उदाहरण 20 भिन्न $\frac{3}{5} - \frac{1}{5}$ का व्यवकलन कीजिए।

हल

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3-1}{5} = \frac{2}{5}$$

6.7.2 जब भिन्नों के हर परस्पर समान नहीं हैं और उनमें कोई उभयनिष्ठ गुणनफल नहीं है तो व्यवकलन करना

उदाहरण 21 भिन्न $\frac{4}{5} - \frac{2}{3}$ का व्यवकलन कीजिए।

हल

$$\frac{4\times3-5\times2}{5\times3} = \frac{12-10}{15} = \frac{2}{15}$$

उदाहरण 22 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$ को हल कीजिए।

हल

$$\frac{1\times3\times5+1\times2\times5-1\times2\times3}{2\times3\times5}$$ (भिन्नों के योग की तरह हल)

$$= \frac{15+10-6}{30} = \frac{19}{30}$$

6.7.3 मिश्र भिन्न का व्यवकलन

योग संक्रिया के समान सूत्र विलोकनम् और तिर्यक गुणन के प्रयोग से मिश्र भिन्नों का व्यवकलन भी निकाला जा सकता है।

उदाहरण 23 $3\frac{3}{4} - 3\frac{2}{5}$ हल कीजिए।

हल

$$\left(3+\frac{3}{4}\right)-\left(3+\frac{2}{5}\right)$$

$$(3-3)+\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\right)$$

$$= 0 + \frac{3\times5-4\times2}{4\times5}$$

$$= \frac{15-8}{20} = \frac{7}{20}$$

प्रश्नावली 6.4

1. योग कीजिए। (सूत्र विलोकनम् एवं तिर्यक गुणन से)

(i) $\frac{1}{9} + \frac{4}{9}$ (ii) $\frac{7}{15} + \frac{2}{15}$ (iii) $\frac{1}{2} + \frac{3}{5}$

(iv) $\frac{4}{3} + \frac{2}{5}$ (v) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ (vi) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{5}$

2. व्यवकलन कीजिए (सूत्र विलोकनम् एवं तिर्यक गुणन से)

(i) $\frac{9}{10} - \frac{3}{10}$ (ii) $\frac{19}{5} - \frac{4}{5}$ (iii) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$

(iv) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ (v) $3\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4}$ (vi) $2\frac{5}{6} - 2\frac{1}{6}$

6.8 भिन्नों का गुणा

दो भिन्नों का गुणा सरलता से ज्ञात किया जा सकता हैं। इसमें से दोनों भिन्नों के अंशों का गुणनफल अंश के स्थान पर एवं दोनों भिन्नों के हरों का गुणनफल हर के स्थान पर लिखते हैं –

$\frac{1}{2}$ व $\frac{3}{4}$ का गुणा कीजिए –

$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ $\qquad \frac{1\times3}{2\times4} = \frac{3}{8}$

6.8.1 दो मिश्र भिन्नों का गुणा (सूत्र– एकाधिकेन पूर्वेण से)

दो मिश्र भिन्नों के चरम अंकों का योग यदि 1 होता है एवं आधार तथा शेष निखिलम् अंक समान हो, तो सामान्य संख्याओं के समान सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा इनका गुणनफल दो भागों में लिखा जा सकता है।

उदाहरण 24 $6\frac{1}{4}\times6\frac{3}{4}$ को हल कीजिए।

हल (1) चरम अंक $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ का योग $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{1+3}{4}=\frac{4}{4}=1$

(2) शेष निखिलम् अंक परस्पर समान = 6

$6\times(6+1)/\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$

(3) वाम पक्ष = प्रथम भाग = शेष निखिलम अंक × उसका एकाधिक

(4) दक्षिण पक्ष = दूसरा भाग = चरम अंकों का गुणा

अर्थात्

$$6\times(6+1)+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}$$

$$6\times7+\frac{3}{16}$$

$$42+\frac{3}{16} \quad =42\frac{3}{16}$$

उदाहरण 25 भिन्न $15\frac{4}{7}\times15\frac{3}{7}$ का गुणा कीजिए।

हल

$$15\times(15+1)/\frac{4}{7}\times\frac{3}{7}$$

$$15\times16/\frac{12}{49}$$

$$240\frac{12}{49}$$

6.8.2 दो भिन्नों का गुणा (विलोकनमसूत्र से)

उदाहरण 26 भिन्न $5\frac{1}{2}\times6$ का गुणा वैदिक विधि से कीजिए ।

हल

$\left(5+\frac{1}{2}\right)\times6$ (विलोकनम् सूत्र)

$=5\times6+\frac{1}{2}\times6$ (कोष्ठक का हल)

$= 30 + 3$ (6 का आधा = 3)

$=33$

उत्तर की जाँच : $5\frac{1}{2}\times6$

$=\frac{11}{2}\times6$ $\left(5\frac{1}{2}=\frac{11}{2}\right)$

$=11\times\frac{6}{2}$

$= 11 \times 3$ (6 का आधा = 3)

$=33$

उदाहरण 27 मिश्र भिन्न $7\frac{1}{2}\times8\frac{1}{2}$ का गुणा कीजिए।

हल $\left(7+\frac{1}{2}\right)\times\left(8+\frac{1}{2}\right)$ (विलोकनम् सूत्र से)

$$7\times8+7\times\frac{1}{2}+8\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$=56+3\frac{1}{2}+4+\frac{1}{4}$$

$$=56+3+4+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

$$=63+\frac{6}{8}\qquad\left(\frac{6\div2}{8\div2}=\frac{3}{4}\right)$$

$$=63\frac{3}{4}$$

अन्य तरीका – $7\times8+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+(7+8)\frac{1}{2}$

$$=56+\frac{1}{4}+15\times\frac{1}{2}$$

$$=56+7+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=63+\frac{3}{4}$$

$$=63+\frac{3}{4}$$

प्रश्नावली 6.5

उपयुक्त सूत्र का उपयोग करते हुए भिन्न संख्याओं का गुणा कीजिए –

(1) $\frac{1}{8}\times\frac{3}{5}$ (2) $5\frac{1}{2}\times5\frac{1}{2}$ (3) $2\frac{3}{4}\times2\frac{1}{4}$

(4) $3\frac{2}{5}\times3\frac{3}{5}$ (5) $12\frac{1}{4}\times12\frac{3}{4}$ (6) $8\frac{2}{7}\times8\frac{5}{7}$

(7) $3\frac{1}{4}\times4$ (8) $2\frac{1}{5}\times5$ (9) $3\frac{1}{2}\times4$

(10) $4\frac{1}{3}\times6$

6.9 वर्ग संख्याएँ

वर्ग संख्याएँ – वे संख्याएँ होती है जिनके अभाज्य गुणनखण्ड दो–दो के युग्म में हो। जैसे 4 एक वर्ग संख्या है क्योंकि इसके अभाज्य गुणनखण्ड = 2×2 है।

यहाँ 2 का एक युग्म है।

क्या 100 एक वर्ग संख्या है?

आइए 100 के अभाज्य गुणनखण्ड करते हैं। 100 के अभाज्य गुणनफल 2×2×5×5 है यहाँ 2 व 5 का एक युग्म हैं। अतः ये दोनों संख्याएँ वर्ग संख्याएँ हैं।

ये दोनों संख्याएँ किन संख्याओं की वर्ग संख्याएँ है? आइए तय करते हैं।

4 का अभाज्य गुणनखण्ड = 2×2 है एवं यहाँ 2 का एक जोड़ा है अतः यह 2 की वर्ग संख्या है।

इसी प्रकार 100 का अभाज्य गुणनखण्ड 2×2×5×5 (2 व 5 का युग्म है)

अतः 2×5 = 10 की वर्ग संख्या 100 है।

किसी संख्या की वर्ग संख्या ज्ञात करने के लिए उस संख्या को उसी संख्या से गुणा करते हैं। आइए वर्ग संख्या ज्ञात करने के कुछ सरल तरीकों पर चर्चा करते हैं।

(1) दो/तीन अंकों की ऐसी संख्याओं के वर्ग ज्ञात करना जिनका इकाई का अंक 5 हो –

(i) $15\times15 = 1\times(1+1)/5\times5$ (एकाधिकेन पूर्वेण दहाई अंक का)

$= 1\times2/25$

$= 2/25$

$= 225$

(ii) $35\times35 = 3\times(3+1)/5\times5$ (एकाधिकेन पूर्वेण दहाई स्थान पर)

$= 3\times4/25$

$= 1225$

(iii) $95\times95 = 9\times(9+1)/5\times5$

$= 9\times10/25$

$= 9025$

(iv) $105\times105 = 10(10+1)/5\times5$

$= 10\times11/25$

$= 110/25 = 11025$

(v) $125\times125 = 12(12+1)/5\times5$

$= 12(13)/25$

$= 15625$

उदाहरणों से स्पष्ट है कि इकाई पर 5 अंक वाली संख्याओं को उसी संख्या से गुणा करने पर या उसका वर्ग ज्ञात करने पर अंत में 25 अवश्य आता है। उसके पूर्व दहाई वाली संख्या को एकाधिक संख्या से गुणा कर लिखते हैं।

दहाई पर 5 वाली संख्याओं के वर्ग ज्ञात करना।

दहाई पर 5 वाली संख्याएँ 51 से 59 तक ही हैं।

अतः $51^2 = 51\times51$

$= \underline{26}\ \underline{01}$

$1\times1=01$ (इकाई का वर्ग)

$5\times5+1=26$ (दहाई का वर्ग + इकाई का अंक)

$53^2 = 53 \times 53$

$\underline{28}\ \underline{09}$

$3 \times 3 = 09$ (दहाई का वर्ग)

$5 \times 5 + 3 = 28$ (दहाई का वर्ग + इकाई का अंक)

$59^2 = 59 \times 59$

$\underline{34}\ \underline{81}$

$9 \times 9 = 81$

$5 \times 5 + 9 = 34$

तीन अंक वाली संख्या का वर्ग ज्ञात करना जिसके अंत में 25 हो –

$125^2 = 1\underline{25} \times 1\underline{25}$

$(25 \times 25 = 625)$

$1 \times 15 = 15$ (125 में इकाई व सैंकड़ा से बनी संख्या 15 को सैंकड़ा के 1 से)

अतः $125^2 = 15625$

$325^2 = 3\underline{25} \times 3\underline{25}$

$(25 \times 25 = 625)$

$3 \times 35 = 105$ (325 में इकाई व सैंकड़ा से बनी संख्या 35 को सैंकड़ा 3 से)

अतः $325^2 = 105625$

$725^2 = 7\underline{25} \times 7\underline{25}$

$(25 \times 25 = 625)$

$7 \times 75 = 525$

$= 525625$

इसमें सदैव 625 (25^2) अंत में आता है। उससे पहले सैकड़ा तथा इकाई के अंकों से बनी संख्या को सैकड़ा के अंक से गुणा करके रख देते हैं।

वर्ग के कुछ अन्य तरीके –

$11 \times 11 = 1\ 2\ 1$ ← इकाई की संख्या का वर्ग

इकाई एवं दहाई की संख्याओं का गुणा एवं दुगुना

दहाई की संख्या का वर्ग

$31^2 =$ 31×31 में इकाई की संख्या का वर्ग – $1 \times 1 = 1$

इकाई एवं दहाई की संख्याओं का गुणा एवं दुगुना $(1 \times 3) \times 2 = 6$

दहाई की संख्या का वर्ग – $3 \times 3 = 9$

$= 961$

12X12 = इकाई की संख्या का वर्ग – $2\times2=4$

इकाई एवं दहाई की संख्याओं का गुणा एवं दुगुना $(1\times2)2=4$

दहाई की संख्या का वर्ग = $1\times1=1$

अतः संख्या 12 का वर्ग = 144 है।

तीन अंकों की संख्याओं का वर्ग ज्ञात करने के लिए उसे दो भागों में बाँटते हैं जिनका उपसूत्र अनुरूप्येण विधि से वर्ग ज्ञात करते हैं। ''अनुरूप्येण'' का अर्थ ''अनुरूपता अथवा समानुपात द्वारा।''

जैसे– 152 का वर्ग ज्ञात करना है तो 152 को 15 दहाई व 2 इकाईयों में बाँटा गया है।

$\underline{15}\times\underline{152}=$ इकाई की संख्या का वर्ग $=2^2=4$

इकाई एवं दहाई की संख्या का गुणा एवं दुगुना $=2\times15\times2=60$

दहाई की संख्या का वर्ग $=15^2=225$

225/60/4

225+6/04

$=\underline{23104}$

यहाँ हम देखते हैं कि जिस संख्या का वर्ग करना है उसको –

1. दाएँ से प्रथम भाग में दाईं संख्या का वर्ग ज्ञात करना।
2. मध्य भाग में मूल संख्या में स्थित अंकों को गुणा व उसका दुगुना करते हैं।
3. तीसरे भाग में मूल संख्या में स्थित दूसरे अंक का वर्ग करना।
4. संख्या को व्यवस्थित करना।

उदाहरण 28 संख्या 43 का वर्ग करना।

हल

$$\begin{array}{rccc} & \text{III} & \text{II} & \text{I} \\ 43^2 = & 4^2 & 4\times3 & 3^2 \\ & & 4\times3 & \\ \hline & 16 & 12 & 9 \\ & & +12 & \\ \hline & 16 & 24 & 9 \\ & 16+2 & & 49 \\ & & 1849 & \end{array}$$

(16 के साथ मध्य भाग (II) का हासिल जुड़ जाता है)

उदाहरण 29 $(132)^2$ $\underline{13}\ \underline{2}$ इसे दो भाग 13 व 2 में बाँटा

हल

$$\begin{array}{ccc} \text{III} & \text{II} & \text{I} \\ (13)^2 & 13\times2 & 2^2 \\ & +13\times2 & \\ \hline 169 & 26 & 4 \\ & 26 & \\ \hline 169 & 52 & 4 \\ & 169+5 & 24 \\ & 17424 & \end{array}$$

प्रश्नावली 6.6

1. उपयुक्त विधि से वर्ग ज्ञात कीजिए।

(i) 18 (ii) 42 (iii) 83 (iv) 127 (v) 136

6.10 वर्गमूल

किसी संख्या x को उसी संख्या x से गुणा किया जाए तो प्राप्त मान x^2, संख्या x की वर्ग संख्या है। इसे इस तरह समझा जाए कि x^2, $x \times x$ का एक युग्म है। अतः x^2 का वर्गमूल x है।

16 एक वर्ग संख्या है जो 4×4 का एक युग्म है अतः 16 का वर्गमूल 4 है।

वर्गमूल का संकेत $\sqrt{\ }$ है।

वर्गमूल संख्या के अंक

किसी संख्या की वर्ग संख्या में अंक, इस संख्या के अंकों की संख्या का दुगुना व दुगुने से एक कम अंक होता है। उसी तरह किसी वर्ग संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या यदि सम हो तो आधी एवं यदि विषम हो तो उस संख्या में 1 जोड़ कर आधी होती हैं। आइए सारणी का अवलोकन करें –

वर्ग संख्या में अंकों की संख्या विषम				वर्ग संख्या जब अंकों की संख्या सम			
वर्ग संख्या	अंकों की संख्या	वर्ग मूल	अंकों की संख्या	वर्ग संख्या	अंकों की संख्या	वर्ग मूल	अंकों की संख्या
1	1	1	$\frac{1+1}{2}=1$	16	2	4	$\frac{2}{2}=1$
100	3	10	$\frac{3+1}{2}=2$	81	2	9	$\frac{2}{2}=1$
961	3	31	$\frac{3+1}{2}=2$	1024	4	32	$\frac{4}{2}=2$
16641	5	129	$\frac{5+1}{2}=3$	108900	6	330	$\frac{6}{2}=3$

किसी पूर्ण वर्ग संख्या के दाहिनी ओर से (इकाई अंक) दो–दो अंकों के जोड़े बनाने पर जितने जोड़े बनते हैं उतने ही अंक उस संख्या की वर्गमूल संख्या में होते हैं। भले ही अन्तिम जोड़े में एक ही अंकशेष हो।

पूर्ण वर्ग संख्या की पहचान

1. पूर्ण वर्ग संख्या का इकाई अंक 0, 1, 4, 5, 6 तथा 9 होता है अर्थात् जिस संख्या का इकाई अंक 2, 3, 7 व 8 होता है वह पूर्ण वर्ग संख्या नहीं होती है।
2. पूर्ण वर्ग संख्या के अन्त में शून्यों की संख्या सम होती है एवं शून्यों के पूर्व संख्या वर्ग संख्या हो। जिससे संख्या के अन्त में शून्यों की संख्या विषम होती है तो वह संख्या पूर्ण वर्ग संख्या नहीं होती है।
3. किसी संख्या का बीजांक 2, 3, 5, 6 व 8 हो तो वह पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।

वर्गमूल ज्ञात करने की वैदिक विधि

1. सर्वप्रथम ज्ञात कीजिए कि संख्या पूर्ण वर्ग है अथवा नहीं?
2. यदि संख्या पूर्ण वर्ग हो तो उसके वर्गमूल में अंकों की संख्या ज्ञात करेंगे।
3. इकाई के अंक का पता लगाएँगे।

संख्या का चरम अंक	वर्गमूल का चरम अंक
1	1 या 9
4	2 या 8
5	5
6	4 या 6
9	3 या 7

अब विलोकनम् विधि से निम्न दूसरी सारणी द्वारा ज्ञात कीजिए कि पूर्ण वर्ग संख्या के वर्गमूल का दहाई अंक क्या है ?

संख्या समूह	वर्गमूल का दहाई अंक
1 – 3	1
4 – 8	2
9 – 15	3
16 – 24	4
25 – 35	5
36 – 48	6
49 – 63	7
64 – 80	8
81 – 99	9

समूह 1–3 का अर्थ है कि इस समूह में 1, 2 व 3 संख्याएँ है और इन तीनों का सम्भावित वर्गमूल एक माना जा सकता है।

वर्गमूल ज्ञात करने की विलोकनम् विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण 30 संख्या 361 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल संख्या को देखने पर निम्न निष्कर्ष प्राप्त हुए।

(i) संख्या 361 का इकाई अंक 1 है अतः पूर्ण वर्ग संख्या हो सकती है।

(ii) संख्या 361 का बीजांक = 3+1+6 = 10 अतः 10 का बीजांक = 1 + 0 = 1 यह पूर्ण वर्ग हो सकती है।

(iii) इस संख्या के वर्गमूल में दो अंक हो सकते हैं।

(iv) संख्या 361 में दाहिनी ओर से दो–दो अंकों के जोड़े बनाने पर दूसरे जोड़े में संख्या 3 रहती है अतः संख्या के वर्गमूल का दहाई अंक एक होगा।

(v) संख्या का चरम अंक 1 है अतः वर्गमूल का चरम अंक 1 या 9 होगा एवं दहाई अंक के लिए 3 है जो 1–3 समूह में होने से वर्गमूल में दहाई का अंक 1 होगा।

(vi) इस प्रकार 361 का वर्गमूल 11 अथवा 19 हो सकता है।

(vii) वर्गमूल के दहाई अंक 1 को उसके एकाधिक से गुणा कीजिए।

गुणनफल $= 1 \times 2 = 2$, दूसरे जोड़े का $3 >$ गुणनफल 2

अतः 11 अथवा 19 में से बड़ा वर्गमूल लेते हैं।

वर्गमूल = 19 उत्तर

उदाहरण 31 संख्या 5184 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल (i) प्रथम जोड़ा = 84 तथा द्वितीय जोड़ा = 51

(ii) प्रथम जोड़े का चरम अंक = 4 अतः सम्भावित वर्गमूल का चरम अंक 2 या 8 हो सकता है।

(iii) 51 में समाहित सबसे बड़ा वर्गमूल अंक = 7 अतः सम्भावित वर्गमूल 72 या 78

गुणनफल $= 7 \times 8 = 56$

(iv) $51 < 56$ है अतः छोटी संख्या ही वर्गमूल होगी। वर्गमूल = 72

विशेष – इस विधि से केवल 4 अंको तक की पूर्ण वर्ग संख्या का ही वर्गमूल ज्ञात किया जा सकता है।

प्रश्नावली 6.7

विलोकनम् विधि से वर्गमूल ज्ञात कीजिए –

(1)	169	(2)	324	(3)	576	(4)	2025
(5)	3025	(6)	9025	(7)	1024	(8)	441

6.11 भाग संक्रिया

जब किसी संख्या से किसी संख्या को क्रमशः कई बार घटाया जाता है तो क्रमशः घटाने की क्रिया को भाग संक्रिया कहा जाता है। जिस संख्या से घटाया जाता है, उसे भाज्य कहते हैं जिसे घटाया जाता है वह भाजक कहलाता है। किसी संख्या से किसी संख्या को जितने बार घटाया जा सकता है वह भाग संक्रिया का भागफल कहलाता है। किसी संख्या से किसी संख्या को अधिकतम बार घटाने से जो संख्या शेष रहती है। उसे शेषफल कहते है। शेषफल सदैव भाजक से छोटा होता है।

उदाहरण 32 संख्या 10 में क्रमशः संख्या 2 को घटाने पर।

हल $10-2 = 8$, $8-2 = 6$, $6-2 = 4$, $4-2 = 2$, $2-2 = 0$

यहाँ पर भाज्य 10 एवं भाजक 2 है घटाने की संक्रिया 5 बार की गयी है। जब शेष भाजक से छोटी संख्या प्राप्त हुई है। अतः भागफल = 5 शेषफल = 0।

6.11.1 परावर्त्य योजयेत् विधि– जब भाजक आधार के निकट होता है तब इस विधि का प्रयोग किया जाता है। इस विधि में भाजक की आधार संख्या से भाज्य में भाग देकर अनुमानित भागफल एवं शेषफल ज्ञात कर लिया जाता है।

इसके दो प्रकार है (क) जब भाजक आधार संख्या से बड़ा हो।
(ख) जब भाजक आधार संख्या से छोटा हो।

(क) जब भाजक आधार संख्या से बड़ा हो –

(1) भाजक का आधार संख्या से विचलन ज्ञात करते हैं।

(2) विचलन का परावर्त्य करके संशोधन गुणक ज्ञात करते हैं। (चिह्न बदलते हैं)

(3) भाज्य का प्रथम अंक छोड़कर संशोधन गुणक से भाग देते हैं।

(4) भाग संक्रिया को 3 खण्डों में विभाजित करना है। उदाहरण से समझें।

उदाहरण 33 4656 ÷ 11 को हल कीजिए ।

हल

भाजक	11	4 6 5	6
आधार	10	$\bar{4}$ -	-
विचलन	1	$\bar{2}$	$\bar{3}$
संशोधन गुणांक	$\bar{1}$		
भागफल		**4 2 3**	**3** शेषफल

क्रियाविधि–

1. भाग संक्रिया को पूर्ण करने के लिए पहले तीन खण्ड बनाना।
2. प्रथम खण्ड में भाजक, द्वितीय खण्ड में भाज्य तथा तृतीय खण्ड में आधार के अनुसार आधार में जितने शून्य हैं उतने ही अंक रखना है। जैसे – उदाहरण–1 में आधार 10 है तो तृतीय खण्ड में 1 अंक रखते हैं जबकि उदाहरण–2 में आधार 100 है व तीसरे खण्ड में 2 अंक रखते हैं।
3. आधार, विचलन एवं संशोधन गुणांक ज्ञात करना।
4. भाज्य संख्या का बाँई और का प्रथम अंक नीचे लिखना।
5. नीचे लिखे अंक का संशोधन गुणक से गुणा करके भाज्य के आगे की संख्या के नीचे लिखना।
6. घटाकर का नीचे लिखना फिर उसका संशोधन गुणक से गुणा करना। इसी क्रिया को आगे तब तक करेंगे जब तक तृतीय खण्ड में अंक आ जाएँ।

उदाहरण 34 35984 ÷ 112 को हल कीजिए।

हल

भाजक	1 1 2	3 5 9	8 4
आधार	1 0 0	$\bar{3}$ $\bar{6}$	- -
विचलन	1 2	$\bar{2}$	$\bar{4}$
संशोधन गुणांक	$\bar{1}$ $\bar{2}$		$\bar{1}$ 2
	भागफल	**3 2 1**	32 शेषफल

(ख) जब भाजक आधार संख्या से छोटा हो–

पूर्व में की गई क्रिया विधि के अनुसार ही हल करना है। उदाहरण से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण 35 30103 ÷ 9 को हल कीजिए।

हल

भाजक	9	3 0 1 0	3
आधार	1 0	3 - -	-
विचलन	$\bar{1}$	3 -	-
संशोधन गुणांक	1	4	4
	भागफल	**3 3 4 4**	7 शेषफल

ध्यान रहे इस बार संशोधन गुणांक धनात्मक है अतः यह अगली संख्या में जुड़ेगा।

दिए गए उदाहरण में 9 का भाग देना है जो नजदीकी आधार 10 से एक कम है।

भाज्य में प्रथम अंक 3 को तो ज्यों का त्यों भागफल में लिख देंगे फिर 3 की संशोधन गुणांक (+1) से गुणा कर अगली संख्या 0 में जोड़ेंगे भागफल 3 आया जिसे आड़ी संख्या के नीचे लिखेंगे, पुनः इसे संशोधन गुणांक संख्या से गुणाकर अगली संख्या में जोड़ेंगे और भागफल में लिखेंगे और यही क्रम आखिर तक चलेगा।

उदाहरण 36 11022 ÷ 89 को हल कीजिए।

हल

भाजक	8 9	1 1 0	2 2
आधार	1 0 0	1 1	-
विचलन	$\bar{1}$ $\bar{1}$	2	2
संशोधन गुणांक	1 1		3 3
	भागफल	**1 2 3**	75 शेषफल

प्रश्नावली 6.8

निम्न प्रश्नों को हल कीजिए।

(1)	$23244 \div 11$	(2)	$12064 \div 12$	(3)	$1234 \div 112$
(4)	$324842 \div 101$	(5)	$2012 \div 9$	(6)	$10321 \div 98$

हमने सीखा

(1) सूत्र संकलन व्यवकलनाभ्याम् के आधार पर संख्याओं को 10 या 10 का गुणक से विचलन कर जोड़ एवं व्यवकलन करवाया गया।

(2) सूत्र पूरणापूरणाभ्याम् के द्वारा दो संख्याओं को पूर्ण के नजदीक बनाकर जोड़ व व्यवकलन करवाया गया।

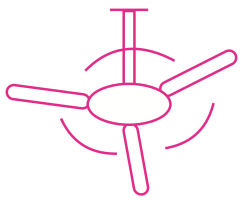
(3) सूत्र निखिलम नवतः चरमंदशतः का उपयोग कर व्यवकलन कराने का प्रयास कराया गया।

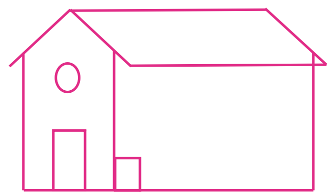
(4) वैदिक गणित की कुछ मनोरंजक गुणनविधियाँ सीखी है, जिसमें 10, 100, 1000, 5, 50, 500 व 11 से गुणा के सरल तरीके जो मौखिक हो सकते हैं को लिखने का प्रयास किया गया। एक न्यूनेन से 99,99,999 के गुणा करने का प्रयास किया।

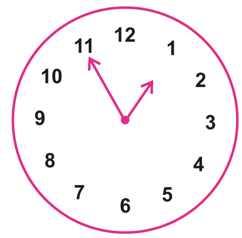
(5) भिन्न, भिन्नों का योग, व्यवकलन, गुणा के सरलतम तरीकों के साथ वर्गमूल एवं भाग वैदिक विधि में क्रमशः उपसूत्र आनुरूपेण, विलोकनम् व निखिलम् विधि से सरलता से ज्ञात किए जा सकेंगे।

अध्याय 7
कोण एवं रेखाएँ

7.1 नीचे दिए गए चित्रों को ध्यान से देखिए।

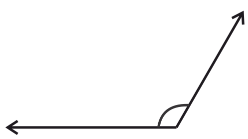
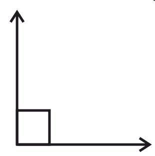
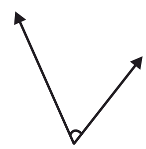

(i)


(ii)



(iii)

प्रत्येक चित्र में बनने वाले कोणों को देखकर बताइए कि यह न्यून कोण है, समकोण है अथवा अधिक कोण है।

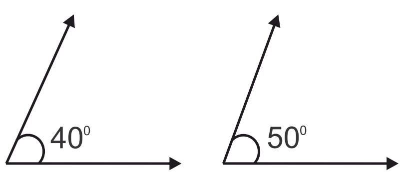




....

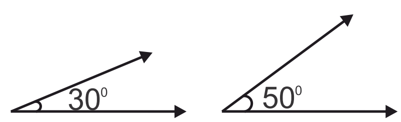
7.1.1 पूरक कोण

जब दो कोणों का योग 90° के बराबर होता है तो वह परस्पर **पूरक कोण** कहलाते हैं जैसे 30° का पूरक कोण 60° होगा तथा 60° का पूरक कोण 30° होगा (30° + 60° = 90°) । बताइए 45° का पूरक कोण क्या होगा?

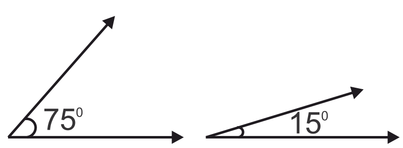
नीचे दिए गए कोणों के जोड़ों में कौन–कौन से पूरक कोण है ?



(i)



(ii)



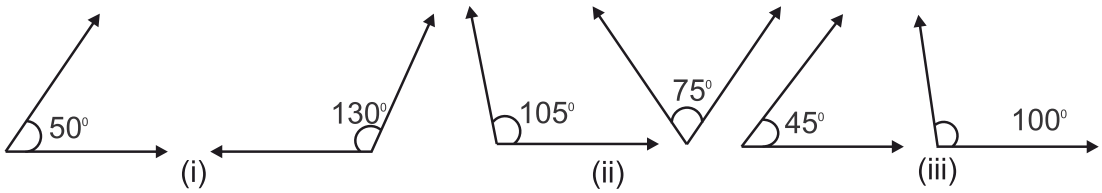
(iii)

करो और सीखो

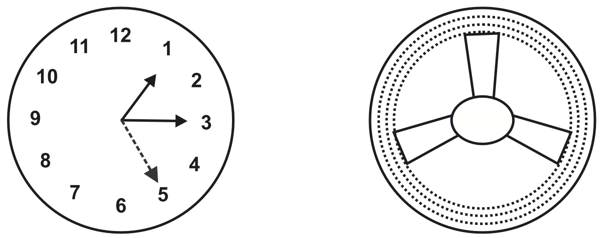
1. क्या दो न्यून कोण एक दूसरे के पूरक हो सकते हैं ?
2. क्या दो अधिक कोण एक दूसरे के पूरक कोण हो सकते हैं ?
3. समकोण का पूरक कोण क्या होता है ?

7.1.2 संपूरक कोण

जब दो कोणों का योग 180^{0} होता है तो ये कोण एक दूसरे के **संपूरक कोण** कहलाते हैं। नीचे दिए गए कोणों के युग्म में कौन–कौन से संपूरक कोण हैं।



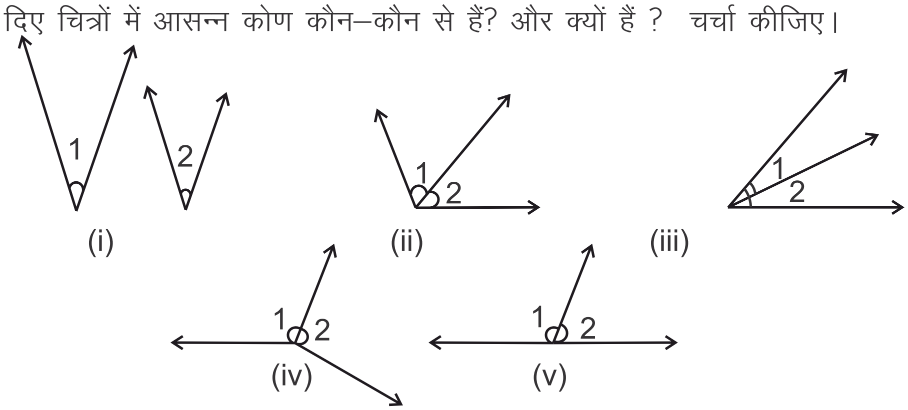
7.1.3 आसन्न कोण



इन चित्रों में आपको दो–दो कोण आपस में जुड़े हुए दिख रहे हैं।
इस तरह से दो जुड़े हुए कोण आप और कहाँ – कहाँ देखते हैं ?
कोणों के ऐसे युग्म आसन्न कोण कहलाते हैं।

आसन्न कोणों में एक उभयनिष्ठ शीर्ष तथा एक उभयनिष्ठ भुजा होती है, तथा दोनों कोण उभयनिष्ठ भुजा के एक ही ओर न होकर विपरित ओर होते हैं।

नीचे दिए चित्रों में आसन्न कोण कौन–कौन से हैं? और क्यों हैं ? चर्चा कीजिए।



महक की कक्षा में चर्चा इस प्रकार हुई।

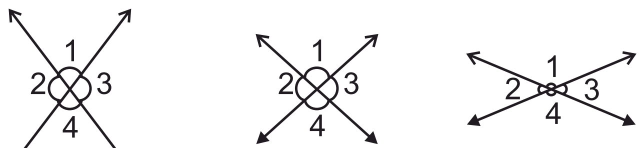
महक : चित्र (i) और (iii) में आसन्न कोण नहीं बन रहे हैं। क्योंकि चित्र (i) मे उभयनिष्ठ शीर्ष नहीं है और चित्र (iii) में उभयनिष्ठ भुजा बीच में नहीं है।

चन्दा : हाँ बाकी तीनों चित्रों में आसन्न कोण बन रहे हैं, और चित्र (v) में तो दोनों भुजाएँ जो उभयनिष्ठ नहीं है वे मिलकर एक सरल रेखा भी बना रही है।

महक : सरल रेखा तो 180^{0} का कोण बनाती है।

रैखिक कोण युग्म– ऐसे आसन्न कोण जिसमें उभयनिष्ठ भुजा के दोनों तरफ बने कोणों का योग 180^0 होता है, रैखिक कोण युग्म कहलाते हैं। ये कोण संपूरक भी होते हैं।

7.1.4 सम्मुख कोण (शीर्षाभिमुख कोण)



(i) (ii) (iii)

दिए गए चित्रों को ट्रेस पेपर की सहायता से एक कागज पर बना लीजिए। अब प्रत्येक चित्र के चारों कोणों को कैंची से काटकर अलग–अलग कर लीजिए।

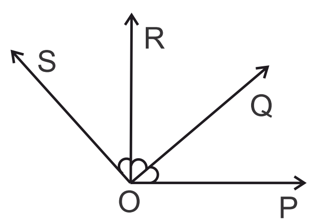
अब कोणों को एक दूसरे के ऊपर रखकर देखें, कौन–कौन से कोण बराबर हैं।

आप यह पाएँगे कि प्रत्येक चित्र में कोण 1, कोण 4 के तथा कोण 2, कोण 3 के बराबर है।

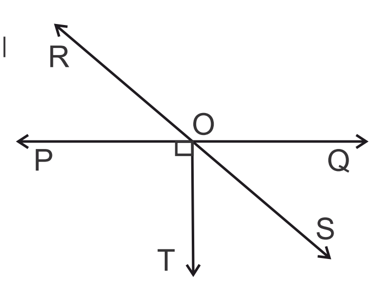
यह कोण युग्म $\angle 1$, $\angle 4$ तथा $\angle 2$, $\angle 3$ शीर्षाभिमुख कोण कहलाते हैं, **शीर्षाभिमुख कोण** दो रेखाओं के किसी बिन्दु पर काटने से निर्मित होते हैं।

प्रश्नावली 7.1

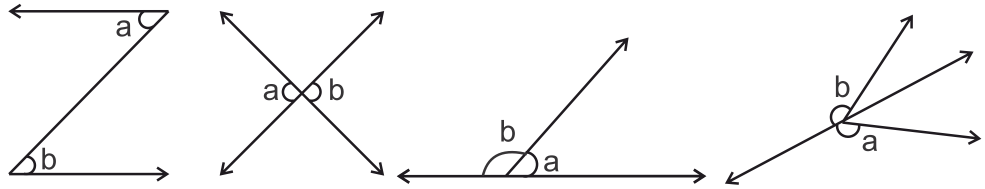
1. कोणों के निम्नलिखित जोड़ों में से पूरक और संपूरक जोड़ों को अलग–अलग लिखिए।
   (i) $140^0, 40^0$ (ii) $170^0, 10^0$ (iii) $75^0, 15^0$
   (iv) $33^0, 57^0$ (v) $115^0, 65^0$ (vi) $25^0, 65^0$
2. ऐसे कोण युग्म ज्ञात कीजिए जो एक दूसरे के पूरक हों और दोनों समान भी हों।
3. एक समकोण के संपूरक कोण का मान क्या होगा?
4. नीचे दिए गए चित्र में आसन्न कोणों के युग्म लिखिए।



5. दिए गए चित्र में निम्नलिखित कोणों के युग्म ज्ञात कीजिए।
(i) समान संपूरक कोण
(ii) असमान संपूरक कोण
(iii) शीर्षाभिमुख कोण
(iv) आसन्न कोण जो रैखिक युग्म नहीं है
(v) आसन्न पूरक कोण

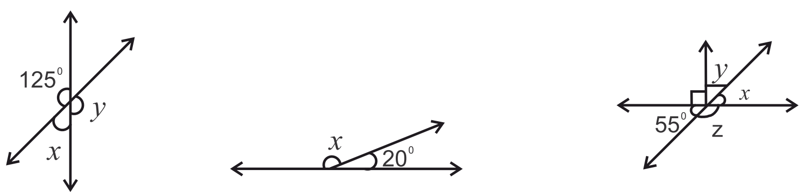


6. निम्न में से कौनसी आकृतियों में कोण a व b आसन्न कोण हैं।



(i) (ii) (iii) (iv)

7. निम्नलिखित में अज्ञात कोणों का मान ज्ञात कीजिए ।



(i) (ii) (iii)

8. सत्य या असत्य लिखिए।

(i) रैखिक युग्म बनाने वाले दोनों कोणों का योग 180° होता है।

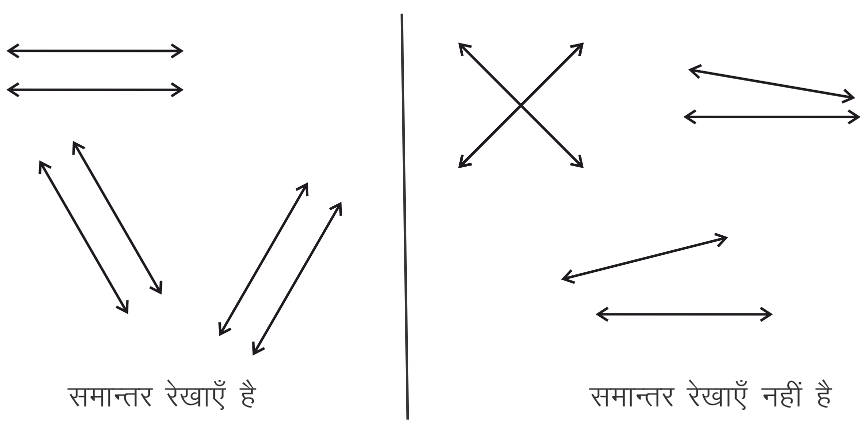
(ii) शीर्षाभिमुख कोणों के मापों का योग 90^{0} होता है।

(iii) यदि दो कोण संपूरक हैं तो उनके मापों का योग 180° होता है।

(iv) यदि दो आसन्न कोण संपूरक हो तो वे रैखिक कोण युग्म कहलाते हैं।

7.2 रेखा युग्म

नीचे दिए गए रेखा युग्मों को देखिए।

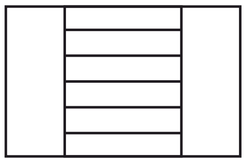


समान्तर रेखाएँ है   समान्तर रेखाएँ नहीं है

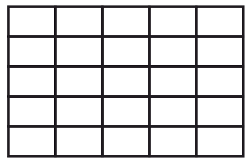
7.2.1 समान्तर रेखाएँ

दो समतलीय रेखाएँ जो एक दूसरे को नहीं काटती है अर्थात् इनके बीच की लम्बवत दूरी सदैव समान रहती हैं, **समान्तर रेखाएँ** कहलाती है।

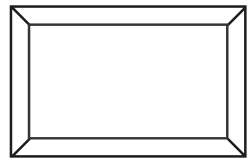
नीचे दिए गए चित्रों को ध्यान से देखिए और उनमें समान्तर रेखाएँ ढूँढिए।



खिड़की



ग्रिड पेपर

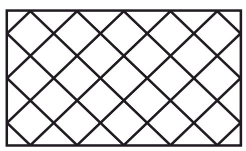


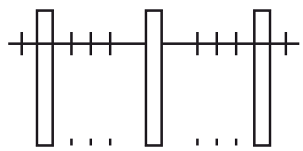
ब्लेक बोर्ड

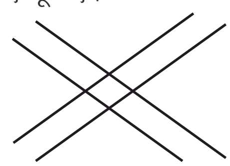
7.2.2 प्रतिच्छेदी रेखाएँ

ऐसी रेखाएँ जो समान्तर नहीं होती है अर्थात् एक दूसरे को काटती है, प्रतिच्छेदी रेखाएँ कहलाती है।

नीचे दिए गए चित्रों को ध्यान से देखिए और उनमें प्रतिच्छेदी रेखाएँ ढूँढिए।

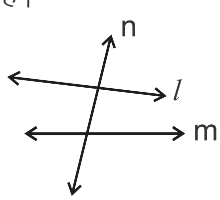




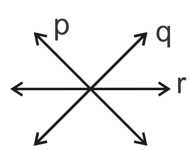


7.2.3 तिर्यक छेदी रेखाएँ

एक ऐसी रेखा जो दो या दो से अधिक रेखाओं को भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है, तिर्यक छेदी रेखा कहलाती है।



चित्र–A



चित्र–B

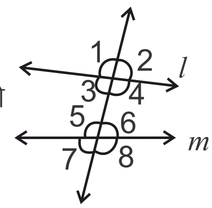
चित्र – A में रेखा युग्म l तथा m को तिर्यक छेदी रेखा n दो अलग–अलग बिन्दुओं पर काटती है। क्या चित्र B में कोई तिर्यक छेदी रेखा है? हम देखते हैं कि चित्र B में सभी रेखाएँ एक ही बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है। अतः ये तिर्यक छेदी रेखा का उदाहरण नहीं है।

करो और सीखो

1. एक रेखा युग्म के लिए कितनी तिर्यक छेदी रेखाएँ खींची जा सकती है ?
2. यदि तीन रेखाओं पर एक तिर्यक छेदी रेखा खींची जाए तो कितने प्रतिच्छेद बिन्दु प्राप्त होंगे ?

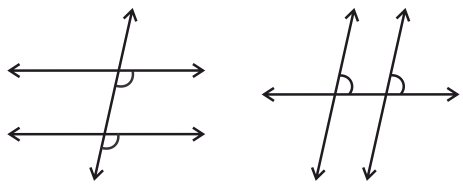
7.2.3.1 तिर्यक छेदी रेखा द्वारा बनने वाले कोण

जब रेखा l तथा m को तिर्यक छेदी रेखा (p) काटती है तो 8 विभिन्न कोण बनते हैं। चित्र में इन 8 कोणों को देखिए।



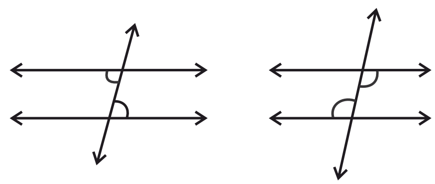
इन कोणों में बाहर की ओर बनने वाले कोण $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 7$ व $\angle 8$ हैं, ये बाह्य कोण कहलाते हैं। इसी प्रकार अंदर की ओर बनने वाले कोण $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$ व $\angle 6$ अन्तः कोण कहलाते हैं।

संगत कोण



संगत कोण F आकार बनाते हैं।

एकान्तर कोण

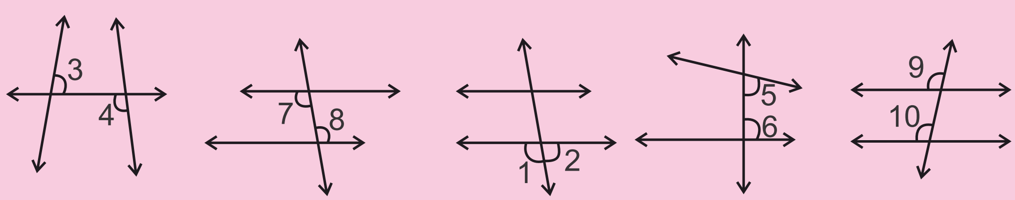


एकान्तर कोण में Z आकृति बनती है।

संगत कोण युग्म	$\angle 1$ व $\angle 5$, $\angle 2$ व $\angle 6$, $\angle 3$ व $\angle 7$, $\angle 4$ व $\angle 8$
एकान्तर अन्तः कोण युग्म	$\angle 3$ व $\angle 6$, $\angle 4$ व $\angle 5$
एकान्तर बाह्य कोण युग्म	$\angle 1$ व $\angle 8$, $\angle 2$ व $\angle 7$
तिर्यक छेदी रेखा के एक ही ओर बने अन्तः कोण युग्म	$\angle 3$ व $\angle 5$, $\angle 4$ व $\angle 6$
तिर्यक छेदी रेखा के एक ही ओर बने बाह्य कोण युग्म	$\angle 1$ व $\angle 7$, $\angle 2$ व $\angle 8$

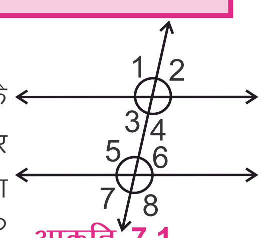
करो और सीखो

प्रत्येक आकृति में कोण युग्म को पहचान कर उनके नाम लिखिए।



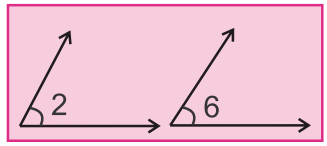
7.2.3.2 समान्तर रेखाओं की तिर्यक छेदी रेखा

दिए गए चित्र को देख कर एक कागज पर बनाइए। अब इसके सभी कोणों को अलग–अलग काट लीजिए। अब $\angle 2$ को $\angle 6$ पर रखकर देखिए क्या ये बराबर है ? इसी प्रकार सभी संगत कोण युग्मों को एक दूसरे पर रखकर देखिए, क्या वह आपस में बराबर है ?



आकृति 7.1

आप पाएँगे कि समान्तर रेखाओं के संगत कोण बराबर है। इसी प्रकार कोणों की कटिंग्स को एक दूसरे पर रखकर निम्न तथ्यों की जाँच कीजिए। क्या एकान्तर कोण युग्म बराबर है ? उक्त क्रियाकलाप से निम्न परिणामों की प्राप्ति होती है।



यदि दो समान्तर रेखाओं को एक तिर्यक छेदी रेखा काटती है तो बनने वाले एकान्तर कोण आपस में बराबर होंगे।

आकृति 7.1 में $\angle 3 + \angle 1 = 180^0$ ($\angle 3$ और $\angle 1$ रैखिक कोण युग्म बनाते हैं)

परन्तु $\angle 1 = \angle 5$ (संगत कोण युग्म)

इस प्रकार $\angle 5 + \angle 3 = 180^0$

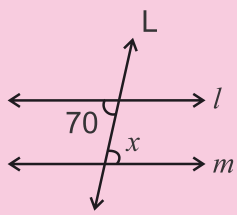
इस प्रकार हमें निम्नलिखित परिणाम की प्राप्ति होती है।

यदि दो समान्तर रेखाएँ किसी एक तिर्यक छेदी रेखा द्वारा काटी जाती है तो तिर्यक छेदी रेखा के एक ही ओर बने अन्तः कोणों का प्रत्येक युग्म संपूरक होता है।

करो और सीखो

1. निम्न चित्रों को देखिए और बताइए।

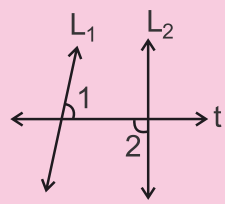
(i)



$l || m$, L एक तिर्यक छेदी रेखा है।

$\angle x = ?$

(ii)

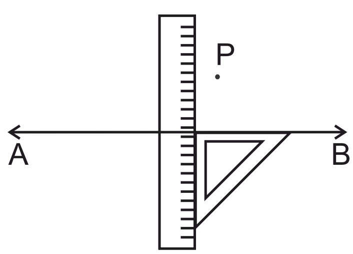


L_1, L_2 दो रेखाएँ तथा t एक तिर्यक छेदी रेखा है।

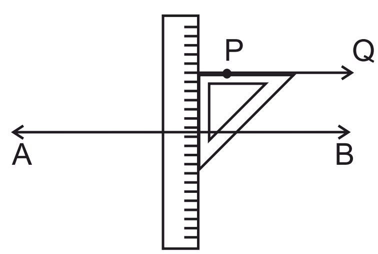
क्या $\angle 1 = \angle 2$ है ?

7.3.1 किसी बाह्य बिन्दु से दी गई रेखा के समान्तर रेखा खींचना

एक रेखा AB दी गई है और उसके बाहर बिन्दु P दिया गया है, P से AB के समान्तर रेखा खींचनी है।



(i)

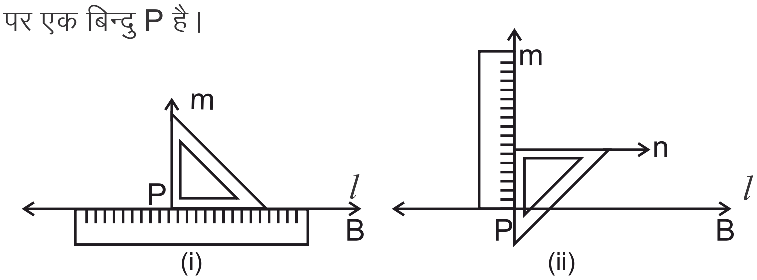


(ii)

चित्रानुसार स्केल व सेट स्क्वायर की सहायता से समान्तर रेखा खींच सकते हैं।

7.3.2 दी गई रेखा के समान्तर दी हुई दूरी पर रेखा खींचना

रेखा l पर एक बिन्दु P है।

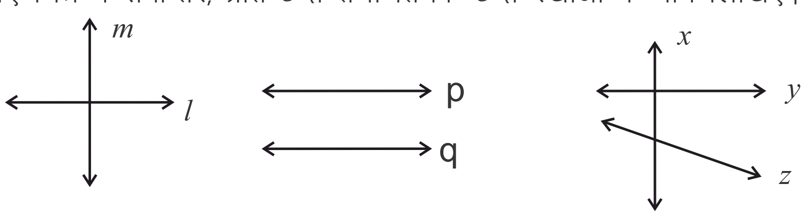


– चित्र (i) में दिखाए अनुसार सेट स्क्वायर के समकोण वाले सिरे को रेखा l पर सटा कर रखिए और बिन्दु P पर एक लम्बवत रेखा खींचिए।

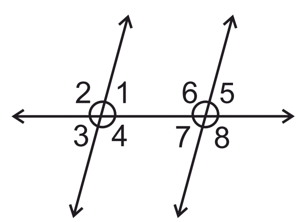
– चित्र (ii) में दिखाए अनुसार सेट स्क्वायर को बिन्दु P पर घुमा कर रखिए और दूसरे सिरे पर रेखा n (दी गई दूरी पर) रेखा l के समान्तर बनाइए।

प्रश्नावली 7.2

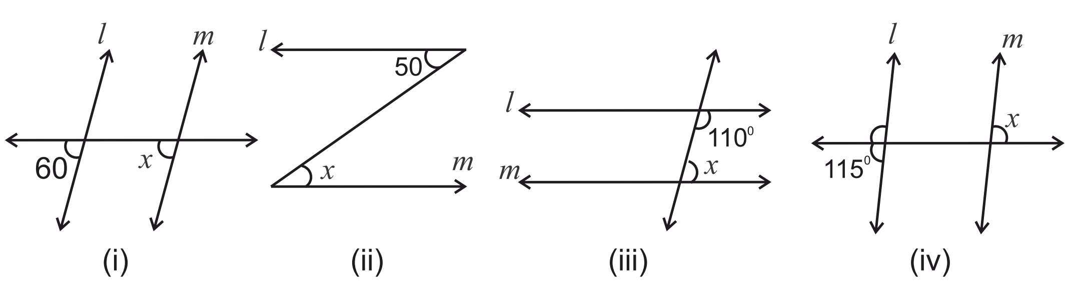
1. दिए गए चित्र में समान्तर, प्रतिच्छेदी तथा तिर्यक छेदी रेखाओं के नाम लिखिए।



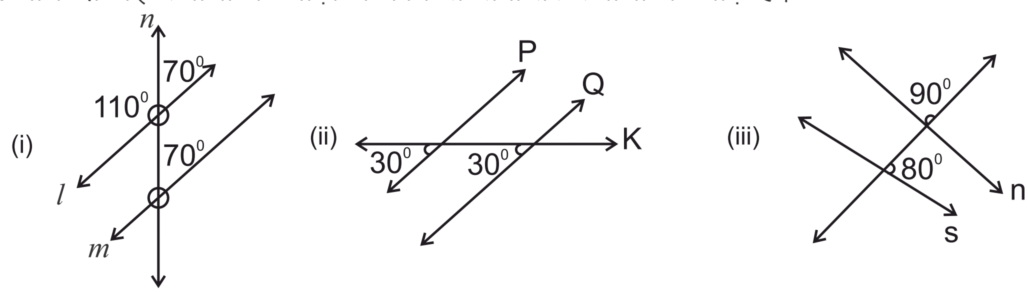
2. दिए गए चित्र में बताइए।
   (i) अन्तः एकान्तर कोणों के नाम
   (ii) बाह्य एकान्तर कोणों के नाम
   (iii) संगत कोणों के नाम
   (iv) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अन्तः कोणों का नाम।



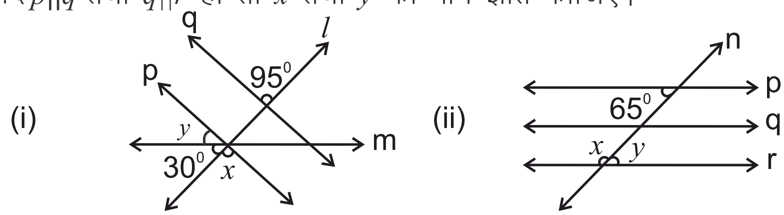
3. यदि $l \parallel m$ हो तो x का मान बताइए ।



4. नीचे दी गई रेखाओं के जोड़ो में कौन से समान्तर रेखाओं के जोड़े हैं।



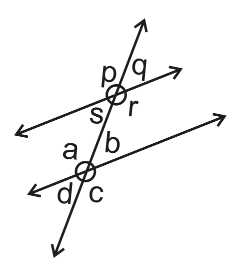
5. यदि $p||q$ तथा $q||r$ हो तो x तथा y का मान ज्ञात कीजिए।



6. एक रेखा PQ खींचिए और इसके समान्तर रेखा RS खींचिए।
7. एक रेखा AB खींचिए और रेखा AB पर स्थित किसी बिन्दु से लंब खींचिए। इस लंब रेखा पर AB से 5 सेमी दूरी पर एक बिन्दु C लीजिए। C से होकर AB के समान्तर रेखा खींचिए।

हमने सीखा

1. (i) जब दो कोणों का योग 90° हो तो वह परस्पर पूरक कोण कहलाते हैं।
   (ii) पूरक कोणों में प्रत्येक कोण न्यून कोण होता है।
2. (i) यदि दो कोणों का योग 180° हो तो वह परस्पर संपूरक कोण कहलाते हैं।
   (ii) संपूरक कोणों के युग्म में एक कोण न्यून कोण, समकोण या अधिक कोण हो सकता है।
   (iii) दो समकोण सदैव एक दूसरे के संपूरक होते हैं।
3. उभयनिष्ठ भुजा एवं उभयनिष्ठ शीर्ष के दोनों और निर्मित कोणों को आसन्न कोण कहते हैं।
4. जब आसन्न कोण संपूरक कोण हो तो वह रैखिक युग्म बनाते हैं।
5. (i) जब दो रेखाएँ एक बिन्दु (शीर्ष बिन्दु) पर प्रतिच्छेदित होती है तो दोनों रेखाओं के आमने–सामने बनने वाले कोण को शीर्षाभिमुख कोण कहते हैं।
   (ii) शीर्षाभिमुख कोणों के युग्म हमेशा समान होते हैं।
6. (i) एक रेखा जो दो या दो से अधिक रेखाओं को अलग–अलग बिन्दुओं पर काटती हो तो वह तिर्यक छेदी रेखा कहलाती है।
   (ii) इस स्थिति में दो रेखाओं पर काटने वाली रेखा आठ कोण बनाती है, जो इस चित्र में दर्शायी गई है।



क्र.सं.	कोणों के प्रकार	युग्मों की संख्या	कोण
1.	अन्तः कोण	–	$\angle s$, $\angle r$, $\angle a$, $\angle b$
2.	बाह्य कोण	–	$\angle p$, $\angle q$, $\angle c$, $\angle d$
3.	शीर्षाभिमुख कोण	4 युग्म	($\angle p$, $\angle r$)($\angle q$, $\angle s$)($\angle a$, $\angle c$)($\angle b$, $\angle d$)
4.	संगत कोण	4 युग्म	($\angle a$, $\angle p$)($\angle b$, $\angle q$)($\angle c$, $\angle r$)($\angle d$, $\angle s$)
5.	एकान्तर अन्तः कोण	2 युग्म	($\angle s$, $\angle b$) ($\angle a$, $\angle r$)
6.	एकान्तर बाह्य कोण	2 युग्म	($\angle p$, $\angle c$) ($\angle q$, $\angle d$)
7.	तिर्यक रेखा के एक ओर बनने वाले अन्तः कोण	2 युग्म	($\angle b$, $\angle r$) ($\angle a$, $\angle s$)

7. जब तिर्यक रेखा दो समान्तर रेखाओं को प्रतिच्छेद करे तो :

(i) संगत कोण आपस में समान होते हैं।

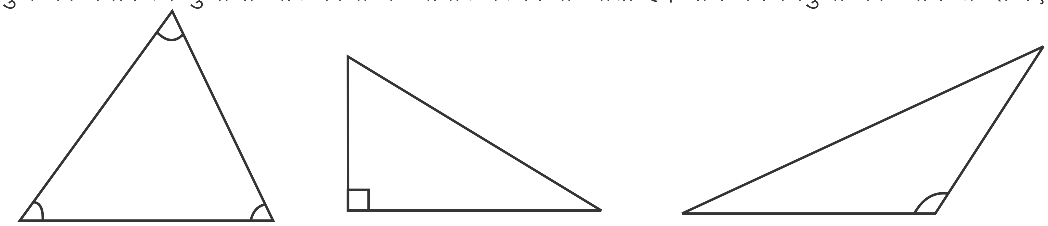
(ii) एकान्तर अन्तःकोण समान होते हैं।

(iii) एकान्तर बाह्यकोण समान होते हैं।

(iv) तिर्यक रेखा के एक ओर बनने वाले अन्तःकोण संपूरक होते हैं।

अध्याय 8
त्रिभुज और उसके गुण

8.1 त्रिभुज तीन रेखाखण्डों से बनी हुई बंद सरल आकृति है। जिसमें तीन भुजाएँ, तीन कोण तथा तीन शीर्ष होते हैं। त्रिभुज का वर्गीकरण भुजाओं और कोणों के आधार पर किया जाता है। नीचे बने त्रिभुजों को ध्यान से देखिए ।



(i) (ii) (iii)

आप इनके कोणों में क्या विशेषता देखते हैं?

त्रिभुज (i) के तीनों कोण न्यून कोण है इसलिए इसे न्यून कोण त्रिभुज कहते हैं।

त्रिभुज (ii) में एक कोण समकोण है इसलिए इसे समकोण त्रिभुज कहते हैं।

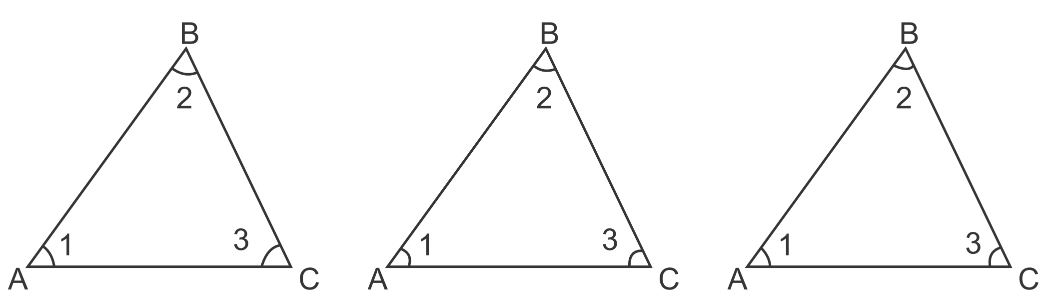
त्रिभुज (iii) में एक कोण अधिक कोण है इसलिए इसे अधिक कोण त्रिभुज कहते हैं।

क्या त्रिभुज के किसी एक कोण को बदलने पर उसके अन्य दो कोणों की माप भी बदलती है ? आप अलग–अलग त्रिभुज बनाकर जाँचें और तालिका में भरें–

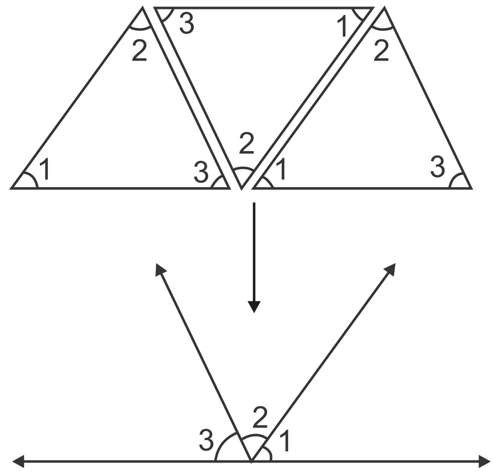
त्रिभुज का नाम	कोणों की माप
Δ ABC	$\angle A=50^0$, $\angle B=60^0$, $\angle C=70^0$
Δ ABC	$\angle A=30^0$, $\angle B=.....^0$, $\angle C=.....^0$
Δ ABC	$\angle A=100^0$, $\angle B=.....^0$, $\angle C=.....^0$

8.2 त्रिभुज के अंतःकोणों का योग गुण

1. तीन समान माप की भुजा व कोण के त्रिभुज बनाकर उन्हें काटिए।



2. तीनों त्रिभुजों को नीचे दिए अनुसार जमाइए ।



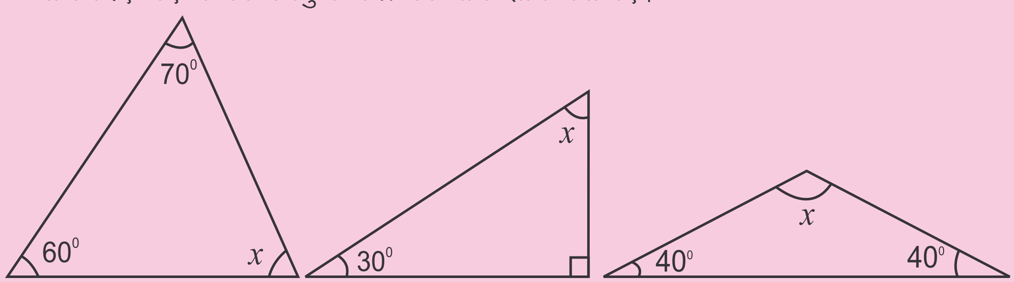
$\angle 1$, $\angle 2$ व $\angle 3$ मिलकर एक सरल कोण का निर्माण करते हैं। अत: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^0$

त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^0 होता है।

आप भी इसी प्रकार के कुछ और त्रिभुज बनाकर तथ्य की जाँच कीजिए ।

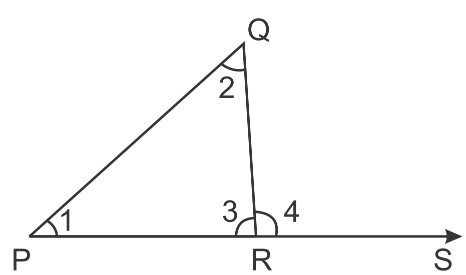
करो और सीखो

नीचे दिए गए प्रत्येक त्रिभुज में x का मान ज्ञात कीजिए।

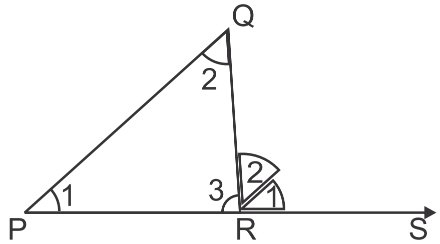


8.3 त्रिभुज के बाह्य कोण एवं इसके गुण

1. एक त्रिभुज PQR बनाइए और इसकी एक भुजा PR को बढाइए।



2. त्रिभुज PQR के समान भुजा व कोण का एक और त्रिभुज बनाकर उसके ∠1 व ∠2 को काट कर नीचे दिए गए चित्रानुसार त्रिभुज PQR के बाह्य कोण ∠QRS पर जमाइए ।



हम देखते हैं कि कोण ∠1 व ∠2 त्रिभुज PQR के बाह्य कोण ∠QRS को पूरी तरह से ढ़क लेते हैं।

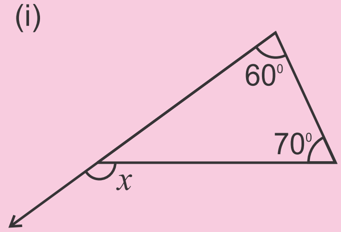
अतः ∠QRS = ∠P + ∠Q

किसी त्रिभुज का बाह्य कोण अपने दोनों सम्मुख अंतः कोणों के योग के बराबर होता है ।

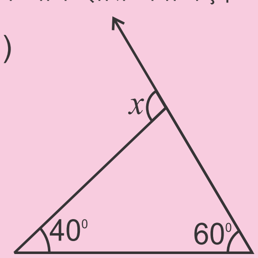
करो और सीखो

1. निम्न चित्रों में बाह्य कोण x का मान ज्ञात कीजिए।

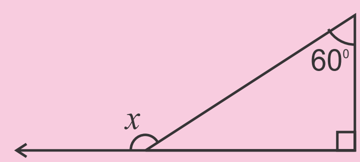
(i)



(ii)



(iii)

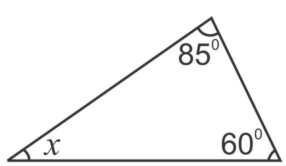


2. क्या कोई ऐसा त्रिभुज संभव है जिसके दो कोण समकोण हो ?

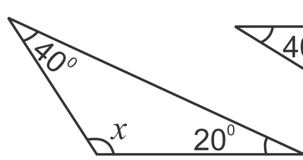
3. क्या कोई ऐसा त्रिभुज संभव है जिसके तीनों कोण 60^0 से अधिक हो ?

प्रश्नावली 8.1

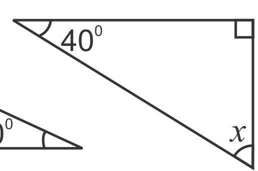
1. नीचे दिये गए त्रिभुजों में अज्ञात कोण x का मान ज्ञात कीजिए।



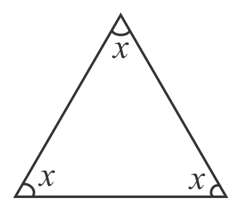
(i)



(ii)

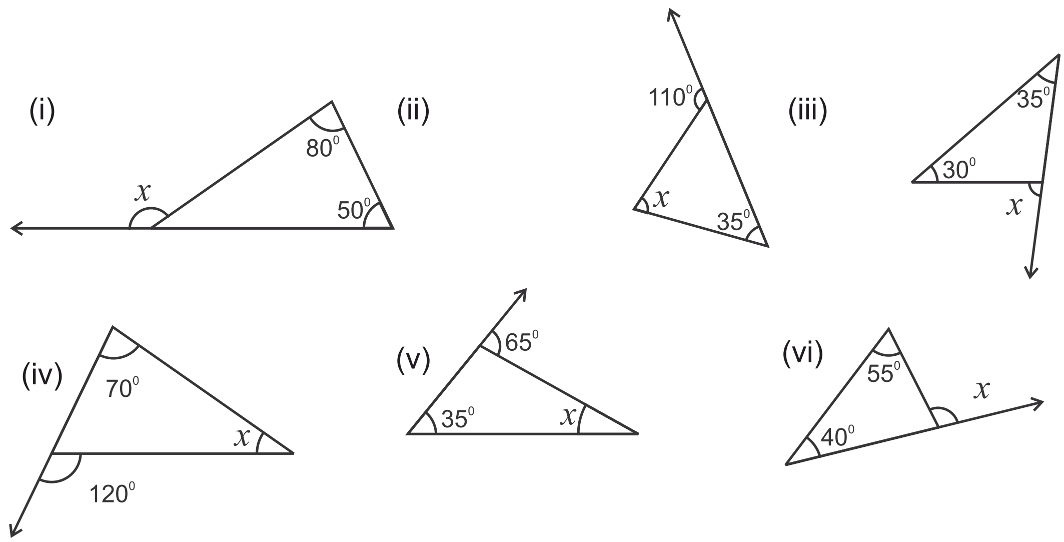


(iii)

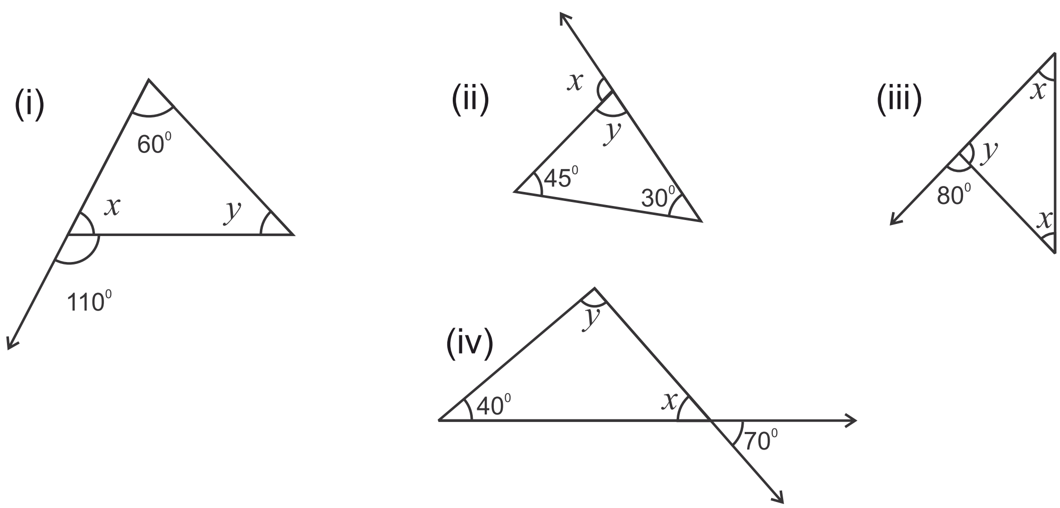


(iv)

2. नीचे दी गई आकृतियों में अज्ञात कोण x का मान ज्ञात कीजिए ।



3. नीचे दी गई आकृतियों में अज्ञात कोण x व y का मान ज्ञात कीजिए ।



4. किसी समकोण त्रिभुज का एक न्यून कोण 45° का है तो इसका दूसरा न्यून कोण ज्ञात कीजिए।
5. किसी त्रिभुज के दो कोण 50°, 50° हो तो तीसरा कोण ज्ञात कीजिए।
6. किसी त्रिभुज के कोण 1 : 2 : 3 अनुपात में हो तो त्रिभुज का प्रत्येक कोण ज्ञात कीजिए।
7. क्या ऐसा समकोण त्रिभुज संभव है जिसके दो कोण क्रमशः 70° व 21° है? नहीं, तो क्यों ? स्पष्ट कीजिए ।
8. नीचे कुछ कोणों के त्रिक दिए गए हैं बताइए इनमें से कौन–कौन से, त्रिभुज के कोणों को प्रदर्शित करते हैं ?
(i)100°, 30°, 40° (ii)30°, 59°, 91° (iii)45°, 45°, 90° (iv)120°, 30°, 50°

8.4 किसी त्रिभुज की भुजाओं की माप में सम्बन्ध

8.4.1 त्रिभुज की दो भुजाओं की मापों का योग

नीचे दिए गए मापों के अनुसार त्रिभुज बनाइए।

1. 5 सेमी, 4 सेमी, 6 सेमी नाप का त्रिभुज XYZ ।
2. 6.5 सेमी , 4.5 सेमी, 3 सेमी नाप का त्रिभुज MNO ।
3. 5 सेमी , 6 सेमी , 12 सेमी नाप का त्रिभुज PQR ।
4. 2.0 सेमी, 3 सेमी, 5 सेमी नाप का त्रिभुज UVW ।

क्या आप सभी माप के त्रिभुज बना पाए ? नहीं तो क्यों ? साथियों से चर्चा करें। आपने जो त्रिभुज बनाए उसकी भुजाओं की माप तालिका में दिखाए अनुसार भरिए।

त्रिभुज का नाम	भुजा का माप	दो भुजाओं का योग	भुजाओं में संबंध	दो भुजाओं का योग तीसरी से अधिक है	त्रिभुज बना हाँ/ नहीं
ΔXYZ	x = 5 y = 4 z = 6	$x + y$ = 5 + 4 $y + z$ = 4 + 6 $z + x$ = 6 + 5	$x + y > z$ 9 > 6 $y + z > x$ 10 > 5 $z + x > y$ 11 > 4	हाँ हाँ हाँ	
ΔMNO	m = n = o =	m + n = n + o = o + m =			
ΔPQR	p = q = r =	p + q = q + r = r + p =			
ΔUVW	u = v = w =	u + v = v + w = w + u =			

इस तालिका से हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि **त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की मापों का योग हमेशा तीसरी भुजा के माप से अधिक होता है।**

8.4.2 त्रिभुज की दो भुजाओं की मापों का अन्तर

इसी प्रकार दो भुजाओं की माप के अन्तर पर विचार कीजिए । आपने क्या देखा ?

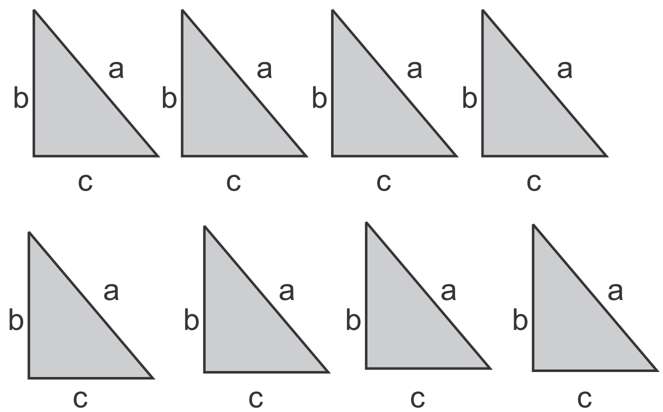
क्या किन्हीं दो भुजाओं का अन्तर तीसरी भुजा से कम हैं, अधिक है अथवा बराबर है ? ऐसे कई त्रिभुजों की भुजाओं को जाँचने पर आप पाएँगे कि त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का अन्तर तीसरी भुजा से छोटा होता है।

करो और सीखो

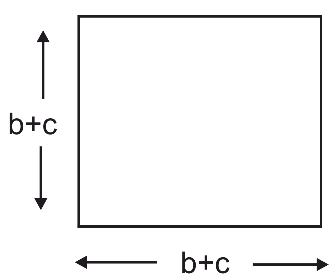
1. एक त्रिभुज बनाइए जिसकी भुजाओं की माप 3.5 सेमी, 4.5 सेमी तथा 6 सेमी हो।
2. क्या एक ऐसा त्रिभुज बन सकता है जिसकी भुजाओं की माप 4 सेमी, 5 सेमी और 9 सेमी हो।

8.5 बोधायन प्रमेय (पाइथागोरस प्रमेय)

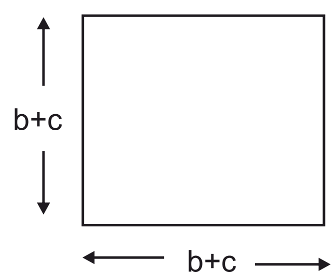
1. एक समकोण त्रिभुज बनाइए इसके आठ समान प्रतिरूप कार्डशीट पर बनाइए और उन्हें काट लीजिए । मान लीजिए त्रिभुज के समकोण के सामनेवाली भुजा (कर्ण) की लम्बाई a तथा अन्य भुजाओं की लम्बाई क्रमशः b व c है।



2. अब त्रिभुज की भुजा b और c का योग कीजिए तथा (b + c) माप की भुजा वाले दो एक समान वर्ग एक अन्य कार्डशीट पर बनाइए।

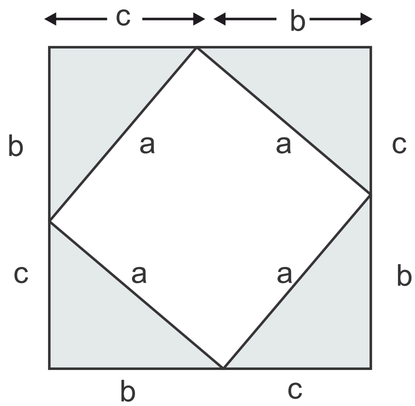


वर्ग – I

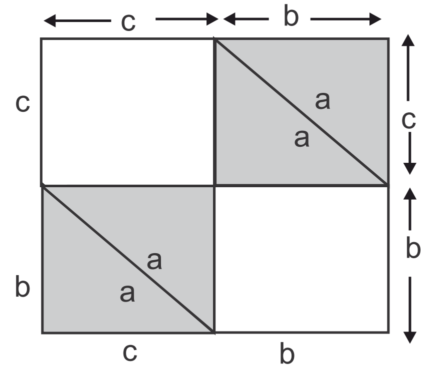


वर्ग – II

3. अब ऊपर बनाए त्रिभुजों में से चार त्रिभुजों को वर्ग – I में तथा चार त्रिभुजों को वर्ग –II में नीचे दिए गए चित्रानुसार जमाइए।



वर्ग I



वर्ग II

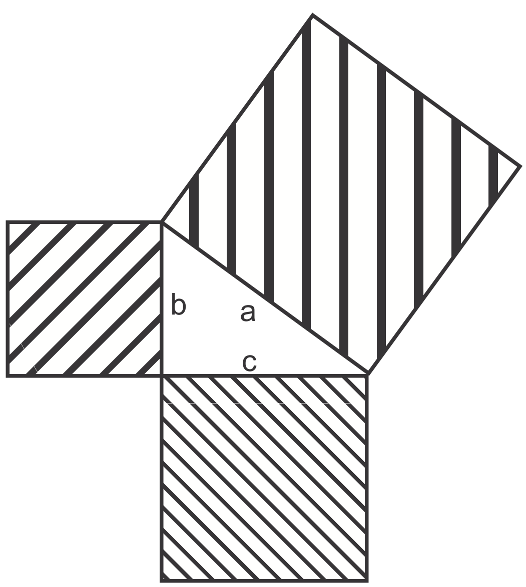
4. दोनों वर्ग एक समान है तथा आठों त्रिभुज भी एक समान है।

अतः वर्ग I के खाली भाग का क्षेत्रफल = वर्ग II के खाली भाग का क्षेत्रफल

या वर्ग I के खाली भाग में बने वर्ग का क्षेत्रफल = वर्ग II के खाली भाग में बने दोनों वर्गों के क्षेत्रफलों का योग।

अर्थात् $a^2 = b^2 + c^2$

समकोण त्रिभुजों का यह सम्बन्ध पाइथोगोरस प्रमेय के नाम से जाना जाता है, इसे सर्वप्रथम भारतीय गणितज्ञ बोधायन ने ज्ञात किया था, जिसका आधुनिक गणित में पाइथोगोरस ने व्यवस्थित प्रमाण दिया। इस प्रमेय को निम्न प्रकार भी समझा जा सकता है। हम a माप की भुजा वाले वर्ग को Δ abc के सबसे बड़ी भुजा (कर्ण) तथा b माप की भुजा व c माप की भुजा वाले वर्ग को Δ abc की भुजा b व c पर नीचे दिए गए चित्रानुसार जमा सकते हैं।

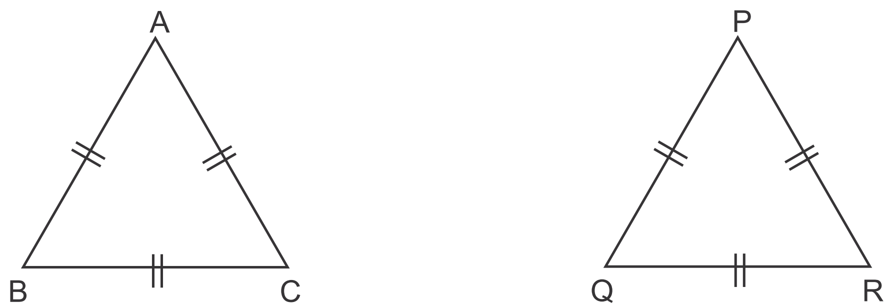


इसके अनुसार हम कह सकते हैं।

समकोण त्रिभुज में समकोण के सामने वाली भुजा (कर्ण) पर बना वर्ग अन्य दो भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है। प्रतीकात्मक रूप में $a^2 = b^2 + c^2$ ।

8.6 भुजाओं एवं कोण में संबंध

एक समबाहु त्रिभुज Δ ABC बनाकर इसी की एक और प्रतिलिपि Δ PQR (ट्रेस पेपर से) काटिए। अब आप Δ PQR के कोण $\angle P$ को Δ ABC के तीनों कोण पर बारी–बारी से रख कर देखिए– जब $\angle P$ को $\angle A$ पर रखते हैं तो $\angle Q$, $\angle B$ को तथा $\angle R$, $\angle C$ को ढक लेता है।



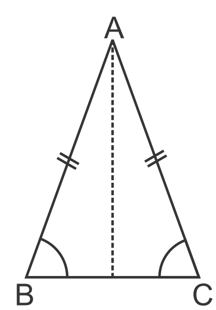
समबाहु त्रिभुज के तीनों कोणों को एक दूसरे पर रखने से वह एक–दूसरे को पूरा–पूरा ढक लेते हैं, अर्थात् समबाहु त्रिभुज में तीनों भुजाएँ समान होने पर तीनों कोण भी समान होते हैं ।

– क्या त्रिभुज में दो भुजाएँ समान होने पर कोण भी समान होंगे ? यदि हाँ, तो कौनसे ?

एक कार्डशीट/कागज पर समद्विबाहु त्रिभुज बनाइए। इसे नाम दीजिए ABC उसे इस प्रकार मोड़िए कि बराबर भुजाएँ सम्पाती हो ।

क्या बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण भी बराबर हैं ?

आप पाएँगे कि समान भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

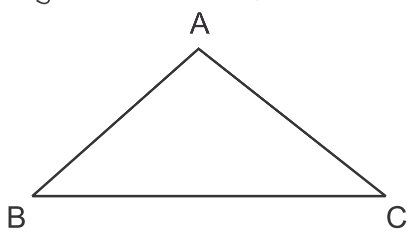


इस प्रकार समान भुजा AB और AC त्रिभुज की सम भुजाएँ कहलाती है। और उनके सम्मुख कोण $\angle B$ और $\angle C$ आधार कोण हैं जो परस्पर समान हैं।

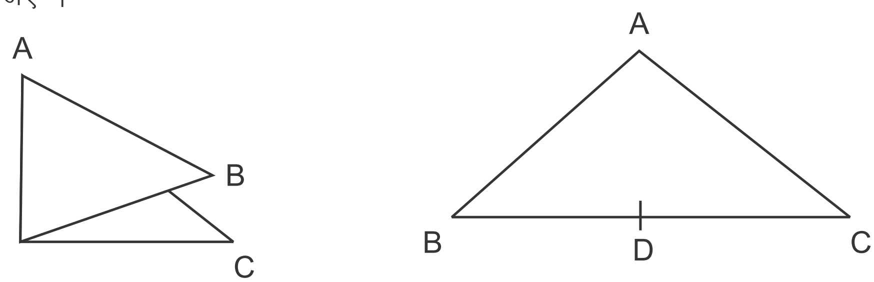
अर्थात् **समद्विबाहु त्रिभुज में दो समान माप वाली भुजाओं के सम्मुख कोण की माप भी समान होती है।**

8.7 त्रिभुज की माध्यिकाएँ

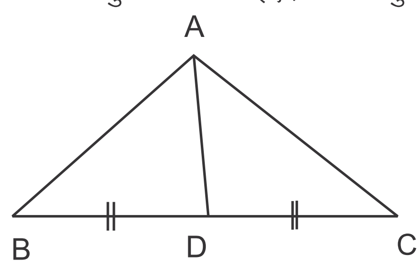
1. एक कागज पर एक त्रिभुज ABC बनाकर इसे काटकर अलग कर लीजिए ।



2. त्रिभुज को मोडकर शीर्ष B व C को मिलाइए। इससे भुजा BC का मध्य बिन्दु प्राप्त होगा। इसे D नाम दीजिए ।

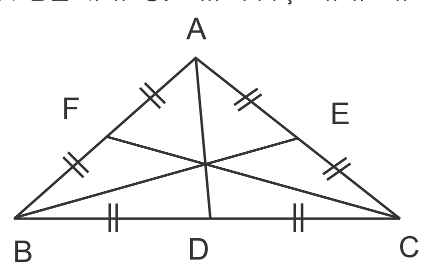


3. अब शीर्ष A को BC के मध्य बिन्दु D से मिलाइए। AD त्रिभुज ABC की एक माध्यिका है।



त्रिभुज के किसी शीर्ष को उसकी सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को त्रिभुज की माध्यिका कहते हैं।

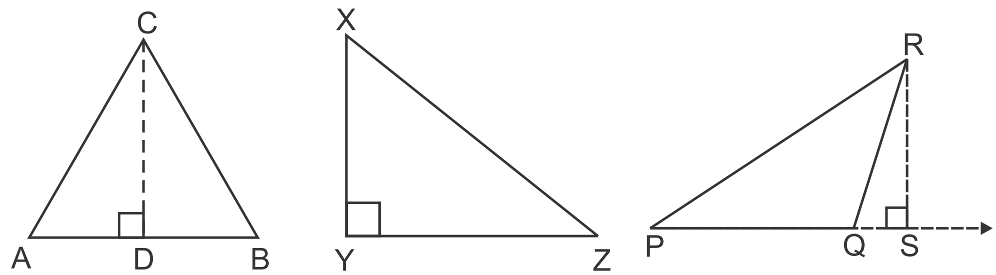
4. इसी प्रकार निम्न चित्रानुसार BE तथा CF माध्यिकाएँ खींची जा सकती हैं।



किसी भी त्रिभुज की अधिकतम 3 माध्यिकाएँ होती है। माध्यिकाओं के संगमन बिन्दु को केन्द्रक कहते हैं।

8.8 त्रिभुज के शीर्ष लम्ब

त्रिभुज के किसी भी शीर्ष से उसके सम्मुख भुजा पर डाला गया लम्ब **शीर्ष लम्ब** कहलाता है। प्रत्येक त्रिभुज के तीन शीर्ष लम्ब होते हैं। शीर्षलम्बों के संगमन बिन्दु को लम्ब केन्द्र कहते है। नीचे दिए गए त्रिभुज के चित्रों में दिखाए गए शीर्षलंबों को पहचानिए।



Δ ABC एक न्यून कोण त्रिभुज है, इसका प्रत्येक शीर्ष लम्ब त्रिभुज के अन्दर ही होता है ।

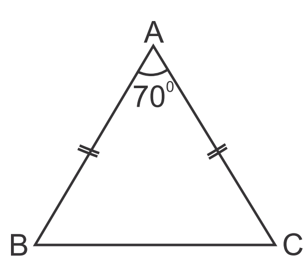
Δ XYZ एक समकोण त्रिभुज हैं, इसकी समकोण बनाने वाली दो भुजाएँ स्वयं ही शीर्ष लम्ब होती है ।

Δ PQR एक अधिक कोण त्रिभुज हैं, इसका एक शीर्ष लम्ब, त्रिभुज के बाहर बनता है ।

शीर्ष लम्ब जिस भुजा पर डाला जाता है, वह उस भुजा के सापेक्ष दिए गए त्रिभुज की ऊँचाई होती है।

प्रश्नावली 8.2

1. भुजाओं की मापों के आधार पर बताइए कौन–कौनसे माप त्रिभुज का निर्माण कर सकते हैं ?
   (i) 6, 5, 5 (ii) 2, 3, 5 (iii) 3, 4, 8 (iv) 3, 5, 6 (v) 4, 4, 8 (vi) 9, 2, 8
2. एक समबाहु त्रिभुज के तीनों कोणों का मान ज्ञात कीजिए।
3. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।
   (i) प्रत्येक त्रिभुज में कम से कम दो कोण............................होते हैं ।
   (ii) ....त्रिभुज का एक शीर्ष लम्ब त्रिभुज के बाहर होता है ।
   (iii) प्रत्येक त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग सदैव तीसरी भुजा से........................होता है ।
   (iv) ....त्रिभुज के दो कोण समान होते हैं।
   (v) त्रिभुज के किसी शीर्ष से उसके सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु को मिलाने वाली रेखा.................. .... कहलाती है ।
   (vi) किसी त्रिभुज की तीनों माध्यिकाएँ जिस बिन्दु मिलती है, उसे.............कहते है।
   (vii) लम्बकेन्द्र से त्रिभुज के तीनों .... गुजरते हैं।
4. त्रिभुज ABC में $\angle A = 70^0$ तथा AB = AC हो तो $\angle B$ व $\angle C$ का माप ज्ञात कीजिए।



5. एक त्रिभुज का चित्र बनाकर उसमें एक माध्यिका तथा एक शीर्ष लम्ब को दर्शाइए ।
6. एक त्रिभुज की दो भुजाओं के माप 3 सेमी तथा 6 सेमी है। इस त्रिभुज की तीसरी भुजा का न्यूनतम तथा अधिकतम माप क्या हो सकता है ?
7. दो चेतावनी सूचक चिह्न (त्रिभुजाकार यातायात संकेतक) बनाएँ जो कि समभुज हो और जो आपका ध्यान सड़क पर आने वाले खतरों की ओर आकर्षित करता हो।

हमने सीखा

1. एक त्रिभुज की तीन भुजाएँ, तीन कोण इसके छः अवयव कहलाते हैं ।
2. एक त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^0 होता है ।
3. किसी त्रिभुज का बाह्य कोण किसी एक भुजा को एक ही ओर बढ़ाने पर बनता है। एक भुजा को दो प्रकार से बढ़ाकर दो बाह्य कोण बनाए जा सकते हैं।
4. त्रिभुज के बाह्य कोण का माप उसके दो सम्मुख अंतःकोणों के योग के बराबर होता है ।
5. **त्रिभुज की भुजाओं के गुण**
   (i) त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की मापों का योग, तीसरी भुजा की माप से अधिक होता है ।
   (ii) त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की मापों का अंतर तीसरी भुजा की माप से कम होता है ।

   ये दोनों गुण किसी त्रिभुज की रचना की संभावना के लिए उपयोगी होते हैं। जब त्रिभुज की माप दी हो।
6. समकोण त्रिभुज में समकोण के सामने वाली भुजा कर्ण तथा अन्य दोनों भुजाएँ उसके पाद कहलाते हैं। समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग = दोनों पादों के वर्गों का योग। (बोधायन प्रमेय)
7. किसी त्रिभुज के एक शीर्ष को उसके सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु से मिलाने वाले रेखाखण्ड को उसकी माध्यिका कहते हैं। एक त्रिभुज की तीन माध्यिकाएँ होती हैं। माध्यिकाओं का संगमन बिन्दु केन्द्रक कहलाता है।
8. किसी त्रिभुज के एक शीर्ष से उसके सम्मुख भुजा पर खींचे गए लंब को शीर्ष लंब कहते हैं। एक त्रिभुज के तीन शीर्ष लंब होते हैं । शीर्ष लम्बों का संगमन बिन्दु लम्ब केन्द्र कहलाता है।

अध्याय 9
त्रिभुजों की सर्वांगसमता

9.1 इन्दर को जन्मदिन पर (उपहार) के बहुत सारे लिफाफे मिले। वह उन लिफाफों से रूपयों को निकाल कर जमाने लगा। वह सारे नोटों को अलग–अलग आकार देखकर जमा रहा था। जमाने के बाद वह नोटों को ध्यान से देखने लगा और फिर अपनी बहन से जाकर बोला दीदी सारे 50–50 के नोट बिल्कुल बराबर नाप के हैं। ऐसे ही 100–100 के नोट भी सारे एक नाप के हैं। दीदी ने कहा हाँ तुमने सही कहा। ऐसी और भी चीजें होती है जो बिल्कुल बराबर नाप व समान आकार की होती है। आप अपने आस–पास ऐसी कौन–कौनसी वस्तुएँ देखते हैं जो एक समान माप और आकार की हैं। नीचे बने चित्रों में कौनसे युग्म एक जैसे चित्रों के हैं–

आकृति 9.1

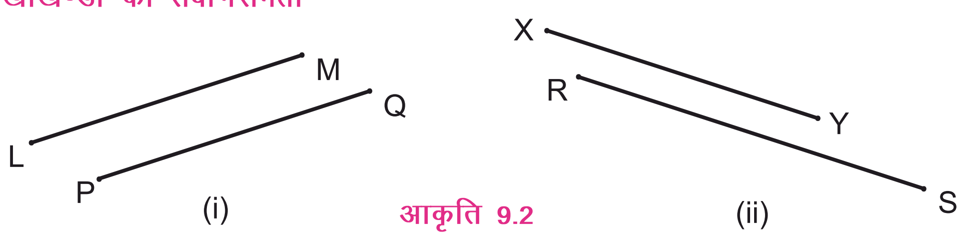
– आपने किस आधार पर एक जैसे जोड़े छाँटे ?

– ऐसे कौनसे जोड़े हैं जो एक–दूसरे को पूरा–पूरा ढ़ँक लेते हैं।

एक स्केल (पटरी) को जब दूसरे स्केल पर रखते हैं तो वे एक दूसरे को पूरा–पूरा ढ़ँक लेते हैं क्योंकि दोनों का आकार और माप समान है। इसी तरह एक ताश का पत्ता दूसरे पत्ते पर रखें तो वह एक दूसरे को पूरा–पूरा ढ़क लेता है। ऐसी आकृतियाँ जो एक दूसरे को पूरा–पूरा ढ़क लेती हैं, वे सर्वांगसम आकृतियाँ कहलाती है। सर्वांगसमता को (≅) द्वारा दर्शाते हैं। क्या आपकी हिन्दी व गणित की किताबें आपस में सर्वांसगम हैं या नहीं ? साथियों से चर्चा करें ।

9.2 ज्यामितीय आकृतियों की सर्वांगसमता

9.2.1 रेखाखण्डों की सर्वांगसमता



आकृति 9.2

आकृति 9.2 में दिए गए रेखाखण्डों के दोनों जोड़ों को नाप कर देखिए आप इन रेखाखण्डों के बारे में क्या कह सकते हैं? चित्र (i) के दोनों रेखाखण्डों की लम्बाई एक समान है। अतः ये जोड़ा सर्वांगसम है। तथा चित्र (ii) में दोनों रेखाखण्ड एक समान लम्बाई को नहीं है।

अतः ये जोड़ा सर्वांगसम नहीं है। निष्कर्षतः हम यह कह सकते हैं कि दो रेखाखण्ड तभी सर्वांगसम होते हैं जब उनकी लम्बाई समान हो ।

9.2.2 कोणों की सर्वांगसमता

आकृति 9.3 में दिए गए कोणों में कोण (i) को ट्रेस पेपर पर ट्रेस कर लीजिए । अब उसे क्रमशः (ii), (iii) व (iv) पर रखकर देखिए ।

आकृति 9.3

किस कोण को ∠(i) ने ढँका ?

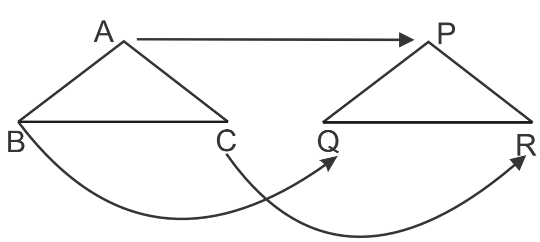
अब प्रत्येक कोण को चाँदे से मापिए। क्या सर्वांगसम कोणों के माप बराबर होते हैं। इस क्रियाकलाप से हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि बराबर कोण सर्वांगसम होते हैं एवं सर्वांगसम कोणों के माप समान होते हैं ।

यदि दो आकृतियाँ A व B सर्वांगसम हो तो हम लिखेंगे $A \cong B$

जैसे रेखाखण्ड AB तथा रेखाखण्ड ED सर्वांगसम हैं तो हम लिखेंगे $AB \cong ED$

इसी प्रकार यदि $\angle 1$ व $\angle 2$ सर्वांगसम है तो $\angle 1 \cong \angle 2$

9.2.3 त्रिभुजों की सर्वांगसमता

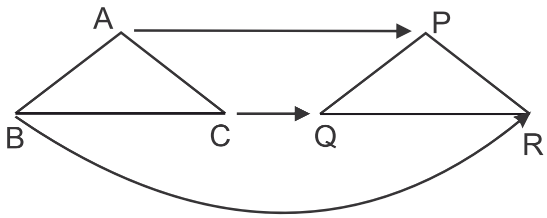


आकृति 9.4

यदि आप ΔABC को ΔPQR पर इस प्रकार से अध्यारोपित करते हैं कि A, P के उपर रखें क्या इसके शेष शीर्ष भी यथा योग्य होंगे। ऐसा होना आवश्यक नहीं । सर्वांगसमता के बारे में चर्चा करते समय न केवल कोणों की माप और भुजाओं की लम्बाईयाँ महत्व रखती है । परन्तु शीर्ष का सुमेलन भी उतना ही महत्व रखता है। ऊपर दी गई स्थिति में सुमेलन है।

$$A \leftrightarrow P,\ B \leftrightarrow Q,\ C \leftrightarrow R$$

हम सुमेलन को ऐसे भी लिख सकते हैं। $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$ परन्तु यदि $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow R$, $C \leftrightarrow Q$ और तब हम लिखेंगें $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PRQ$



आकृति 9.5

सर्वांगसमता को अच्छे ढंग से समझने के लिए चित्र ध्यान से देखिए –
यहाँ

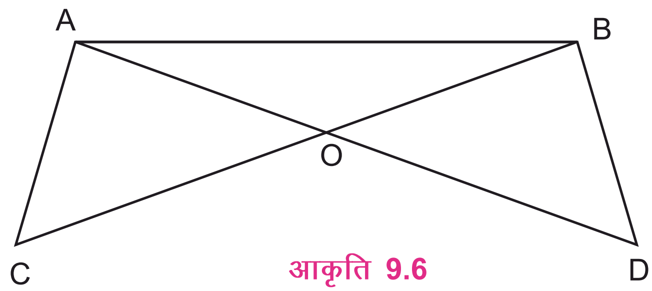
$AB \leftrightarrow PR, \ AC \leftrightarrow PQ, \ BC \leftrightarrow RQ$

तथा

$\angle A \leftrightarrow \angle P, \ \angle B \leftrightarrow \angle R, \ \angle C \leftrightarrow \angle Q$

अतः त्रिभुज ABC सर्वांगसम है त्रिभुज PRQ के इसे ऐसे लिखते हैं

$$\Delta ABC \cong \Delta PRQ$$



आकृति 9.6

यहाँ ΔABC व ΔBAD में

$\angle ABC = \angle BAD, \angle ACB = \angle BDA$ तथा $\angle BAC = \angle ABD$ हैं।

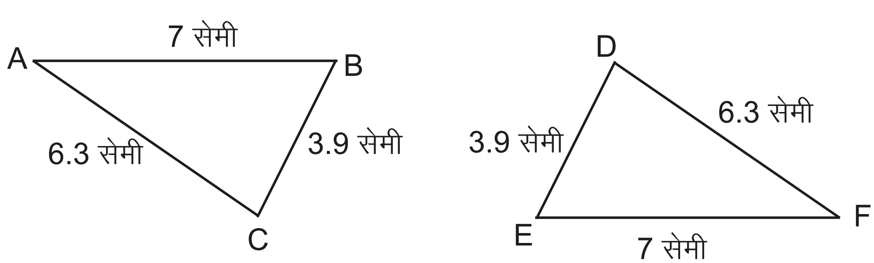
$AB \leftrightarrow BA, BC \leftrightarrow AD, AC \leftrightarrow BD$ अर्थात $AB = BA, AC = BD$ तथा $BC = AD$

अतः $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ हैं।

करो और सीखो

1. जब दो त्रिभुज ΔABC और ΔPQR दिए गए हो तो उनमें आपस में छः संभव सुमेलन होते हैं दो त्रिभुजों के कट–आउट का प्रयोग करके यह सुमेलन ज्ञात कीजिए।
2. क्या सभी सुमेलन सर्वांगसमता दर्शाते हैं ? अध्यारोपित कर पता लगाइए।

उदाहरण 1 क्या $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ है ? उनके संगत कोण लिखिए।



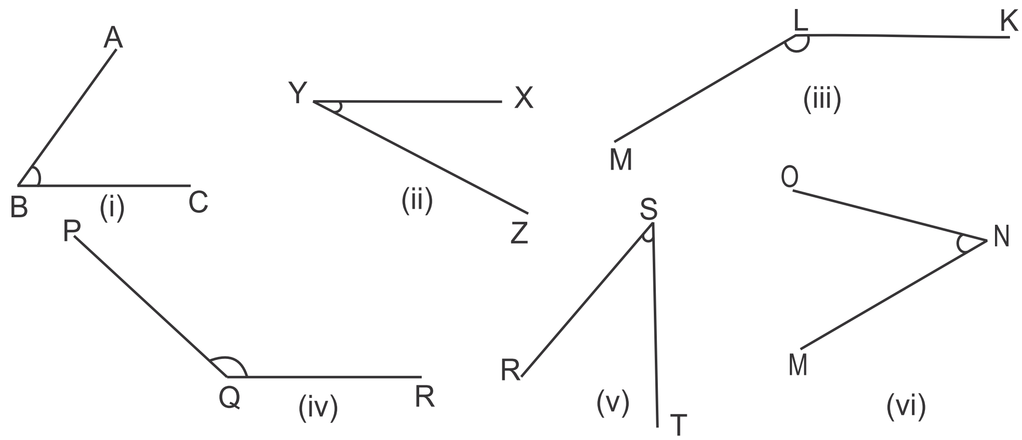
हल दिए गए चित्र में ΔABC और ΔDEF से
AB=EF=7 सेमी, BC=DE=3.9 सेमी, AC =DF=6.3 सेमी

स्पष्टतः A बिन्दु संगत है F के
B बिन्दु संगत है E के
C बिन्दु संगत है D के
अतः $\Delta ABC \cong \Delta FED$

(यहाँ संगत कोण युग्म
$\angle A = \angle F$
$\angle B = \angle E$
$\angle C = \angle D$)

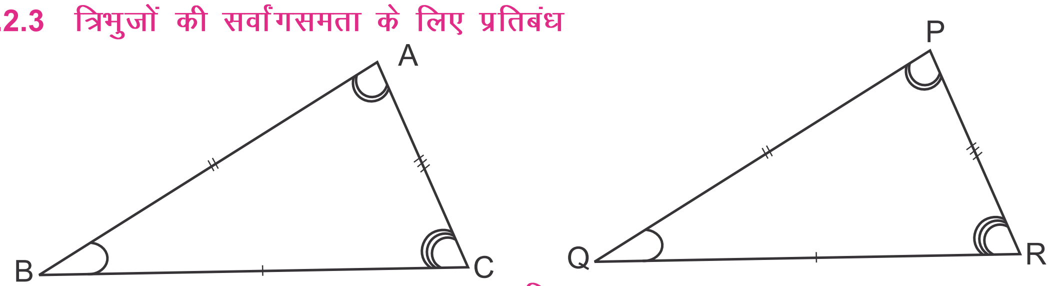
प्रश्नावली 9.1

1. यदि त्रिभुज ABC त्रिभुज PQR के सर्वांगसम हैं तो त्रिभुज के सभी संगत सर्वांगसम भागों को लिखिए।
2. यदि $\Delta LMN \cong \Delta XYZ$ हो तो उन भागों को लिखिए जो निम्न के संगत हो–
   (i) $\angle N$ (ii) LM (iii) $\angle M$ (iv) MN
3. रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए–
   (i) दो रेखाखण्ड सर्वांगसम होते हैं, यदि उनकी...................... समान हो ।
   (ii) दो वर्ग सर्वांगसम होते हैं, यदि उनकी......................समान हो ।
   (iii) दो सर्वांगसम त्रिभुज ΔPQR और ΔABC में कोण $\angle P$ का माप 60^0 है, तो $\angle A$ का माप.... ....होगा ।
4. सर्वांगसम आकृतियों को आप दैनिक जीवन में कहाँ–कहाँ देखते हैं ? कोई दो उदाहरण लिखिए।
5. नीचे दिए गए चित्रों में सर्वांगसम कोणों को छाँटिए (कोण को ट्रेस कर पता कीजिए।)



(क्या आप परकार की सहायता से भी कोणों की सर्वांगसमता का पता लगा सकते हैं? करके देखिए)

9.2.3 त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए प्रतिबंध

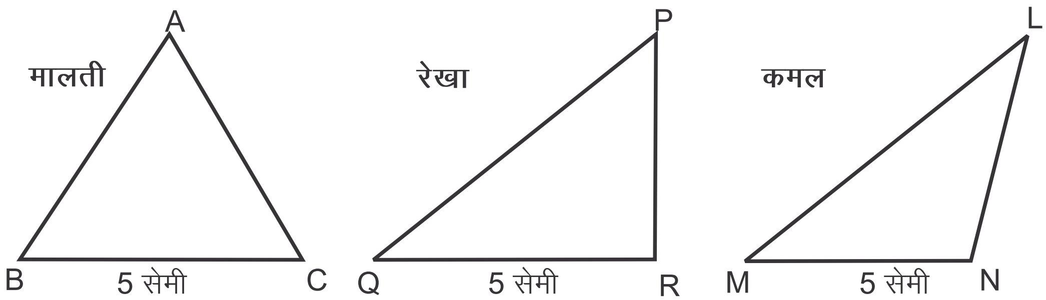


आकृति 9.7

आकृति 9.7 में दोनों त्रिभुज समान आकार व आकृति के हैं ΔABC को ट्रेसिंग पेपर से ट्रेस कर ΔPQR पर रखिए । क्या ABC तथा PQR एक दूसरे को आपस में पूरी तरह ढ़क लेते हैं ? किन्हीं दो त्रिभुजो के संगत भाग समान होने पर त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

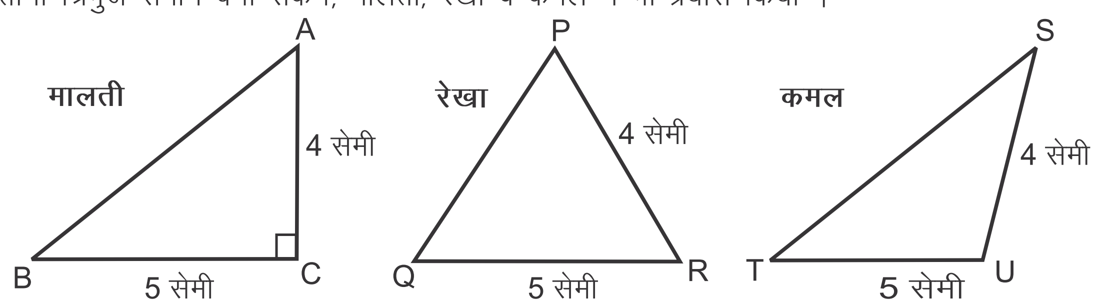
[A] SSS (भुजा–भुजा–भुजा) सर्वांगसमता

यदि आपको किसी त्रिभुज की एक भुजा का माप 5 सेमी दिया गया है तो उसे आप कैसे बनाएगें। मालती, रेखा व कमल ने इस प्रकार से त्रिभुज बनाए।



आप पाएँगे कि मालती ने समबाहु त्रिभुज, रेखा ने समकोण त्रिभुज तथा कमल ने अधिक कोण त्रिभुज बनाए।

पुनः यदि आपको त्रिभुज के दो भुजाओं के माप दे दिए जाएँ 4 सेमी तथा 5 सेमी तब क्या आप तीनों त्रिभुज समान बना सकेंगे, मालती, रेखा व कमल ने भी प्रयास किया ।



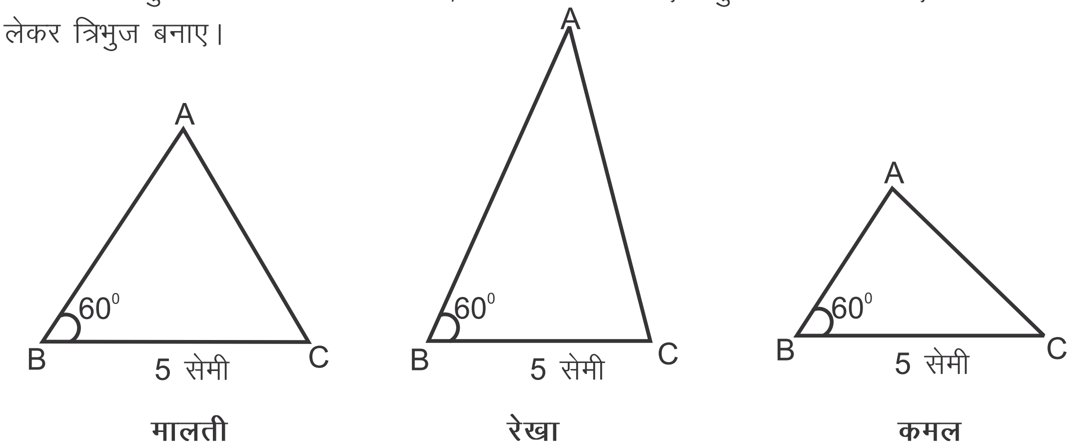
आप पाएँगे कि इस स्थिति में भी त्रिभुज अलग–अलग बन गए हैं।

यदि तीनों भुजाएँ ज्ञात हो तो 4 सेमी, 5 सेमी और 6 सेमी तब क्या तीनों समान चित्र बना सकेंगे ? आप भी बना कर देखें।

इस प्रकार मालती, रेखा तथा कमल तीनों द्वारा बनाए गए त्रिभुज समान है तथा इन त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान माप की है।

SSS नियम– यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों संगत भुजाओं के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। इसे सर्वांगसमता का भुजा–भुजा–भुजा नियम कहते हैं।

[B] SAS (भुजा–कोण–भुजा) सर्वांगसमता– हमने देखा कि एक या दो भुजाओं की सहायता से दो सर्वांगसम त्रिभुज नहीं बनाए जा सकते हैं। यदि एक कोण एवं एक भुजा दी गई हो तो क्या दो सर्वांगसम त्रिभुज बना सकते हैं ? मालती, रेखा व कमल ने एक भुजा 5 सेमी और एक कोण 60^0 लेकर त्रिभुज बनाए।



आकृति 9.8

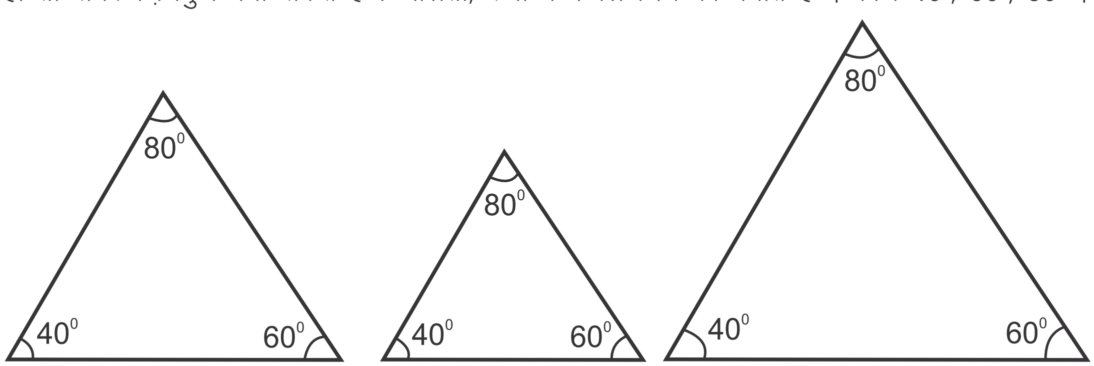
तीनों ने कोण वाली भुजा की लम्बाई अलग–अलग लेते हुए अलग–अलग नाप के त्रिभुज बना लिए। यदि हम इस त्रिभुज में आधार BC के अतिरिक्त AB की लम्बाई भी निश्चित कर देते हैं AB = 4 सेमी तब आप पाएँगे कि बनने वाले सभी त्रिभुज सर्वांगसम बनेंगे।

अर्थात् यदि ΔABC के समान ΔPQR बनाना चाहते हैं। तो हमें दो भुजाओं की लम्बाई एवं उनके बीच का कोण ज्ञात होना आवश्यक है।

SAS नियम– यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ, उनसे बना कोण क्रमशः दूसरे त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनसे बने कोण के समान हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होंगे।

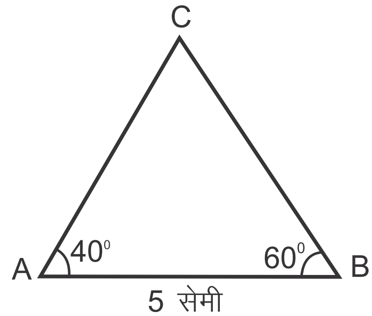
[C] कोण–भुजा–कोण (ASA) सर्वांगसमता

यदि त्रिभुज का एक कोण ज्ञात हो तो त्रिभुज बना सकते हो क्या ? यदि त्रिभुज के सभी कोण ज्ञात हो तो समरूप त्रिभुज बना सकते हैं ? मालती, रेखा व कमल चित्र को बनाते हैं । कोण 40^0, 60^0, 80^0 ।



इसलिए त्रिभुज के सभी कोण समरूप हैं परन्तु भुजाएँ समान नहीं है अतः हमें भुजाओं की लम्बाई ज्ञात होनी चाहिए। यदि सर्वांगसम त्रिभुज बनाने के लिए दो कोण व उनके बीच की भुजा ज्ञात हो तो ?

तीनों बच्चों ने पुनः त्रिभुज बनाने के लिए AB = 5 सेमी, $\angle A = 40^0$ तथा $\angle B = 60^0$ के कोण बनाए। इस बार सभी त्रिभुज एक समान प्राप्त होते हैं । अर्थात् सर्वांगसम त्रिभुज बनाने हेतु एक भुजा व दो कोणों के मापों की आवश्यकता होगी ।

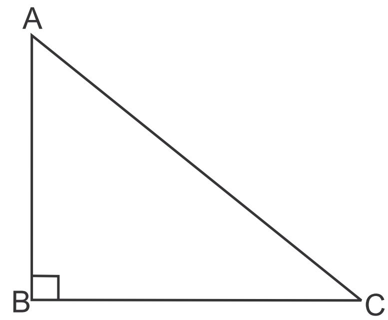


ASA नियम– यदि किसी एक त्रिभुज की एक भुजा व उस पर बने कोण, दूसरे त्रिभुज की संगत भुजा एवं उस पर बने कोणों के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होंगे।

[D] समकोण–कर्ण–भुजा (RHS) सर्वांगसमता

दो समकोण त्रिभुजों में एक बात हमें पता है कि इनके समकोण बराबर होते हैं तब और क्या पता हो कि हम इनकी सर्वागसमता की जाँच कर सकें।
निम्न 3 स्थितियाँ संभव है–

1. शेष दो संगत कोण बराबर हो ।
2. समकोण के इर्द–गिर्द दोनों भुजाएँ ज्ञात हो ।
3. कर्ण तथा एक अन्य भुजा ज्ञात हो ।

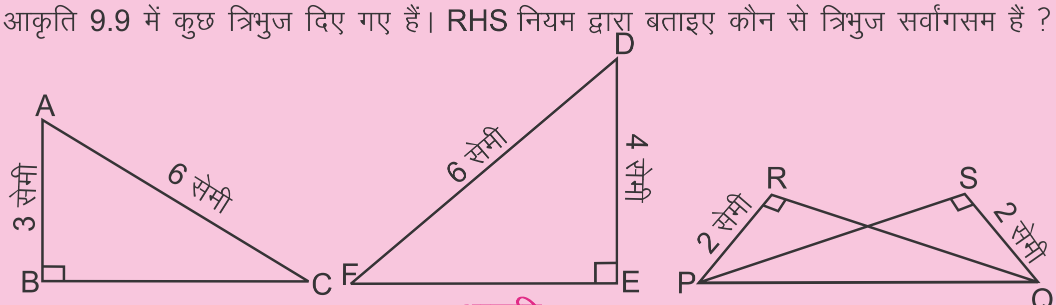


हम देखते हैं कि प्रथम स्थिति (AAA) से सर्वांगसमता सिद्ध नहीं की जा सकती है। दूसरी स्थिति में दो भुजाएँ ज्ञात होने पर तीसरी भुजा ज्ञात की जा सकती है। अतः यहाँ SSS अथवा SAS से सर्वांगसमता सिद्ध की जा सकती है। परन्तु तीसरी स्थिति समकोण त्रिभुज के लिए विशिष्ट है। इसे समकोण – कर्ण – भुजा (RHS) नियम कहते हैं।

RHS नियम– यदि एक समकोण त्रिभुज की एक भुजा और कर्ण दूसरे समकोण त्रिभुज की एक भुजा एवं कर्ण के समान हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं ।

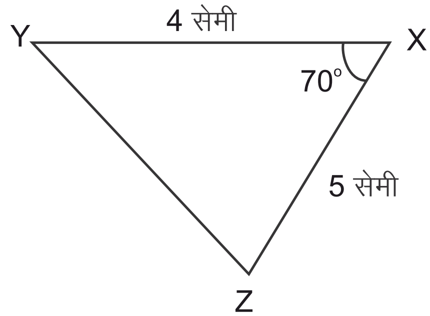
करो और सीखो

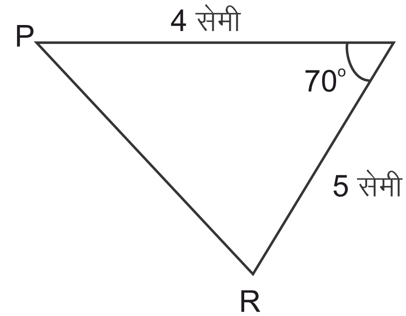
आकृति 9.9 में कुछ त्रिभुज दिए गए हैं। RHS नियम द्वारा बताइए कौन से त्रिभुज सर्वागसम हैं ?



आकृति 9.9

उदाहरण 2 नीचे दिए गए त्रिभुज के मापों के आधार पर बताइए कि क्या त्रिभुज सर्वांगसम हैं ? इनमें संगत कोण कौन–कौन से हैं ?





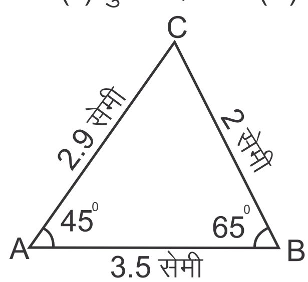
हल Δ XYZ और Δ PQR में XY = PQ और XZ = QR और कोण $\angle X = \angle Q$

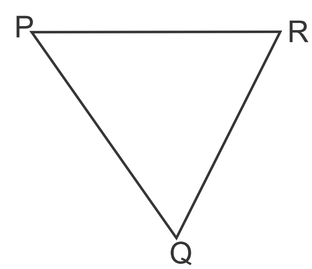
$\therefore \Delta YXZ \cong \Delta PQR$

अतः संगत कोण इस प्रकार $\angle X \leftrightarrow \angle Q, \angle Y \leftrightarrow \angle P, \angle Z \leftrightarrow \angle R$

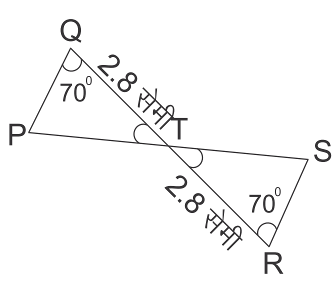
प्रश्नावली 9.2

1. दिए गए चित्र में $\Delta ABC \cong \Delta PRQ$ हो तो निम्न का मान ज्ञात कीजिए।
   (i) भुजा PR (ii) भुजा QR (iii) भुजा PQ (iv) $\angle P$ (v) $\angle Q$ (vi) $\angle R$

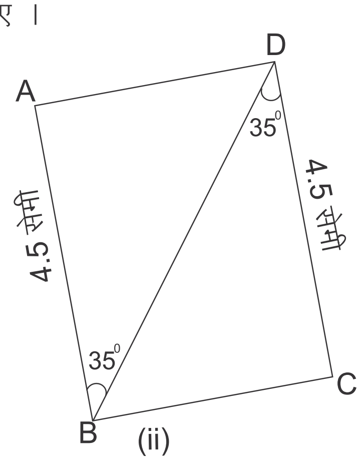




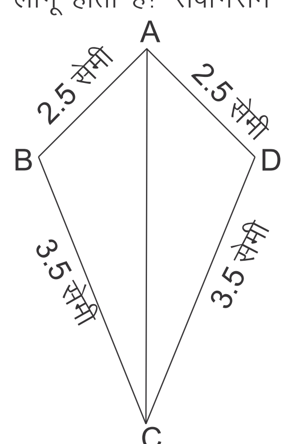
2. नीचे दिए गए चित्रों में त्रिभुजों की सर्वांगसमता का कौनसा प्रतिबन्ध लागू होता है? सर्वांगसम त्रिभुजों को सांकेतिक रूप से लिखिए ।



(i)

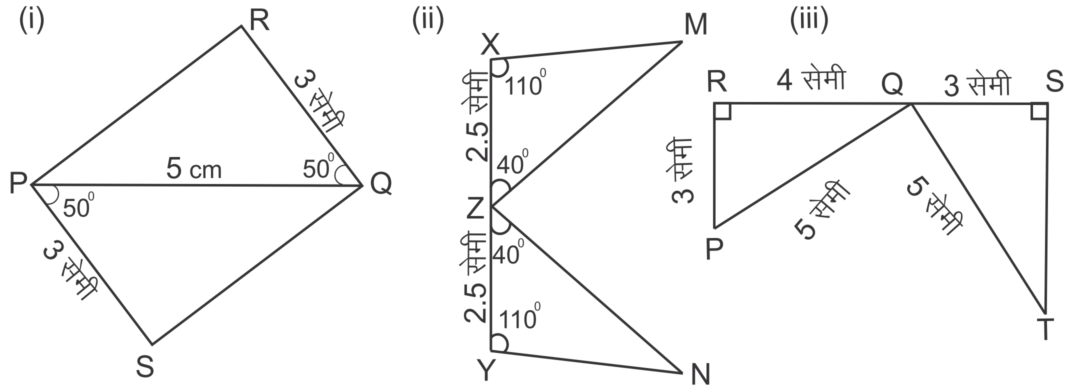


(ii)

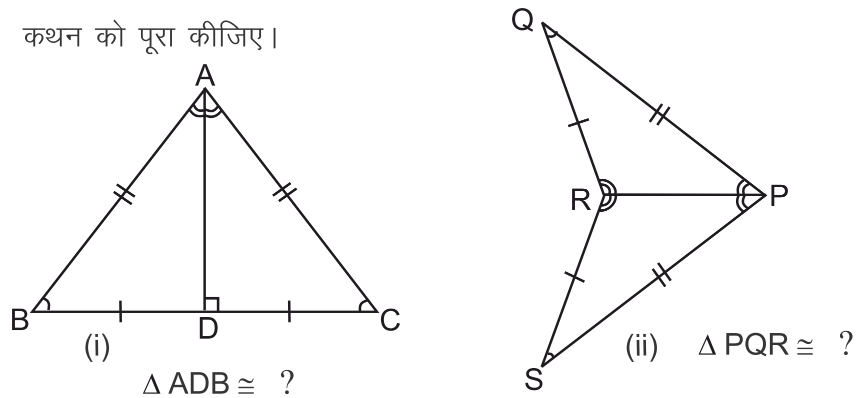


(iii)

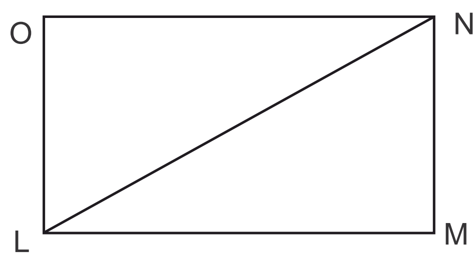
3. नीचे दिए गए त्रिभुज के जोड़ों में से कौनसे जोड़े सर्वांगसम है लिखिए ।



4. कथन को पूरा कीजिए।

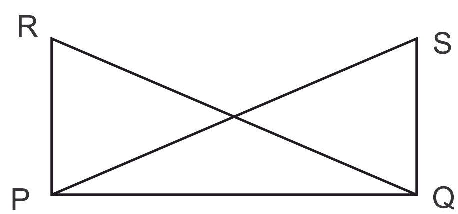


5. दिए गए चित्र में MNOL एक आयत है तो क्या Δ NOL $\cong$ Δ LMN ? यदि हाँ तो कारण बताइए।

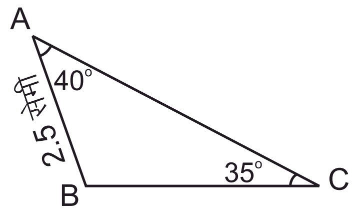


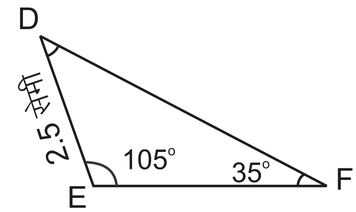
6. दिए गए चित्र में Δ PQR तथा ΔPQS में भुजा PR = भुजा QS, तथा RQ = PS तब बताइए कौनसा कथन सत्य है ।

(i) Δ PQR $\cong$ Δ PQS (ii) Δ PQR $\cong$ Δ QPS (iii) Δ PQR $\cong$ Δ QSP



7. दिए गए चित्र में Δ ABC में $\angle A = 40^0, \angle C = 35^0$ तथा भुजा AB = 2.5 सेमी है, तथा Δ DEF में $\angle F = 35^0, \angle E = 105^0$ एवं भुजा DE = 2.5 सेमी हो तो बताइए क्या $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ है।





हमने सीखा

1. सर्वांगसम त्रिभुज समान आकार और समान माप के होते हैं ।
2. त्रिभुजों की सर्वांगसमता जाँचने के लिए उनकी प्रतिलिपियों को एक–दूसरे पर अध्यारोपित करने का तरीका इस्तेमाल किया जा सकता है ।
3. यदि त्रिभुज के सभी भाग, दूसरे त्रिभुज के संगत भाग के समान हों तो वे त्रिभुज एक दूसरे के सर्वांगसम कहलाएँगे ।
4. दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता दर्शाने के लिए आवश्यक व सम्पूर्ण नियम इस प्रकार है–

(i) भुजा–भुजा–भुजा (SSS) नियम– यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं ।

(ii) भुजा–कोण–भुजा (SAS) नियम– यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की दो संगत भुजाओं और उनके मध्य कोण के बराबर हो, तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं ।

(iii) कोण–भुजा–कोण (ASA) नियम– यदि एक त्रिभुज के दो कोण और उनके मध्य की भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोण एवं उसके मध्य भुजा के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं ।

(iv) समकोण–कर्ण–भुजा (RHS) नियम– यदि किसी समकोण त्रिभुज का कर्ण और एक अन्य भुजा किसी दूसरे समकोण त्रिभुज के कर्ण व एक अन्य भुजा के समान हो तो समकोण त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं ।

अध्याय 10
त्रिभुजों की रचना

10.1 इस अध्याय को पढ़ने से पहले आप त्रिभुज की अवधारणा, इसके गुण एवं त्रिभुजों की सर्वांगसमता वाले अध्यायों को पुनः याद कर लें ।

हमने भुजाओं और कोणों के आधार पर त्रिभुजों को वर्गीकृत किया समबाहु, समद्विबाहु एवं विषम–बाहु त्रिभुज तथा कोणों के आधार पर न्यूनकोण त्रिभुज, समकोण त्रिभुज, अधिक कोण त्रिभुज । इस अध्याय में हम विभिन्न प्रकार के त्रिभुजों की रचना करना सीखेंगे ।

त्रिभुजों की सर्वांगसमता अध्याय में हमने देखा कि एक अभीष्ट त्रिभुज बनाने के लिए हमें सभी 6 अवयवों (3 भुजा एवं 3 कोण) का माप ज्ञात होना आवश्यक नहीं होता है। यदि हमें नीचे दिए गए माप समूहों में से कोई एक दिया हो तो हम अभीष्ट त्रिभुज की रचना कर सकते हैं। यहां अभीष्ट से तात्पर्य दिए गए मापों के आधार पर बनने वाले अद्वितीय त्रिभुज से है।

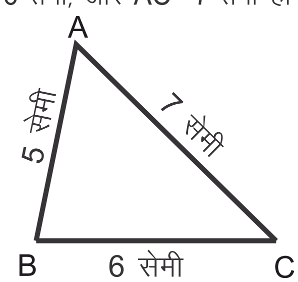
1. तीन भुजाएँ।
2. दो भुजाएँ एवं उनके बीच का कोण ।
3. दो कोण एवं उनके बीच की भुजा ।
4. समकोण त्रिभुज का कर्ण एवं एक अन्य भुजा ।

10.2 त्रिभुज की रचना जब तीनों भुजाएँ दी गई हो

उदाहरण 1 एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें AB = 5 सेमी, BC = 6 सेमी, और AC= 7 सेमी हो।

हल **चरण–1**

पहले हम दी हुई मापों की एक कच्चा चित्र बनाते हैं। आकृति (i)

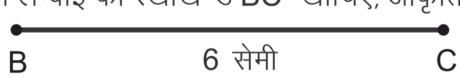


कच्चा चित्र

आकृति (i)

चरण–2

6 सेमी लम्बाई का रेखाखण्ड BC खींचिए, आकृति (ii)



आकृति (ii)

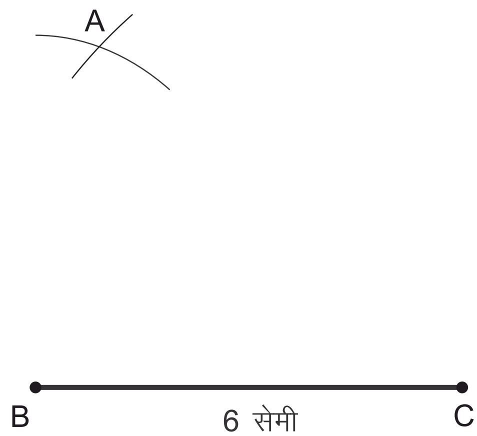
चरण–3

बिन्दु B से बिन्दु A से 5 सेमी की दूरी पर है। अतः B को केन्द्र मान कर और 5 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए ।

आकृति (iii)

चरण–4

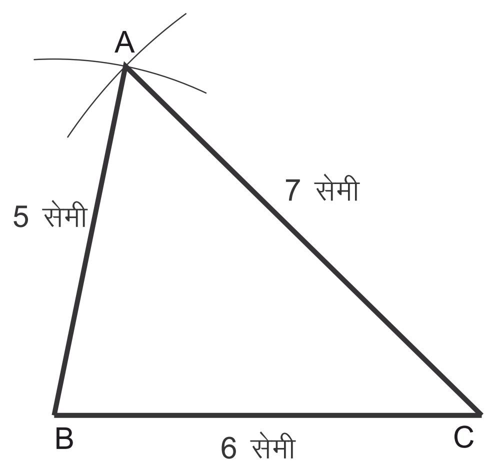
AC = 7 सेमी. है। अतः C को केन्द्र मानकर और 7 सेमी. त्रिज्या लेकर एक चाप इस तरह खीचेंगे कि वह B से खींचे गए चाप को एक बिन्दु पर काटे । आकृति (iv)



आकृति (iv)

चरण–5

A को खींचे गए इन दोनों चापों पर स्थित होना चाहिए। अतः यह इन दोनों चापों का प्रतिच्छेद बिन्दु है। इन चापों के प्रतिच्छेद बिन्दु को A से अंकित कीजिए। AB और AC को मिलाएँ। अब त्रिभुज ABC तैयार है। (आकृति v)



आकृति (v)

करो और सीखो

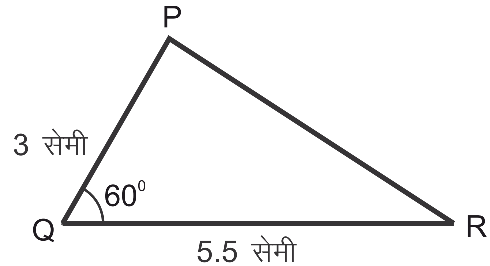
1. ΔXYZ की रचना कीजिए , जिसमें XY = 4.5 सेमी, YZ = 5 सेमी और ZX = 6 सेमी है ।
2. 5.5 सेमी भुजा वाले समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए।
3. ΔPQR की रचना कीजिए , जिसमें PQ= 4सेमी, QR = 3.5 सेमी और PR = 4 सेमी है। यह किस प्रकार का त्रिभुज है ?

10.3 एक त्रिभुज की रचना जब दो भुजाओं की लम्बाईयाँ और उनके बीच के कोण की माप दी हो

हमें दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण दिया हुआ है। पहले हम एक कच्चा चित्र बनाते हैं इसके अन्य चरणों का अनुसरण उदाहरण 2 के अनुसार करते हैं।

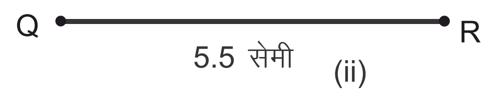
उदाहरण 2 एक त्रिभुज ΔPQR की रचना कीजिए, जब दिया है कि PQ = 3 सेमी, QR = 5.5 सेमी और कोण $\angle PQR = 60^0$ है।

हल चरण–1 पहले हम दी हुई माप के अनुसार एक कच्चा चित्र खींचते हैं। (इससे हमें रचना की प्रक्रिया निर्धारित करने में सहायता मिलेगी) आकृति (i)

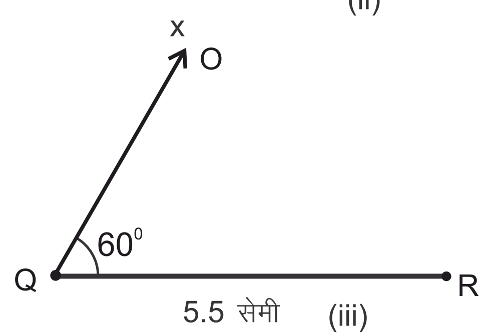


कच्चा चित्र (i)

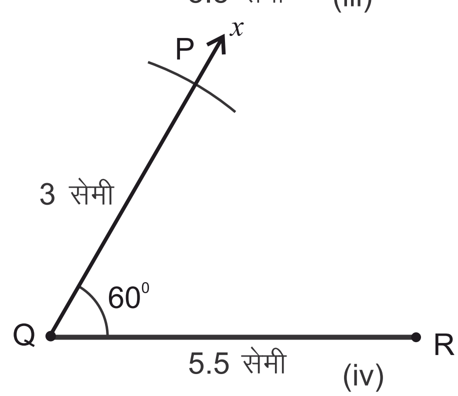
चरण–2 5.5 सेमी लम्बाई का एक रेखाखण्ड QR खींचिए । (आकृति ii)



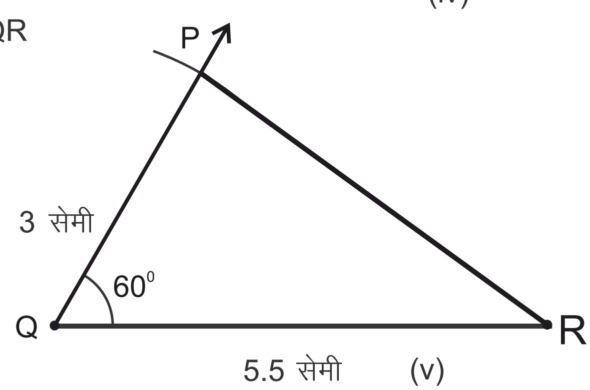
चरण–3 Q पर किरण QX खींचिए जो QR के साथ 60^0 का कोण बनाए । बिन्दु P कोण की उसी किरण पर होगा । (आकृति iii)



चरण–4 बिन्दु P निश्चित करने के लिए, दूरी QP दी हुई है। Q को केन्द्र मानकर 3 सेमी त्रिज्या का एक चाप खींचिए । यह QX को जिस बिन्दु पर काटता है वह P होगा। (आकृति iv)



चरण–5 PR को जोडिए। इस प्रकार, ΔPQR प्राप्त हो जाता है। (आकृति v)



सोचिए, चर्चा कीजिए

अध्यापक – यदि ΔABC में नाप AB = 3 सेमी. AC = 5 सेमी और $\angle C = 30^0$ हो तो क्या आप त्रिभुज की रचना कर सकते हैं?

कृष्णा, विक्रम, सरला बनाने का प्रयास करते हैं।

कृष्णा – AC = 5 सेमी खींचकर $\angle C = 30^0$ खींच सकते हैं।

विक्रम – $\angle C$ की एक भुजा CA है। पर बिन्दु B को इस कोण C की दूसरी भुजा पर स्थित होना चाहिए

अध्यापक – ध्यान दीजिए कि बिन्दु B को अद्वितीय रूप से निर्धारित नहीं किया जा सकता है। अतः हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि एक अद्वितीय त्रिभुज की रचना तभी की जा सकती है, जब उसकी दो भुजाओं की लंबाइयों और उनके मध्य स्थित (बीच के) कोण का माप दिया हुआ है।

करो और सीखो

(i) ΔDEF की रचना कीजिए, जबकि DE = 5 सेमी, DF = 3 सेमी और $\angle EDF = 90^0$ हो।

(ii) एक समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी प्रत्येक समान भुजा की लम्बाई 6.5 सेमी हो और उनके बीच का कोण 110^0 हो।

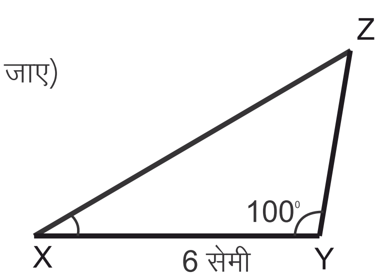
(iii) BC = 7.5 सेमी और AC= 5 सेमी और $\angle C = 60^0$ वाले ΔABC की रचना कीजिए।

10.4 एक त्रिभुज की रचना जब उसके दो कोणों के माप और इन कोणों की अन्तर्गत भुजा की लम्बाई दी हो

सबसे पहले एक कच्चा चित्र खींचिए । अब दिया हुआ रेखाखण्ड खींचिए। दोनों अंत बिन्दुओं पर कोण बनाइए। उदाहरण 3 देखिए।

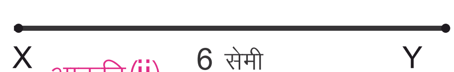
उदाहरण 3 ΔXYZ की रचना कीजिए, यदि XY= 6 सेमी, $\angle ZXY = 30^0$ और $\angle XYZ = 100^0$ है।

हल **चरण–1** वास्तविक रचना से पहले, हम इस पर अंकित मापों के अनुसार एक कच्चा चित्र खींचते हैं ।
(इससे अनुमान लग जाता हे कि कैसे रचना की जाए)
आकृति (i)



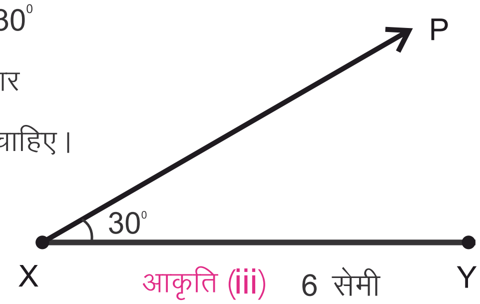
आकृति (i)

चरण–2 6 सेमी लम्बाई का रेखाखण्ड XY खींचिए। (आकृति ii)

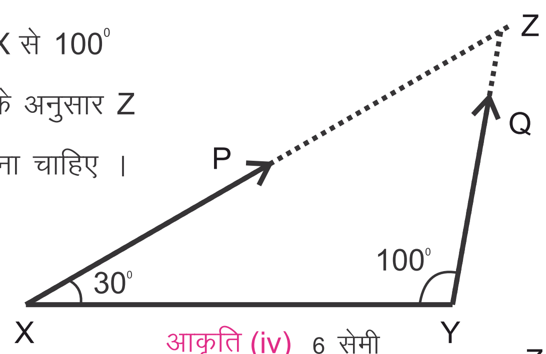


आकृति (ii)

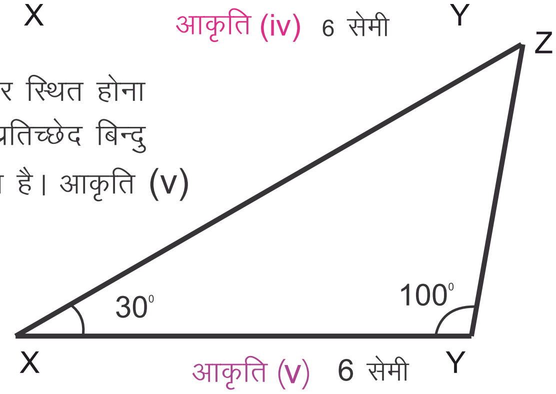
चरण–3 X पर एक किरण XP खींचिए जो XY से 30° का कोण बनाए। दिए हुए प्रतिबंध के अनुसार बिन्दु Z किरण XP पर कहीं स्थित होना चाहिए। (आकृति iii)



चरण–4 Y पर एक किरण YQ खींचिए जो YX से 100° का कोण बनाए । दिए हुए प्रतिबंध के अनुसार Z किरण YQ पर भी अवश्य स्थित होना चाहिए । (आकृति iv)



चरण–5 Z को दोनों किरणों XP और YQ पर स्थित होना चाहिए। अतः इन दोनों किरणों का प्रतिच्छेद बिन्दु ही Z है। अब ΔXYZ पूरा बन जाता है। आकृति (v)



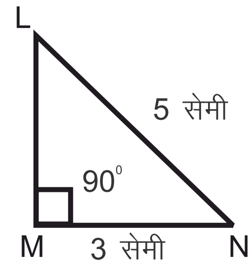
करो और सीखो

1. ΔABC की रचना कीजिए, जब $\angle A = 60^{0}$, $\angle B = 30^{0}$ और AB = 5.8 सेमी दिया है ।
2. ΔPQR की रचना कीजिए, यदि PQ = 5 सेमी $\angle PQR = 105^{0}$ और $\angle QRP = 40^{0}$ दिया है। (संकेत– त्रिभुज के कोण योग गुण को याद कीजिए)
3. जाँच कीजिए कि आप ΔDEF की रचना कर सकते हैं या नहीं, यदि EF = 7.2 सेमी, $\angle E = 110^{0}$ $\angle F = 80^{0}$ है। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए ।

10.5 एक समकोण त्रिभुज की रचना जब उसके एक पाद (भुजा) और कर्ण की लम्बाईयाँ दी हुई हो। यहाँ, एक आकृति बनाना सरल है । दी हुई भुजा के अनुसार एक रेखाखण्ड खींचिए इसके एक अंत बिन्दु पर समकोण बनाइए। त्रिभुज की दी हुई लम्बाई की भुजा और कर्ण खींचने के लिए परकार का प्रयोग कीजिए। त्रिभुज को पूरा कीजिए । निम्न उदाहरण पर विचार कीजिए ।

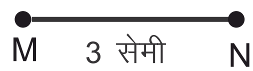
उदाहरण 4 ΔLMN की रचना कीजिए, जिसका LMN समकोण है तथा दिया है कि LN = 5 सेमी, और MN = 3 सेमी

हल **चरण–1** एक कच्चा चित्र खींचिए और उस पर दिए हुए माप को अंकित कीजिए। समकोण अंकित करना याद रखिए। (आकृति i)



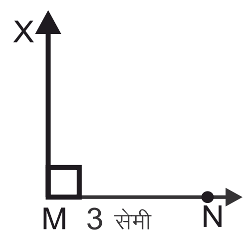
आकृति (i)

चरण–2 3 सेमी लम्बाई का रेखाखण्ड MN खींचिए (आकृति ii)



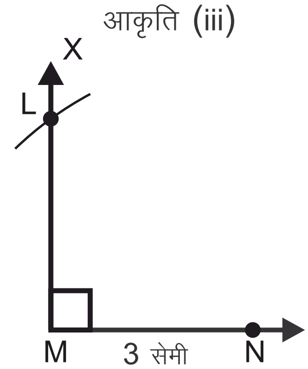
आकृति ii

चरण–3 M पर MX⊥MN खींचिए। इसके लिए M पर 90° का कोण बनाइए। (आकृति iii)



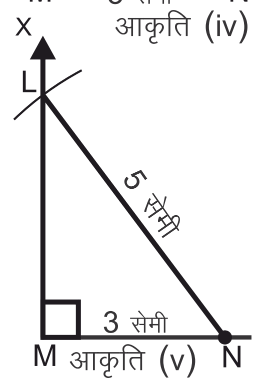
आकृति (iii)

चरण–4 N को केन्द्र मानकर, 5 सेमी का एक चाप खीचिए। (L इसी चाप पर स्थित होना चाहिए क्योंकि यह N से 5 सेमी की दूरी पर हैं) (आकृति iv)



आकृति (iv)

चरण–5 L को लंब रेखा MX पर और केन्द्र N वाले चाप पर स्थित होना चाहिए। अतः L इन दोनों का प्रतिच्छेद बिन्दु होगा। LN को जोड़िए। अब ΔLMN प्राप्त हो जाता है (आकृति v)



आकृति (v)

करो और सीखो

1. समकोण ΔPQR की रचना कीजिए, जहाँ $\angle Q = 90^0$, $QR = 8$ सेमी, $PR = 10$ सेमी है।
2. एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसका कर्ण 6 सेमी. लम्बा है और एक भुजा 4 सेमी लम्बी है।

प्रश्नावली 10

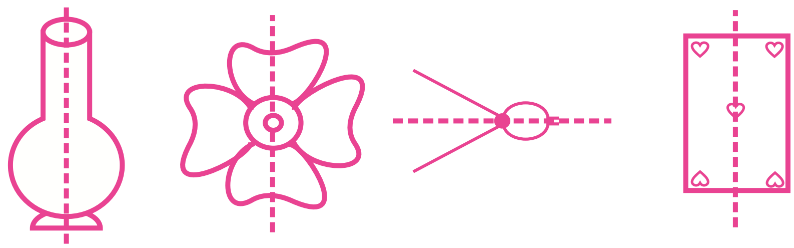
1. ΔPQR की रचना कीजिए, जब $PQ = 4$ सेमी, $QR = 3$ सेमी तथा $RP = 5.5$ सेमी हो।
2. ΔXYZ की रचना कीजिए, जब $XZ = 6$ सेमी, $XY = 4.5$ सेमी तथा $\angle X = 50^0$ है।
3. ΔABC की रचना कीजिए, जब $AB = 5$ सेमी, $\angle A = 45^0$ तथा $\angle B = 60^0$ है।
4. ΔDEF की रचना कीजिए, जब कर्ण $DE = 5$ सेमी, आधार $DF = 3$ सेमी तथा $\angle D = 90^0$ है।
5. एक 4 सेमी भुजा वाले समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए ।
6. ΔPQR की रचना कीजिए जहाँ त्रिभुज $PQ = 5$ सेमी, $\angle P = 75^0$, तथा $\angle R = 55^0$ हो।

हमने सीखा

1. इस अध्याय में हमने स्केल और परकार की सहायता से त्रिभुज की कुछ रचनाओं की विधियों का अध्ययन किया है ।
2. त्रिभुजों की सर्वांगसमता की संकल्पना का अप्रत्यक्ष रूप से उपयोग करते हुए हमने त्रिभुज की रचना की विधि का अध्ययन किया है ।
3. इस अध्याय में निम्नलिखित माप समूहों से त्रिभुज की रचना का अध्ययन किया है।
   (i) जब त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लम्बाई दी हो । (SSS)
   (ii) जब किन्हीं दो भुजाओं की लम्बाई और उनके मध्य स्थित कोण दिया गया हो। (SAS)
   (iii) जब दो कोण और उनक अन्तर्गत भुजा की लम्बाई दी गई हो । (ASA)
   (iv) जब किसी समकोण त्रिभुज का कर्ण एवं एक अन्य भुजा दी गई हो। (RHS)

अध्याय 11 सममिति

11.1 हम आस–पास में बहुत सारी वस्तुओं, चित्रों आदि को देखते हैं। इन सभी में अलग–अलग तरह की ज्यामिति दिखाई देती है।



इन आकृतियों को ठीक बीचो–बीच खींची गई रेखा के अनुदिश मोड़ा जाए या काटा जाए तो दोनों हिस्से एक दूसरे को पूरी तरह से ढँक लेते हैं। इस तरह की आकृतियाँ सममित आकृतियाँ कहलाती है। सममित आकृतियों, सममिति एवं सममित अक्ष के बारे में हमने पिछली कक्षाओं में जाना है। इस अध्याय में हम दी गई आकृतियों में सममित अक्ष पहचानना एवं बनाना, परावर्तन सममिति एवं घूर्णन सममिति के बारे में अध्ययन करेंगे।

करो और सीखो सममिति दर्शाने के लिए

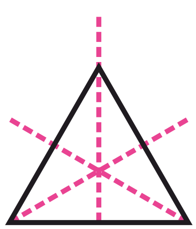
1. सममिति दर्शाने वाला एक चित्र बनाइए ।
2. कागज के कटे हुए कुछ डिजाईन बनाइए।
3. रंगोली बनाइए।

11.2 रैखिक सममिति

अभी हमने जिस सममिति के बारे में चर्चा की है, वह रैखिक सममिति है। इन चित्रों में एक ऐसी सरल रेखा है जिसके अनुदिश आकृतियों को मोड़ने से आकृति के दोनों भाग संपाति (एक–दूसरे को पूरा–पूरा ढँक लेते हैं) हो जाते हैं। क्या आप समबहुभुज से परिचित हैं ? यदि नहीं तो अपने साथियों एवं अध्यापकजी से चर्चा कर जानने का प्रयास कीजिए ।

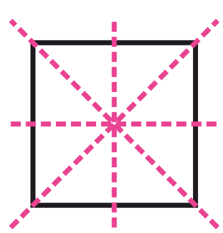
सम बहुभुज सममित आकृतियाँ हैं। यह एक रोचक निष्कर्ष है कि प्रत्येक समबहुभुज की उतनी ही सममित रेखाएँ होती हैं जितनी उसकी भुजाएँ है।

तीन सममित रेखाएँ



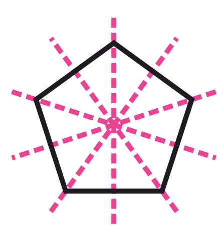
समबाहु त्रिभुज

चार सममित रेखाएँ



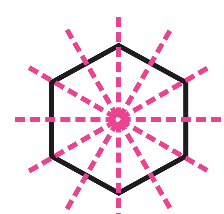
वर्ग

पाँच सममित रेखाएँ



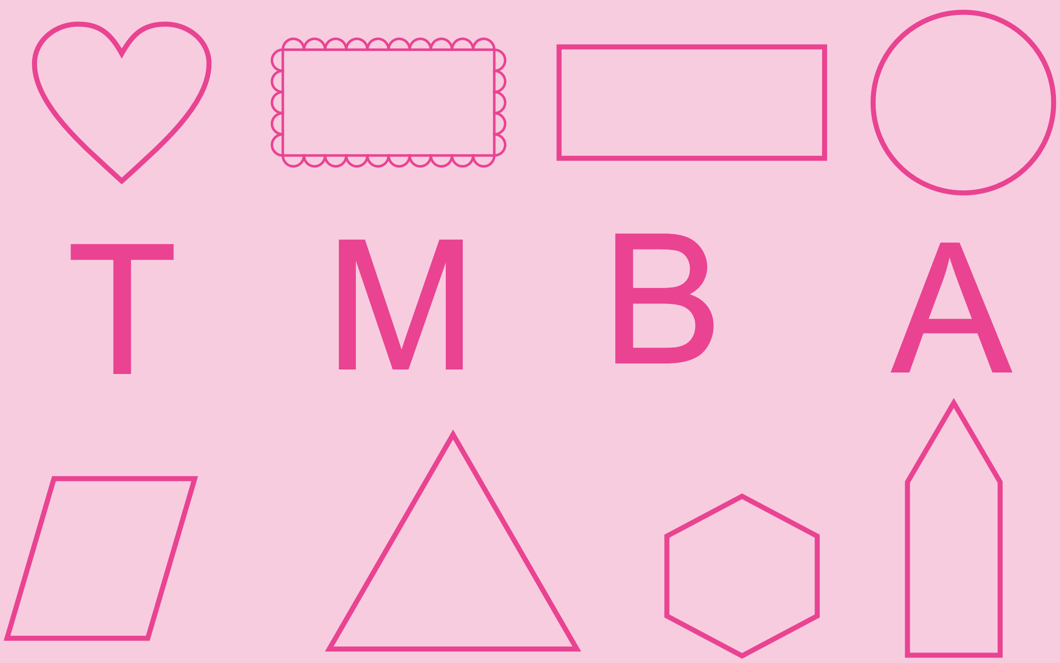
सम पंचभुज

छः सममित रेखाएँ



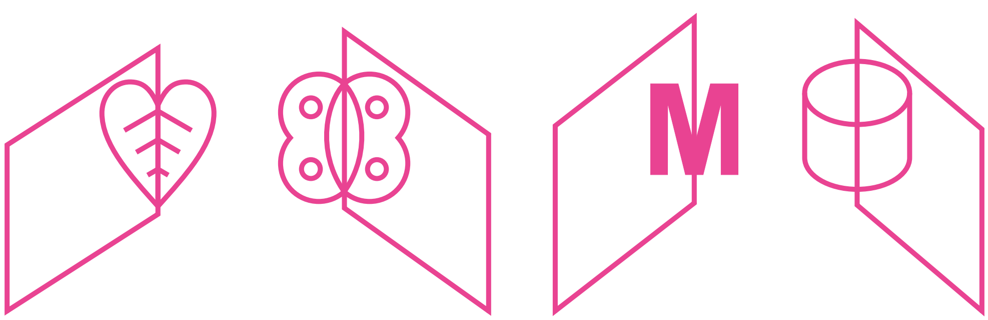
सम षट्भुज

करो और सीखो नीचे बने चित्रों में सममित रेखाएँ खींचिए।



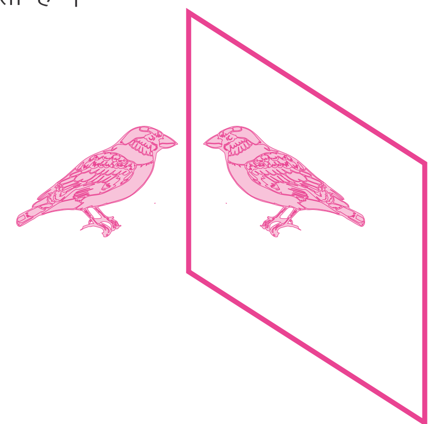
11.3 परावर्तन सममिति

एक समतल दर्पण लीजिए तथा उसके सामने विभिन्न वस्तुओं को बारी–बारी से देखिए। हम वस्तुओं के प्रतिबिम्ब दर्पण में देख सकते हैं। नीचे दिए चित्रों पर दर्पण को इस प्रकार रखो कि आधा हिस्सा दर्पण के सामने रहे। हम देखते हैं कि आधा हिस्सा दर्पण के सामने हैं तथा आधा दर्पण में। दोनों हिस्सों के मिलने से चित्र पूरा होता दिखाई देता है। यह परावर्तन सममिति है। दर्पण में बनने वाले इन प्रतिबिम्बों का अवलोकन कीजिए।



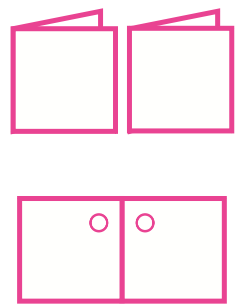
इन चित्रों का दर्पण प्रतिबिम्ब चित्र का आधा भाग है। दर्पण का किनारा सममित अक्ष के रूप में हैं। इस प्रकार रैखिक सममिति की अवधारणा का दर्पण परावर्तन से निकट का संबंध हैं। दर्पण रेखा हमें एक सममित रेखा ज्ञात करने में मदद करती है।

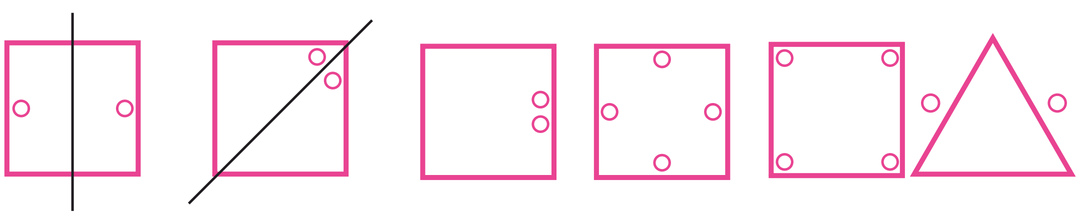
चित्र में R, P और चिड़िया का दर्पण परावर्तन दिखाया गया है। यहाँ आकृति के दर्पण परावर्तन में पार्श्व परिवर्तन या अभिमुखों में दाएँ–बाएँ परिवर्तन हो जाता है ।



गतिविधि

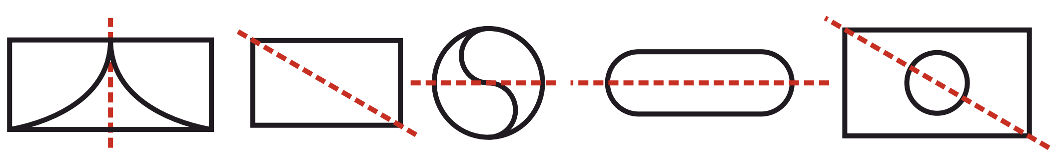
चौकोर सादा कागज लीजिए । उसे बीच से चित्र में दिखाए अनुसार मोड़िए। अब कागज में एक छेद कीजिए। अब कागज को खोलिए, कागज का मोड़, सममित रेखा है, तथा कागज में बना छेद सममित आकृति के रूप में हैं। आइए इस तरह बनी अन्य छेद की हुई आकृतियों में सममित रेखा ढूँढ़ने का प्रयास करें ।





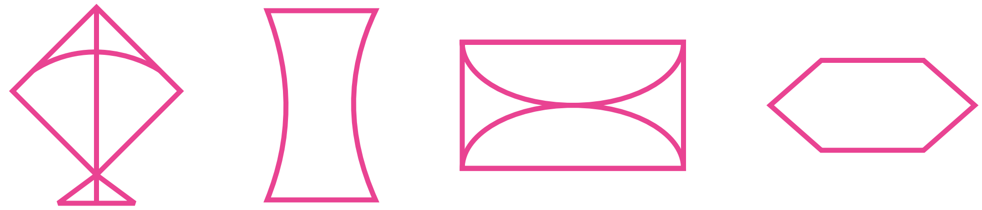
प्रश्नावली 11.1

1. नीचे दी गई आकृति में जो बिन्दु रेखा दर्शाइ गई है, वह उस आकृति की सममित रेखा है या नहीं ? बताइए।



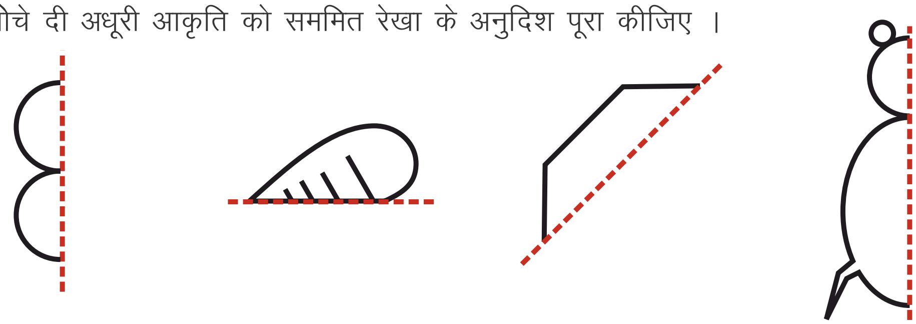
(i) (ii) (iii) (iv) (v)

2. नीचे दी गयी आकृति में सममित रेखा खींचिए ।



(i) (ii) (iii) (iv)

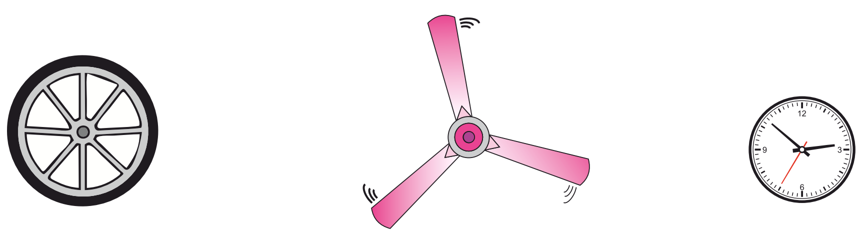
3. नीचे दी अधूरी आकृति को सममित रेखा के अनुदिश पूरा कीजिए ।



(i) (ii) (iii) (iv)

11.4 घूर्णन सममिति

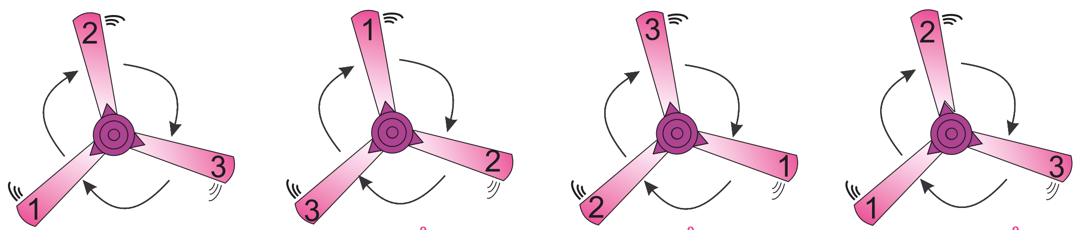
घड़ी की सुईयाँ, साइकिल का पहिया तथा छत से लगे पंखों आदि को हम गतिशील कहते हैं जब वे घूमते है या घूर्णन करते हैं । कुछ वस्तुओं में यह घूर्णन दोनों तरफ होता है, जबकि घड़ी की सुईयों में यह केवल एक दिशा मे होता है। घड़ी की सुईयाँ, जिस दिशा में घूमती है वह घड़ी की दिशा में (दक्षिणावर्त) घूर्णन कहलाता है। शेष घूर्णनों को घड़ी की विपरीत दिशा में (वामावर्त) घूर्णन कहते हैं। साइकिल का पहिया दोनों दिशाओं में घूर्णन करता है।



करो और सीखो

1. घड़ी की दिशा में घूर्णन के दो उदाहरण दीजिए ।
2. घड़ी की विपरीत दिशा में घूर्णन के दो उदाहरण दीजिए ।

सोचिए ! साइकिल का पहिया, घड़ी की सुईयाँ जैसी वस्तुएँ घूर्णन करती है तो क्या उनके आकार एवं माप में कोई परिवर्तन होता है? नहीं। आकार और माप में परिवर्तन हुए बिना वस्तु एक निश्चित बिन्दु के चारों तरफ घूमती है। यह निश्चित बिन्दु **घूर्णन का केन्द्र** कहलाता है। घूर्णन के दौरान घूमे गए कोण को **घूर्णन कोण** कहते हैं। नीचे पखें की पंखुड़ियों द्वारा केन्द्र पर बनने वाले कोण को दिखाया गया है ।



पंखे की स्थिति | 120^0 घूर्णन क्रम–1 | 240^0 घूर्णन क्रम–2 | 360^0 घूर्णन क्रम–3

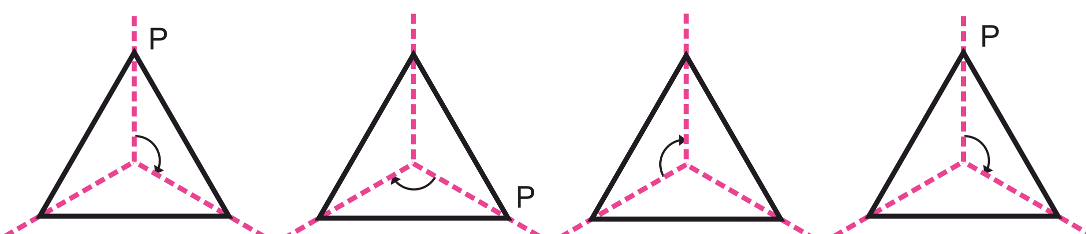
यहाँ हम देखते है कि पंखे को 120^0 घूमाने पर उसकी पंखुडियाँ पूर्व के समान ही दिखाई देती हैं, इसी प्रकार 240^0 तथा 360^0 घूर्णन पर भी वही स्थिति दिखाई देती है अतः हम कह सकते हैं कि पंखे में घूर्णन सममिति है तथा घूर्णन सममिति का क्रम 3 है।

एक पूरे चक्कर (360^0) में कोई वस्तु जितनी बार स्थिति के अनुसार पहले जैसी ही दिखाई देती है वह संख्या उस **घूर्णन सममिति का क्रम** कहलाती है उदाहरण के लिए ऊपर दिए गए पंखे के उदाहरण में पूरे चक्कर में तीन समान स्थितियाँ प्राप्त होने से उसका घूर्णन क्रम 3 प्राप्त होता है। इसी प्रकार वर्ग में घूर्णन सममिति का क्रम 4 प्राप्त होता है।

प्रत्येक वस्तु (आकृति) एक पूरे चक्कर अर्थात् 360^0 घूर्णन के बाद अपनी प्रारम्भिक स्थिति मे आ जाती है अतः प्रत्येक वस्तु में क्रम – 1 की घूर्णन सममिति निश्चित रूप से होती है।

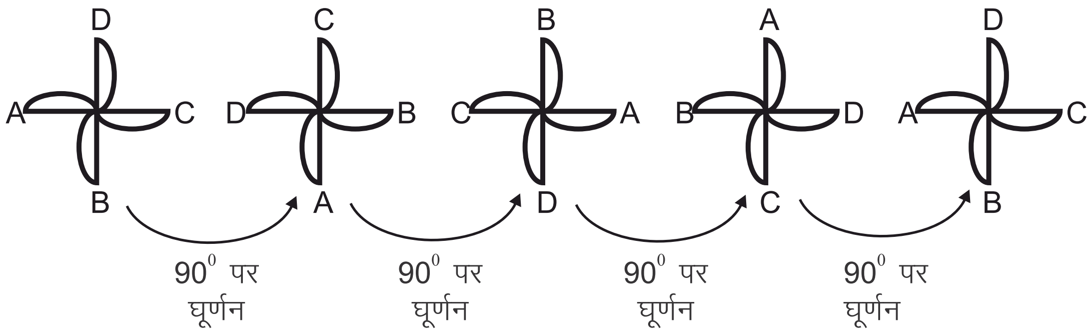
11.4.1 घूर्णन के कुछ उदाहरण

समबाहु त्रिभुज के लिए (दक्षिणावर्त घूर्णन) एक पूरे चक्कर में त्रिभुज तीन बार अपनी प्रारम्भिक स्थिति में आता है। इसे तीन क्रम का घूर्णन कहते हैं। चूंकि त्रिभुज अपनी प्रारम्भिक स्थिति से 120^0 घूमने के बाद पुनः अपनी पहले वाली स्थिति में आ जाता है, अतः इसका घूर्णन कोण 120^0 हैं ।



प्रारम्भिक स्थिति | 120^0 पर घूर्णन | 120^0 पर घूर्णन | 120^0 पर घूर्णन

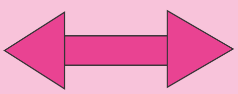
चकरी का घूर्णन– चकरी को देखें । चकरी अपने एक घूर्णन में चार बार अपने प्रारम्भिक अवस्था में आती है। अतः इसका घूर्णन क्रम 4 है। तथा प्रत्येक 90^0 पर वह अपनी पहले वाली अवस्था में आती है। अतः चकरी का घूर्णन कोण 90^0 है।



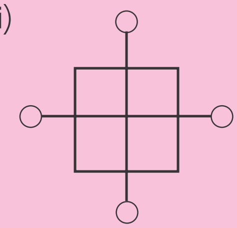
करो और सीखो

1. निम्न आकृतियों में घूर्णन सममिति के लिए घूर्णन कोण तथा घूर्णन क्रम बताइए।

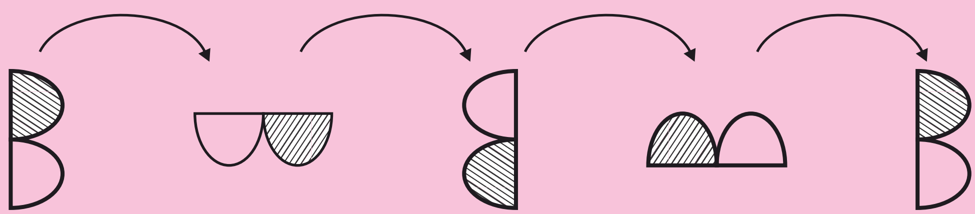
(i)



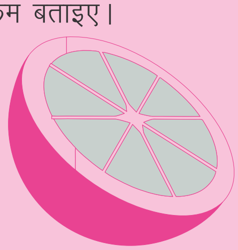
(ii)



2. B का घूर्णन की दिशा, घूर्णन कोण व घूर्णन क्रम बताइए–

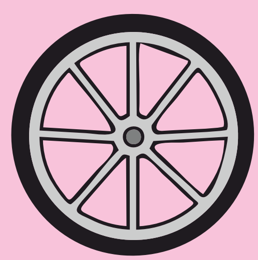


3. फलों के अनुप्रस्थ काट, यातायात संकेत, पहिया आदि में भी घूर्णन सममिति को देखिए। इनका घूर्णन क्रम बताइए।



फल का अनुप्रस्थ काट

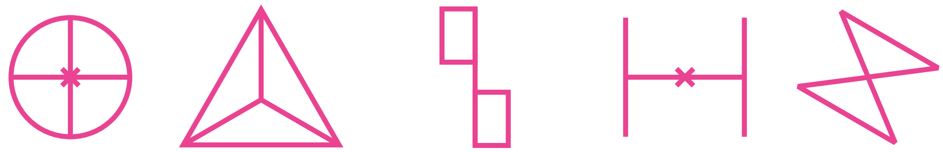
सड़क संकेत



पहिया

प्रश्नावली 11.2

1. नीचे दी आकृतियों में घूर्णन सममिति का क्रम बताइए।



(i) (ii) (iii) (iv) (v)

2. दो ऐसी आकृतियों के नाम बताइए, जिसमें रैखिक सममिति और क्रम 1 से अधिक घूर्णन सममिति दोनों ही है ।
3. ऐसे चतुर्भुजों के नाम बताइए जिनमें रैखिक सममिति और क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति दोनों हो।
4. किसी आकृति को उसके परित 60° के कोण पर घुमाने पर वह उसकी प्रारम्भिक स्थिति जैसी दिखाई पड़ती है, और किन–किन कोणों के लिए ऐसी स्थिति बनेगी?

हमने सीखा

1. एक आकृति में रैखिक सममिति तब होती है, जब कोई ऐसी रेखा प्राप्त की जा सके जिसके अनुदिश उस आकृति को मोड़ने पर, उसके दोनों भाग परस्पर संपाति हो जाएँ ।
2. समबहुभुजों में बराबर भुजाएँ और बराबर कोण होते हैं। उनकी अनेक अर्थात् एक से अधिक सममित रेखाएँ होती है।
3. प्रत्येक समबहुभुज की उतनी ही सममित रेखाएँ होती हैं, जितनी उसकी भुजाएँ होती है ।

समबहुभुज	समषट्भुज	समपंचभुज	वर्ग	समबाहु त्रिभुज
सममित रेखाओं की संख्या	6	5	4	3

4. दर्पण परावर्तन में अभिमुखों में दाएँ–बाएँ परिवर्तन हो जाता है।
5. घूर्णन में एक वस्तु को एक निश्चित बिन्दु के चारों तरफ घुमाया जाता है। निश्चित बिन्दु घूर्णन का केन्द्र कहलाता है। जिस कोण पर वस्तु घूमती है, उसे घूर्णन का कोण कहते हैं ।
6. यदि घूर्णन के बाद वस्तु, स्थिति के अनुसार पहले जैसी दिखाई देती है, तो हम कहते हैं कि उसमें घूर्णन सममिति है।
7. एक पूरे चक्कर (360° के) में, एक वस्तु जितनी बार स्थिति के अनुसार, पहले जैसी ही दिखाई देती है, वह संख्या उस घूर्णन सममिति का क्रम कहलाती है।

अध्याय 12 ठोस आकारों का चित्रण

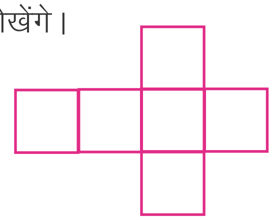
12.1 कक्षा 6 में हमने ठोस आकारों के बारे में पढ़ा है हमने पढ़ा है कि ठोस आकारों को त्रिविमीय आकार कहते हैं क्योंकि इसमें लम्बाई एवं चौड़ाई के अतिरिक्त ऊँचाई अथवा गहराई भी होती है।

घन, घनाभ, बेलन, शंकु एवं गोला त्रिविमीय आकृतियाँ है जबकि वर्ग, आयत, वृत्त आदि द्विविमीय आकृतियाँ है।

हमने यह पढ़ा है कि त्रिविमीय आकारों के फलक, किनारे एवं शीर्ष होते हैं कुछ आकारों के पृष्ठ समतल कुछ के वक्राकार एवं कुछ आकारों में दोनों प्रकार के पृष्ठ होते हैं।

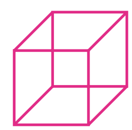
इस अध्याय में हम ठोस आकारों का समतल पर चित्रण करना सीखेंगे।

12.2 द्विविमीय एवं त्रिविमीय की पहचान

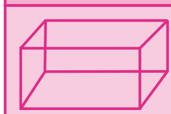
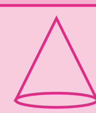
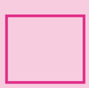
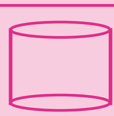
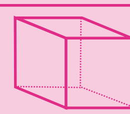


रेखा ने एक आयताकार पतले कागज को वर्गाकार जाल में इस तरह काटा। यह एक द्विविमीय जाल है। इसमें छः फलक है।

इस द्विविमीय जाल को मोड़कर छः फलकों से एक घन बनाया गया।



यह एक घन है जो त्रिविमीय आकृति है। इसमें लम्बाई, चौड़ाई के साथ ऊँचाई भी शामिल है। आप भी द्विविमीय एवं त्रिविमीय आकृतियों पर चर्चा करें। दी गई आकृतियों का उदाहरण के आधार पर मिलान कीजिए।

आकृति	आकृति के प्रकार	आकृति के नाम	आकृति	आकृति के प्रकार	आकृति के नाम
	द्विविमीय	त्रिभुज		द्विविमीय	वृत्त
	त्रिविमीय	बेलन		त्रिविमीय	शंकु
	द्विविमीय	घनाभ		त्रिविमीय	गोला
	त्रिविमीय	वर्ग		त्रिविमीय	घन

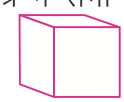
द्विविमीय आकृतियों को समतल आकृतियाँ या 2D आकृतियाँ तथा त्रिविमीय आकृतियों को ठोस आकार या 3D आकृतियाँ भी कहते हैं।

12.3 3-D आकारों का 2-D में निरुपण

जब ठोस आकारों को एक कागज (समतल) पर खींचा जाता है तो प्रतिबिम्बों को कुछ तिरछा (टेढ़ा) कर दिया जाता है ताकि वे त्रिविमीय दिखाई दें।

नीचे 3-D आकृतियों को समतल धरातल (कागज) पर बनाने की दो तकनीकों के बारे में बताया गया है।

दिए गए घन के चित्र को देखिए। सामने से देखने पर यह घन जैसा ही प्रतीत होता है जबकि वास्तव में इसके सभी तल देखा जाना संभव नहीं है। खींचे गये चित्र में सभी लम्बाइयाँ बराबर नहीं है जबकि एक घन में ये बराबर होनी चाहिए। फिर भी हम पहचान कर लेते है कि यह एक घन है।



करो और सीखो

1. नीचे कुछ कथन एवं आकारों के चित्र दिए गए हैं। प्रत्येक आकार के लिए कौनसा कथन सत्य है लिखिए

(i) मेरे छः आयताकार फलक हैं।
(ii) मेरा एक ही पृष्ठ होता है और वह भी वक्राकार है।
(iii) मेरे सभी फलक वर्गाकार हैं।
(iv) मेरा एक फलक वक्राकार एवं दो फलक समतल है।
(v) मेरा एक फलक वक्राकार एवं एक फलक समतल है।

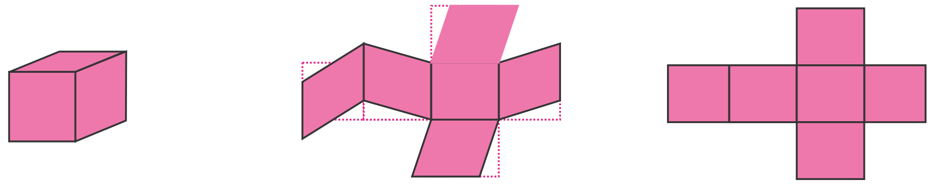
2. सारणी भरिए।

क्र.सं.	आकृति	पृष्ठ की संख्या	पृष्ठों का प्रकार	
			समतल	वक्र
1.	घन			
2.	घनाभ			
3.	बेलन	3	समतल–2	वक्र – 1
4.	शंकु			
5.	गोला			

12.3.1 त्रिविमीय आकारों का समतल पर निरुपण

अदिति अपने दोस्त को जन्मदिन पर उपहार दे रही है। वह गिफ्ट पैक करना चाहती है इसके लिए एक घनाभाकार गत्ते का डिब्बा बनाना है पर वह देखना चाहती है कि एक चोकोर डिब्बा बना कैसे होता है इसके लिए वह एक चाय पत्ती का डिब्बा काटकर खोल देती है।

अब वह इसे कार्ड शीट पर बनाकर काटकर डिब्बा बना लेती है।



चाय पत्ती का बंद डिब्बा

चाय पत्ती के डिब्बे का जाल

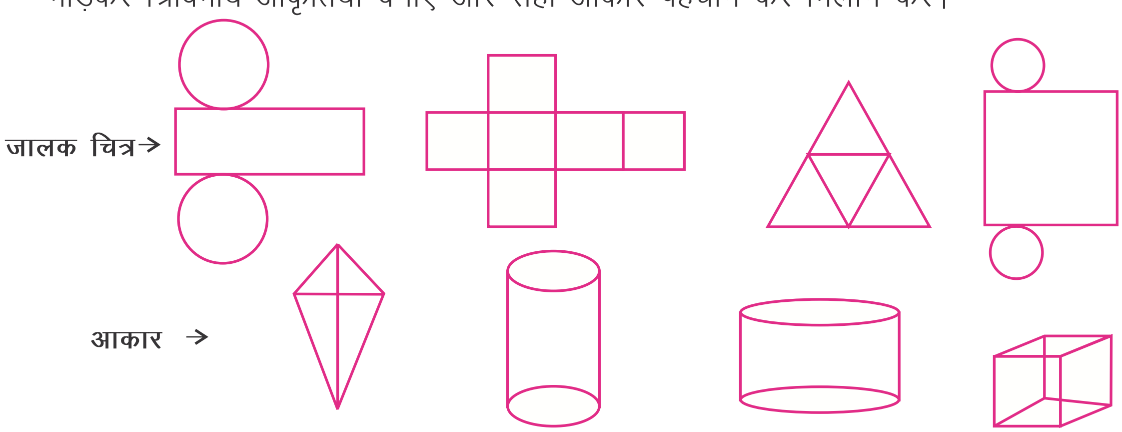
इसी प्रकार वह जन्मदिन की टोपियाँ बनाने के लिए भी कार्डशीट पर जाल बनाती है। कैंची से काटकर टोपियाँ बनाती है।

करो और सीखो

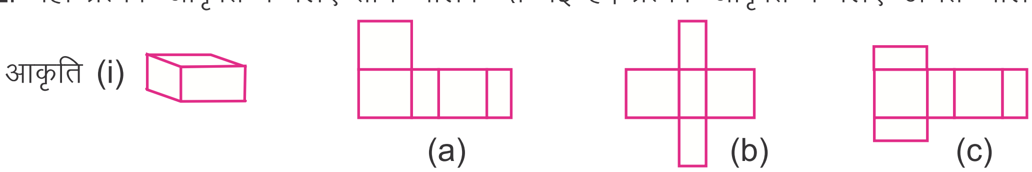
(1) इसी प्रकार के जालक आप भी काटें एवं चोकोर डिब्बे बनाएँ।
(2) एक बेलनाकार डिब्बा बनाने के लिए जालक बनाएँ।

प्रश्नावली 12.1

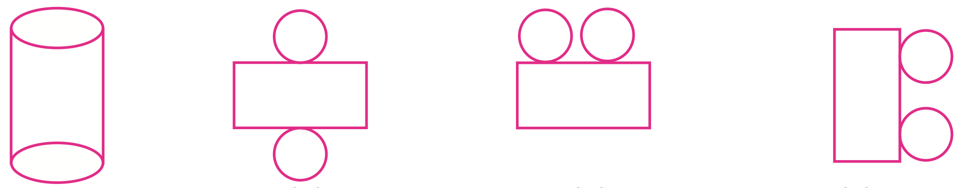
1. नीचे कुछ ठोस आकारों के जालक दिए जा रहे हैं। उन्हें मोटे कागज पर बनाएँ उचित स्थान से मोड़कर त्रिविमीय आकृतियाँ बनाएँ और सही आकार पहचान कर मिलान करें।



2. यहाँ प्रत्येक आकृति के लिए तीन जालक दी गई है। प्रत्येक आकृति के लिए उचित जालक चुनिए।

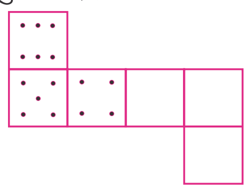


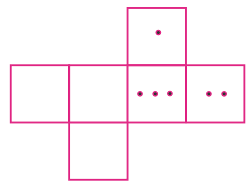
आकृति (ii)



(a) (b) (c)

3. खेलने का पासा एक घन है। जिसके प्रत्येक फलक पर बिन्दु बने होते हैं पासे के विपरीत पृष्ठों पर बने बिंदुओं का योग 7 होता है। नीचे पासे के दो जालक दिए गए हैं। रिक्त पृष्ठों पर उचित संख्या में बिन्दु बनाइए।

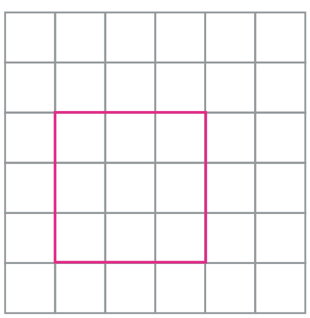




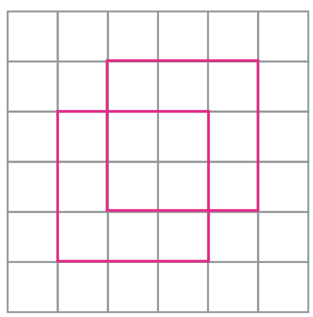
12.3.2 तिर्यक या तिरछा नक्शा (ग्रिड पेपर तकनीक)

ऐसा नक्शा (चित्र) हम कैसे बना सकते हैं आओ यह बनाने की तकनीक सीखते हैं। इसके लिए हमें एक वर्गीकृत कागज (ग्रिड पेपर) की आवश्यकता होगी।

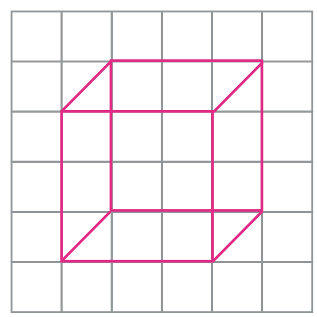
आइए हम 3 x 3 x 3 के एक घन (एक ऐसा घन जिसका प्रत्येक किनारा 3 इकाई है) का तिर्यक चित्र बनाने का प्रयत्न करते हैं।



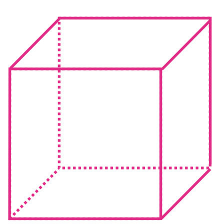
चरण – 1
सर्वप्रथम सामने का फलक खींचते है।



चरण – 2
सामने के फलक का सम्मुख फलक एक खाना खिसकाकर खींचते है। दोनों फलकों के माप बराबर होने चाहिए।



चरण – 3
संगत कोनों को मिलाते हैं।



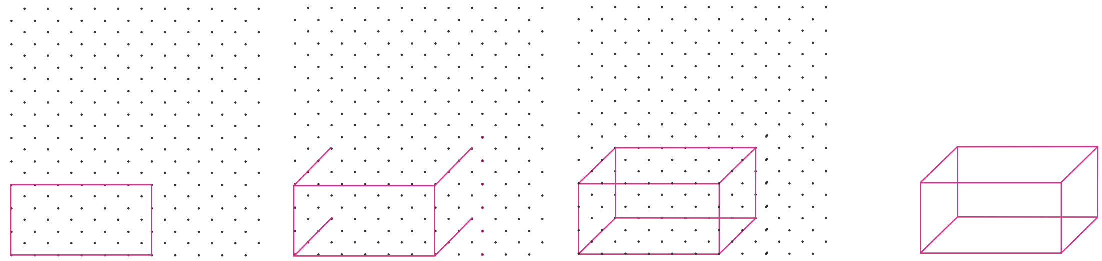
चरण – 4
सादे कागज पर यह चित्र बनाने के लिए पार्श्व किनारों को बिन्दु रेखाओं का प्रयोग करते हुए खींचते हैं।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

12.3.3 समदूरीक चित्र (आइसो मैट्रिक शीट तकनीक)

क्या आप आइसोमैट्रिक शीट के बारे में जानते हैं यह शीट एक ऐसा कागज होती है जो बिंदु रेखाओं से बने छोटे समबाहु त्रिभुजों में बँटा होता है। इस शीट में एक पंक्ति बिन्दु सामने के तल को तथा अगली पंक्ति के बिन्दु पार्श्वतल को दर्शाने में प्रयुक्त होते है। ताकि त्रिविमीय वस्तु की ऊँचाई या गहराई का आभास हो सके। ऐसी ही एक शीट इस पाठ्य पुस्तक के अंत में दी गई है।

आइए हम 7 x 4 x 4 नाप के एक घनाभ (ऐसा घनाभ जिसकी लम्बाई 7 इकाई, चौड़ाई 4 इकाई तथा ऊँचाई या गहराई 4 इकाई हो) को आइसोमैट्रिक शीट पर बनाने का प्रयास करे।



चरण – 1
सामने वाला फलक दर्शाने के लिए 7 x 4 के माप का एक आयत खींचिए।

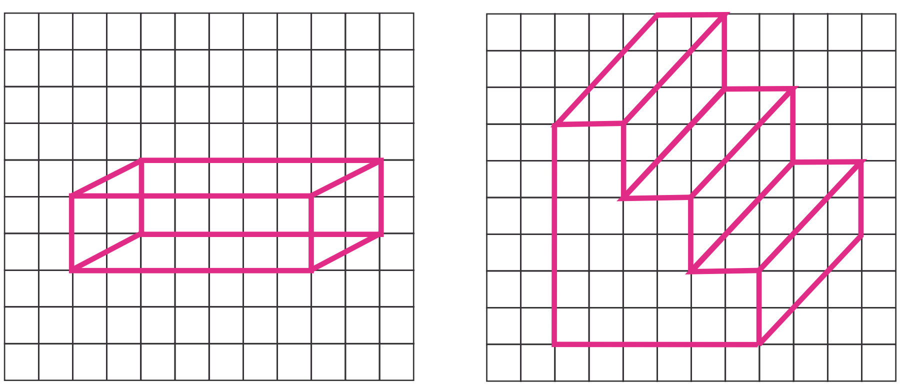
चरण – 2
आयत के चारों कोनों से 4 इकाई माप के चार रेखाखण्ड खींचिए।

चरण – 3
सुमेलित कोनों को उपयुक्त रेखाखंड़ों से मिलाइए।

चरण – 4
यह घनाभ का एक समदूरीक चित्र है।

प्रश्नावली 12.2

1. निम्न बिन्दु रेखा समदूरिक आकारों का तिर्यक चित्र (ग्रिड पेपर पर) खींचिए।



2. निम्न तिर्यक चित्रों के बिंदु रेखा कागज (आइसोमैट्रिक शीट) पर समदूरिक चित्र खींचिए।

3. किसी घनाभ की विमाएँ 5 सेमी, 3 सेमी तथा 2 सेमी है। इस घनाभ के तीन भिन्न –भिन्न समदूरीक चित्र बनाइए।

गतिविधि 1 स्लाइसिंग (टुकड़े करना) का खेल –

नीचे दिए गए डबलरोटी के चित्र को देखिए यह घनाभ के आकार की है। किन्तु इसका तल वर्गाकार है। जब इसे चाकू द्वारा चित्रानुसार उर्ध्वाधर काटा जाता है तो अनेक टुकड़े प्राप्त होते है तथा प्रत्येक टुकड़े का फलक वर्गाकार होता है। इस वर्गाकार फलक को डबल रोटी की एक अनुप्रस्थ काट कहते है।

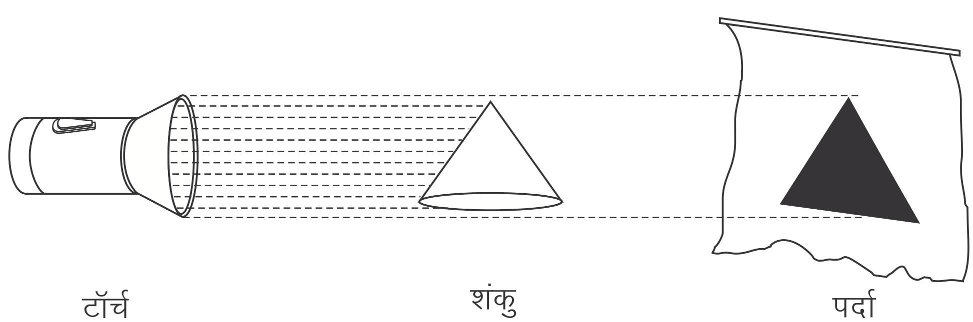
यदि डबल रोटी को क्षैतिज तल के अनुदिश काटा जाता है तो एक अलग प्रकार का अनुप्रस्थ खण्ड प्राप्त होता है। इस बारे में सोचिए।

इसी प्रकार रसोईघर में भी सब्जियों को काटते समय उनके कटे हुए टुकड़ों को ध्यान से देखिए एवं उनके अनुप्रस्थ खण्डों के बारे में विचार कीजिए।

गतिविधि 2 परछाई का खेल

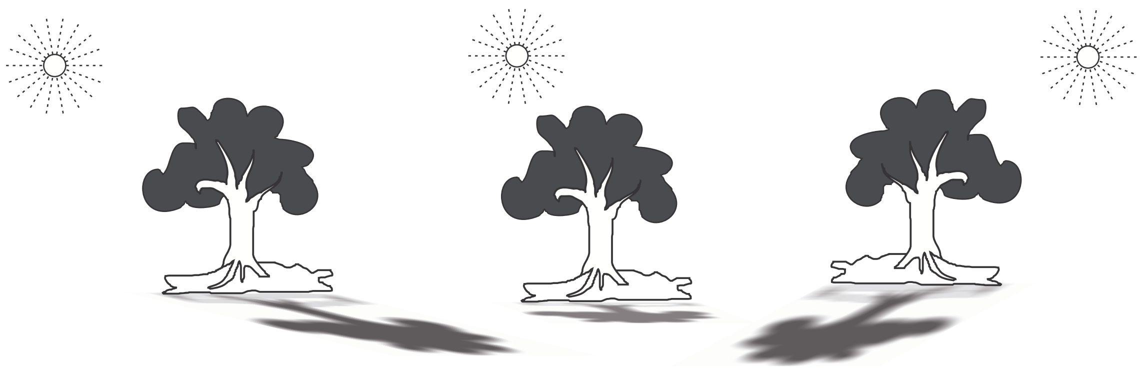
(त्रिआयामी आकारों का छाया चित्रण) त्रिविमीय वस्तुएँ द्विविमीय आकृतियों में कैसी दिखाई पड़ती है, इसे एक दूसरे तरीके (परछाई) द्वारा भी देखा जा सकता है। यह एक प्रकार का मनोरंजन है जहाँ ठोस वस्तुओं को किसी प्रकाशमय स्त्रोत के सामने रखकर उनके गतिमान प्रतिबिम्बों के भ्रम उत्पन्न किए जाते है।

इसी प्रयोग को समझने के लिए एक ओवरहेड प्रोजेक्टर या टॉर्च व भिन्न –भिन्न आकारों की ठोस वस्तुओं की आवश्यकता होती है। चित्रानुसार ठोस को रखकर उस पर टॉर्च का प्रकाश डालिए।



पर्दे पर किस प्रकार का प्रतिबिम्ब दिखाई देता है ? यदि शंकु के स्थान पर घन रखा जाएगा तो परछाई कैसी प्राप्त होगी ?

प्रकाश के स्त्रोत को विभिन्न स्थितियों में रखकर व ठोस वस्तु की स्थिति बदलकर प्रयोग को दोहराइए। प्राप्त परछाई की आकृति और आकार पर पड़ने वाले प्रभाव का अध्ययन कीजिए। आप भी परिवेश में उपलब्ध पेड़ों, भवनों आदि की प्रातःकाल, दोपहर (जब सूर्य ठीक उपर हो) तथा सायंकाल को बनने वाली परछाईयों का अवलोकन कर विभिन्न आकारों व आकृतियों का अध्ययन कीजिए।

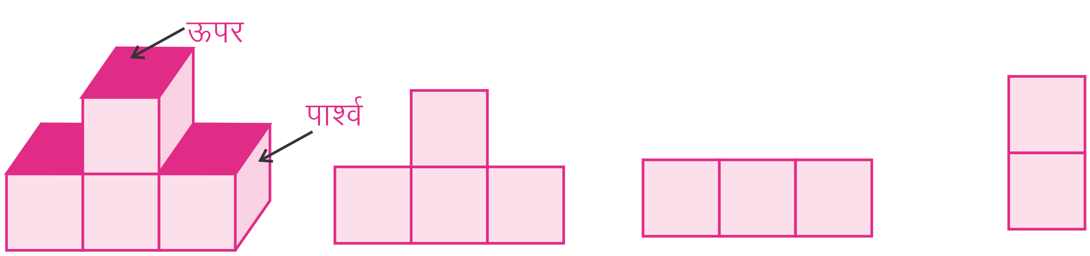


12.4 ठोस आकारों को विभिन्न कोणों से देखना (सामने, पार्श्व एवं उपर से दृश्य)

किसी वस्तु (ठोस आकार) को उसके सामने, दाईं ओर से या उसके ऊपर से देखने पर प्रत्येक बार एक भिन्न दृश्य दिखाई देता है।

सामने का दृश्य पार्श्व का दृश्य ऊपर का दृश्य

इसी प्रकार निम्न आकृति को देखकर उसके सामने के, ऊपर के तथा पार्श्व दृश्य पर विचार कीजिए।



सामने सामने ऊपर पार्श्व

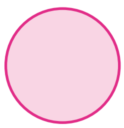
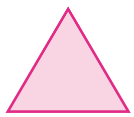
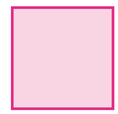
प्रश्नावली 12.3

1. निम्न ठोसों को उर्ध्वाधर तथा क्षैतिज रुप से काटने पर किस प्रकार की अनुप्रस्थ काट प्राप्त होती है ?

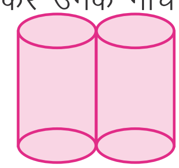
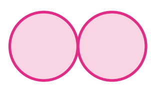
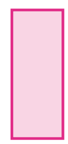
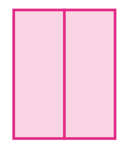
   (i) एक पासा (ii) एक ईंट (iii) एक बेलनाकार लकड़ी का गट्टा

   (iv) एक गोल सेब (v) एक आइसक्रीम शंकु।

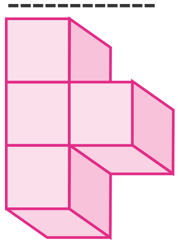
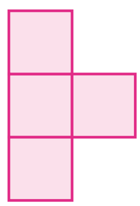
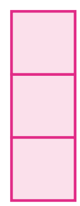
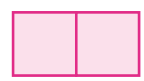
2. किसी ओवरहेड प्रोजेक्टर के बल्ब के नीचे कुछ ठोस को रखकर निम्न प्रकार के छाया चित्र प्राप्त किए गए हैं। छाया चित्रों को देखकर संभावित ठोसों के नाम लिखिए।

   (i)  (ii)  (iii)  (iv) 

3. नीचे दिए गए आकारों के सामने (फ्रंट), पार्श्व(साइड) तथा ऊपर (टॉप) के दृश्य दिए गए हैं, इन्हें पहचान कर उनके नीचे लिखिए।

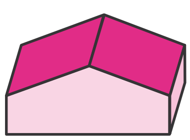
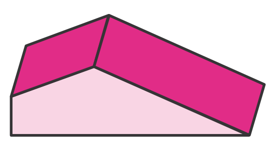
   (i)    

   ------------- ------------- ------------- -------------

   (ii)    

   ------------- ------------- ------------- -------------

4. नीचे दिए गए ठोसों को सामने से, पार्श्व से तथा ऊपर से देखने पर बनने वाले दृश्यों को खींचिए।

   (i)  (ii) 

5. दिए गए कथनों की जाँच कर सत्य/असत्य बताइए।

(1) खीरा (ककड़ी) को उर्ध्वाधर काटने पर प्राप्त होने वाली अनुप्रस्थ काट लगभग वृताकार होती है।

(2) एक शंक्वाकार टेन्ट के ठीक ऊपर सूर्य के चमकने पर बनने वाली टेन्ट की छाया त्रिभुजाकार होती है।

(3) किसी घनाकार बॉक्स के सामने, पार्श्व तथा ऊपर से देखने पर समान दृश्य दिखाई देते हैं।

हमने सीखा

1. समतल आकृतियों की दो विमाएँ (2D) होती है। तथा ठोस आकारों की तीन विमाएँ (3D) होती है।
2. ठोस आकार के कोने उसके शीर्ष, उसके ढाँचें के रेखाखण्ड उसके किनारे (या कोर) तथा उसके सपाट पृष्ठ उसके फलक कहलाते है।
3. ठोस का एक जाल दो विमाओं में एक ऐसा ढाँचा (या रूपरेखा) है, जिसे मोड़कर वह ठोस प्राप्त हो जाता है। एक ही ठोस के अनेक प्रकार के जाल हो सकते है।
4. ठोस आकारों को समतल पृष्ठों (जैसे कागज, फर्श, ब्लेक बोर्ड) पर खीचा जा सकता है, इसे हम 3-D ठोस का 2-D निरूपण कहते है।
5. एक ठोस के दो प्रकार से 2-D निरूपण सम्भव है –

   (i) ग्रिड पेपर पर (ii) एक समदूरस्थ चित्र (आइसोमेट्रिक शीट पर)
6. एक ठोस के विभिन्न भागों को अनेक विधियों से देखा जा सकता है।

   (i) एक विधि यह है कि दिए हुए आकार को काट लिया जाए। इससे हमें ठोस की एक अनुप्रस्थ काट प्राप्त हो जाती है।

   (ii) एक अन्य विधि यह है कि 3-D आकार की एक 2-D छाया देखी जाए।

   (iii) तीसरी विधि यह है कि ठोस आकार को विभिन्न कोणों से देखा जाए। देखे गए आकार के सामने का दृश्य, पार्श्व दृश्य और ऊपर का दृश्य हम उस आकार के बारे में बहुत अधिक जानकारी प्रदान कर सकते है।

अध्याय 13 बीजीय व्यंजक

13.1 हमने चरों और अचरों से युक्त पदों जैसे x, $x + 1$, 2p-1, y-5, 3y+4 के बारे में पिछली कक्षा में अध्ययन किया है। हमने यह देखा कि इन पदों के द्वारा समस्याओं को सरलता और व्यापकता से अभिव्यक्त किया जा सकता है।

बीजीय व्यंजकों (Algebric expressions) को बीजगणित में व्यापक आवश्यकता के रुप में प्रस्तुत किया जाता है और इसी व्यापक अवधारणा को केन्द्र में मान कर बीजीय व्यंजकों के साथ संक्रियाएँ कर इनका अनुप्रयोग समस्याओं के समाधान में किया जाता है।

13.2 बीजीय व्यंजक

पिछली कक्षा में हमने तीलियों के खेल से पैटर्न बनाए।

उदाहरण 1 चित्रानुसार एक माचिस की तीली ( ) के साथ आकार की दो–दो तीलियों के तीन सेट रख दिए जाएँ।

इस आकृति में तीलियों की संख्या क्रमशः 3, 5, 7 हैं जिसे 2 x 1 + 1, 2 x 2 + 1, 2 x 3 + 1 आदि लिखा जा सकता है।

यदि तीलियों के सेट को "n" द्वारा व्यक्त किया जाए तो सामान्य रुप से तीलियों की संख्या को 2 x n + 1 अर्थात् (2n +1) द्वारा सरलता से व्यक्त किया जा सकता है। इस प्रकार से चरों और अचरों का संयोजन ही ''बीजीय पद'' कहलाता है। आओ कुछ और बीजीय पदों को देखते हैं।

(1) किसी संख्या में 3 के जोड़ को (x + 3) द्वारा व्यक्त किया जा सकता है।

(2) किसी संख्या के चौगुने में से 5 के घटाव को (4x-5) द्वारा व्यक्त किया जाता है।

(3) किसी संख्या के आधे से एक कम को ($\frac{x}{2}$ - 1) द्वारा व्यक्त करते हैं।

यहाँ अज्ञात संख्या को x द्वारा दर्शाया गया है।

अतः बीजीय पदों का इस प्रकार संयोजन करने से (x + 3), (4x - 5) ($\frac{x}{2}$ -1) आदि **'बीजीय व्यंजक'** प्राप्त होते है। यहाँ हम उनके गुणधर्मों के बारे में अध्ययन करेंगे।

बीजीय व्यंजक में कम से कम एक चर राशि अवश्य होती है।

13.3 बीजीय व्यंजक के पद

किसी भी बीजीय व्यंजक के छोटे – छोटे भाग होते हैं जैसे 5x + 3 पर विचार करते हैं। इसमें पहले हम 5 व x का गुणा करके 5x बनाते हैं और फिर इसमें 3 जोड़ते हैं। इसी प्रकार $2x^2 + 3y$ में हमने 2, x और x का गुणा करके $2x^2$ बनाया फिर अलग से 3 व y का गुणा करके 3y बनाया $2x^2$ व 3y बनाने के बाद हमने दोनों को जोड़ दिया।

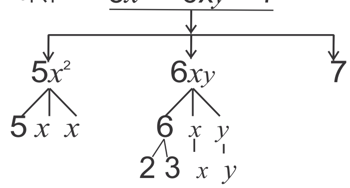
इस प्रकार व्यंजक $2x^2 + 3y$ बनता है।

व्यंजक के ये छोटे –छोटे भाग जो पहले अलग से बनाए जाते हैं और फिर जोड़ दिए जाते हैं **व्यंजक के पद** कहलाते हैं। व्यंजक $9y^2 - 4xy$ में दो पद है पहला पद $9y^2$ क्रमशः 9, y और y का गुणनफल है। दूसरा पद $-4xy$ क्रमशः -4, x, y का गुणनफल है।

फिर इन्हें $9y^2 + (-4xy)$ करते हैं और व्यंजक $9y^2 - 4xy$ प्राप्त होता है।

13.3.1 एक पद के गुणनखण्ड

बीजीय व्यंजक का एक पद कई चरों एवं अचरों का गुणनफल हो सकता है। हम एक व्यंजक के तथा पदों के गुणनखण्डों को एक सरल एवं आकर्षक प्रकार से पेड़ आरेख (Tree diagram) द्वारा निरुपित कर सकते हैं जैसे :– $5x^2 - 6xy + 7$



यहाँ

पद	चर	अचर
$5x^2, -6xy, +7$	x व y	5,-6,7

करो और सीखो नीचे दी गई सारणी को भरिए।

व्यंजक	पदों की संख्या	पद	पद के गुणनखण्ड	बीज (चर)	अचर
$3x^2 + 6xy + 7y^2$	3	$3x^2, 6xy, 7y^2$	$3x^2 = 3 \times x \times x$	x, y	3, 6, 7
			$6xy = 2 \times 3 \times x \times y$		
			$7y^2 = 7 \times y \times y$		
$a^2 - b^2$	2				
$8p^2 - 3p + 7$					

13.4 गुणांक

किसी पद के किन्हीं भी गुणनखण्डों के गुणांक उस पद के शेष गुणखण्डों के गुणनफल के बराबर होता है। गुणांक बीजीय एवं संख्यात्मक दोनों ही प्रकार के हो सकते हैं।

जैसे –

$10xy$ में xy का गुणांक $= 10$

$10xy$ में y का गुणांक $= 10x$

$10xy$ में 10 का गुणांक $= xy$

> जब किसी पद का गुणांक +1 होता है हम उसे नहीं लिखते हैं जैसे x^3y^2 में x^3y^2 का गुणांक +1 है, इसी प्रकार $-x^2y^2$ में x^2y^2 का गुणांक (-1) है।

उदाहरण 1 निम्नलिखित व्यंजकों में x का गुणांक क्या है ?

हल $8x - 3y$, $5 - x + z$, $y^2x - z^2$, $2z - 5xp$

	व्यंजक	गुणनखण्ड वाला पद	गुणांक
(i)	$8x - 3y$	$8x$	8
(ii)	$5 - x + z$	$-x$	-1
(iii)	$y^2x - z^2$	y^2x	y^2
(iv)	$2z - 5xp$	$-5xp$	$-5p$

करो और सीखो

निम्नलिखित बीजीय व्यंजक $4x^2y^2 - 3xy + 15$ में गुणांक का मिलान कीजिए।

x^2y^2 का गुणांक	x^2
xy का गुणांक	$-3y$
x^2 का गुणांक	$-y$
$4y^2$ का गुणांक	-3
x का गुणांक	$4y^2$
$3x$ का गुणांक	4

प्रश्नावली 13.1

1. पेड़ आरेख बनाकर व्यंजक के पदों के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।
   (i) $9x^2-8$ (ii) $12x^2y + 8xy^2 - 15y^3$ (iii) $a^3 - b^3$
2. दिए गए पदों में गुणांक बताइए।
   (i) $4x$ में x का (ii) $9x^2y^2$ में y^2, x^2 एवं 9 का
   (iii) $\frac{-8}{5}x^3y^3$ में x^3, y^3 एवं x^3y^3 का (iv) $\frac{9a^2b^2}{13}$ में a^2 का एवं b^2 का

13.5 समान और असमान पद

जब पदों के बीजीय गुणनखण्ड एक जैसे ही हों तो वे पद समान कहलाते हैं। जब पदों के बीजीय गुणनखण्ड भिन्न–भिन्न हो तो वे असमान पद कहलाते हैं। जैसे $5xy-6x+3xy-9$ में $5xy$ और $3xy$ को देखते हैं तो $5xy$ के गुणनखण्ड 5, x और y है तथा $3xy$ में 3, x और y है। इस प्रकार इनके बीजीय (अर्थात वे जिनमें चर है) गुणनखण्ड एक ही है। इसलिए ये समान पद है।

> $3xy$, $5yx$ समान पदीय होते हैं इनमें चरों के गुणन पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता क्योंकि $xy = yx$

इसके विपरीत पदों $5xy$ और $-6x$ में भिन्न–भिन्न बीजीय गुणनखण्ड है। वे असमान पद है इसी प्रकार पद $5xy$ और -9 असमान पद है। और $3xy$ और -9 भी असमान पद है।

करो और सीखो

निम्नलिखित में से समान पदों को छाँटिए।

3pq, -5p, 6q + 5, - 8pq, p^2 + q, qp

उदाहरण 2 कारण सहित बताइए कि पदों के निम्नलिखित युग्मों के कौन–कौन से युग्म समान पदों के हैं तथा कौन कौन से युग्म असमान पदों के है ?

क्रम	पद युग्म	गुणनफल	बीजीय गुणनखण्ड	कारण
1.	3ab 3b	3 x a x b 3 x b	भिन्न–भिन्न	a चर दूसरे पद में नहीं है।
2.	17a -6a	17 x a -6 x a	समान	दोनों बीजीय गुणनखण्ड समान है।
3.	$5a^2b$ $5ab^2$	5 x a x a x b 5 x a x b x b	भिन्न–भिन्न	दोनों में चर एक समान है पर उनकी घातें असमान है।
4.	-4ab 7ab	-4 x a x b 7 x b x a	समान	दोनों बीजीय गुणनखण्ड समान है।

13.6 बहुपदी व्यंजक

एक पदीय	जिनमें केवल एक पद हो जैसे	$7xy$, -3m, y^2, x^2y^2
द्विपदीय	जिनमें केवल दो पद हों जैसे	$x+y$, x-5, pq+5, m^2n^2+5m
त्रिपदीय	जिनमें केवल तीन पद हों जैसे	$x+y+2$, $3x^2-5x+7$, $ab+ab^2+b^2$

एक या एक से अधिक पदों वाले व्यंजक को बहुपदीय व्यंजक भी कहते हैं।

करो और सीखो

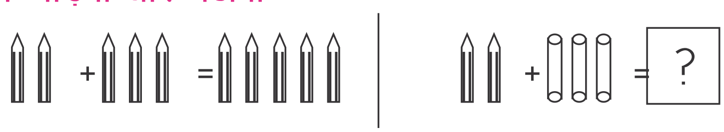
निम्नलिखित में से एक पदीय, द्विपदीय एवं त्रिपदीय व्यंजकों को छाँटकर उपयुक्त बॉक्स में लिखिए।

1. $2a^2 + b$
2. $4\,x^2y^3$
3. 3m -2 n +1
4. 2mn-3
5. $\frac{7}{8}\,xy^2z$
6. $\frac{1}{3}\,x^2 + \frac{2}{3}\,xy + xy^2$
7. ab+bc+ca
8. $ax^2 + bx + c$
9. $5xy - 7 + 3n$
10. $3x + 1$
11. $\frac{9}{17}a^2 + b^2 - \frac{1}{2}$
12. $\frac{8}{19}\,p^2r^2q^2$

2. समान पदों का मिलान कीजिए।

(a) $4a^2b$	(i) $\frac{8}{13}x^2y^2z^2$
(b) 5nm	(ii) $\frac{3p}{q}$
(c) $\frac{3}{4}x^2y^2z^2$	(iii) $\frac{5a^2}{7b^2}$
(d) $\frac{-1}{5}\frac{a^3b^3}{c^3}$	(iv) ga^2b
(e) $\frac{-22}{7}\frac{p}{q}$	(v) nm
(f) $\frac{a^2}{b^2}$	(vi) $\frac{a^3b^3}{c^3}$
(g) xyz	(vii) $\frac{8}{x^2y^2z^2}$
(h) $\frac{3}{x^2y^2z^2}$	(viii) $19xyz$

13.7 समान पदों को जोड़ना और घटाना



2 पेन्सिल + 3 पेन्सिल = 5 पेन्सिल 2 पेन्सिल + 3 चॉक

$2x + 3x = (2+3)x$

$= 5x$

हम पेंसिलों का योग कर सकते हैं परन्तु पेंसिलों तथा चॉक को नहीं जोड़ सकते हैं। अर्थात् हम समान इकाई (समान चर वाली)राशियों को जोड़ घटा सकते हैं।

इसी प्रकार – $5x^2y + 3x^2y = 8x^2y$

$9a^2b^2 - 4a^2b^2 = 5a^2b^2$

समान पदों को जोड़ने पर प्राप्त पद का संख्यात्मक गुणांक उन सभी पदों के गुणांकों के योग के बराबर होता है। इसी प्रकार दो समान पदों के घटाने पर प्राप्त परिणाम इनके संख्यात्मक गुणांकों के अंतर के बराबर होता है। यह ध्यान रखना है कि असमान पदों को उस प्रकार जोड़ा या घटाया नहीं जा सकता जिस प्रकार कि समान पदों को जोड या घटा लिया जाता है।

अर्थात् x में 5 जोड़ने पर परिणाम $x + 5$ आता है इसी प्रकार $3xy$ में 7 जोड़ने पर $3xy + 7$ व $3xy$ मे से 7 घटाने पर $3xy - 7$ आता है।

बीजीय व्यंजकों को जोड़ने, घटाने के लिए चरण –

1. समान एवं असमान पदों की पहचान करते हैं।
2. समान पदों को उनके चिह्न के साथ लिखते हैं।
3. उन समान पदों का नियमों से जोड़ घटा करते हैं।
4. यदि एक या अधिक असमान पद शेष रहते हैं तो उन्हें उनके चिह्न के साथ संयोजित कर लिख देते हैं।

उदाहरण 3 $3x + 8y$ और $8x + 5y$ को जोड़िए।

हल $(3x + 8y) + (8x + 5y)$

$= 3x + 8x + 8y + 5y$ (समान बीजों वाले पदों को एक साथ रखने पर)

$= 11x + 13y$

इनको हम सामान्य स्तम्भ जोड़ो की तरह भी जोड़ सकते हैं।

$$\begin{array}{r} 3x + 8y \\ 8x + 5y \\ \hline 11x + 13y \\ \hline \end{array}$$

उदाहरण 4 $7ab+4a$ और $2a+5ba$ को जोड़िए।

हल $(7ab + 4a) + (2a + 5ba)$

$= 7ab + 4a + 2a + 5ab$

$= 7ab + 5ab + 4a + 2a$

$= 12ab + 6a$

$$\begin{array}{r} 7ab + 4a \\ + 5ab + 2a \\ \hline 12ab + 6a \\ \hline \end{array}$$

उदाहरण 5 $11xy - 5m^2$ में से $3m^2 - 2xy$ को घटाइए।

हल $= (11xy - 5m^2) - (3m^2 - 2xy)$

$= 11xy - 5m^2 - 3m^2 + 2xy$

$= 11xy + 2xy - 5m^2 - 3m^2$

$= 13xy - 8m^2$

उदाहरण 6 $(3m + 2n-7) +(2m^2 + 5m + n^2)$ को हल कीजिए।

हल $3m + 2n - 7 + 2m^2 + 5m + n^2$

$= 3m + 5m + 2n - 7 + 2m^2 + n^2$

$= 8m + 2n - 7 + 2m^2 + n^2$

$= 2m^2 + n^2 + 8m + 2n - 7$

करो और सीखो

बीजीय व्यंजकों को जोडिए और घटाइए।

(1) $m - n$ व $m + n$ को

(2) $mn - 5 + 2n$ व $nm + 2m -3$

(3) $\frac{xy}{5} + \frac{x}{3}$ व $\frac{xy}{2} - \frac{x}{3}$

प्रश्नावली 13.2

1. निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों को जोड़िए।
   (i) t - 4tz, 2t + 6tz (ii) $7xy, 5xy, 3xy, -2xy$
   (iii) $5x - 7y$, $3y - 4x + 2$, $2x - 3xy - 5$ (iv) $m^2 - n^2 - 1$, $n^2 - 1 - m^2$, $1 - m^2 - n^2$
   (v) $3x + 11 + 8z$, $5x - 7$ (vi) $a^2b + ab + ab^2$, $-a^2b + 2ba + 2a^2b^2$
   (vii) $x - y$, $y - z$, $z - x$
2. निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों को घटाइए।
   (i) x^2 में से $-5x^2$ (ii) (a +b) में से (a-b)
   (iii) $4x^2 - 3xy + 8$ में से $x^2 + 5x + 4$. (iv) $3xy - 2x^2 - 2y^2$ में से $5x^2 - 7xy + 5y^2$
   (v) $5p^2 + 2q^2 - pq^2$ में से $4pq - 5q^2 - 3p^2$ (vi) $5x - 10$ में से $x^2 + 10x - 5$
3. $x + y + z$ प्राप्त करने के लिए $7x - 8y$ में से क्या घटाना चाहिए ?
4. 2p + 6 में क्या जोड़ें कि 3p - q + 6 प्राप्त हो जाए ?

13.8 किसी बीजीय व्यंजक का मान ज्ञात करना

एक बीजीय व्यंजक का मान उस व्यंजक को बनाने वाले चरों के मानों पर निर्भर करता है। हम अनेक स्थितियों में किसी भी व्यंजक में चर का मान रखकर उससे बनने वाले समीकरण को संतुष्ट करता है या नहीं, यह जाँच करते हैं।

उदाहरण 7 निम्नलिखित व्यंजकों के मान $x = 3$ के लिए ज्ञात कीजिए।

(i) $x + 5$ (ii) $9x - 3$ (iii) $25 - 3x^2$ (iv) $4x^2 + 5x - 51$

हल

(i) $x + 5$ में x के स्थान पर 3 रखने पर
$= 3 + 5$
$= 8$

(ii) $9x - 3$ में x के स्थान पर 3 रखने पर
$= (9 \times 3) - 3$
$= 27 - 3 = 24$

(iii) $25 - 3x^2$
$= 25 - 3 \times (3)^2$
$= 25 - 3 \times 3 \times 3 = 25 - 27 = -2$

(iv) $4x^2 + 5x - 51$
$= 4 \times (3)^2 + 5(3) - 51$
$= 4 \times 9 + 5 \times 3 - 51$
$= 36 + 15 - 51 = 51 - 51 = 0$

उदाहरण 8 a = 3 और b= 2 के लिए निम्नलिखित व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए।

(i) a + b (ii) 5a - 2b (iii) a^2- 2ab + b^2 (iv) a^3 - b^3

हल a = 3 और b = 2, दिए गए व्यंजकों में रखने पर

(i) a + b = 3 + 2 = 5 (ii) 5a - 2b = 5 x 3 - 2 x 2 = 15 - 4 = 11

(iii) a^2 - 2ab + b^2
= $(3)^2$ -2 x 3 x 2 + $(2)^2$
= 9 - 12 + 4
= 13 - 12 = 1

(iv) a^3 - b^3
= $(3)^3$ - $(2)^3$
= 3 x 3 x 3 - 2x 2x 2
= 27 - 8
= 19

प्रश्नावली 13.3

1 यदि $x = 2$ है तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

(i) x - 3 (ii) 2x - 5 (iii) 9 - 6x (iv) 3x^2 - 4x - 7 (v) $\frac{5x}{2} - 4$

2 यदि p = -1 है तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।
(i) 4p + 5 (ii) -3p^2 + 4p + 8 (iii) 3(p - 2) + 6

3 यदि a = 2 और b = -2 है तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।
(i) a^2 - b^2 (ii) a^2 - ab + b^2 (iii) a^2 + b^2

4 यदि $x = 1$ और $y = 0$ है तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।
(i) 2x + 2y (ii) 2x^2 + y^2 + 1 (iii) 2x^2y + 2x^2y^2 + y^2 (iv) x^2 + xy + 5

हमने सीखा

1. बीजीय व्यंजक चरों एवं अचरों से बनते हैं इनको बनाने के लिये चरों एवं अचरों पर +, -, x,÷ की संक्रियाएँ करते हैं।
2. व्यंजक, पदों से मिलकर बनते हैं, पदों को जोड़कर व्यंजक बनाया जाता है।
3. कोई भी पद उसके गुणनखण्ड का एक गुणनफल होता है, चरों के गुणनखण्ड को बीजीय गुणनखण्ड कहते है। पद का गुणांक उसका संख्यात्मक गुणनखण्ड होता है। पद का कोई भी एक गुणनखण्ड पद के शेष भाग का गुणांक कहलाता है।
4. एक या अधिक पदों से बना व्यंजक एक बहुपद कहलाता हैं ये एक पदीय (एक पद वाला), द्विपदी (दो पदों वाला) तथा त्रिपदीय (तीन पदों वाला) हो सकता हैं।
5. जिनके बीजीय गुणनखण्ड एक जैसे हो समान पद कहलाते है तथा भिन्न–भिन्न बीजीय गुणनखण्ड वाले पद असमान पद कहलाते है।
6. दो समान पदों का योग या अंतर एक अन्य समान पद होता है। जिनका गुणांक उन समान पदों के गुणांकों का योग या अंतर के बराबर होता है।
7. दो समान पदों वाले बीजीय व्यंजकों को जोड़ा या घटाया जा सकता है। जो पद समान नहीं है उन्हें छोड दिया जाता है।
8. किसी भी बीजीय व्यंजक का मान चरों के मान पर निर्भर करता है।

अध्याय 14 सरल समीकरण

14.1 पिछली कक्षा में हमने बीजीय पद, बीजीय व्यंजक एवं समीकरण के बारे में पढ़ा। इसके कुछ उदाहरण इस प्रकार हैं।

बीजीय पद $2x$, 3y, 5p आदि।
बीजीय व्यंजक $3x + 5$, 2y - 3, 5p- 7 आदि।
समीकरण $x = 2$, y = z + 1, p + 1 = 5 आदि।

हमने गणितीय कथनों को समीकरण के रुप में लिखना अर्थात् एक चर राशि वाले समीकरणों का निरुपण और उनका हल ज्ञात करने की ''प्रयास एवं भूल विधि'' का अध्ययन किया और सीखा कि यदि समीकरण का हल (चर का मान) कथन के सभी प्रतिबंधों (शर्तों) को संतुष्ट नहीं करता है तो समीकरण बनाने या उसे हल करने में कहीं कोई त्रुटि है। अतः पुनः विचार कर संशोधन की आवश्यकता है। अर्थात् चर का कोई मान जिसके लिए यह कथन सत्य हो इस समीकरण का हल या मूल कहलाता है। अब अन्य विधियों का अध्ययन करेंगे।

14.2 समीकरण हल करना

समीकरण में दो पक्ष होते हैं प्रथम पक्ष बाईं ओर है जिसे वाम पक्ष या L.H.S कहते है। दूसरा पक्ष दाईं ओर है दक्षिण पक्ष या R.H.S. कहते हैं। दोनों पक्षों के बीच समता '=' का चिह्न होता है। दोनों पक्षों का संख्यात्मक मान बराबर होता है। समीकरण के दोनों पक्ष तुला के दो संतुलित पलड़ों के समान है। यदि दोनों पक्षों में समान गणितीय संक्रियाएँ (किसी संख्या को जोड़ना, घटाना, गुणा करना या भाग लगाना) की जाए तो भी समीकरण संतुलित रहता है। हाँ ऐसा करने से उसका स्वरूप अवश्य बदल जाता है।

किसी समीकरण $3x - 7 = 5$ को हल करने के लिए उसका स्वरुप बदलकर $x = \frac{5+7}{3}$ करना होता है अर्थात् LHS में केवल चर राशि हो तथा RHS में संख्यात्मक राशि हो। इसके लिए नीचे लिखे चरणों में से एक या अधिक चरणों का प्रयोग करते हैं।

1. दोनों पक्षों में एक ही संख्या को जोड़ना।
2. दोनों पक्षों मे से एक ही संख्या को घटाना ।
3. दोनों पक्षों को एक ही शून्येतर संख्या से गुणा करना।
4. दोनों पक्षों में एक ही शून्येतर संख्या से भाग देना।

समीकरण हल करने की उपर्युक्त विधि को **''तुला विधि''** कहते हैं।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

इसे निम्नलिखित उदाहरण से समझते हैं।

उदाहरण 1 समीकरण $3x - 7 = 5$ को हल कीजिए।

हल दोनों पक्षों में 7 जोड़ने पर

$$3x - 7 + 7 = 5 + 7$$

$$3x = 12$$

दोनों पक्षों में 3 का भाग देने पर

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$$

$$x = 4$$

उत्तर की जाँच

समीकरण $3x - 7 = 5$ का हल $x = 4$ प्राप्त हुआ तो x के स्थान पर 4 प्रतिस्थापित करके दोनों पक्षों का मान ज्ञात करें।

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= 3x - 7 \\ &= 3 \times 4 - 7 \\ &= 12 - 7 \\ &= 5 = \text{RHS} \end{aligned}$$

$$\text{LHS} = \text{RHS}$$

एक पक्ष में से किसी पद को चिह्न बदल कर दूसरे पक्ष में ले जाने तथा चर के गुणांक को दूसरे पक्ष में ले जाकर गुणा करने अथवा भाग लगाने को **पक्षांतरण** कहते हैं।

उदाहरण 2 पक्षांतरण द्वारा समीकरण $5x + 2 = 17$ को हल कीजिए।

हल

$$5x + 2 = 17$$

$$5x = 17 - 2 \quad \text{(2 के पक्षांतरण से)}$$

$$5x = 15$$

$$x = \frac{15}{5} \quad \text{(गुणांक 5 के पक्षांतरण से)}$$

$$x = 3$$

उत्तर की जाँच $\text{LHS} = 5x + 2 = 5 \times 3 + 2 = 15 + 2 = 17 = \text{RHS}$

अतः उत्तर $x = 3$ सही है।

करो और सीखो

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

तुला विधि

$7x + 6 = 34$

$7x + 6 - \ldots = 34 - \ldots$

$7x = \ldots\ldots.$

$x = \ldots$

पक्षांतरण विधि

$7x + 6 = 34$

$7x = 34 - \ldots$

$x = \dfrac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{7}$

$x = 4$

उत्तर की जाँच LHS = $7x + 6$

$= 7x \ldots\ldots\ldots +6$

$= \ldots\ldots\ldots +6$

= RHS

2. सही/गलत बताइए।

(i) $4x + x - 13 = 7$ में $x = 4$ सही/गलत

(ii) $3x - 8 = 25$ में $x = 12$ सही/गलत

(iii) $7x - 5 = 3x + 7$ में $x = 3$ सही/गलत

(iv) $5x - 7 = 4x + 1$ में $x = 5$ सही/गलत

परिमेय गुणांक वाले समीकरण को हल करने के लिए समीकरण में आई भिन्नों के हरों का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करते हैं। और समीकरण के दोनों पक्षों को उस ल.स. से गुणा करते हैं।

उदाहरण 3 समीकरण $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 1$ में x का मान ज्ञात कीजिए एवं उत्तर की जाँच भी कीजिए।

हल (यहाँ हर 3 और 4 का ल.स. 12 है)

या $\frac{x}{3} \times 12 - \frac{x}{4} \times 12 = 1 \times 12$

या $4x - 3x = 12$

या $x = 12$

उत्तर की जाँच LHS $= \frac{x}{3} - \frac{x}{4}$

$= \frac{12}{3} - \frac{12}{4} = 4 - 3 = 1 = \text{RHS}$

अतः उत्तर $x = 12$ सही है।

उदाहरण 4 $2(x + 4) = 12$ को हल कीजिए।

हल

$2x + 8 = 12$

$2x + 8 - 8 = 12 - 8$ (दोनों पक्षों में से 8 घटाने पर)

$2x = 4$

$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$ (दोनों पक्षों में 2 का भाग देने पर)

$x = 2$

(पंक्षातरण विधि)

$2(x + 4) = 12$

$2x + 8 = 12$

$2x = 12 - 8$

$2x = 4$

$2x = \frac{4}{2}$

$x = 2$

प्रश्नावली 14.1

नीचे दिए गए समीकरण हल कीजिए एवं उत्तर की जाँच कीजिए।

1. $2x + 1 = 9$
2. $5x - 4 = 26$
3. $5x - 2x + 7 = 31$
4. $5x + 8 = 12 + 6$
5. $12x + 3x = 60$
6. $\frac{7x}{9} = 21$
7. $\frac{2x}{3} - \frac{x}{2} = 3$
8. $\frac{3x}{4} - \frac{2x}{5} = 7$
9. $\frac{7x + 1}{2} = 11$
10. $\frac{3l}{2} = \frac{2}{3}$
11. $7m + \frac{19}{2} = 13$
12. $6z + 10 = -2$
13. $\frac{q}{4} + 7 = 5$
14. $4 (2-x) = 8$
15. $3 (n - 5) = 21$
16. $4 = 5 (t -2)$
17. $0 = 16 + 4 (m - 6)$

14.3 इबारती प्रश्नों (समस्याओं) का हल करना

सरल समस्याओं को हल करने में हम सरल समीकरण का प्रयोग करते हैं। इसके लिए निम्नलिखित चरणों के क्रम में काम किया जाता है।

1. दी गई समस्या को ध्यान से पढ़ें और ''क्या दिया है'' एवं क्या ज्ञात करना है लिखे।
2. अज्ञात राशि को किसी चर राशि से व्यक्त करें।
3. समस्या में दिए गए कथनों को गणितीय कथनों अर्थात् पद या व्यंजक में बदलें।
4. प्रश्न की शर्त के अनुसार जो राशियाँ (पद या व्यंजक) समान हो उन्हें समीकरण के रुप में लिखें।
5. समीकरण हल करके चर राशि का मान निकालें और समस्या का समाधान प्रस्तुत करें।
6. अपने उत्तर की जाँच करें।

उदाहरण 5 किसी संख्या के 4 गुने से सात अधिक 43 होता है वह संख्या ज्ञात कीजिए।

हल माना कि अज्ञात संख्या x है।

संख्या का चार गुना = $4x$

संख्या के 4 गुने से 7 अधिक = $4x + 7$

प्रश्न की शर्त के अनुसार -

$4x + 7 = 43$

$4x = 43 - 7$

$4x = 36$

$x = 9$

उत्तर की जाँच :–

संख्या के 4 गुने से 7 अधिक

= 4 x 9 + 7

= 36 + 7

= 43 अतः उत्तर सही है।

उदाहरण 6 किसी त्रिभुज का एक कोण दूसरे कोण से 20^0 बड़ा है तथा तीसरे से 20^0 छोटा है। तीनों कोणों का मान ज्ञात कीजिए।

हल माना कि पहला कोण $= x$

दूसरा कोण $= x - 20^0$

तीसरा कोण $= x + 20^0$

शर्त के अनुसार –

$x + x - 20 + x + 20 = 180^0$ (त्रिभुज के तीनों कोणों का योग दो समकोण होता है)

$x + x + x = 180^0$

$3x = 180^0$

$\boxed{x = 60^0}$

पहला कोण $x = 60^0$

दूसरा कोण $x - 20 = 60 - 20 = 40^0$

तीसरा कोण $x + 20 = 60 + 20 = 80^0$

अतः तीनों कोण $= 60^0, 40^0, 80^0$

उत्तर की जाँच $= 60^0 + 40^0 + 80^0 = 180^0$ अतः उत्तर सही है।

प्रश्नावली 14.2

1. किसी संख्या में 12 जोड़ने पर 43 प्राप्त होता है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।
2. किसी संख्या के 4 गुने में से 5 घटाने पर 27 प्राप्त होता है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।
3. किसी संख्या के 5 गुने में संख्या का दुगुना जोड़ने पर 42 आता है। वह संख्या बताइए।
4. तीन क्रमागत संख्याओं का योग 27 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
5. तीन क्रमागत विषम संख्याओं का योग 39 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
6. तीन क्रमागत सम संख्याओं का योग 48 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
7. रामू की आयु 37 वर्ष है जो इसके पुत्र की आयु के तीन गुने से 4 वर्ष अधिक है। पुत्र की आयु ज्ञात कीजिए।
8. इशु के पिता की आयु इशु की आयु के तीन गुने से 5 वर्ष अधिक है। इशु की आयु ज्ञात कीजिए यदि पिता की आयु 44 वर्ष हो।
9. रियाज एक संख्या के बारे में इस प्रकार सोचता है कि वह उसका $2\frac{1}{2}$ गुना करके 7 घटा देता है परिणाम 23 आता है रियाज ने क्या संख्या सोची ?
10. रमनजीत के पिता की आयु 49 वर्ष है उनकी आयु रमनजीत की आयु के तीन गुने से 4 वर्ष अधिक है रमनजीत की आयु ज्ञात कीजिए।
11. जोधपुर में जयपुर के मुकाबले प्रतिमाह सड़क दुर्घटनाएँ 3 गुने से 50 कम है। जयपुर में प्रतिमाह 400 सड़क दुर्घटनाएँ होती है तो जोधपुर में कितनी हुई ?

हमने सीखा

1. समीकरण में चर पर ऐसा प्रतिबंध होता है जिसमें दोनों पक्षों में व्यंजकों का मान बराबर होना चाहिए।
2. चर का वह मान जिसके लिए समीकरण संतुष्ट होता है, वह उस समीकरण का हल कहलाता है।
3. किसी समीकरण में बायाँ पक्ष और दायाँ पक्ष परस्पर बदलने पर समीकरण नहीं बदलता है।
4. समीकरण में हम दोनों पक्षों में एक साथ किसी संख्या को जोड़, घटा, गुणा या भाग कर सकते हैं।
5. समीकरण का हल चरणबद्ध होता है, दोनों पक्षों में एक से अधिक गणितीय संक्रियाएँ करनी पड़ती है, जिससे कि दोनों में से एक पक्ष में हमें केवल चर प्राप्त होता है और समीकरण का हल प्राप्त होता है।
6. पक्षान्तरण अर्थात् समीकरण के अचर या बीजीय पदों का एक पक्ष से दूसरे पक्ष में स्थानान्तरण है। पक्ष में परिवर्तन पर जोड़ व घटा की स्थिति में क्रमशः चिह्न बदल जाते हैं। गुणा की स्थिति में भाग एवं भाग की स्थिति में गुणा हो जाता है।

अध्याय 15
राशियों की तुलना

15.1 अनुपात–समानुपात

भगत एवं प्रताप राजस्थान का नक्शा बनाने लगे भगत ने कहा बड़े नक्शे को कागज पर बनाने के लिए उचित आनुपातिक नाप (पैमाने) लेना तय करते हैं। उन्होंने 100 किमी = 1 सेमी लिया तथा सड़क मार्ग से उदयपुर से अजमेर की दूरी 2.25 सेमी से दर्शाया। तभी उनके सहपाठी केशव तथा कलाम वहाँ आए और उदयपुर से अजमेर की वास्तविक दूरी ज्ञात करने लगे।

केशव का तरीका

माना दूरी = D किमी तब

100: D: : 1 : 2.25

या $\frac{100}{D} = \frac{1}{2.25}$

100 x 2.25 = 1 x D

225 = D

वास्तविक दूरी = 225 किमी

कलाम का तरीका

1 सेमी दर्शाता है 100 किमी

2.25 सेमी दर्शाएगा

= 100 x 2.25

= 225 किमी

अतः वास्तविक दूरी

= 225 किमी

वास्तविक जीवन में समानुपातों के व्यापक उपयोग ऐकिक नियम, नक्शे का चित्रांकन, समानुपातिक चित्रांकन आदि में किया जाता है।

करो और सीखो

1. कक्षा VII की गणित की पुस्तक की वास्तविक लम्बाई एवं चौड़ाई में अनुपात ज्ञात कीजिए।
2. अपने शिक्षक से पूछकर राष्ट्रीय झण्डे की लम्बाई एवं चौड़ाई में अनुपात ज्ञात कीजिए।
3. अपने कक्षा कक्ष की लम्बाई एवं चौड़ाई को नाप कर अनुपात ज्ञात कीजिए।
4. स्वयं की ऊँचाई को नापिए तथा अपने दोनों हाथों को पूरा फैलाकर लम्बाई नापिए। अब दोनों राशियों के मध्य अनुपात ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 1 6 किमी का 400 मीटर के साथ अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ दोनों राशियाँ दूरी को दर्शाती हैं तथा इन्हें एक ही इकाई में लिखते हैं।

6 किमी = 6 x 1000 मीटर

= 6000 मीटर

अतः अभीष्ट अनुपात 6 किमी : 400 मीटर

अर्थात् 6000 मीटर : 400 मीटर

या 15 : 1

उदाहरण 2 निम्नलिखित में x का मान ज्ञात कीजिए।

$3 : 25 :: x : 15$

हल

$\frac{3}{25} = \frac{x}{15}$ अनुपातिक रुप को भिन्न में लिखते हैं।

$x \times 25 = 3 \times 15$

$x = \frac{3 \times 15}{25}$ या $x = 1.8$ अतः x का मान 1.8 है।

उदाहरण 3 बालू किसान को पम्प सेट को 15 घण्टे चलाने में 25 लीटर डीजल की आवश्यकता होती है। यदि उसके पास 45 लीटर डीजल और है तो वह पम्प सेट को कितने घण्टे और चलाएगा?

हल उपलब्ध डीजल की मात्रा = 45 लीटर

25 लीटर डीजल से पम्प सेट चलता है = 15 घण्टे

1 लीटर डीजल से पम्प सेट चलेगा = $\frac{15}{25}$ घण्टे

45 लीटर डीजल से पम्प सेट चलेगा = $\frac{15}{25} \times 45$ घण्टे = 27 घण्टे

45 लीटर डीजल से पम्प सेट चलेगा = 27 घण्टे

प्रश्नावली 15.1

1. अनुपात ज्ञात कीजिए।
   (i) 60 पैसे का 3 रुपये से (ii) 340 सेमी का 4 मीटर से
2. सरलतम अनुपात में लिखिए।
   (i) 65 : 25 (ii) 72 : 64
3. निम्नलिखित अनुपातों के दो तुल्य अनुपात ज्ञात कीजिए।
   (i) 3 : 5 (ii) 7 : 11
4. एक दरी पट्टी की लम्बाई 7 मीटर एवं इसकी चौड़ाई 35 सेमी है तो निम्न अनुपात ज्ञात कीजिए।
   (i) चौड़ाई का लम्बाई से (ii) लम्बाई का चौड़ाई से
5. यदि $12 : x :: 14 : 21$ हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।
6. हलवा बनाने के लिए भीमा हलवाई 25 किग्रा दाल में 20 किग्रा शक्कर मिलाता है। जबकि भीखा हलवाई 12 किग्रा दाल में 15 किग्रा शक्कर मिलाता है। ज्ञात कीजिए :–
   (i) दोनों हलवाई प्रति किग्रा दाल में कितनी शक्कर मिलाते है ?
   (ii) किस हलवाई का बना हलवा ज्यादा मीठा होता है ?

7. 10.2 किमी लम्बी सड़क की सफाई करने में 34 मजदूर लगते हैं तो 7.5 किमी लम्बी सड़क की सफाई में कितने मजदूर लगेंगे ?
8. 7.5 मीटर ऊँचे खम्भे की परछाई 5 मीटर है तो उसके पास खड़े पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए, यदि उसी समय पेड़ की परछाई 10 मी लम्बी हो।
9. रमेश अपनी मोटर साईकिल से 10 किमी की दूरी 15 मिनट में तय करता है। अगर चाल समान हो तो रमेश को 26 किमी की दूरी तय करने में कितना समय लगेगा ?
10. मध्यान्ह भोजन में 60 विद्यार्थियों के लिए 3 किग्रा दाल की आवश्यकता होती है। शनिवार को विद्यालय में मध्यान्ह भोजन के समय 46 विद्यार्थी उपस्थित थे तो उनके लिए कितनी दाल की मात्रा पर्याप्त होगी ?

15.2 प्रतिशत

पूजा तथा माधव अपना परीक्षा परिणाम लेकर खुशी–खुशी घर में प्रवेश करते हुए माँ से कहते हैं।

पूजा – माँ, देखो मैंने 1200 में से 960 अंक प्राप्त किए तथा कक्षा में प्रथम स्थान प्राप्त किया है।

माधव – माँ, मैंने 1300 में से 975 अंक प्राप्त कर कक्षा में प्रथम स्थान प्राप्त किया तथा पूजा से ज्यादा अंक प्राप्त किए अतः मैं ज्यादा होशियार हूँ।

पूजा – माँ यह कैसे हो सकता है ? माधव के विद्यालय में वार्षिक पूर्णांक भी तो ज्यादा है ?

सोचो क्या पूजा ठीक कह रही है ? क्या आप दोनों के विवाद का निपटारा कर सकते हैं? तभी पापा घर आते हैं दोनों पापा से फैसला कराने पहुँच जाते हैं।

पापा ने इस तरीके से समझाया –

पूजा के लिए $\dfrac{\text{प्राप्तांक}}{\text{पूर्णांक}} = \dfrac{960}{1200} = \dfrac{96}{120} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$

माधव के लिए $\dfrac{\text{प्राप्तांक}}{\text{पूर्णांक}} = \dfrac{975}{1300} = \dfrac{75}{100} = \dfrac{3}{4}$

	पूजा	माधव
तुल्यानुपात से	$\dfrac{4}{5} = \dfrac{16}{20}$	$\dfrac{3}{4} = \dfrac{15}{20}$
	$\dfrac{16 \times 5}{20 \times 5}$	$\dfrac{15 \times 5}{20 \times 5}$
	$= \dfrac{80}{100}$	$= \dfrac{75}{100}$

$$\frac{80}{100} > \frac{75}{100}$$

माँ ने दोनों को समझाया कि यदि आप दोनों के कुल पूर्णांक 100–100 होते तो पूजा को 100 में 80 तथा माधव को 100 में से 75 अंक मिलते। भिन्न को 100 के हर के आधार पर व्यक्त करना अर्थात् प्रत्येक 100 पर कितना प्रतिशत या प्रति सैंकड़ा कहलाता है। प्रतिशत को **'%'** से प्रदर्शित किया जाता है, जिसका अर्थ है सौवाँ। प्रतिशत वह भिन्न है जिसका हर 100 हो $\left(\% = \frac{1}{100}\right)$ और इस भिन्न का अंश ही प्रतिशत की दर को व्यक्त करता है।

करो और सीखो

1. कक्षा के 25 विद्यार्थी अपनी खेल के बारे में रुचि बताते हैं।

कबड्डी में	–	4 विद्यार्थी
क्रिकेट में	–	11 विद्यार्थी
शतरंज में	–	6 विद्यार्थी
टेनिस में	–	3 विद्यार्थी
अन्य खेल में	–	1 विद्यार्थी

प्रत्येक खेल में रुचि के अनुसार विद्यार्थी संख्या को प्रतिशत में व्यक्त कीजिए।

2. जालोर पंचायत के चुनिंदा विद्यालयों में से कुल 250 विद्यार्थियों को दिए जा रहे मिड डे मील के मीनू की पसंद पर राय ली गई तो परिणाम निम्न प्रकार प्राप्त हुए –

मीनू	विद्यार्थी	प्रतिशत
सब्जी रोटी	80	- - %
दाल चावल	75	- - %
खिचड़ी	35	- - %
दाल रोटी	60	- - %

उपर्युक्त परिणामों से प्रत्येक प्रकार के पसन्द को प्रतिशत में व्यक्त कीजिए।

अब्दुल चाचा अपने दो पोतों के साथ प्रातः घूमने गए। रास्ते में देवा किसान के दो बेटे खेमा तथा पेमा मिले अब्दुल चाचा ने खेती का हाल चाल पूछा।

पेमा – मैंने अपने खेत के $\frac{3}{4}$ भाग में गेहूँ तथा शेष में सरसों बोई है।

खेमा – चाचा मैंने अपने खेत के $\frac{7}{10}$ भाग में गेहूँ तथा शेष भाग में सरसों बोई है।

अब्दुल चाचा खेती बाड़ी का हाल–चाल जानने के बाद घर लौट रहे हैं। अब्दुल चाचा का पोता करीम बोला ।

करीम – दादा खेमा ताऊ तथा पेमा ताऊ दोनों में से किसने ज्यादा भाग में गेहूँ बोया है ?

दोनों द्वारा बोए गए भाग की तुलना हम प्रतिशत से करते हैं।

इसके लिए $\frac{3}{4}$ तथा $\frac{7}{10}$ की ऐसी तुल्य भिन्न बनाते हैं, जिनका हर 100 हो।

किसी भिन्न का हर 100 हो तो अंश वाली संख्या उतने ही प्रतिशत कहलाती है।

पेमा ताऊ द्वारा बोया गया भाग $\frac{3}{4} \times \frac{25}{25} = \frac{75}{100} = 75 \times \frac{1}{100} = 75\%$

खेमा ताऊ द्वारा बोया गया भाग $\frac{7}{10} \times \frac{10}{10} = \frac{70}{100} = 70 \times \frac{1}{100} = 70\%$

अतः पेमा ताऊ द्वारा बोया गया भाग अधिक है।

दूसरा तरीका –

हम दी गई भिन्न को $\frac{100}{100}$ से सीधे गुणा कर भी प्रतिशत में व्यक्त कर सकते हैं।

$$\frac{3}{4} \times \frac{100}{100} = \frac{300}{4} \times \frac{1}{100} = 75 \times \frac{1}{100} = 75\%$$

$$\frac{7}{10} \times \frac{100}{100} = \frac{700}{10} \times \frac{1}{100} = 70 \times \frac{1}{100} = 70\%$$

15.2.1 प्रतिशत को दशमलव भिन्न में बदलना

इसके लिए % हटाकर $\frac{1}{100}$ का गुणा करते हैं।

जैसे – $25\% = 25 \times \frac{1}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0.25$

15.2.2 दशमलव भिन्न को प्रतिशत में बदलना

इसके लिए दशमलव भिन्न को 100% से गुणा करते हैं।

जैसे 0.6, 0.03, 0.75 को प्रतिशत में इस प्रकार बदलेंगें।

(1) 0.6 को 100% से गुणा किया तो $= 0.6 \times 100\%$

$= \frac{6}{10} \times 100\% = 60\%$

(2) 0.03 को 100% से गुणा करे तो $= 0.03 \times 100\%$

$= \frac{3}{100} \times 100\% = 3\%$

(3) 0.75 को 100% से गुणा करे तो $= 0.75 \times 100\%$

$= \frac{75}{100} \times 100\% = 75\%$

करो और सीखो

1. निम्न भिन्नों को प्रतिशत में बदलिए।
   (i) $\frac{5}{8}$ (ii) $\frac{5}{3}$
2. दशमलव भिन्न को प्रतिशत में बदलिए।
   (i) 0.5 (ii) 0.08 (iii) 0.225 (iv) 6.5
3. प्रतिशत को साधारण भिन्न एवं दशमलव भिन्न में बदलिए।
   (i) 36% (ii) $12\frac{1}{2}\%$ (iii) 3.6%

उदाहरण 4 भिन्न $\frac{3}{25}$ को प्रतिशत रुप में लिखिए।

हल दी गई संख्या $= \frac{3}{25} \times 100\%$

$= 12\%$

उदाहरण 5 55 विद्यार्थियों की कक्षा में 44 छात्र है तो छात्रों का प्रतिशत क्या है ?

हल 55 विद्यार्थियों में 44 छात्र है

$= \frac{44}{55} \times 100\%$

अतः छात्रों का प्रतिशत $= 80\%$

उदाहरण 6 निम्नलिखित दशमलव संख्याओं को प्रतिशत में बदलिए।

(i) 0.9 (ii) 0.015

हल

(i) $0.9 \times 100\%$

$= \frac{9}{10} \times 100\%$

$= 90\%$

(ii) $0.015 \times 100\%$

$= \frac{15}{1000} \times 100\%$

$= \frac{15}{10}\% = 1.5\%$

उदाहरण 7 कक्षा में 50 छात्राओं में 22% छात्राओं को रंगोली बनाना पसंद है। तो रंगोली बनाने वाली छात्राओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल रंगोली बनाने वाली छात्राओं की संख्या = 50 का 22%

$= 50 \times \frac{22}{100} = 11$ छात्राएँ

उदाहरण 8 दिए गए प्रतिशत को साधारण दशमलव भिन्न में बदलिए।

(i) $33\frac{1}{3}\%$ (ii) 150%

हल

(i) $\frac{100}{3}\%$

$= \frac{100}{3} \times \frac{1}{100}$

$= \frac{1}{3}$

$= 0.33$

(ii) 150%

$= 150 \times \frac{1}{100}$

$= \frac{150}{100}$

$= \frac{3}{2} = 1.5$

प्रश्नावली 15.2

1. दी गई भिन्न संख्याओं को प्रतिशत में बदलिए।

   (i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{7}{9}$ (iii) $\frac{14}{15}$ (iv) $3\frac{1}{3}$

2. दी गई दशमलव भिन्नों को प्रतिशत में बदलिए।

   (i) 0.84 (ii) 1.25 (iii) 0.875 (iv) 0.001

3. दिए गए प्रतिशतों को साधारण भिन्न में बदलिए।

   (i) 52% (ii) 125% (iii) $6\frac{1}{4}\%$ (iv) $33\frac{1}{3}\%$

4. ज्ञात कीजिए।

   (i) 320 का 15% (ii) 875 का 35% (iii) 1250 ग्राम का 20% (iv) 32.5 मीटर का 16%

5. ज्ञात कीजिए।

   (i) किसका 42%, 63 है। (ii) किसका 70%, 35 है। (iii) किसका 13%, 1170 है।

6. दिए गए प्रतिशतों को दशमलव में बदलिए।
   (i) 7% (ii) $1\frac{2}{5}\%$ (iii) 0.03% (iv) 16.7%
7. एक विद्यालय में 500 विद्यार्थियों में 85% लड़कियाँ है। विद्यालय में लड़कों की संख्या ज्ञात कीजिए।
8. आकोला गाँव में हरित राजस्थान के तहत पेड़ लगाए गए जिसमें 10% पेड़ सूख गए। यदि अब यहाँ 1800 पेड़ बचे तो प्रारम्भ में कुल कितने पेड़ लगाए?
9. एक मतदान केन्द्र पर 950 मत डाले गए जिनमें से 57 मत पत्र खारिज किए गए। यदि मतदाता सूची में 1045 मतदाताओं के नाम अंकित थे तो मतदान कितने प्रतिशत हुआ ?
10. शहीद दिवस के उपलक्ष में सुभाष क्लब के 35 व्यक्तियों में से 28 व्यक्तियों ने रक्तदान किया।इसी प्रकार तिलक क्लब के 40 व्यक्तियों में से 38 व्यक्तियों ने रक्तदान किया तो ज्ञात कीजिए कि किस क्लब के व्यक्तियों ने अधिक प्रतिशत रक्तदान किया ?

15.3 प्रतिशत वृद्धि–प्रतिशत ह्रास

किसी कस्बे में रोहित ट्रेडर्स के यहाँ दो वर्षों में वस्तुओं के भाव इस प्रकार रहे।

वस्तुएँ \ भाव प्रति किग्रा	1.4.2014 को	1.4.2015 को
चीनी	30	27
मूँगफली तेल	90	81
गेहूँ	13	15
परमल चावल	28	32

उपर्युक्त तालिका को ध्यान से देखकर वस्तुओं के भाव में हुए बदलाव पर चर्चा कीजिए। आप पाएँगे कि चीनी तथा मूँगफली तेल के भाव क्रमशः 3 रुपये तथा 9 रुपये घटे हुए है जबकि गेहूँ तथा परमल चावल के भाव में क्रमशः 2 रुपये तथा 4 रुपये की बढ़ोतरी हुई है। इन आँकड़ों से आपको लगेगा की मूँगफली के तेल में ज्यादा कमी हुई तथा परमल चावल के भाव में ज्यादा वृद्धि हुई है। इस प्रकार के परिवर्तन को यदि प्रतिशत में व्यक्त करे तो ज्यादा सटीक तरीके से परिवर्तन को दर्शा सकते हैं।

वस्तु	भाव में परिवर्तन		परिवर्तन	प्रतिशत में
	बाद का मान	पहले का मान		
चीनी	27	30	-3	- 10%
मूंगफली तेल	81	90	-9	- 10%
गेहूँ	15	13	2	$15\frac{5}{13}\%$
पमल चावल	32	28	4	$14\frac{2}{7}\%$

$$\text{भाव में परिवर्तन प्रतिशत में} = \frac{\text{परिवर्तन}}{\text{पहले का मान}} \times 100$$

चीनी के लिए – $\frac{-3}{30} \times 100 = -10\%$

मूंगफली तेल के लिए – $\frac{-9}{90} \times 100 = -10\%$

गेहूँ के लिए – $\frac{2}{13} \times 100 = 15\frac{5}{13}\%$

परमल चावल के लिए – $\frac{4}{28} \times 100 = 14\frac{2}{7}\%$

स्पष्ट है कि चीनी तथा मूँगफली तेल के भावों में ह्रास/घटाव प्रतिशत में समान है। इसी प्रकार गेहूँ के भाव में प्रतिशत वृद्धि परमल चावल से ज्यादा है।

करो और सीखो

1. किसी गाँव की जनसंख्या पिछले 10 वर्षों में 12000 से बढ़कर 15000 हो गई है। तो जनसंख्या बढ़ने का प्रतिशत कितना रहा ?
2. निम्नलिखित में वृद्धि अथवा ह्रासदर को प्रतिशत में व्यक्त कीजिए।
   (1) बिजली के प्रति युनिट का मूल्य 3.50 रुपये से बढ़कर 6 रुपये हो गया।
   (2) 100 लिफाफे का मूल्य 100 रुपये से घटकर 80 रुपये हो गया।

15.4 लाभ – हानि

सुमित्रा ने मंडी से तथा सावित्री ने दुकानदार से क्रमशः 20 रुपये तथा 25 रुपये के भाव से 20–20 किलो केले खरीदे तथा दोनों ने 22 रुपये के भाव से केले बेचे। बताइए, किसको लाभ तथा किसको हानि होगी।

सुमित्रा ने 20 रुपये प्रति किग्रा के भाव से 20 किलो केले 400 रुपये में खरीदे

अर्थात् सुमित्रा द्वारा खरीदे गए केलों का क्र.मू. = 20 x 20 = 400 रुपये

सावित्री द्वारा खरीदे गये केलों का मूल्य = 25 x 20 = 500 रुपये

दोनों ने 22 रुपये प्रति किग्रा के भाव से केले बेचे

अतः विक्रय मूल्य या बेचने का मूल्य = 22 x 20 = 440 रुपये

सुमित्रा ने कम मूल्य में खरीद कर ज्यादा में बेचा तो लाभ हुआ अर्थात् क्र.मू. < वि.मू. तो लाभ।

सावित्री ने ज्यादा मूल्य में खरीद कर कम में बेचा तो हानि अर्थात् क्र.मू. > वि.मू. तो हानि।

सुमित्रा ने इस सौदे में 440 – 400 = 40 रुपये कमाए

अर्थात् सुमित्रा का लाभ = वि.मू. –क्र.मू.
= 440 – 400 = 40 रुपये

तथा सावित्री को हानि = क्र.मू. – वि.मू.
= 500 – 440 = 60 रुपये

आओ इनके लाभ/हानि को प्रति सैंकड़ा अर्थात् प्रतिशतों में व्यक्त करके देखते हैं।

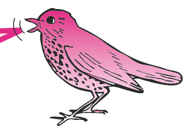
सुमित्रा ने 400 रुपये पर लाभ कमाया 40 रुपये

अतः 1 रुपये पर लाभ $= \frac{40}{400}$

या 100 रुपये पर लाभ $= \frac{40}{400} \times 100$

अतः लाभ =10 %

लाभ अथवा हानि प्रतिशत
सदैव क्रय मूल्य पर ही ज्ञात करते हैं।



अर्थात् **लाभ प्रतिशत** $= \frac{\textbf{लाभ}}{\textbf{क्र.मू.}} \times \mathbf{100}$

सावित्री को 500 रुपये पर हानि होती है 60 रुपये की

अतः 1 रुपये पर हानि $= \frac{60}{500}$

या 100 रुपये पर हानि $= \frac{60}{500} \times 100$ अतः हानि =12 %

अर्थात् **हानि प्रतिशत** $= \frac{\textbf{हानि}}{\textbf{क्र.मू.}} \times \mathbf{100}$

ग्राहक – टेबल एवं स्टूल सेट की कीमत कितनी है ?
छगन – बिल देखकर – 750 रुपये ।

ग्राहक के जाने के बाद दुकानदार कर्मा आता है। जब उसे इस बात का पता लगता है तो

कर्मा – अरे ! तुमने यह माल घाटे में बेचा है।
छगन – नहीं पापा यह कैसे हो सकता है ? मैंने बिल देखा था एक सेट का मूल्य 700 रुपये था।

कर्मा—देखो, मैं यह सामान खरीदने गया तब ऐसे 10 सेट लाने में 200 रुपये आने जाने का बस व टैक्सी किराया, 100 रुपये माल ढुलाई की हमाली तथा 250 रुपये ट्रक भाड़ा के देने पड़े थे।

छगन – हाँ, पापा इसका मतलब 200+100+250 = 550 रुपये इस पर अपना खर्चा भी लगा

कर्मा – तभी तो कह रहा हूँ इस सामान का मूल्य हमारे लिए –

700 रुपये के भाव से 10 सेट के = 7000 रुपये

तथा अन्य ऊपरी व्यय = 550 रुपये

तो कुल क्रय मूल्य = क्र.मू. + ऊपरी व्यय

= 7000 + 550 रुपये

= 7550 रुपये

छगन – यानी एक सेट का कुल मूल्य 755 रुपये जबकि मैंने 750 रुपये में सेट बेचा तो 5 रुपये का घाटा होगा।

कर्मा – यदि एक सैट पर 50 रुपये लाभ कमाना चाहे तो कितने में बेचेंगे ?

छगन – कुल क्र.मू. 755 रुपये + लाभ 50 रुपये = 805 रुपये विक्रय मूल्य होना था।

अतः किसी वस्तु का वि. मू. निर्धारित करने के लिए सबसे पहले क्र.मू. में अतिरिक्त खर्च जैसे किराया, माल ढुलाई, हमाली आदि जोड़कर कुल क्र.मू. ज्ञात किया जाता है।

करो और सीखो

1. महावीर ने 5 बोरी शक्कर 16000 रुपये में खरीदी। उसने 200 रुपये टैक्सी किराया, 120 रुपये हमाली, 200 रुपये ट्रक भाड़ा के चुकाए। वह शक्कर किस भाव से बेचे कि उसे प्रति किलोग्राम 3 रुपये का लाभ हो जाए ?
2. मनोज ने एक पुरानी कार 1.50,000 रुपये में खरीदी। इस पर 60,000 रु ईंजन पर खर्च किए तथा 15,000 रुपये के नये टायर ट्यूब लगवाए। मनोज ने अब यह कार 2,10,000 रुपये में जीतेन्द्र को बेच दी। इस व्यापार में मनोज को हुए लाभ/हानि की गणना कीजिए।

उदाहरण 9 प्रेम ने एक सिलाई मशीन 4800 रुपये में खरीद कर 5400 रुपये में बेच दी तो प्रेम का लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

हल सिलाई मशीन का क्रय मूल्य = 4800 रुपये

सिलाई मशीन का वि.मू. = 5400 रुपये

लाभ = 5400 – 4800 रुपये

= 600 रुपये

$$\text{लाभ प्रतिशत} = \frac{\text{लाभ}}{\text{क्र.मू.}} \times 100$$

$$\text{प्रेम का लाभ प्रतिशत} = \frac{600}{4800} \times 100 = \frac{25}{2}$$

$$\text{अतः लाभ} = \frac{25}{2}\% \qquad = 12\frac{1}{2}\%$$

उदहारण 10 रहीम ने एक मकान 1,40,000 रुपये में खरीदा। मकान के रजिस्ट्रेशन दलाली आदि पर 14,000 रुपये, नल लगवाने के 7,000 रुपये बिजली ठीक करवाने के 1700 रुपये एवं अन्य मरम्मत में 8300 रुपये खर्च हुए। अब यदि वह मकान को 2,03,490 रुपये में बेच देता है तो उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

हल रहीम ने मकान खरीदा = 1,40,000 रुपये

मकान के रजिस्ट्रेशन = 14,000 रुपये

नल लगवाने के = 7000 रुपये

बिजली ठीक करवाने के = 1700 रुपये

अन्य मरम्मत = 8300 रुपये

कुल ऊपरी व्यय = 14000+7000+1700+8300 = 31,000 रुपये

मकान का वास्तविक क्र. मू. = 140000 + 31000 = 171000 रुपये

मकान का विक्रय मूल्य = 2,03,490 रुपये

लाभ = विक्रय मूल्य − क्रय मूल्य

= 203490 - 171000 रुपये

= 32,490 रुपये

$$\text{लाभ प्रतिशत} = \frac{\text{लाभ}}{\text{क्र.मू.}} \times 100$$

$$\text{लाभ प्रतिशत} = \frac{32490}{171000} \times 100 = \frac{3249}{171} = 19\%$$

अतः लाभ प्रतिशत = 19%

उदाहरण 11 एक फुटबॉल क्लब ने इस वर्ष 12 मैचों में जीत प्राप्त की जबकि पिछले वर्ष 15 मैचों में जीती थी। पिछले वर्ष की तुलना में जीत में कितने प्रतिशत वृद्धि या कमी हुई ?

हल जीत की संख्या में कमी = 15 - 12 = 3

$$\text{प्रतिशत कमी} = \frac{\text{कमी}}{\text{आधार वर्ष में जीत}} \times 100$$

$$= \frac{3}{15} \times 100$$

= 20 % जीत में 20 % की कमी हुई।

प्रश्नावली 15.3

1. किशोर ने एक कुर्सी 450 रुपये में खरीद कर उसे 500 रुपये में बेच दी किशोर का लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
2. क्रय–विक्रय के निम्न सौदों में हानि या लाभ ज्ञात कीजिए। प्रत्येक दशा में प्रतिशत हानि या प्रतिशत लाभ ज्ञात कीजिए।
   (i) एक साईकिल 3500 रुपये में खरीदी गई तथा 3000 रुपये में बेची गई।
   (ii) एक वाशिंग मशीन 15000 रुपये में खरीद गई तथा 15500 रुपये में बेची गई।
   (iiii) एक खिलौना कार 450 रुपये में खरीद कर 540 रुपये में बेची गई।

(iv) अरविंद ने एक टी. वी. 12000 रुपये में खरीद कर 15 प्रतिशत लाभ पर बेच दिया तो अरविंद को टी. वी. बेचने पर कितना धन प्राप्त हुआ ?

3. एक नगर की जनसंख्या 25000 से बढ़कर 26500 हो जाती है तो जनसंख्या में प्रतिशत वृद्धि ज्ञात कीजिए।

4. एक व्यापारी ने 50 किलो ग्राम धान 2000रुपये में खरीदा। उसे साफ करने में 400 रुपये का खर्चा हुआ। बाजार में धान की अधिक आवक होने से दाम कम हो गया। वह उसे 41 रुपये प्रति किग्रा के भाव से बेचता है, तो उसका प्रतिशत लाभ या हानि ज्ञात कीजिए।

5. श्रवण मिस्त्री ने एक पुराना स्कूटर 5500 रुपये में खरीदा उसे अपने कारखाने में लाने में 150 रुपये किराया भाड़ा दिया तथा 550 रुपये का नया सामान डाला। यदि वह इस पर 15प्रतिशत लाभ कमाना चाहता है तो वह स्कूटर कितने में बेचेगा ?

15.5 सरल ब्याज

अशोक अपना मकान बनाने हेतु किसी संस्था से 50,000 रूपये उधार लेता है। यह उधार ली गई राशि **मूलधन** कहलाती है। वह 1 वर्ष पश्चात् 55,000 रूपये संस्था को चुकाता है।

अशोक ने 50,000 रूपये पर अतिरिक्त 5000 रूपये चुकाए। यह अतिरिक्त राशि **ब्याज** कहलाती है।

यह ब्याज राशि निम्न बातों पर निर्भर करती है –

1. उधार ली गई राशि (मूलधन)
2. समय (जिस अवधि के लिए राशि उधार ली गई)
3. दर (प्रति सैकड़ा पर दी गई अतिरिक्त धन राशि) जो कि प्रतिमाह/प्रतिवर्ष आदि पर निर्धारित होती है)

निर्धारित अवधि के बाद मूलधन तथा ब्याज दोनों को मिलाकर जो राशि चुकाई जाती है, उसे **मिश्रधन** कहते हैं।

अर्थात् **मिश्रधन = मूलधन + ब्याज**

करो और सीखो

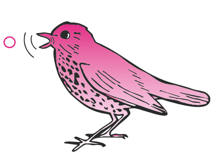
1. अशोक एक वर्ष बाद संस्था को धन नहीं लौटा पाता तो 2 वर्ष बाद उसे कितना ब्याज चुकाना पड़ता ?

....

2. ब्याज सहित कुल कितना धन लौटाना पड़ता ?

....

मूलधन, समय तथा ब्याज की दर बढ़ाने से सरल ब्याज का मान बढ़ेगा तथा कम होने पर ब्याज कम होगा।

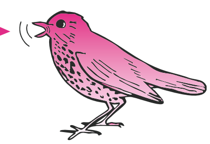


सरल ब्याज को निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

$$\boxed{\text{सरल ब्याज} = \text{मूलधन} \times \text{समय} \times \text{दर प्रति सैंकड़ा}}$$

$$\boxed{\text{सरल ब्याज} = \text{मूलधन} \times \text{समय} \times \frac{\text{दर}}{100}}$$

मूल, वर अरु काल का कंचन गुणा कराय।
एक सौ से भाग दिए ब्याज तुरन्त बतलाय।।
(यह श्लोक सरल ब्याज की गणना हेतु भारतीय गणितज्ञ कंचन द्वारा दिया गया था।)



उदाहरण 12 अशोक ने राष्ट्रीयकृत बैंक से 20,000 रुपये 10% सरल ब्याज की दर से 3 वर्ष के लिए धन उधार लिया तो उसे कितने रुपये ब्याज के देने पड़ेंगे एवं कुल कितना धन वापस लौटाना पड़ेगा ?

हल उधार लिया गया धन (मूलधन) = 20,000 रुपये

ब्याज दर = 10%

समय = 3 वर्ष

100 रुपये का 1 वर्ष का ब्याज = 10 रुपये

तो 1 रुपये का 1 वर्ष का ब्याज = $\frac{10}{100}$ रुपये

तो 20,000 रुपये का 1 वर्ष का ब्याज = $\frac{10}{100} \times 20,000$

तो 20,000 रुपये का 3 वर्ष का ब्याज = $\frac{10}{100} \times 20,000 \times 3$

सरल ब्याज = $\frac{10}{100} \times 20,000 \times 3$

= 6,000 रुपये

ब्याज सहित लौटाया गया धन

मिश्रधन = लिया गया धन या मूलधन + ब्याज

मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

= [20000 + 6000] रुपये

= 26,000 रुपये

उदाहरण 13 छोगा 8,000 रुपये का ऋण 12 प्रतिशत वार्षिक दर से सरल ब्याज पर लेता है। ज्ञात कीजिए कि एक वर्ष बाद उसे कुल कितना धन वापस करना होगा ?

हल

उधार में ली गई राशि = 8000 रुपये

ब्याज की दर = 12 प्रतिशत प्रति वर्ष

यदि 100 रुपये उधार लेता है तो एक वर्ष का ब्याज = 12 रुपये

यदि 1 रुपये उधार लेता है तब एक वर्ष का ब्याज = $\frac{12}{100}$

यदि 8000 रुपये उधार लेता है तो 1 वर्ष का ब्याज = $\frac{12}{100} \times 8000$

= 960 रुपये

अर्थात् एक वर्ष बाद उसे ब्याज मिलाकर मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

= 8000 + 960

= 8960 रुपये

अथवा सरल ब्याज = $\frac{\text{मूलधन} \times \text{समय} \times \text{दर}}{100}$

= $\frac{8000 \times 1 \times 12}{100}$

= 960 रुपये

मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

= 8000 + 960 = 8960 रुपये

उदाहरण 14 यदि किसी धन का 10% की दर से 3 वर्ष में साधारण ब्याज 450 रुपये हो तो मूलधन ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ है दर = 10% ,समय = 3 वर्ष, ब्याज = 450 रुपये, मूलधन = ?

सरल ब्याज = $\frac{\text{मूलधन} \times \text{समय} \times \text{दर}}{100}$

$450 = \frac{\text{मूलधन} \times 3 \times 10}{100}$

$450 = \frac{\text{मूलधन} \times 3}{10}$

मूलधन $\times 3 = 450 \times 10$

मूलधन = $\frac{450 \times 10}{3}$

मूलधन = 1500 रुपये

प्रश्नावली 15.4

1. लालजी ने एक गाय खरीदने के लिए बैंक से 1500 रूपये ऋण लिया और 1 वर्ष बाद 120 रूपये ब्याज सहित ऋण चुका दिया। बताइए लालजी ने कितने रूपये चुकाए ?

2. रानी सिलाई मशीन खरीदने हेतु महिला कॉपरेटिव बैंक से 4000 रुपये का ऋण 12% वार्षिक ब्याज की दर से लेती है। ज्ञात कीजिए कि 1 वर्ष में रानी को कितना धन वापस करना होगा।

3. 3500 रुपये 8 प्रतिशत वार्षिक सरल ब्याज की दर से उधार दिए गए हैं। दो वर्ष बाद कितना ब्याज तथा मिश्रधन देय होगा ?

4. 4500 रुपये पर 2 वर्ष पश्चात् किस दर से 360 रुपये साधारण ब्याज देय होगा ?

5. रविन्द्र ने 8% वार्षिक दर से 1 वर्ष पश्चात् 320 रुपये ब्याज के रुप में दिए। उसने कितना धन उधार लिया था ?

हमने सीखा

1. अपने दैनिक जीवन मे हमें प्राप्त दो राशियों के बीच तुलना करनी पड़ती है ये राशियाँ ऊँचाई, भार, दूरी, प्राप्तांक आदि हो सकती हैं।
2. तुलना करने की एक विधि प्रतिशत भी है। भिन्न जिनके हर 100 होते हैं उनके अंश प्रतिशत प्रकट करते हैं। प्रतिशत का अर्थ होता है प्रत्येक सौ पर।
3. भिन्नों को प्रतिशत में बदला जा सकता है तथा प्रतिशत भिन्नों में।
4. प्रतिशत का हमारे दैनिक जीवन में व्यापक उपयोग है।
   (i) जब हमें किसी राशि का भाग ज्ञात हो, हम वह सम्पूर्ण राशि ज्ञात कर सकते हैं।
   (ii) यदि हमें किसी राशि के भागों में अनुपात दिया हो तब हम उन्हें प्रतिशत में भी व्यक्त कर सकते हैं।
   (iii) किसी राशि का घटना या बढ़ना भी प्रतिशत में दर्शाया जा सकता है।
   (iv) किसी वस्तु के लिए क्रय विक्रय में हुए लाभ या हानि को प्रतिशत में दर्शाया जा सकता है।
   (v) उधार दिए गए धन पर ब्याज परिकलन के लिए उसकी दर प्रतिशत में ही दी जाती है।

अध्याय 16

परिमाप और क्षेत्रफल

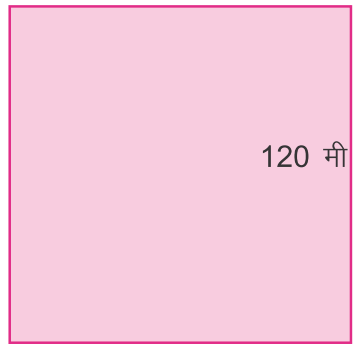
16.1 नीलम तथा राकेश ने अपने अपने खेत के चारों तरफ कंटीले तार की बाड़ बनाई।

60 मी.

180 मी.

नीलम का खेत

आकृति (i)



120 मी

120 मी.

राकेश का खेत

आकृति (ii)

यदि बाड़ बनाने का खर्चा 12 रूपये प्रति मीटर हो तो किसके खेत पर बाड़ बनवाने का खर्चा ज्यादा आएगा ?

100 रूपये प्रति वर्ग मीटर की दर से खेत जुतवाने पर किस खेत में खर्चा अधिक होगा ?

बाड़ बनवाने के लिए कुल किया गया खर्च ज्ञात करने के लिए परिमाप ज्ञात करके बाड़ बनाने की दर से गुणा करते हैं।

इसी प्रकार खेत जोतने का खर्च ज्ञात करने के लिए क्षेत्रफल वर्गमीटर में ज्ञात करके खेत जोतने की दर से गुणा करते हैं।

चूंकि नीलम का खेत आयताकार है।

अतः नीलम के खेत का परिमाप = 2 x (ल. + चौ.) = 2 x (180 + 60)

= 2 x (240) = 480 मी.

जबकि राकेश का खेत वर्गाकार है।

अतः राकेश के खेत का परिमाप = 4 x भुजा

= 4 x 120 = 480 मी.

चूंकि दोनों का परिमाप समान है अतः बाड़ लगाने का खर्चा समान आएगा।

पुनः नीलम के खेत का क्षेत्रफल = ल. x चौ.

= 180 x 60

= 10,800 वर्गमीटर

राकेश के खेत का क्षेत्रफल = भुजा^{2}

= $(120)^2$

= 120 x 120

= 14,400 वर्गमीटर

चूंकि राकेश के खेत का क्षेत्रफल अधिक है। अतः जुताई का खर्च भी अधिक होगा।

करो और सीखो

1. नीचे पंजीकरण संख्या दर्शाती पट्टियों के चित्र दिए गए है। अपने आसपास बस, टैक्सी एवं निजी वाहनों के आगे लगी पट्टियों की लम्बाई तथा चौड़ाई नापकर परिमाप की गणना कीजिए।

बस	टैक्सी	निजी वाहन
RJ19 PA 3807	RJ51 TA 1051	RJ271CO706

2. निम्नलिखित परिस्थितियों में बताइए कि कब परिमाप तथा कब क्षेत्रफल ज्ञात करना पड़ेगा ?
   (i) दुपट्टे के किनारों पर लेस (कोर/गोटा) लगाना हो।
   (ii) हॉकी के मैदान में काली मिट्टी डलवानी हो।
   (iii) कमरे की छत भरवानी हो।
   (iv) खेत के चारों ओर मेड़ लगवानी हो।

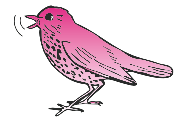
प्रश्नावली 16.1

1. राधा प्रतिदिन सुबह 60 मीटर भुजा वाले वर्गाकार पार्क के चारों ओर किनारे किनारे 2 चक्कर लगाती है तो प्रतिदिन वह कितनी दूरी तय करती है ज्ञात कीजिए।
2. सुरेश के पास 78 सेमी लम्बा रिबन है वह 26 सेमी लम्बाई की आयताकार फोटो फ्रेम के किनारे पर लगाना चाहता है तो फ्रेम की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
3. रानू अपने बैठक के हाल में कालीन बिछाना चाहता है जिसकी लम्बाई 50 मी. है। यदि चौडाई लम्बाई की आधी है तो कालीन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. गुरमीत ने अपने खेत के 4200 वर्गमीटर भाग में मूंग की फसल बोई। इस हेतु खेत के चारों ओर तार बंदी करवाना चाहता है। यदि खेत की चौड़ाई 30 मीटर हो तो कितना लम्बा तार लगाना पड़ेगा ?
5. विद्यालय के खेल के मैदान का क्षेत्रफल 38400 वर्गमीटर है। यदि मैदान की लम्बाई व चौड़ाई का अनुपात 3 : 2 है, तो मैदान का परिमाप ज्ञात कीजिए।
6. एक आयत व वर्ग का परिमाप समान है, आयत की लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः 25 सेमी और 15 सेमी है। किस आकृति का क्षेत्रफल अधिक है ।
7. निम्न आकृतियों का परिमाप ज्ञात कीजिए।
   (i) त्रिभुज जिसकी भुजाएँ 2 सेमी, 3 सेमी और 4 सेमी हो।
   (ii) समबाहु त्रिभुज जिसकी भुजा 8 सेमी हो ।
   (iii) समद्विबाहु त्रिभुज, समान भुजाएँ 10 सेमी. और तीसरी भुजा 7 सेमी हो।

16.2 समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

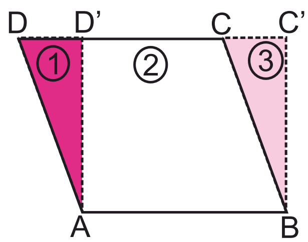
हमें आस–पास के परिवेश में वर्ग व आयत के अतिरिक्त दूसरे आकार भी देखने को मिलते हैं। आप ऐसे भूखण्ड का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करेंगे जो समान्तर चतुर्भुज जैसे आकार का है ?

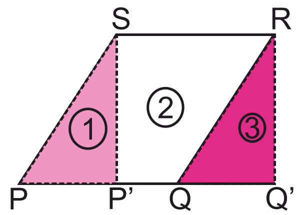
समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर एवं समान्तर होती हैं।

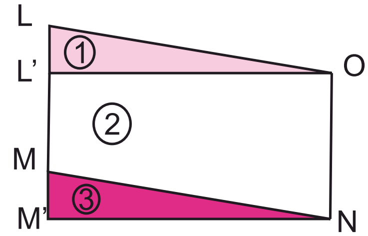


आओ प्रयास करते है

अलग अलग नाप के तीन समान्तर चतुर्भुज बनाते हैं।







समान्तर चतुर्भुज की आधार भुजा के सामने की भुजा के एक शीर्ष से आधार पर लम्ब डाला। शीर्ष लम्ब से काटकर एक त्रिभुज (1) अलग करके सम्मुख समान्तर भुजा के साथ जोड़ देते हैं जो त्रिभुज (3) के रूप में दिखाया है। Δ (1) तथा Δ (3) में समकोण त्रिभुज के कर्ण भुजा नियम से दोनों त्रिभुज सर्वागसम हैं।

अतः Δ (1) का क्षेत्रफल = Δ (3) का क्षेत्रफल

समान्तर चतुर्भुज	आधार भुजा	आधार के सामने की भुजा के शीर्ष से आधार पर लम्ब	काटकर अलग किया त्रिभुज आकृति (1)	सम्मुख भुजा पर जोड़ा गया त्रिभुज आकृति (3)	नई स्थिति में बनी आकृति (2) + (3)	समान्तर चतुर्भुज एवं आयत के क्षेत्रफल में सम्बन्ध (1) + (2) = (2) + (3)
ABCD	CD	AD'	ΔAD'D	ΔBC'C	ABC'D'	ABCD = ABC'D'
PQRS	PQ	SP'	ΔSP'P	ΔRQ'Q	P'Q'RS	PQRS= P'Q'RS
LMNO	LM	OL'	ΔOL'L	ΔNM'M	L'M'NO	LMNO = L'M'NO

तालिका से स्पष्ट है कि:

{ (आकृति (1) + आकृति (2)} का क्षेत्रफल = { (आकृति (2) + आकृति (3)} का क्षेत्रफल

(क्योंकि आकृति (1) तथा आकृति (3) का क्षेत्रफल समकोण त्रिभुज के कर्ण भुजा नियम से बराबर है)

अतः समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल

= लम्बाई x चौड़ाई

या = आधार x सम्मुख भुजा के शीर्ष से आधार पर लम्ब

या समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = (आधार x ऊँचाई) वर्ग इकाई

गतिविधि –

- पारदर्शी कागज/शीट लेवें।
- इस पर अलग–अलग नाप के समान्तर चतुर्भुज काटें।
- वर्गाकार खानों वाली शीट या ग्राफ पेपर पर रखकर इनका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

- समान्तर चतुर्भुज के आधार के सामने की भुजा के शीर्ष से लम्बवत काटकर एक त्रिभुजाकार आकृति अलग करें।
- अलग की गई आकृति को दूसरी तरफ रखकर एक आयत बनाएँ।
- इस प्रकार बने आयत का क्षेत्रफल ग्राफ पेपर/वर्गाकार खाने वाली शीट से ज्ञात करें।
- समान्तर चतुर्भुज एवं आयत के क्षेत्रफलों की तुलना करें।
- यहाँ दोनों के क्षेत्रफल समान प्राप्त होते हैं।

उदाहरण 1 एक समान्तर चतुर्भुज की एक भुजा और संगत ऊँचाई क्रमशः 5 सेमी और 4 सेमी है। समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल आधार की लम्बाई = 5 सेमी

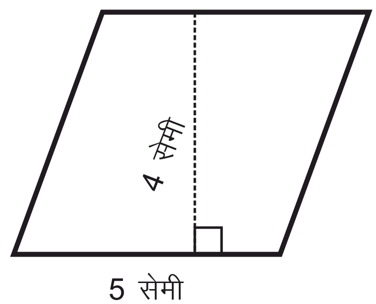
ऊँचाई = 4 सेमी

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार x ऊँचाई

= b x h

= 5 x 4 वर्ग सेमी

= 20 वर्ग सेमी



उदाहरण 2 यदि एक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 56 वर्ग सेमी और उसका आधार 7 सेमी हो तो ऊँचाई (x) ज्ञात कीजिए ?

हल समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

= आधार x ऊँचाई

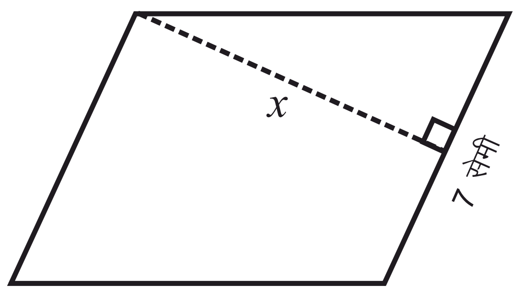
56 = 7 x x

या 7 x x = 56

या $x = \frac{56}{7}$

x = 8 सेमी

या इस प्रकार समान्तर चतुर्भुज की ऊँचाई 8 सेमी है।



उदाहरण 3 समान्तर चतुर्भुज PQRS की दो भुजाओं की लंबाईयाँ 8 सेमी और 5 सेमी है। आधार QR की संगत ऊँचाई 4 सेमी है ज्ञात कीजिए।

(i) समान्तर चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल (ii) आधार PQ की संगत ऊँचाई

हल (i) समान्तर चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल = आधार x ऊँचाई

= 8 सेमी. x 4 सेमी

= 32 वर्ग सेमी

(ii) आधार = 5 सेमी

ऊँचाई (SU) = y सेमी

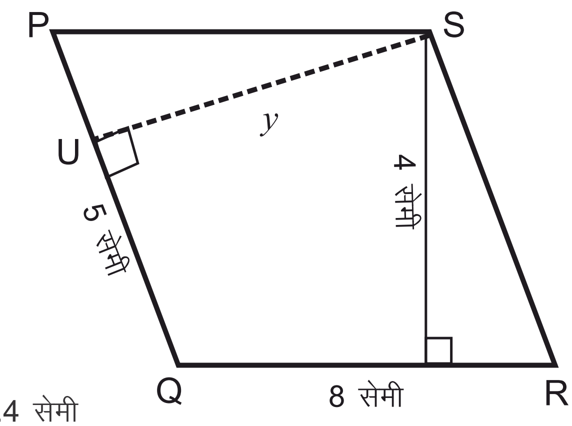
क्षेत्रफल = 32 वर्ग सेमी

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्र. = आधार x ऊँचाई

या 32 = 5 x y

या 5 x y = 32

$$y = \frac{32}{5} = 6.4 \text{ सेमी}$$



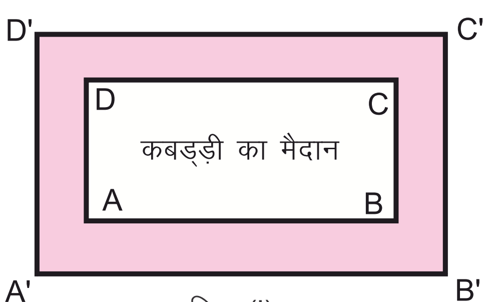
इस प्रकार आधार PQ की संगत ऊँचाई = 6.4 सेमी

6.2.1 पथमार्ग

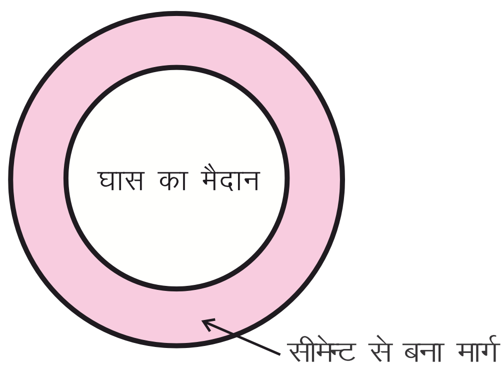
अपने दैनिक जीवन में कई बार ऐसी स्थितियाँ भी देखने में आती है, जिसमें आयताकार, वर्गाकार या वृत्ताकार पार्क, मैदान के चारों तरफ अन्दर या बाहर मार्ग बना होता है लम्बाई तथा चौड़ाई के समान्तर मार्ग बना होता है।

पथ का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करे

1. दिए गए आयताकार, वर्गाकार अथवा वृत्ताकार भाग के चारों तरफ बने मार्ग का क्षेत्रफल।
   = (मार्ग सहित दिए गए भाग का क्षेत्रफल) – (मार्ग रहित दिए गए भाग का क्षेत्रफल)

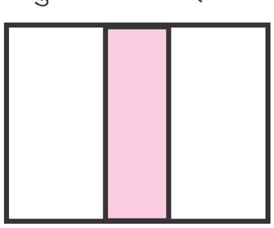


चित्र (i)

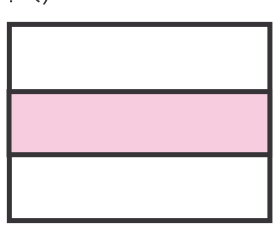


चित्र (ii)

2. लम्बाई / चौड़ाई के समान्तर बीचों–बीच अथवा किनारे पर बने मार्ग का क्षेत्रफल
   = (समान्तर भुजा की लम्बाई x मार्ग की चौड़ाई)



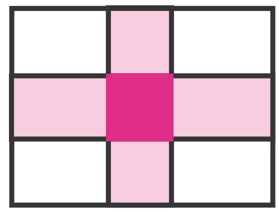
चौड़ाई के समान्तर मार्ग



लम्बाई के समान्तर मार्ग

3. लम्बाई एवं चौड़ाई के समान्तर परस्पर काटने वाले मार्गों का क्षेत्रफल

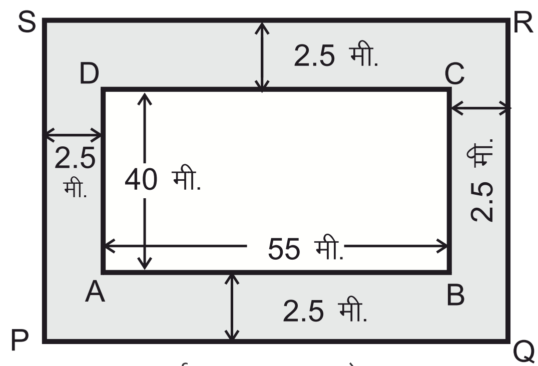
= मार्गों का क्षेत्रफल – उभयनिष्ठ भाग का क्षेत्रफल



लम्बाई व चौड़ाई के समान्तर मार्ग

उदाहरण 4 एक आयताकार पार्क 55 मीटर लम्बा और 40 मीटर चौड़ा है। पार्क के बाहर चारों ओर 2.5 मीटर चौड़ा मार्ग बनाया गया है। मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

हल आकृति में ABCD एक आयताकार पार्क है, और छायांकित क्षेत्र 2.5 मी. चौड़े मार्ग को दर्शाता है। मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमें



मार्ग सहित आयताकार क्षेत्र PQRS का क्षेत्रफल – आयताकार पार्क ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात करना होगा।

मार्ग सहित पार्क की लम्बाई (PQ) = पार्क की लम्बाई (AB) + 2 x मार्ग की चौड़ाई

= 55 मी. + 2 x 2.5 मी.

= 55 मी. + 5.0 मी. = 60 मी.

मार्ग सहित पार्क की चौड़ाई (PS) = पार्क की चौड़ाई (AD) + 2 x मार्ग की चौड़ाई

= 40 मी. + 2 x 2.5 मी.

= 40 + 5.0 मी.

= 45 मी.

मार्ग सहित आयताकार पार्क (PQRS) का क्षेत्रफल = ल. x चौ.

= 60 मी. x 45 मी.

= 2700 वर्ग मी.

आयताकार पार्क ABCD का क्षे. = ल. x चौ.

= 55 मी. x 40 मी.

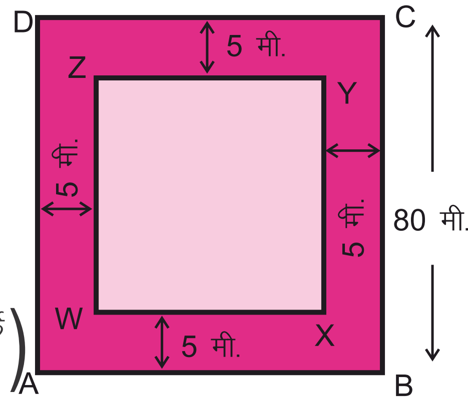
= 2200 वर्ग मी.

अतः मार्ग का क्षेत्रफल = मार्ग सहित आयताकार पार्क PQRS का क्षे. – आयताकार पार्क ABCD का क्षे.

= 2700 वर्ग मी. – 2200 वर्ग मी. = 500 वर्ग मी.

उदाहरण 5 80 मी. भुजा वाले एक वर्गाकार पार्क की परिसीमा के साथ लगा हुआ भीतर की 5 मीटर चौड़ा मार्ग बना हुआ है। इस मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 180 रू. प्रति वर्ग मीटर की दर से लाल मिट्टी डलवाने का खर्चा ज्ञात कीजिए।

हल आकृति में ABCD एक 80 मी. भुजा वाले वर्गाकार पार्क को दर्शाता है तथ पार्क के अन्दर की तरफ छायांकित भाग 5 मी. चौड़े मार्ग को दर्शाता है।



मार्ग का क्षेत्रफल

= (वर्गाकार पार्क ABCD का क्षे.) − (मार्ग रहित वर्गाकार पार्क WXYZ का क्षेत्रफल)

मार्ग रहित पार्क की भुजा WX = पार्क की भुजा AB - 2 x मार्ग की चौड़ाई

= 80 मी. − 2 x 5 मी.

= 80 मी. − 10 मी.

= 70 मी.

वर्गाकार पार्क ABCD का क्षेत्रफल = $(\text{भुजा})^2$ = $(80 \text{ मी.})^2$ = 6400 वर्ग मीटर

वर्गाकार पार्क WXYZ का क्षेत्रफल − $(\text{भुजा})^2$ = $(70 \text{ मी.})^2$ = 4900 वर्ग मीटर

मार्ग का क्षेत्रफल = वर्गाकार पार्क ABCD का क्षे. − वर्गाकार पार्क WXYZ का क्षेत्र

= 6400 वर्ग मी. − 4900 वर्ग मी. = 1500 वर्ग मी.

यदि 1 वर्ग मी. में लाल मिट्टी डलवाने का खर्चा = 180 रू. है

1500 वर्ग मी. में लाल मिट्टी डलवाने का खर्चा = 180 x 1500 रू.

= 2,70,000 रू.

उदाहरण 6 एक आयताकार घास के मैदान की लम्बाई 75 मीटर और चौड़ाई 55 मीटर है। मैदान के मध्य लम्बाई व चौड़ाई के समान्तर 3 मीटर चौड़े दो मार्ग इस प्रकार स्थित है कि प्रत्येक एक दूसरे को समकोण पर काटते हैं। सम्पूर्ण मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल लम्बाई के समान्तर मार्ग (WXYZ) का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौड़ाई

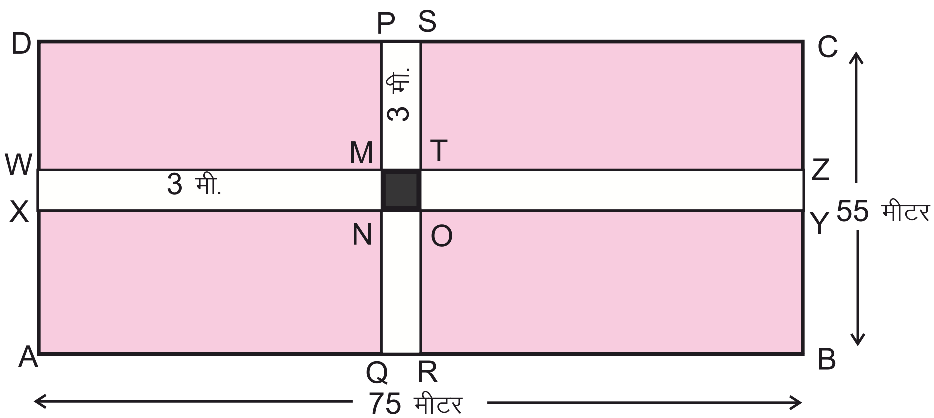
= 75 मी. x 3 मी.

= 225 वर्ग मीटर

चौड़ाई के समान्तर (PQRS) का क्षेत्रफल = ल. x चौ.

= 55 मी. x 3 मी.

= 165 वर्ग मी.



उभयनिष्ठ मार्ग वर्ग MNOT (दोनों मार्गो पर स्थित) का क्षेत्रफल = भुजा x भुजा

= 3 मी. x 3 मी.

= 9 वर्ग मी.

वर्ग MNOT का क्षेत्रफल 9 वर्ग मी. दोनों भागों में सम्मिलित है।

अतः सम्पूर्ण मार्ग का क्षेत्रफल = WXYZ का क्षे. + PQRS का क्षे. – वर्ग MNOT का क्षे.

= (225 + 165 – 9) वर्ग मी.

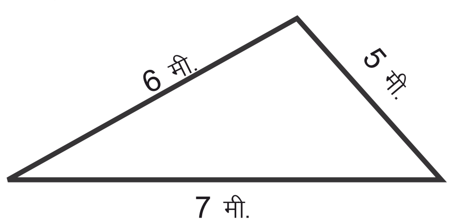
= (390 – 9) वर्ग मी.

= 381 वर्ग मी.

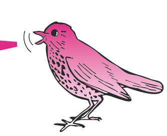
उपर्युक्त उदाहरण के चित्र में हमने देखा कि छायांकित भाग दोनों मार्गों पर स्थित है। अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल घटाते हैं।

16.3 त्रिभुज का क्षेत्रफल

किसी त्रिभुजाकार पार्क पर घास लगवाने का खर्चा ज्ञात करना है। त्रिभुजाकार पार्क का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करें ?



समान्तर चतुर्भुज का विकर्ण इसे दो त्रिभुजों में बाँटता है।



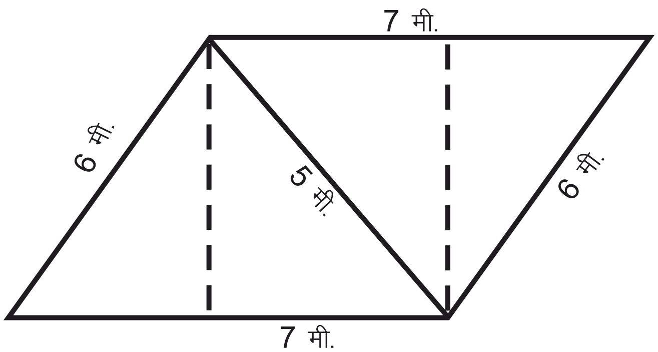
- **आओ सोचे**

  त्रिभुजाकार पार्क की नाप मीटर में दी गई है इसे पैमाना 1 मीटर = 1 सेमी लेकर कार्ड शीट पर दो सर्वांगसम त्रिभुज 6 सेमी, 7 सेमी तथा 5 सेमी भुजा वाले बनावे।

  दोनों त्रिभुजों को एक साथ इस प्रकार जोड़ें की दोनों के समान नाप वाली भुजा परस्पर पास आ जावें तथा समातर चतुर्भुज बना ले।

$\because$ त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल)

$\therefore$ **त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (आधार x ऊँचाई) वर्ग इकाई**



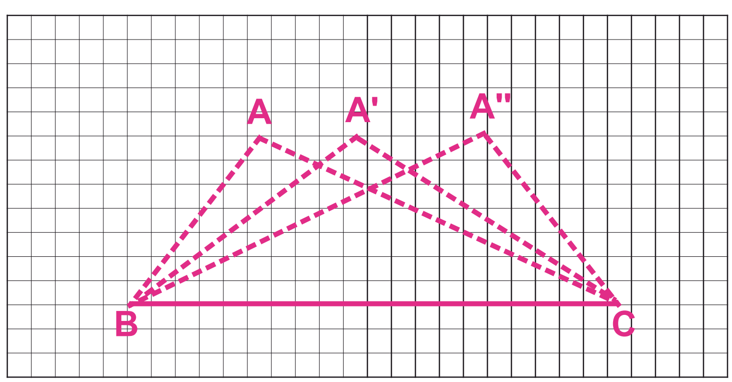
करो और सीखो

अलग अलग नाप के समान्तर चतुर्भुज बनाओ किसी एक विकर्ण के अनुदिश काटकर दो त्रिभुज बनाइए।

- क्या प्रत्येक स्थिति में दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं ?
- क्या दो सर्वांगसम त्रिभुजों का क्षेत्रफल सदैव समान होता है ?
- क्या इसका विलोम भी सदैव सत्य होगा ?

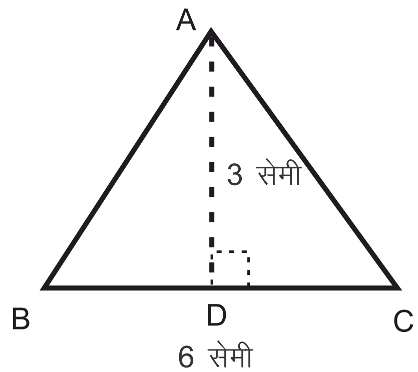
आओं करके देखें –

एक ग्राफ पेपर पर एक ही नाप का आधार तथा ऊंचाई लेकर अलग–अलग त्रिभुज बनाओं जैसे –

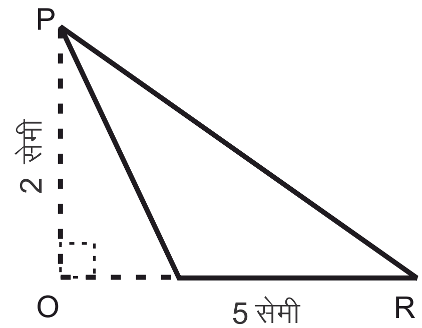


- ΔABC, $\Delta A'BC$ तथा $\Delta A''BC$ नाप के तीन त्रिभुज लेकर देखिए –
- तीनों त्रिभुजों द्वारा घेरे गये खानों की संख्या समान है, अर्थात तीनों का क्षेत्रफल समान हैं।
- क्या वे एक दूसरे को कभी पूरा–पूरा ढ़क सकते हैं ? काट करके देखिए ?

उदाहरण 7 चित्र में दर्शाए गए त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



(i)



(ii)

हल आकृति (i) त्रिभुज (ABC) का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ x आधार x ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times BC \times AD$

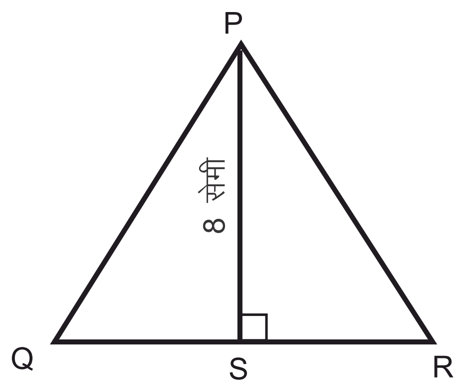
$= \frac{1}{2}$ x 6 सेमी x 3 सेमी = 9 वर्ग सेमी

आकृति (ii) त्रिभुज (PQR) का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ x आधार x ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times QR \times PO$

$= \frac{1}{2}$ x 5 सेमी x 2 सेमी = 5 वर्ग सेमी

उदाहरण 8 यदि त्रिभुज PQR का क्षेत्रफल 52 वर्ग सेमी और ऊँचाई PS = 8 सेमी है तो आधार QR की ज्ञात कीजिए ?



हल दी गई आकृति में ऊँचाई PS = 8 सेमी

त्रिभुज PQR का क्षेत्रफल = 52 वर्ग सेमी

त्रिभुज PQR का आधार QR = ?

त्रिभुज (PQR) का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ x आधार x ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times QR \times PS$

52 वर्ग सेमी. $= \frac{1}{2}$ x QR x 8 सेमी

$$QR = \frac{52 \times 2 \text{ सेमी}^2}{8 \text{ सेमी}}$$

= 13 सेमी.

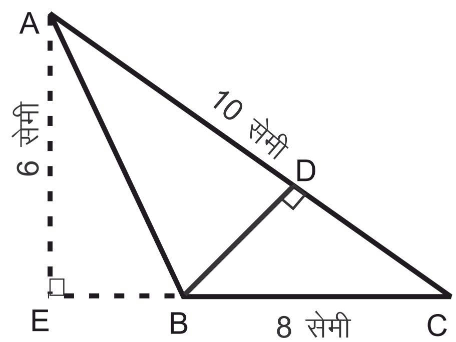
आधार QR = 13 सेमी.

उदाहरण 9 त्रिभुज ABC में AC =10 सेमी, BC = 8 सेमी और AE = 6 सेमी है तो ज्ञात कीजिए।

(i) त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल (ii) BD की लम्बाई

हल (i) त्रिभुज ABC में आधार BC = 8 सेमी

ऊँचाई AE = 6 सेमी



त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ x आधार x ऊंचाई

= $\frac{1}{2}$ x BC x AE

= $\frac{1}{2}$ x 8 सेमी x 6 सेमी

= 24 वर्ग सेमी

(ii) आधार AC = 10 सेमी. ऊँचाई (BD) = ? क्षेत्रफल = 24 वर्ग सेमी

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ x आधार x ऊँचाई

= $\frac{1}{2}$ x AC x BD

24 वर्ग सेमी = $\frac{1}{2}$ x 10 x BD

BD = $\frac{24 \times 2 \text{ सेमी}}{10}$ = 4.8 सेमी

उदाहरण 10 त्रिभुज PQR के आधार और ऊँचाई का अनुपात 3 : 2 है यदि उसका क्षेत्रफल 108 वर्ग सेमी तो आधार व ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल चित्रानुसार त्रिभुज PQR में आधार QR व ऊँचाई PQ का अनुपात 3 : 2

माना कि त्रिभुज का आधार QR = 3 x x

त्रिभुज की ऊँचाई PQ = 2 x x

क्षेत्रफल = 108 वर्ग सेमी

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ x आ. x ऊ. = $\frac{1}{2}$ x QR x PQ

108 वर्ग सेमी. = $\frac{1}{2}$ x $3x$ x $2x$

108 वर्ग सेमी. = $3x^2$

या $3x^2 = 108$

या $x^2 = 36$

या $x = 6$ सेमी

त्रिभुज का आधार QR = 3 x x

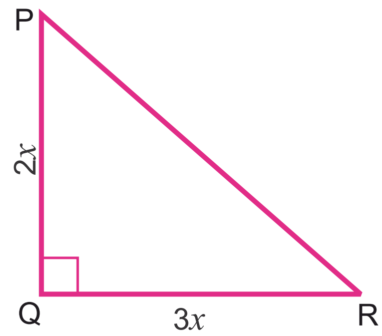
= 3 x 6

= 18 सेमी

त्रिभुज की ऊँचाई PQ = 2 x x

= 2 x 6

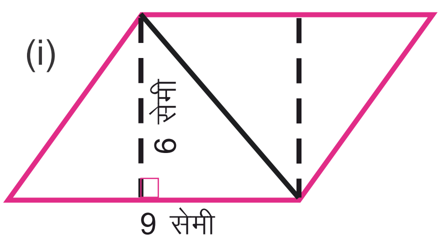
= 12 सेमी



प्रश्नावली 16.2

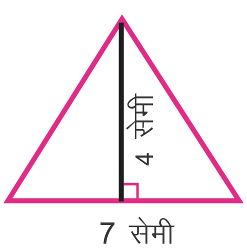
1. निम्न आकृतियों को देख कर समान्तर चतुर्भुज व त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(i)

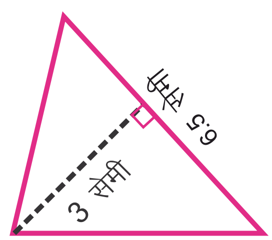


(ii)

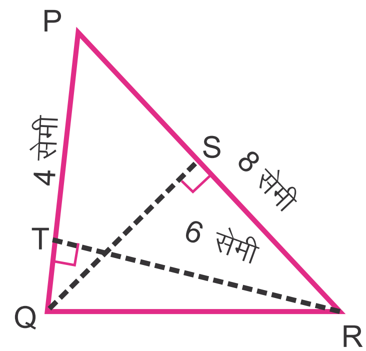
(ii)



(iv)

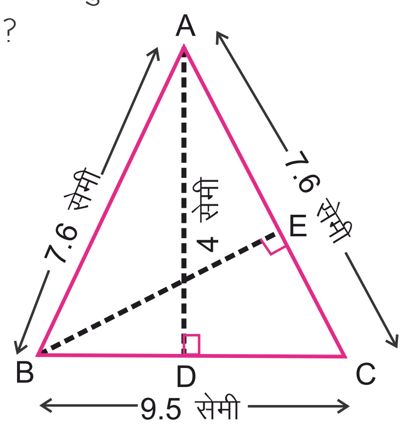


2. एक समान्तर चतुर्भुज की ऊँचाई उसके आधार की एक चौथाई है यदि उसका क्षेत्रफल 144 वर्ग सेमी हो उसका आधार और ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
3. काली के त्रिभुजाकार खेत व हमीदा के आयताकार खेत के क्षेत्रफल समान है। हमीदा के खेत की लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः 20 सेमी और 15 सेमी है। काली के खेत के आधार की लम्बाई 25 सेमी है तो ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
4. त्रिभुज PQR में (संलग्न चित्र) PQ = 4 सेमी, PR = 8 सेमी, RT = 6 सेमी है तो ज्ञात कीजिए।
   (1) त्रिभुज PQR का क्षेत्रफल
   (2) QS की लम्बाई



5. एक त्रिभुज का आधार 8 सेमी है। यदि त्रिभुज की ऊँचाई, आधार से दुगुनी है, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

6. ABC समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC = 7.6 सेमी और BC = 9.5 सेमी (संलग्न चित्र) A से भुजा BC पर लम्ब AD, 4 सेमी है त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए तथा B से AC पर लम्ब अर्थात् BE ज्ञात कीजिए ?



7. एक समान्तर चतुर्भुज के आधार और ऊँचाई का अनुपात 5 : 2 है उसका क्षेत्रफल 640 वर्ग सेमी हो तो आधार और ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

8. श्याम अपने आयताकार उपवन जिसकी लम्बाई 95 मीटर और चौड़ाई 80 मी. है। वह बाहर की ओर चारों तरफ 5 मीटर चौड़े क्षेत्र की मिट्टी खुदवाकर पौधे लगाना चाहता है । ज्ञात कीजिए कि कितने क्षेत्रफल में पौधे लगाएगा ?

9. 60 मीटर भुजा वाले वर्गाकार मैदान के चारों तरफ भीतर की ओर 2 मीटर चौड़ा पथ बना हुआ है ज्ञात कीजिए।
(1) पथ का क्षेत्रफल (2) 270 रू. प्रति वर्गमीटर की दर से पथ पर सीमेंट कराने का व्यय।

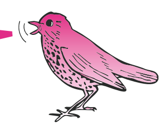
10. 125 मीटर लम्बाई और 95 मीटर चौड़ाई वाले एक आयताकार पार्क के मध्य में लम्बाई व चौडाई के समान्तर मध्य में दो मार्ग बनाए गए हैं प्रत्येक मार्ग की चौड़ाई 10 मीटर हो तो ज्ञात कीजिए।
(1) मार्ग में 80 रू. प्रति वर्गमीटर की दर से लाल मिट्टी डलवाने पर व्यय।
(2) पार्क में मार्ग को छोड़कर शेष भाग में घास लगाने का क्षेत्रफल।

16.4.1 वृत्त की परिधि

ममता अपनी बैठक में रखी टी टेबल जो दोनों किनारों पर अर्द्धवृत्ताकार हैं, के किनारे पर प्लास्टिक की मॉल्डिंग फ्रेम लगवाना चाहती है।

ममता ने अपनी बहिन मीना से इस हेतु फ्रेम लाने को कहा मीना टेबल के किनारे की लम्बाई नापना चाहती है, परन्तु किनारे वाले भाग को मापने में दिक्कत आ रही है। ममता उसे समझाती है कि वक्र किनारे वाले भाग को मापने के लिए हम वृत्ताकार भाग के किनारे को मापने की विधि ज्ञात करते हैं। आओ वक्राकार / मुड़ी हुई आकृति की लम्बाई मापना सीखें। ''ममता ने वृत्ताकार चूड़ी लेकर उसके चारों तरफ किनारे – किनारे धागा लपेटकर दूरी को मापा । यही वृत्ताकार क्षेत्र के चारों ओर की दूरी 'परिधि' है।

वृत्ताकार चकती, पहिए, चूड़ी इत्यादि की परिधि पर एक निशान लगाकर उसे समतल धरातल पर घुमाकर पूरे एक चक्कर में तय की गई दूरी से भी परिधि ज्ञात कर सकते हैं।



मीना इन सभी स्थितियों में वृत्ताकार भाग की परिधि को सही–सही मापने में समस्या है। चलो हम इसके लिए एक सूत्र का पता करते हैं।

ममता–हाँ, मैंने देखा था कि गड़रिया लोहार लकड़ी के पहिएँ पर लोहे का पट्टा चढ़ाने के लिए वह व्यास की लम्बाई के आधार पर लोहे के पट्टे की लम्बाई का ठीक से अनुमान लगाकर पट्टा चढ़ाता है। आओ, व्यास तथा परिधि के मध्य सम्बन्ध का पता लगाते हैं। ममता एवं मीना ने अलग–अलग त्रिज्या की 7 वृत्ताकार वस्तुएँ ली तथा धागे की सहायता, से मापकर निम्न तालिका में मापों को भरकर परिधि तथा व्यास के अनुपात का पता लगाया हैं।

वृत	त्रिज्या	व्यास	परिधि	परिधि ÷ व्यास
1	3.5 सेमी	7.0 सेमी	22.0 सेमी	$\frac{22}{7} = 3.14$
2	7.0 सेमी	14.0 सेमी	44.0 सेमी	$\frac{44}{14} = 3.14$
3	10.5 सेमी	21.0 सेमी	66.0 सेमी	$\frac{66}{21} = 3.14$
4	14.0 सेमी	28.0 सेमी	88.0 सेमी	$\frac{88}{28} = 3.14$
5	17.5 सेमी	35.0 सेमी	110.0 सेमी	$\frac{110}{35} = 3.14$

उपर बनी तालिका से स्पष्ट होता है कि अलग अलग त्रिज्या वाली आकृतियों में परिधि / व्यास का मान लगभग समान रहता है। यह मान लगभग 3.14 रहता है। इस स्थिरांक को ''π'' पाई से प्रदर्शित करते हैं।

अतः $\dfrac{\text{परिधि (c)}}{\text{व्यास (d)}} = \pi$ या $\dfrac{\text{परिधि (c)}}{2 \times \text{त्रिज्या}} = \dfrac{c}{2r}$

या $c = \pi d$

$c = 2\pi r$

परिधि $c = 2\pi r$ अतः वृत्ताकार वस्तुओं की परिधि $= \pi d = 2\pi r$

उदाहरण 11 मोहन अपनी माँ की चूड़ियों पर सोने की पत्तियाँ चढवाना चाहता है वह कितनी लम्बी पत्ती चढ़ाएगा जबकि चूड़ी की त्रिज्या 3.5 सेमी है। (बिना अतिव्यापन किए हुए)

हल वृत्ताकार चूड़ी की त्रिज्या (r) = 3.5 सेमी

वृत्त की परिधि $= 2\pi r$

$= 2 \times \dfrac{22}{7} \times \dfrac{35}{10}$ सेमी $\quad \left| \; \pi = \dfrac{22}{7} \right.$

= 22 सेमी

उदाहरण 12 एक वृत्ताकार पहिए का व्यास 11.2 सेमी है तो पहिए की परिधि ज्ञात कीजिए।

हल पहिए का व्यास (d) = 11.2 सेमी

अतः त्रिज्या (r) = 11.2 ÷ 2 सेमी = 5.6 सेमी

वृत्ताकार पहिए की परिधि $= 2\pi r$

$= 2 \times \dfrac{22}{7} \times 5.6$ सेमी

= 35.2 सेमी

उदाहरण 13 बनवारी 42 मीटर त्रिज्या वाले पहिए को 2 चक्कर घुमाने में कितनी दूरी तय करेगा ?

हल वृत्ताकार पहिए की त्रिज्या (r) = 42 मीटर

वृत्त की परिधि $= 2\pi r$

$= 2 \times \dfrac{22}{7} \times 42$ मीटर

= 264 मीटर

∴ 1 चक्कर लगाने में पहिया दूरी तय करता है = 264 मीटर

∵ 2 चक्कर लगाने में पहिया दूरी तय करेगा = 264 x 2 मीटर

= 528 मीटर

उदाहरण 14 खुशबू 14 सेमी त्रिज्या वाली एक वृत्ताकार कागज की तश्तरी को दो बराबर भागों में विभाजित करती है। प्रत्येक अर्ध वृत्ताकार तश्तरी का परिमाप ज्ञात कीजिए।

($\pi = \dfrac{22}{7}$ प्रयोग कीजिए।)

हल तश्तरी की त्रिज्या (r) = 14 सेमी

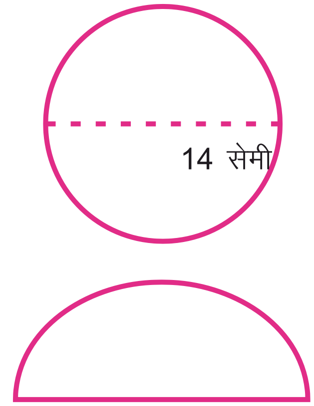
वृत्त की परिधि = $2\pi r$

अतः अर्धवृत्त की परिधि = $\frac{1}{2} \times 2\pi r$

$= \pi r$

$= \frac{22}{7} \times 14$ सेमी

= 44 सेमी



वृत्त का व्यास (d) = 2 x त्रिज्या

= 2 x 14 सेमी

= 28 सेमी

अतः प्रत्येक अर्धवृत्ताकार तश्तरी का परिमाप = अर्धवृत्त की परिधि + व्यास

= 44 सेमी + 28 सेमी

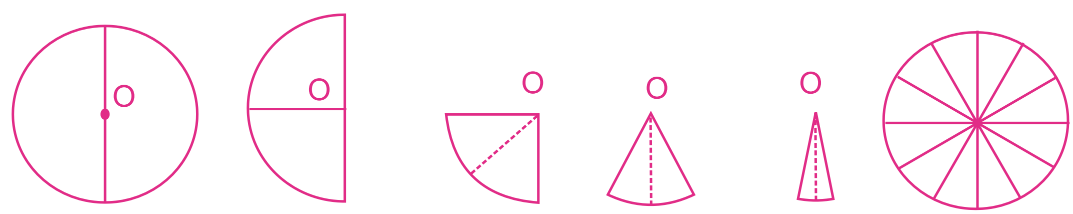
= 72 सेमी

16.4.2 वृत्त का क्षेत्रफल

मीना 28 मीटर त्रिज्या वाले वृत्ताकार मैदान पर लाल मिट्टी डलवाना चाहती है। यदि 1 वर्ग मीटर क्षेत्रफल पर मिट्टी डलवाने का खर्चा 10 रूपये है तो इस मैदान पर लाल मिट्टी डलवाने का खर्चा कितना होगा इसका हिसाब लगा रही है। मीना की बहिन ममता ने बताया इसमें हमें परिधि (परिमाप) नहीं बल्कि वृत्ताकार भाग द्वारा घेरे गये क्षेत्र का क्षेत्रफल पता लगाना है।

दोनों ने पारदर्शी कागज पर वृत्ताकार भाग के दर्शाने हेतु 10 मीटर = 1 सेमी पैमाना लेकर 2.8 सेमी त्रिज्या की वृत्ताकार शीट काटी तथा ग्राफ पेपर पर रखकर, वर्गों को गिनते हुए क्षेत्रफल का पता लगाने लगी। किनारे सीधे नहीं होने से वृत्त के क्षेत्रफल का एक कच्चा सतही अनुमान ही प्राप्त हुआ। अब एक अन्य विधि से वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करने की सोची –

मीना वृत्त को लगातार चित्रानुसार मोड़ती गई तथा उसे सलवटो से काटा



(i) (ii) (iii) (iv) (iv) (iv)

ममता – हमने एक वृत्त के दो, दो से चार, चार से आठ, आठ से सोलह टुकड़े प्राप्त किए हैं।

मीना – यदि इस प्रकार आगे से आगे मोड़ते जाएँ तो लगातार दुगुने टुकड़े प्राप्त होंगे।

ममता – एक स्थिति ऐसी होगी कि प्राप्त टुकड़ा लगभग एक त्रिभुजाकार होगा जिसकी ऊँचाई त्रिज्या के बराबर तथा आधार बहुत छोटा होगा।

मीना – यदि हमें n टुकड़े प्राप्त हों तो सभी n टुकड़ों का कुल क्षेत्रफल वृत्त के क्षेत्रफल के समान होगा।

ममता – हाँ, इस स्थिति में।

वृत्त का क्षेत्रफल ={त्रिभुज 1 + त्रिभुज 2 + त्रिभुज 3 + त्रिभुज 4 + ...+ ....+ त्रिभुज n} का क्षेत्रफल

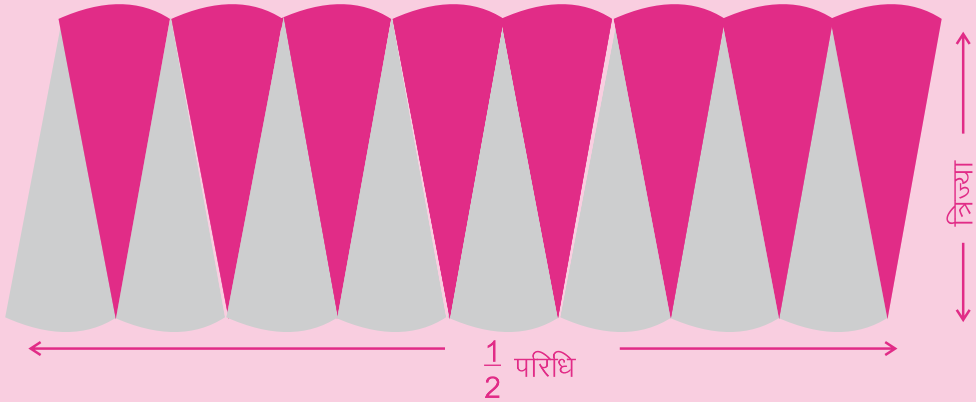
$= \left[\frac{1}{2} b_1 r + \frac{1}{2} b_2 r + \frac{1}{2} b_3 r + \frac{1}{2} b_4 r + ...+..........+\frac{1}{2} b_n r\right]$

$= \frac{1}{2} r\left[b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + ...+b_n\right]$ $(b_1, b_2, ...b_n =$ सभी त्रिभुज के आधार$)$

$= \frac{1}{2} r\left[b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + ...+..........+ b_n\right] = \frac{1}{2} r\,[2\pi r]$ वर्ग इकाई $\because$ (परिधि $= 2\pi r$)

$= \frac{1}{2} (2\pi r^2)$ वर्ग इकाइ $= \pi r^2$ वर्ग इकाई

गतिविधि– एक वृत्त के अर्द्धभाग को छायांकित कीजिए तथा इसे लगातार 6 बार उतरोत्तर मोड़िए तथा सलवटों के अनुदिश काटकर 64 खण्ड प्राप्त करें, इन खण्डों को चित्रानुसार व्यवस्थित कीजिए।



क्या आप इससे वृत्त के क्षेत्रफल का सूत्र बतला सकते है ? आप देखेंगे कि यह आयत के समान आकृति बन रही है इसकी लम्बाई परिधि तथा चौड़ाई त्रिज्या के बराबर है, यदि वृत्त की त्रिज्या 'r' है तो–

आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौड़ाई

$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$

अतः अभीष्ट वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

उदाहरण 15 25 सेमी त्रिज्या वाले वृत्ताकार डिस्क का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

हल डिस्क की त्रिज्या (r) = 25 सेमी

वृत्ताकार डिस्क का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$= 3.14 \times (25)^2$

$= 3.14 \times 25 \times 25$

$= 1962.50$ वर्ग सेमी

उदाहरण 16 एक वृत्ताकार बगीचे का व्यास 11.2 मीटर है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल व्यास d = 11.2 मीटर, अतः त्रिज्या (r) = 11.2 ÷ 2 मीटर

= 5.6 मीटर

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times (5.6)^2$ वर्ग मीटर

$= \frac{22}{7} \times 5.6 \times 5.6$ वर्ग मीटर

= 98.56 वर्गमीटर

उदाहरण 17 एक वृत्ताकार तश्तरी का क्षेत्रफल 2826 वर्ग सेमी. है तो वृत्ताकार तश्तरी की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

हल वृत्त का (तश्तरी) क्षेत्रफल = 2826 वर्ग सेमी

$\pi r^2 =$ 2826 वर्ग सेमी

$3.14 \times r^2 =$ 2826 वर्ग सेमी

$r^2 = \frac{2826}{3.14}$ वर्ग सेमी

$r^2 =$ 900 वर्ग सेमी

$r =$ 30 सेमी

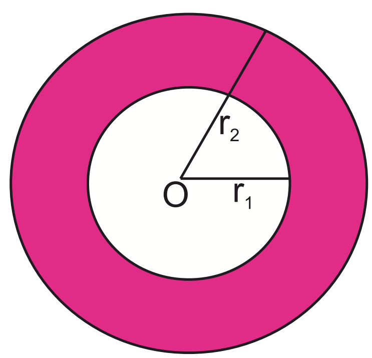
उदाहरण 18 संलग्न आकृति दो वृत्तों को दर्शाती है जिनका केन्द्र समान है। बड़े वृत्त की त्रिज्या 12 सेमी और छोटे वृत्त की त्रिज्या 8 सेमी है। निम्न ज्ञात कीजिए। यदि $\pi = 3.14$ है।

(1) बड़े वृत्त का क्षेत्रफल

(2) छोटे वृत्त का क्षेत्रफल

(3) दोनों वृत्तों के बीच

छायांकित भाग का क्षेत्रफल ($\pi = 3.14$)



हल (1) बड़े वृत्त की त्रिज्या $r_2 =$ 12 सेमी

अतः बड़े वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r_2^2$

$= 3.14 \times (12)^2$ वर्ग सेमी

$= 3.14 \times 12 \times 12$ वर्ग सेमी

= 452.16 वर्ग सेमी

(2) छोटे वृत्त की त्रिज्या $r_1 =$ 8 सेमी

अतः छोटे वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r_1^2$

$= 3.14 \times (8)^2$ वर्ग सेमी

$= 3.14 \times 8 \times 8$ वर्ग सेमी

= 200.96 वर्ग सेमी

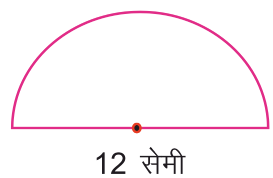
(3) छायांकित भाग का क्षेत्रफल = बड़े वृत्त का क्षेत्रफल − छोटे वृत्त का क्षेत्रफल

= 452.16 वर्ग सेमी − 200.96 वर्ग सेमी

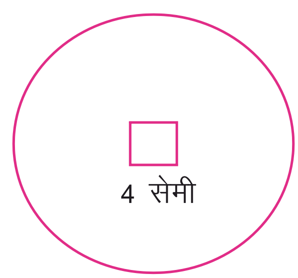
= 251.20 वर्ग सेमी

प्रश्नावली 16.3

1. निम्न त्रिज्याओं वाले वृत्तों की परिधि ज्ञात कीजिए ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)
   (i) 21 सेमी (ii) 28 मिमी (iii) 10.5 सेमी
2. निम्न वृत्तों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। दिया गया है –
   (i) त्रिज्या = 5 सेमी (ii) व्यास = 42 मीटर (iii) त्रिज्या = 5.6 सेमी
3. यदि एक वृत्ताकार शीट की परिधि 132 मीटर हो तो इसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए। शीट का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)
4. एक वृत्त की परिधि 44 सेमी. है। वृत्त की त्रिज्या और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)
5. दी गई आकृति, 12 सेमी व्यास के साथ एक अर्धवृत्त है। उसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

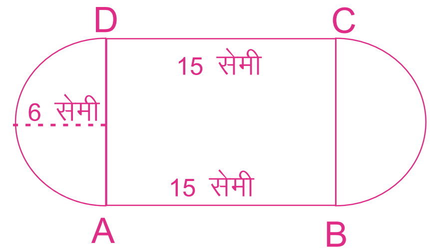


6. एक वृत्ताकार तालाब की त्रिज्या 28 मीटर है। इसके बाहर चारों और 1.4 मीटर चौड़ाई का तट (मार्ग) बना हुआ है। मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।
7. एक वृत्त का क्षेत्रफल 616 वर्ग सेमी है। इस वृत्त के बाहर 2 मीटर चौड़ाई का मार्ग है। उस मार्ग का क्षेत्रफल कितना होगा ?
8. 5 सेमी त्रिज्या वाली एक वृत्ताकार शीट में से 4 सेमी. त्रिज्या वाले एक वृत्त को निकाल दिया जाता है। शीट के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । ($\pi = 3.14$ लीजिए)
9. 14 सेमी. त्रिज्या वाली एक गत्ते की शीट में से 4 सेमी भुजा वाले एक वर्ग को निकाल दिया जाता है। (जैसा कि आकृति में दिखाया गया है) शीट के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)



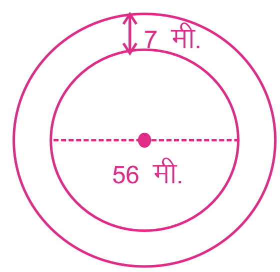
10. यदि दो वृत्तों के व्यास का अनुपात 4 : 5 है तो दोनों वृत्तों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
11. दुर्गा अपनी वृत्ताकार टेबल की सतह पर पॉलिश कराना चाहती है जबकि टेबल का व्यास 2.8 मीटर है तथा 25 रू. प्रति वर्गमीटर की दर से खर्चा ज्ञात कीजिए।
12. गोपी अपने घोड़े को 12 मीटर लम्बी रस्सी से एक खूंटे द्वारा बांध देता है तो घोड़ा कितने क्षेत्रफल की घास खा पाता है ?

13. दी गई आकृति में ABCD एक आयताकार भाग के दोनों सिरों पर अर्धवृत्ताकार भाग जोड़े गए जिसका व्यास 12 सेमी है लम्बाई 15 सेमी है तो क्षेत्रफल ज्ञात करों।



14. 35 मीटर त्रिज्या वाले एक पहिए को 880 मीटर दूरी तय करने के लिए पहिए को कितनी बार घूमना पड़ेगा ? ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

15. पर्वत अपने वृत्ताकार उपवन के चारों ओर 7 मीटर चौड़े मार्ग में 11 रू. प्रति वर्गमीटर की दर से मिट्टी डलवाने में कितना व्यय करता है, ज्ञात कीजिए ? जबकि उपवन का व्यास 56 मीटर है। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)



16. वृत्ताकार घड़ी के मिनट की सुई की लम्बाई 20 सेमी. है। मिनट की सुई की नोंक 1 घण्टे में कितनी दूरी तय करती है। $\pi = 3.14$ लीजिए।

करो और सीखो

यातायात चिन्हों को दर्शाने हेतु लोहे की चद्दर काटकर निम्नलिखित 5 वृत्ताकार चकती तैयार की गई सभी की त्रिज्या 21 सेमी है।

इन सभी चिन्हों का अर्थ अपने अध्यापक जी की सहायता से पता कीजिए तथा चकतियों की परिधि एवं क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

हमने सीखा

1. परिमाप एक बन्द आकृति के चारों ओर की दूरी है जबकि क्षेत्रफल एक बन्द आकृति द्वारा घेरे गए तल के भाग या क्षेत्र को दर्शाता हैं।
2. एक वर्ग और आयत का परिमाप तथा क्षेत्रफल ज्ञात करने के सूत्र जैसे –
   (1) एक वर्ग का परिमाप = 4 x भुजा
   (2) एक आयत का परिमाप = 2 x (लम्बाई + चौड़ाई)
   (3) एक वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा x भुजा
   (4) एक आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौड़ाई
3. एक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार x ऊँचाई
4. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (इससे प्राप्त समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल)

   = $\frac{1}{2}$ x आधार x ऊँचाई
5. एक वृत्ताकार क्षेत्र के चारों ओर की दूरी इसकी परिधि कहलाती हैं। एक वृत्त की परिधि = $2\pi r$ या परिधि = πd जहाँ d वृत्त का व्यास और $\pi = \frac{22}{7}$ या 3.14 (लगभग) है।
6. एक वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2, जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है।

अध्याय 17 आँकड़ों का प्रबन्धन

17.1 पिछली कक्षा में हमने पढ़ा कि निश्चित उद्देश्य से जो संख्यात्मक तथ्य एकत्र किए जाते हैं वे आँकड़े कहलाते हैं।

पिछली कक्षा में हमने आँकड़ों के प्रकार, आँकड़ों का संग्रह करना, आँकड़ों को व्यवस्थित करना, मिलान चिह्न की सहायता से सारणीबद्ध करना सीखा था साथ ही चित्रालेख, दण्डालेख पढ़ना एवं बनाना सीखा। आँकड़ों का संग्रहण, आलेखन और प्रस्तुतीकरण हमारे अनुभवों को संग्रहित करने और उनसे निष्कर्ष निकालने में हमारी सहायता करते हैं।

इस अध्याय में हम आगे दोहरे दण्ड आलेख पढ़ना एवं बनाना तथा केन्द्रीय प्रवृतियाँ अवर्गीकृत आँकड़ों का समान्तर माध्य, माध्यिका एवं बहुलक आदि का अध्ययन करेंगे।

दैनिक जीवन में हमारे सामने विभिन्न प्रकार के आँकड़े आते रहते हैं। जिन्हें हम समाचार पत्र पत्रिकाओं, टेलीविजन या अन्य माध्यमों से देखते हैं। आइए आँकड़ों के कुछ सामान्य रुपों को देखें जो हमारे सम्मुख आते रहते हैं।

अमर की दिनचर्या

प्रवृति	व्यतीत समय
भोजन एवं नित्यकर्म	2 घण्टा
विद्यालय	6 घण्टा
खेलकूद एवं मनोरंजन	3 घण्टा
गृह कार्यों में सहयोग	2 घण्टा
पढ़ाई	3 घण्टा
निद्रा	8 घण्टा

तालिका 17.1

प्राथमिक स्वास्थ्य केन्द्र में सोमवार को आए मरीज

बीमारी का नाम	मरीज संख्या
बुखार	22
सर्दी–जुकाम	26
आँख का रोग	08
त्वचा के रोग	12
दुर्घटना से चोट	07
दांत के रोग	05

तालिका 17.2

आरती का प्रथम दो परख में प्रदर्शन

विषय	प्रथम परख	द्वितीय परख
हिन्दी	5	8
अंग्रेजी	6	8
गणित	3	9
विज्ञान	6	9
सामा. विज्ञान	5	8
संस्कृत	8	7

तालिका 17.3

आँकड़ों के ये संग्रह हमें क्या बताते हैं ? उदाहरणार्थ हम कह सकते हैं कि अमर अपनी दिनचर्या में विद्यालय में 6 घण्टे तथा 3 घण्टा घर पर पढ़ाई में व्यतीत करता है। (तालिका 17.1)

इसी प्रकार आरती ने लगभग सभी विषयों में प्रथम परख के मुकाबले द्वितीय परख में बेहतर प्रदर्शन किया और सर्वाधिक सुधार गणित विषय में हुआ है।

क्या इन आँकड़ों को और बेहतर एवं संगठित तरीके से प्रस्तुत किया जा सकता है, ताकि उनका विश्लेषण और व्याख्या करना आसान व बेहतर हो जाए ? इस अध्याय में हम इस प्रकार के प्रश्नों के उत्तर प्राप्त करने का प्रयत्न करेंगे।

गत सत्र में हम देख चुके हैं कि किस प्रकार संग्रहित सूचनाओं को एक बारम्बारता बंटन सारणी (Frequency distribution table) के रुप में पहले व्यवस्थित करके फिर सूचनाओं को चित्रालेख (pictographs) या दण्ड आलेखों (bargraphs) के रुप में निरुपित किया जाता है। हम कह सकते हैं कि सबसे लम्बा दण्ड ही बहुलक है यदि दण्ड बारम्बारता निरुपित करता है।

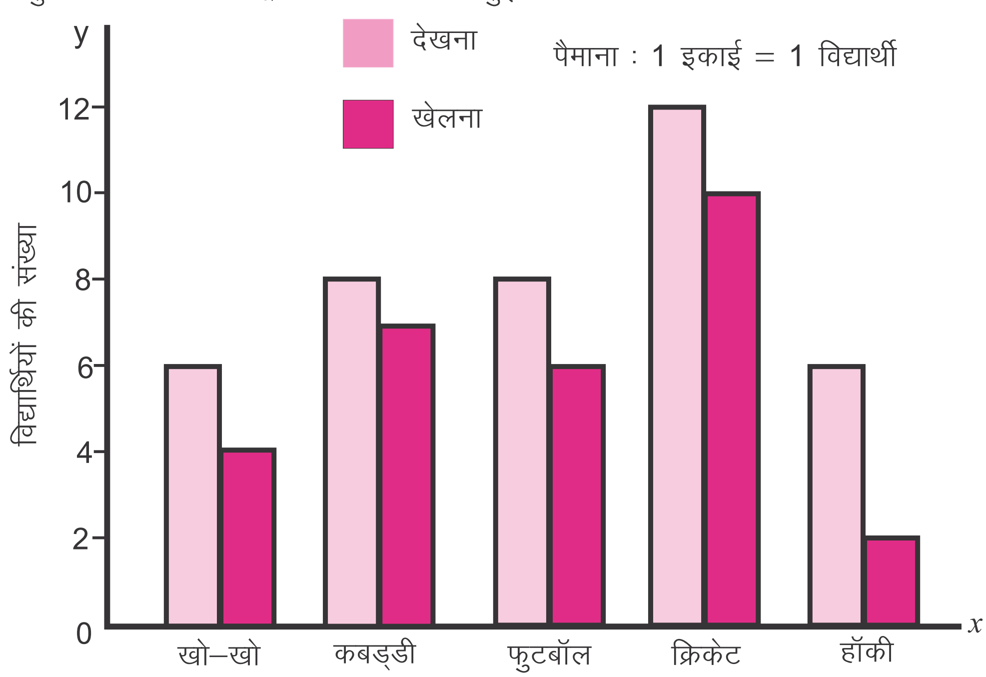
17.2 दोहरे दण्ड आलेख खींचना

एक कक्षा में किए गए सर्वेक्षण से प्राप्त निम्नांकित आँकड़ों पर विचार कीजिए :–

पसंदीदा खेल	खो–खो	कबड्डी	फुटबॉल	क्रिकेट	हॉकी
देखना	6	8	8	12	6
खेलना	4	7	6	10	2

उपर्युक्त आँकड़े कक्षा के विभिन्न विद्यार्थियों की संबंधित खेल को देखने एवं खेलने की रुचि को दर्शाते हैं। इन आँकड़ों को देखकर हम बता सकते हैं कि किस खेल को सर्वाधिक विद्यार्थी खेलते हैं, किस खेल को विद्यार्थी सबसे कम देखना पसंद करते हैं।

परन्तु एक विशेष खेल को देखने एवं खेलने वाले विद्यार्थियों में अंतर पता करने के लिए हमें देखने व खेलने वाले विद्यार्थियों की संख्या में तुलना करनी पड़ेगी। इसके लिए हम उन आलेखों को खींचना सीखेंगे, जिन्हें दोहरे दण्ड आलेख (double bar graphs) कहा जाता है। इसमें दोनों रुचियों की तुलना दण्ड आलेखों द्वारा साथ–साथ दी हुई होती है।



उदाहरण 1 एक बिजली सामग्री विक्रेता द्वारा वर्ष 2011 से 2015 तक प्रतिवर्ष बेचे गए सी.एफ.एल. ट्यूब एवं एल.ई.डी. बल्ब की संख्या नीचे दी गई है।

वर्ष	2011	2012	2013	2014	2015
CFL ट्यूब	1200	1400	1100	900	600
LED बल्ब	100	400	700	1000	1400

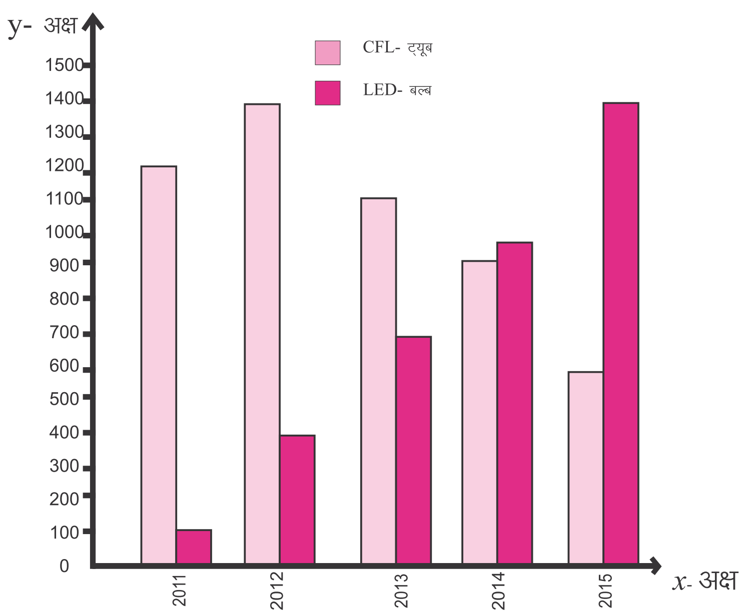
एक दोहरा दण्ड आलेख खींचिए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1. किस प्रकार के प्रकाश उपकरण की बिक्री लगातार बढ़ी है?
2. 2011 की तुलना में 2015 में प्रकाश उपकरणों में वृद्धि हुई या कमी ?
3. दोनों प्रकार के प्रकाश उपकरणों की बिक्री में अंतर किस वर्ष सर्वाधिक रहा ?

हल

दोहरा दण्ड आलेख की रचना के पद –

1. ग्राफ पेपर पर x अक्ष (क्षैतिज) और y अक्ष (उर्ध्वाधर) बनाइए। वे आपस में (0,0) मूल बिन्दु पर मिलते हैं।
2. x अक्ष पर वर्ष 2011 से 2015 तक लिखिए।
3. सी.एफ.एल. ट्यूब और एल.ई.डी. बल्ब की संख्या y अक्ष पर लिखें।
4. y अक्ष पर उचित पैमाना लीजिए ताकि दोनों प्रकाश उपकरणों की संख्या आसानी से लिखी जा सके। y अक्ष पर 1 सेमी = 100 ले सकते हैं।
5. संख्या को 100 से भाग देकर प्रत्येक स्तम्भ की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
6. सी.एफ.एल. ट्यूब और एल.ई.डी. बल्ब को साथ–साथ स्तम्भों द्वारा प्रदर्शित कीजिए।



(1) दोहरे दण्ड आलेख को देखने से स्पष्ट है कि LED बल्ब की बिक्री लगातार बढ़ी है।

(2) 2011 की तुलना में 2015 में कुल प्रकाश उपकरणों में वृद्धि स्पष्ट नजर आती है।

(3) दोहरे दण्ड आलेख को देखने से स्पष्ट है कि 2011 में दोनों प्रकाश उपकरणों की बिक्री में अंतर सर्वाधिक रहा।

करो और सीखो

1. कक्षा 7 की पाँच छात्राओं के गणित और विज्ञान विषय के अंक तालिका में दिए गए हैं। इन आँकड़ों को उर्ध्वाधर दोहरे दण्ड आलेख द्वारा दर्शाइए।

छात्र का नाम	गणित	विज्ञान
आरती	65	75
वर्षा	70	75
सिमरन	55	70
राधा	75	80
ज्योति	50	60

2. दो परिवारों के एक महीने में होने वाले विभिन्न खर्च का विवरण निम्न तालिका में दर्शाया गया है। इस तालिका के आधार पर दोहरा दण्ड आलेख बनाइए तथा निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए

खर्च मद	परिवार 1	परिवार 2
मकान किराया	2000	2500
बिजली, पानी टेलीफोन	800	600
खाद्य सामग्री	8000	7000
बच्चों की शिक्षा	2000	3000
बचत	2200	1900

(i) किस मद पर खर्च अधिकतम है ?
(ii) किस मद पर खर्च न्यूनतम है ?
(ii) दोनों परिवारों की मासिक आय 15000 रु. हो तो दोनों परिवारों में बच्चों की शिक्षा पर खर्च का प्रतिशत क्या होगा ?

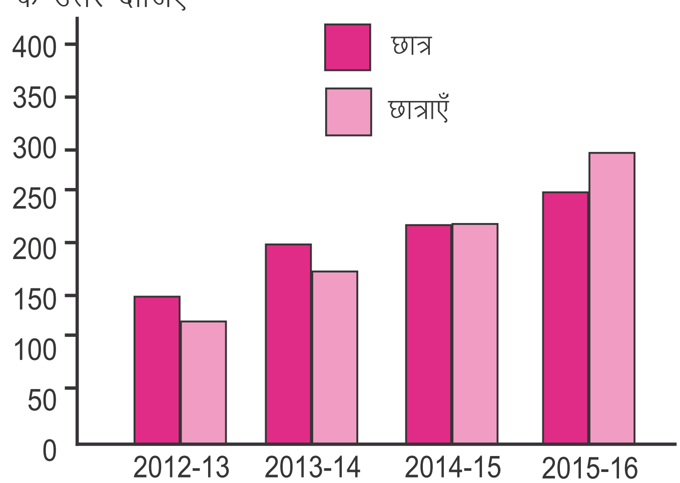
प्रश्नावली 17.1

1. निम्न आलेख में एक विद्यालय को सत्र के अनुसार विद्यार्थी संख्या को दर्शाया गया है। इस आलेख पर आधारित प्रश्नों के उत्तर दीजिए –

(i) किस सत्र में विद्यालय में छात्राओं की संख्या छात्रों से अधिक रही?

(ii) किस सत्र में विद्यालय में छात्र एवं छात्राओं की संख्या समान रही ?

(iii) 2015-16 में विद्यालय में कुल विद्यार्थियों की संख्या क्या थी ?



2. वर्ष 2011 से 2015 तक निःशुल्क पाठ्यपुस्तक वितरण के तहत एक जिले में कक्षा 7 को गणित तथा हिन्दी की पुस्तकों का वितरण निम्न तालिकानुसार हुआ।

विषय/वर्ष	2011	2012	2013	2014	2015
गणित	8000	8500	9500	11000	13000
हिन्दी	9000	10000	10500	11500	14000

एक दोहरा दण्ड आलेख खींचिए और निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दीजिए –

(i) किस विषय की पुस्तक की माँग हमेशा अधिक रही है ?

(ii) किस वर्ष में दोनों पुस्तकों की माँग में अंतर न्यूनतम रहा है ?

(iii) किस वर्ष में दोनों पुस्तकों की माँग में अंतर अधिकतम रहा ?

3. उदयपुर से राजस्थान के निम्नांकित शहरों की सड़क एवं रेलमार्ग से अनुमानित दूरी निम्नांकित तालिका में दी गई है। तालिका के आधार पर दोहरा दण्ड आलेख खींचिए और निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दीजिए –

शहर उदयपुर से दूरी	सड़क मार्ग (किमी में)	रेल मार्ग (किमी में)
अजमेर	290	310
जयपुर	410	440
बीकानेर	530	580
जोधपुर	270	300
कोटा	360	570

(i) सड़क मार्ग से उदयपुर से सर्वाधिक दूरी पर कौन सा शहर है ?

(ii) कौन से शहर की दूरी में सड़क और रेलमार्ग में अंतर न्यूनतम है ?

(iii) कौन से शहर की दूरी में सड़क और रेलमार्ग में अंतर सर्वाधिक है ?

17.3 आँकड़ों का संग्रह

हमारे दैनिक जीवन में किसी तथ्य को आँकड़ों के माध्यम से व्यक्त करने का बहुत महत्व है। जैसे यह कहा जाता है कि भारत की जनसंख्या काफी है के स्थान पर यह कहना कि भारत की जनसंख्या 2011 की जनगणना के अनुसार एक अरब इक्कीस करोड़ आठ लाख है ज्यादा उपयुक्त है। इसी प्रकार हमारे स्कूल में विद्यार्थियों की संख्या काफी है, के स्थान पर यह कहना उचित होगा कि हमारे स्कूल में विद्यार्थियों की संख्या 867 है। अतः हम कह सकते हैं कि आँकड़ों के माध्यम से हम हमारे विचारों को अधिक स्पष्ट रुप से व्यक्त कर सकते हैं। जिस प्रकार हमें भवन निर्माण से पूर्व पत्थर, चूना, सीमेंट ,ईंटे आदि एकत्रित करना होता है, उसी प्रकार आँकड़ों के विश्लेषण एवं निष्कर्ष निकालने हेतु प्रारम्भ में आँकड़े एकत्रित करना अति आवश्यक है। आँकड़ों के उचित उपयोग से हम जटिल से जटिल समस्याओं को समझ कर इनका समाधान तार्किक रुप से ज्ञात करने में सक्षम हो सकते हैं। परन्तु इसके लिए यह अति आवश्यक है कि लिए गए आँकड़े शुद्ध, व्यापक एवं प्रमाणिक हो।

आँकड़ों को एकत्रित करने के स्त्रोतों के आधार पर इन्हें दो भागों में विभाजित किया जा सकता है।

(क) प्राथमिक आँकडे (Primary Data) **(ख) द्वितीयक आँकड़े (Secondary data)**

(क) प्राथमिक आँकड़े – जिन आँकडों को स्वयं या कार्यकर्ताओं के सहयोग से नए सिरे से पहली बार संग्रहित करते हैं उन्हें हम प्राथमिक आँकड़े कहते हैं। उदाहरणार्थ यदि आपको अपनी कक्षा के विद्यार्थियों का पारिवारिक स्थिति का अध्ययन करना है तो कुछ आँकड़े यथा उनके घर की मासिक आय–व्यय, भाई–बहनों की संख्या, आय के स्त्रोत आदि के बारे में जानकारी एकत्र करनी होगी। ये आँकड़े प्राथमिक आँकड़े कहलाएँगे।

(ख) द्वितीयक आँकड़े – ये वे आँकड़े होते हैं जिनका पूर्व में किसी व्यक्ति या संस्था द्वारा संकलन किया जा चुका है। जो प्रकशित अथवा अप्रकशित स्थिति में हो सकते हैं जैसे जनगणना या साक्षरता संबंधी आँकड़ों को भारत सरकार की अधिकृत संस्था भारत के जनगणना विभाग से प्राप्त किए जा सकता है।

17.4 आँकड़ों का संगठन

जब हम आँकड़ों को एकत्रित करते हैं तो हमें उन्हें व्यवस्थित करना होता है। हमें इसकी आवश्यकता क्यों पड़ती है ?

निम्न उदाहरण पर विचार कीजिए –

विद्यालय में स्वास्थ्य परीक्षण के अंतर्गत 8 विद्यार्थियों की ऊँचाई निम्नांकित पाई गई –

विजय – 140 सेमी	किशोर – 138 सेमी	विद्या – 130 सेमी
तब्बसुम – 135 सेमी	रमेश – 145 सेमी	सारिका – 125 सेमी
दिव्यांशी – 131 सेमी	मोहित – 144 सेमी	

इस रुप में इन आँकड़ों से कोई निष्कर्ष निकाल पाना आसान नहीं था। सारिका ने उन ऊँचाईयों को आरोही क्रम में लिखकर उन्हें तालिका के रुप में लिखा।

विद्यार्थी का नाम	ऊँचाई (सेमी में)	विद्यार्थी का नाम	ऊँचाई (सेमी में)
सारिका	125	किशोर	138
विद्या	130	विजय	140
दिव्यांशी	131	मोहित	144
तबस्सुम	135	रमेश	145

निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए –

1. सबसे लम्बे विद्यार्थी का नाम क्या है ?
2. सबसे छोटे विद्यार्थी का नाम क्या है ?
3. किशोर और तब्बसुम की ऊँचाई में अंतर कितना है ?

इस प्रकार हम समझ सकते हैं कि आँकड़े यदि व्यवस्थित रुप में संगठित किए जाए तो उनका अध्ययन एवं निष्कर्ष निकालना आसान हो जाएगा। हमारे सामने आने वाले अनेक आँकड़े सारणीबद्ध रुप में होते हैं। हमारे स्कूल के रजिस्टर, प्रगति पत्र, तापमान के रिकॉर्ड, प्रतिदिन की उपस्थिति तथा अन्य आँकड़े सारणीबद्ध रुप में होते हैं।

क्या आप कुछ और आँकड़ों के बारे में सोच सकते हैं जो सारणीबद्ध रुप में हों ?

करो और सीखो

भार ज्ञात करने वाली मशीन द्वारा अपनी कक्षा के विद्यार्थियों का वजन ज्ञात करें। इन आँकड़ों को व्यवस्थित कर तालिका बनाइए। इन आँकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में लिखिए। फिर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1. कक्षा में किस विद्यार्थी का भार सबसे अधिक है ?
2. कक्षा में कितने विद्यार्थियों का भार 25 किग्रा से अधिक है ?
3. कक्षा में कितने विद्यार्थियों का भार 20 से 30 किग्रा है ?

17.5 केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

अपने दैनिक जीवन में आपने निम्न कथन अवश्य ही पढ़े या सुने होंगे।

1. कक्षा 7 के विद्यार्थियों की औसत आयु 13 वर्ष है।
2. मध्यान्ह् भोजन में प्रति विद्यार्थी ग्रहण किया भोजन 150 ग्राम है।
3. पिछले 10 दिनों का औसत तापमान 30 डिग्री (सेल्सियस) है।
4. लक्ष्य प्रतिदन 5 घण्टे पढ़ाई करता है।

उपर्युक्त कथनों पर विचार कीजिए।

क्या आप कह सकते हैं कि पहले कथन के अनुसार कक्षा 7 के प्रत्येक विद्यार्थी की आयु 13 वर्ष है या द्वितीय कथन के अनुसार प्रत्येक विद्यार्थी प्रतिदिन पूरा–पूरा 150 ग्राम भोजन ही ग्रहण करता है।

स्पष्टतः इन प्रश्नों का उत्तर है "नहीं"।

तो इन कथनों का क्या आशय है ?

"औसत' से हम समझते हैं कि कक्षा 7 के अधिकतम विद्यार्थियों की आयु 13 वर्ष के आसपास है। कुछ विद्यार्थियों की आयु 13 वर्ष से कुछ कम या कुछ अधिक हो सकती है।

इसी प्रकार पिछले दिनों का औसत तापमान 32 डिग्री से आशय है कि तापमान लगभग 32 डिग्री के आसपास रहा। कभी वह 32 डिग्री से कम भी हुआ हो सकता है कभी 32 डिग्री से अधिक भी रहा होगा।

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि "औसत" एक ऐसी संख्या है जो प्रेक्षणों या आँकड़ों के एक समूह को केन्द्रीय प्रवृति को निरुपित करती या दर्शाती है क्योंकि औसत सबसे अधिक और सबसे कम आँकड़ों के एक समूह की केन्द्रीय प्रवृति का मापक है। विभिन्न प्रकार के आँकड़ों की व्याख्या करने वाले विभिन्न प्रकार के प्रतिनिधि या केन्द्रीय मानों की आवश्यकता होती है।

इनमें से एक प्रतिनिधि मान अंकगणितीय या समान्तर माध्य है।

17.6 समान्तर माध्य

आँकड़ों के एक समूह के लिए अधिकांशतः प्रयोग किया जाने वाला प्रतिनिधि मान समान्तर माध्य है, संक्षेप में इसे माध्य (mean) भी कहते हैं। निम्न उदाहरण को देखें –

उदाहरण 2 एक फल बेचने वाले को एक सप्ताह की शुद्ध कमाई क्रमशः 500 रु, 650 रु, 400 रु, 425 रु, 450 रु, 600 रु, तथा 475 रु है। फल बेचने वाले की औसत कमाई ज्ञात कीजिए ?

हल

$$\text{फल बेचने वाले की औसत कमाई} = \frac{\text{सप्ताह की कुल कमाई}}{\text{सप्ताह में दिनों की संख्या}}$$

$$= \frac{500 + 650 + 400 + 425 + 450 + 600 + 475}{7}$$

$$= \frac{3500}{7} = 500 \text{ रु}$$

फल बेचने वाले की औसत कमाई होगी = 500 रु प्रतिदिन

उदाहरण 3 प्रथम 6 सम संख्याओं का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए ।

हल हम जानते हैं कि प्रथम छः सम संख्याएँ है 2, 4, 6, 8, 10, 12

समान्तर माध्य ज्ञात करने के लिए हम सभी प्रेक्षणों का योग ज्ञात करके उसमें प्रेक्षणों की कुल संख्या से भाग देते हैं। अतः इस स्थिति में

$$\text{समान्तर माध्य} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$$

$$= \frac{2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12}{6}$$

$$= \frac{42}{6} = 7$$

इस प्रकार प्रथम छः सम संख्याओं का समान्तर माध्य 7 होगा।

17.7 प्रसार या परिसर

निम्न उदाहरण पर विचार कीजिए –

उदाहरण 4 एक विद्यालय में कार्यरत पाँच शिक्षकों का वेतन क्रमशः 25000, 18000, 20000, 22000, तथा 23000 रुपये मासिक है।

1. सबसे अधिक वेतन पाने वाले शिक्षक का वेतन कितना है ?
2. सबसे अधिक और सबसे कम वेतन पाने वाले शिक्षकों के वेतन का अंतर कितना है ?
3. इन शिक्षकों के वेतन का माध्य ज्ञात कीजिए ?

हल शिक्षकों के वेतन को आरोही क्रम में लिखने पर हमें प्राप्त होता है –

18000, 20000, 22000, 23000, 25000

इससे हम पता लगा सकते हैं कि

1. सबसे अधिक वेतन पाने वाले शिक्षक का वेतन 25000 रुपये है।
2. सबसे अधिक वेतन 25000 है तथा सबसे कम वेतन 18000 है। दोनों के मध्य अंतर 25000 – 18000 = 7000 रु है।
3. शिक्षकों के वेतन का माध्य $= \frac{18000 + 20000 + 22000 + 23000 + 25000}{5}$

$$= \frac{108000}{5} = 21600 \text{ रुपये}$$

उपर्युक्त उदाहरण से स्पष्ट होता है कि सबसे बड़े और सबसे छोटे प्रेक्षणों के अंतर में हमें प्रेक्षणों के प्रसार का एक अनुमान लग जाता है। हम इस परिणाम को आँकड़ों या प्रेक्षणों का **प्रसार या परिसर** कहते हैं।

करो और सीखो

1. अपने परिवार के सदस्यों की ऊँचाइयों का माध्य ज्ञात कीजिए।
2. अपने परिवार के सदस्यों की आयु का माध्य ज्ञात कीजिए।

प्रश्नावली 17.2

1. एक विद्यालय की कक्षा 6 से 12 में विद्यार्थियों की संख्या क्रमशः निम्नलिखित है 78, 72, 67, 59, 54, 49, 48 तो बताइए –
   (i) सबसे अधिक विद्यार्थी किस कक्षा में है ?
   (ii) सबसे कम विद्यार्थी किस कक्षा में है ?
   (iii) इन आँकड़ों का परिसर क्या है ?
   (iv) इन आँकड़ों का माध्य ज्ञात कीजिए
2. प्रथम 10 पूर्ण संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए ।
3. एक क्रिकेट खिलाड़ी ने 6 पारियों में निम्नलिखित रन बनाए–
   68, 03, 17, 78, 12, 104 रनों का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।
4. बीकानेर से उदयपुर चलने वाली बस में सोमवार से शुक्रवार तक निम्नांकित संख्या में यात्रियों ने सफर किया– 45, 48, 32, 40, 30 प्रत्येक दिवस में यात्रियों का माध्य क्या होगा ?
5. एक गाँव में पाँच वर्षों तक निम्न फसलें उगाई गई फसल पर प्रति एकड़ लाभ (रुपये में) निम्नानुसार रहा।

फसल	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**
बाजरा	6000	8000	5000	6500	8500
ग्वार	7000	8000	12000	9000	8500
मूंगफली	9000	7000	10000	8000	13000

   ऊपर दी गई तालिका के आधार पर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।
   (i) प्रत्येक फसल का पाँच वर्ष में माध्य लाभ ज्ञात कीजिए।
   (ii) उपर्युक्त उत्तर के आधार पर अगले वर्ष कौन सी फसल उगानी चाहिए ?
6. यदि 3, 4, 8, 5, x, 3 अंको का समान्तर माध्य 4 हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।
7. एक पुस्तकालय से 10 दिन में छात्रों को दी गई पुस्तकों की संख्या निम्नलिखित है –
   40, 57, 32, 59, 72, 66, 40, 62, 72, 60
   प्रतिदिन दी गई पुस्तकों का माध्य ज्ञात कीजिए।
8. पाँच संख्याओं का औसत 18 है यदि चार संख्याएँ क्रमशः 22, 20, 14, 13 हो तो पाँचवी संख्या ज्ञात कीजिए।

9. एक शहर में किसी सप्ताह विशेष का तापमान निम्नानुसार अंकित किया गया ।

दिन	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	गुरूवार	शुक्रवार	शनिवार	रविवार
तापमान (डिग्री C^0 में)	37	37.5	40	36.5	37.5	35	35.5

(i) उपर्युक्त आँकड़ों से तापमान का परिसर ज्ञात कीजिए।

(ii) इस सप्ताह का माध्य तापमान ज्ञात कीजिए।

(iii) कितने दिन तापमान औसत से अधिक रहा ?

10. एक विद्यालय में आयोजित गायन प्रतियोगिता में तीन निर्णायकों द्वारा चार गायक प्रतिभागियों को निम्नानुसार 100 में से अंक दिए गए –

प्रतिभागी का नाम	निर्णायक I	निर्णायक II	निर्णायक III
राशि	78	75	72
सुमन	82	75	83
पूनम	68	64	69
खुशबु	49	56	51

1. निर्णायकों द्वारा दिए गए अंकों का परिसर क्या होगा ?
2. कुल अंकों का माध्य ज्ञात कीजिए ?
3. विजेता प्रतिभागी का नाम बताइए।
4. विजेता प्रतिभागी और चतुर्थ स्थान प्राप्त प्रतिभागी के माध्यों के मध्य कितना अंतर है ?

17.7 बहुलक

प्रतिनिधित्व मान का दूसरा प्रकार बहुलक है, आइए उदाहरण देखें।

उदाहरण 5 एक जूतों की दुकान पर विभिन्न नाप के जूते उपलब्ध हैं। दुकानदार ने जूतों की साप्ताहिक मांग को ज्ञात करने के लिए निम्न तालिकानुसार जूतों की बिक्री को रिकॉर्ड किया।

जूते का नम्बर	5	6	7	8	9	10
बिक्री	12	27	40	45	26	18

अगर दुकानदार के बेचे गए जूतों का माध्य ज्ञात करें तो –

हल

$$\text{माध्य} = \frac{\text{बेचे गए जूतों की कुल संख्या}}{\text{जूतों के नम्बर के कुल प्रकार}} = \frac{168}{6} = 28$$

तो क्या दुकानदार को प्रत्येक साईज के 28 जोड़ी जूते प्रति सप्ताह मंगवाने होंगे। निश्चित ही उपर्युक्त रिकॉर्ड के आधार पर दुकानदार अन्य नाप के मुकाबले 7, 8 नम्बर के जूते अधिक मंगवाएगा क्योंकि 7, 8 नम्बर नाप के जूतों की बिक्री अधिकतम हुई है।

इसमें से भी 8 नम्बर साइज के जूतों की ब्रिकी सबसे अधिक हुई है। यह आँकड़ों का एक अन्य प्रतिनिधि मान है। यह प्रतिनिधि मान आँकड़ों का बहुलक कहलाता है।

दिए गए आँकड़ों मे सबसे अधिक बार आने वाले पद को बहुलक कहते हैं अर्थात् जिस पद की बारम्बारता सबसे अधिक होती है वह पद बहुलक कहलाता है।

उदाहरण 6 निम्नांकित संख्याओं का बहुलक ज्ञात कीजिए।

5, 4, 4, 2, 5, 7, 5, 6, 5, 4, 3, 5

हल संख्याओं को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर

2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 7

प्रेक्षणों के निरीक्षण से स्पष्ट है अंक 5 सबसे अधिक बार आया है।

अतः बहुलक 5 होगा।

17.7.1 बड़े व अवर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक

यदि आँकड़ों की संख्या अधिक हो तो उसको आरोही या अवरोही क्रम में लिखकर फिर गिनना इतना आसान नहीं होता है। ऐसी स्थिति में हम आँकड़ों को मिलान चिह्न की सहायता से सारणीबद्ध करते हैं। आँकड़ों को सारणीबद्ध करना हम पिछली कक्षा में सीख चुके हैं।

उदाहरण 7 100 मीटर की दौड़ प्रतियोगिता में 30 धावकों ने भाग लिया। दौड़ पूरी करने में उनके द्वारा लिया गया समय (सैकण्ड में) निम्नानुसार है –

14, 12, 13, 12, 10, 12, 14, 13, 12, 11, 12, 13, 14, 12, 14, 12, 13, 14, 14, 11, 10, 11, 12, 14, 13, 12, 12, 11, 12, 14 इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल आँकड़ों को सारणीबद्ध करने पर

समय सैकण्ड में	मिलान चिह्न	धावकों की संख्या
10	||	2
11	||||	4
12	卌 卌 |	11
13	卌 |	6
14	卌 ||	7
	योग	**30**

इस सारणी को देखकर हम तुरंत कह सकते हैं कि इन आँकड़ों का बहुलक 12 है क्योंकि सबसे अधिक धावकों ने दौड़ 12 सैकण्ड में पूरी की।

सोचे एवं चर्चा करें

- क्या संख्याओं के एक समूह में दो बहुलक हो सकते हैं ?
- क्या बहुलक प्रेक्षण मात्र से ज्ञात किया जा सकता है ?

करो और सीखो

1. कक्षा 7 के 40 विद्यार्थियों ने अपने अपने परिवार के सदस्यों की संख्या को एक साथ लिखा। यह संख्या नीचे दर्शाई गई है।
   4, 3, 5, 4, 7, 3, 5, 6, 4, 4, 4, 7, 6, 4, 5, 4, 3, 4, 5, 6, 7, 4, 4, 5, 3, 4, 6, 4, 5, 5, 4, 3, 4, 7, 6, 4, 3, 5, 4, 5 इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।
2. निम्नलिखित संख्याओं का बहुलक ज्ञात कीजिए।
   21, 22, 25, 24, 22, 23, 23, 24, 25, 24, 22, 24, 23, 24, 23, 24, 22, 21, 25, 23

हमने देखा कि जहाँ माध्य हमें आँकड़ों के सभी प्रेक्षणों का औसत प्रदान करता है वहीं बहुलक आँकड़ों में सबसे अधिक बार आने वाले प्रेक्षणों को दर्शाता है।

निम्नांकित उदाहरणों पर विचार करें।

1. आपको अपने घर में प्रतिदिन बिजली की खपत के बारे में पता करना है।
2. रेडीमेड वस्त्र विक्रेता को अपने स्टॉल की आपूर्ति करनी है।
3. हमें अपने घर के लिए दरवाजे की ऊँचाई ज्ञात करनी है।
4. कक्षा के विद्यार्थियों के लिए पसंद की मिठाई के रुप में एक मिठाई का चयन करना है। तब किस मिठाई का चयन किया जाएगा।

पहले कथन पर विचार करें तो प्रतिदिन बिजली की खपत ज्ञात करने के लिए बिजली के मीटर से एक सप्ताह की खपत युनिट ज्ञात कर उसके माध्य से प्रतिदिन की खपत ज्ञात कर सकते हैं।

क्या दूसरे कथन के लिए भी हम इस विधि का उपयोग कर सकते हैं ?

हम जूतों के उदाहरण से देख सकते हैं कि वस्त्रों की आपूर्ति के लिए माध्य एक उपर्युक्त प्रतिनिधि मान नहीं होगा। बहुलक इसके लिए उपर्युक्त मान होगा।

इसी प्रकार तीसरे कथन के लिए माध्य और बहुलक दोनों से प्रतिनिधि मान नहीं होंगे। यहाँ परिवार के सबसे लम्बे सदस्यों के हिसाब से दरवाजे की ऊँचाई तय करनी होगी। इसी प्रकार शेष चौथे कथन पर विचार कर विश्लेषण करें तथा इसके लिए उपयुक्त प्रतिनिधि मान ज्ञात करें।

17.8 माध्यिका

हम देख चुके हैं कि कुछ स्थितियों में समांतर माध्य एक उपयुक्त केन्द्रीय प्रवृति का मापक है। तथा कुछ स्थितियों में बहुलक उपयुक्त केन्द्रीय प्रवृति का मापक है।

एक अन्य उदाहरण पर विचार करते हैं–

एक फैक्ट्री में नौ कर्मचारियों का वेतन निम्नानुसार है।

3300, 4200, 5000, 3500, 4300, 3500, 4400, 3500, 5500

यदि हम वेतन के आधार पर कर्मचारियों को दो समूहों में बाँटता चाहते है तो इस स्थिति में समांतर माध्य या बहुलक क्या उचित प्रतिनिधि मान होगा ? इन आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर–

3300, 3500, 3500, 3500, 4200, 4300, 4400, 5000, 5500

हम देखते हैं कि उपर्युक्त आँकड़ों में 4200 ऐसी संख्या है जिसके दोनों ओर 4 - 4 संख्याओं के समूह हैं। अर्थात् चार कर्मचारियों का वेतन 4200 से कम है तथा चार कर्मचारियों का वेतन 4200 से अधिक है। इस प्रकार संख्याओं को आरोही क्रम या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर ठीक मध्य में आने वाली संख्या को हम ''माध्यिका'' या माध्यक कहते हैं।

> यदि आँकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाए जो मध्य में आने वाले पद का मान माध्यिका कहलाता है।

उदाहरण 8 निम्नांकित आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात कीजिए –

0, 47, 35, 20, 30, 40, 50

हल आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर हमें प्राप्त होता है

0, 20, 30, 35, 40, 47, 50

उपर्युक्त आँकड़ों में कुल 7 पद है जिनका मध्य पद ज्ञात करने के लिए उसमें 1 जोड़कर 2 का भाग दिया जाता है। (जब पदों की संख्या विषम हो)

अर्थात् उपर्युक्त आँकड़ों का माध्यिका पद चौथा है, जो 35 है। अतः उपर्युक्त आँकड़ों की माध्यिका 35 है।

इसी प्रकार यदि पदों की संख्या सम हो तो आरोही क्रम में जमाने के पश्चात् मध्य के दो पदों का माध्य ही माध्यिका होती है।

$$\text{माध्यिका पद} = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} \text{ चौथा पद}$$

करो और सीखो

1. आरोही क्रम में व्यवस्थित प्रेक्षण निम्नानुसार है –

   8, 11, 12, 16, 16 + x, 20, 25, 30

   यदि माध्यिका 18 हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

2. ज्योति के विभिन्न विषयों में अंक (10 में से) निम्नानुसार आए –

   5, 7, 0, 3, 5, 8

   ज्योति ने 0 को छोड़ कर शेष अंकों से माध्य, माध्यिका तथा बहुलक निकाला। क्या उसने सही किया ?

प्रश्नावली 17.3

1. निम्न आँकड़ों से बहुलक ज्ञात कीजिए।

   7, 6, 4, 5, 6, 4, 6, 3, 2, 7, 8, 6, 4, 6, 5

2. वंदना ने एक पासा लिया। उसने पासे को 20 बार उछाला और प्रत्येक बार प्राप्त संख्या को निम्न प्रकार लिखा –

   3, 4, 6, 3, 5, 2, 2, 3, 5, 4

   5, 6, 6, 1, 5, 6, 3, 5, 2, 4

   उपर्युक्त आँकड़ों की सहायता से माध्यिका एवं बहुलक ज्ञात कीजिए।

3. एक फैक्ट्री में काम करने वाले 40 मजूदारों के वजन (किग्रा में) निम्नांकित है –

   60, 65, 70, 65, 60, 70, 65, 70, 75, 80, 75, 60, 65, 70, 65, 65

   70, 65, 60, 70, 65, 75, 80, 75, 80, 65, 60, 65, 70, 80

   उपर्युक्त आँकड़ों की सहायता से माध्यिका एवं बहुलक ज्ञात कीजिए।

4. निम्न चरों की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

   37, 31, 42, 43, 46, 25, 39, 45, 32

5. एक कक्षा की 21 व्यक्तियों की ऊँचाई निम्न प्रकार से है –

   147, 149, 150, 152, 148, 151, 148, 150, 151, 149

   152, 151, 152, 151, 150, 148, 149, 152, 153, 151, 152

   (i) उपर्युक्त आँकड़ों की माध्यिका एवं बहुलक ज्ञात कीजिए।

   (ii) क्या उपर्युक्त आँकड़ों के एक से अधिक बहुलक है।

6. एक क्रिकेट मैच में खिलाड़ियों द्वारा बनाए गए रन इस प्रकार है –

   105, 47, 0, 36, 50, 16, 7, 70, 65, 36, 52

   उपर्युक्त आँकड़ों से माध्य, माध्यिका एवं बहुलक ज्ञात कीजिए। क्या ये तीनों समान है ?

हमने सीखा

1. एकत्रित किए गए आँकड़ों को बारम्बारता बंटन सारणी की सहायता से दण्ड आलेखों के रुप मे दर्शाया जा सकता है। दंड आलेख संख्याओं का समान चौड़ाई वाले दंडों द्वारा एक चित्र निरुपण है।
2. एक दोहरा दंड आलेख एक ही निरीक्षण में प्रेक्षणों के दो समूहों की तुलना करने में सहायक होता है।
3. आँकड़ों के संग्रहण, सारणीयन एवं प्रस्तुतीकरण से हमें अपने अनुभवों को संग्रहित करने तथा निष्कर्ष निकालने में सहायता मिलती है।
4. आँकड़ों को एकत्रित करने से पूर्व यह जानना आवश्यक है कि उनका उपयोग किन कार्यों में किया जाता है।
5. एकत्रित आँकड़ों को सारणीबद्ध किया जाना आवश्यक है ताकि इनको सरलता से समझा जा सके और व्याख्या की जा सके।
6. समांतर माध्य, बहुलक तथा माध्यिका आँकड़ों के प्रतिनिधि मान है।
7. आँकड़ों के समूह को जोड़कर आँकड़ों की संख्या से भाग देने पर माध्य प्राप्त होता है। जो आँकड़ों के न्यूनतम एवं अधिकतम मान के मध्य होता है।
8. आँकड़ों के समूह में सबसे अधिक बार आने वाले पद को बहुलक कहते हैं। यह एक या एक से अधिक हो सकता है।
9. यदि आँकड़ों को आरोही क्रम या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाए तो मध्य में आने वाले पद का मान माध्यिका कहलाता है।