01

संयुक्त फलन
(Composite Functions)

1.01 प्रस्तावना एवं पूर्वाभ्यास (Introduction and previous learning)

पूर्व कक्षा में हमने सम्बन्ध एवं विशेष प्रकार के सम्बन्ध (फलन) का अध्ययन किया है। गणित के अध्ययन में फलन एक आधारभूत संकल्पना है अत : इसका और अधिक विस्तार से अध्ययन किया जाना आवश्यक प्रतीत होता है। विस्तरित अध्ययन से पूर्व कुछ आवश्यक मुख्य संकल्पनाओं को यहाँ दिया जाना अध्ययन में सहायक सिद्ध होगा।

फलन : किसी समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित फलन या प्रतिचित्रण एक ऐसा नियम या संगतता है जिसके अन्तर्गत A का प्रत्येक अवयव B के एक अद्वितीय अवयव से सम्बद्ध होता है।

फलन के प्रांत, सहप्रांत तथा परिसर : यदि f समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित कोई फलन है तो समुच्चय A को फलन f का प्रांत तथा समुच्चय B को फलन f का सहप्रांत कहते हैं। समुच्चय B के उन सभी अवयवों का समुच्चय जो A के अवयवों के प्रतिबिम्ब है, f का परिसर कहलाता है। इसे f(A) द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

अचर फलन : एक ऐसा फलन जिसके अन्तर्गत उसके प्रांत का प्रत्येक अवयव सहप्रांत के एक ही अवयव से सम्बद्ध हो, अचर फलन कहलाता है।

तत्समक फलन : किसी समुच्चय A से A में परिभाषित ऐसा फलन जिसके अन्तर्गत A का प्रत्येक अवयव स्वयं और केवल स्वयं से सम्बद्ध हो, A का तत्समक फलन कहलाता है इसे I_A से निरूपित किया जाता है।

तुल्य फलन : दो फलन f तथा g तुल्य कहलाते है यदि

(i) f का प्रांत $=g$ का प्रांत (ii) f का सहप्रांत $=g$ का सहप्रांत (iii) $f(x)=g(x),\ \forall\ x$

अवयवों की सम्बद्धता के आधार पर फलनों के प्रकार निम्न है :

(i) **एकैकी फलन** : यदि $f : A \to B$ एक फलन हो, तो f एकैकी फलन कहलाता है यदि f के अन्तर्गत A के भिन्न–भिन्न अवयवों के B में भिन्न–भिन्न प्रतिबिम्ब हो।

(ii) **बहु–ऐकी फलन** : यदि $f : A \to B$ एक फलन हो, तो f बहुऐकी फलन कहलाता है यदि f के अन्तर्गत A के दो या अधिक अवयवों का B में एक प्रतिबिम्ब है।

(iii) **आच्छादक फलन** : यदि $f : A \to B$ एक फलन हो, तो f आच्छादक फलन कहलाता है यदि B का प्रत्येक अवयव A के किसी न किसी अवयव का प्रतिबिम्ब हो अर्थात् B के प्रत्येक अवयव का A में कम से कम एक पूर्व प्रतिबिम्ब विद्यमान हो।

(iv) **अन्तर्क्षेपी फलन** : यदि $f : A \to B$ एक फलन हो, तो f अन्तर्क्षेपी फलन कहलाता है यदि B में कम से कम एक ऐसा अवयव विद्यमान हो जो A के किसी भी अवयव का प्रतिबिम्ब नहीं हो अर्थात् जिसका कोई पूर्व प्रतिबिम्ब A में विद्यमान नहीं हो। अत : f अन्तर्क्षेपी है यदि $f(A) \neq B$

(v) **एकैकी–आच्छादक फलन** : यदि $f : A \to B$ एक फलन हो तो f एकैकी–आच्छादक कहलाता है यदि f एकैकी के साथ–साथ आच्छादक भी हो।

1.02 माना A, B, C तीन अरिक्त समुच्चय हैं तथा $f : A \to B$ तथा $g : B \to C$ दो फलन हैं।

चूंकि f, A से B में फलन है, $\therefore$ A के प्रत्येक अवयव x के लिए B में एक अद्वितीय अवयव $f(x)$ विद्यमान होगा।

पुन : चूंकि g, B से C में एक फलन है। $\therefore$ B के इस अवयव $f(x)$ के लिए C में एक अद्वितीय अवयव $g\left[f(x)\right]$ विद्यमान होगा।

02

प्रतिलोम वृत्तीय फलन (Inverse Circular Functions)

2.01 प्रस्तावना (Introduction)

यदि $\sin\theta = x$ हो तो हम x को θ का ज्या (sine) कहते हैं और θ संख्या x का ज्या प्रतिलोम (Sine inverse) कहलाता है।

इस कथन को गणितीय संकेतन में निम्न प्रकार से लिखा जाता है : $\theta = \sin^{-1} x$ या $\theta = \arcsin x$

$\sin^{-1} x$ को हम 'ज्या व्युत्क्रम (Sine inverse x)' पढ़ते हैं।

2.02 प्रतिलोम वृत्तीय फलन (Inverse circular functions):

हम जानते हैं कि $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ इत्यादि त्रिकोणमितीय वृत्तीय फलन (Trigonometrical circular function) कहलाते हैं, जिनमें से प्रत्येक, θ के प्रत्येक मान के लिए एक निश्चित संख्या के बराबर होता है।

यदि $\sin\theta = x$ तो $\theta = \sin^{-1} x$ होगा।

कोण θ को x के रूप में व्यक्त करने वाला व्यंजक $\sin^{-1} x$ प्रतिलोम वृत्तीय फलन (Inverse circular function) कहलाता है। इसी प्रकार कोण θ को, एक संख्या x के रूप में व्यक्त करने वाले अन्य प्रतिलोम वृत्तीय फलन हैः

$\cos^{-1} x, \tan^{-1} x, \cos^{-1} x$ तथा $\cot^{-1} x$

टिप्पणी:

1. $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x$ फलनों में -1 घात नहीं है, इसे केवल प्रतिलोम फलन के संकेत के रूप में प्रयोग किया गया है क्योंकि

$(\sin x)^{-1} = \dfrac{1}{\sin x}$ अतः $\sin^{-1} x \neq (\sin x)^{-1}$

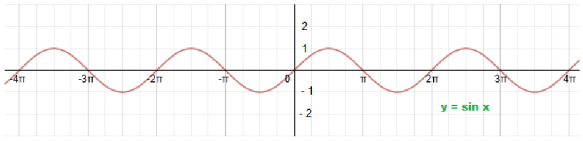
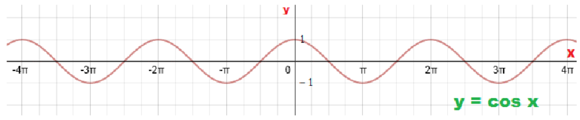
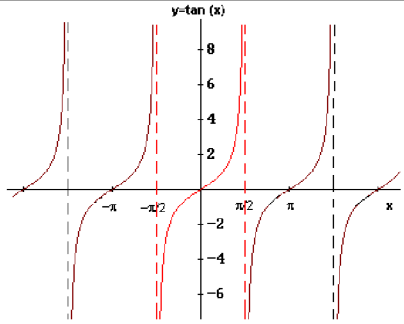
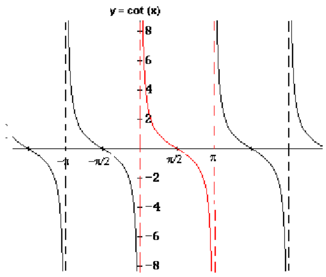
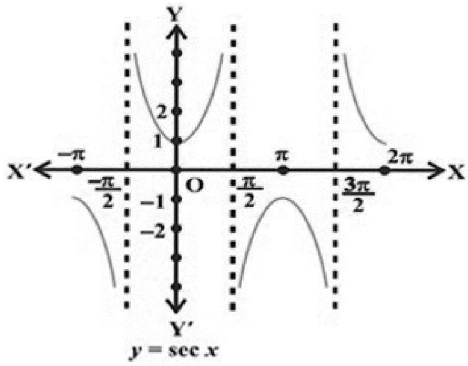
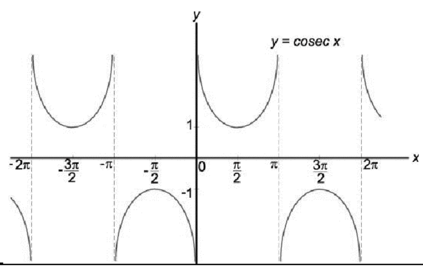
2. $\sin^{-1} x$ एक कोण को व्यक्त करता है। जबकि $\sin\theta$ एक संख्या को, जहाँ θ एक कोण है।

प्रतिलोम वृत्तीय फलनः हम जानते है कि किसी फलन f का प्रतिलोम फलन f^{-1} ज्ञात करने के लिए फलन f ज्ञात करने के लिए फलन f का एकैकी–आच्छादक होना आवश्यक है।

वृत्तीय फलनों के अध्ययन से स्पष्ट है कि ये फलन अपने स्वाभाविक (सामान्य) प्रांत और परिसर में एकैकी तथा आच्छादक नहीं होते हैं। अतः इनके प्रतिलोम सामान्य स्थितियों में ज्ञात करना संभव नहीं होता है, परन्तु इन फलनों के प्रांत को परिसीमित (प्रतिबंधित) करने पर ये फलन एकैकी आच्छादक हो जाते है तथा इन स्थितियों में इनके प्रतिलोम फलन ज्ञात किये जा सकते है।

प्रतिलोम वृत्तीय फलनों को समझने से पूर्व इन फलनों के प्रांत-परिसर को निम्न सारणी के माध्यम से समझा जाना चाहिए।

सारणी 2.1

फलन $y =$	प्रांत	परिसर	वक्र
$\sin x$	$x \in R$ या $\ldots\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right], \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$ $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]\ldots$	$y \in [-1, 1]$	
$\cos x$	$x \in R$ या $\ldots[-\pi, 0], [0, \pi], [\pi, 2\pi]\ldots$	$y \in [-1, 1]$	
$\tan x$	$x \in R - (2n+1)\frac{\pi}{2}, \ \forall \ n \in Z$ या $\ldots\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$ $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)\ldots$ टिप्पणी: $-3\pi/2, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2$ इत्यादि पर फलन परिभाषित नहीं है।	$y \in R$	
$\cot x$	$x \in R - n\pi \ \ \forall \ n \in Z$ या $\ldots(-\pi, 0), (0, \pi), (\pi, 2\pi)\ldots$ टिप्पणी: $-\pi, 0, \pi, 2\pi$ इत्यादि पर फलन परिभाषित नहीं है।	$y \in R$	
$\sec x$	$x \in R - (2n+1)\frac{\pi}{2} \ \ \forall \ n \in Z$ या $\ldots[-\pi, 0] - \{-\pi/2\},$ $[0, \pi] - \{\pi/2\},$ $[\pi, 2\pi] - \{3\pi/2\}$ टिप्पणी: $\ldots -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\ldots$ पर फलन परिभाषित नहीं है।	$y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ अर्थात् -1 व 1 के मध्य परिसर उपस्थित नहीं है	
$\text{cosec} x$	$x \in R - n\pi \ \ \forall \ n \in Z$ $\ldots[-3\pi/2, -\pi/2] - \{-\pi\},$ $[-\pi/2, \pi/2] - \{0\},$ $[\pi/2, 3\pi/2] - \{\pi\},\ldots$ टिप्पणी: $\ldots -\pi, 0, \pi, \ldots$ पर फलन परिभाषित नहीं है।	$y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ अर्थात् -1 व 1 के मध्य परिसर उपस्थित नहीं है।	

उपर्युक्त सारणी का विश्लेषण करने पर हम देखते है कि

(i) वृत्तीय फलन अपने सम्पूर्ण प्रांत में एकैकी आच्छादक नहीं है।

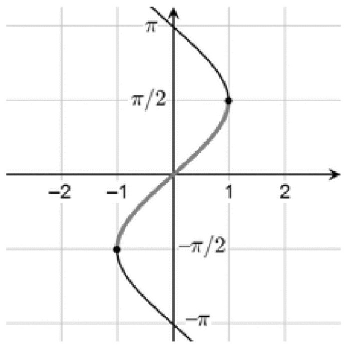
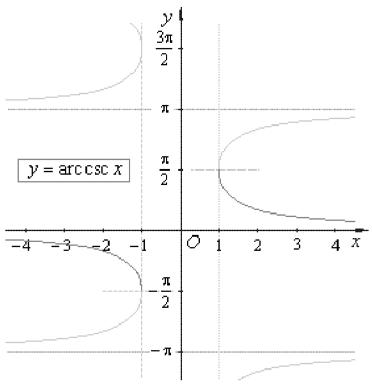
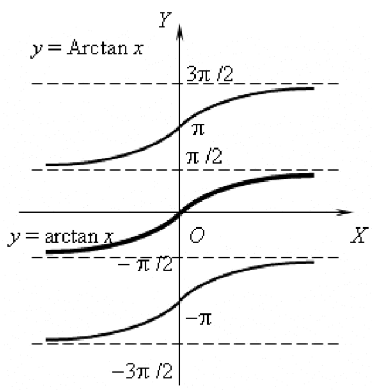
(ii) $\tan, \cot, \sec, \text{cosec}$ फलन अपने प्रांत के कुछ बिन्दुओं पर परिभाषित नहीं है।

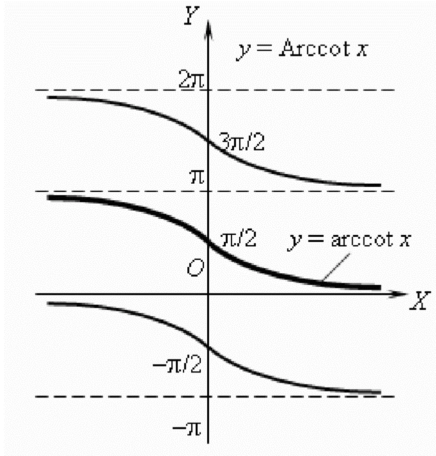
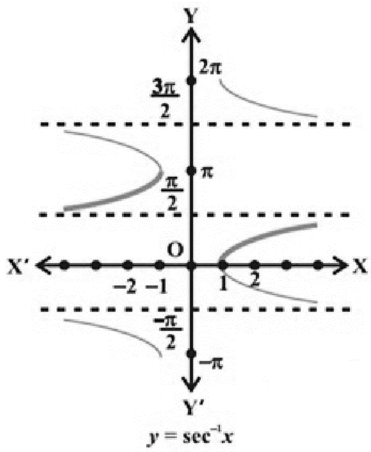
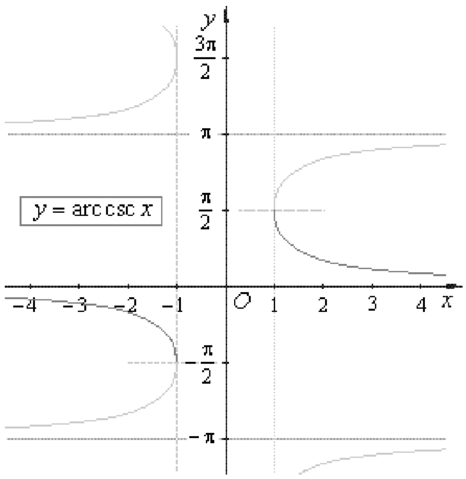
(iii) sine व cosine फलन के परिसर सीमित अंतराल $[-1,\ 1]$ में ही है वहीं sec व cosec फलन के परिसर अन्तराल $(-1, 1)$ के मध्य उपस्थित नहीं है।

अब यदि हमें इन फलनों के प्रतिलोम फलन ज्ञात करने है तो हमें इन फलनों के प्रांतों को परिसीमित कर इन्हें एकैकी आच्छादक बनाना होगा। इस हेतु उपर्युक्त सारणी में सम्पूर्ण प्रांत में या के बाद दिये खण्डों में से किसी एक खण्ड का चयन कर प्रांत को परिसीमित करने पर फलन स्वतः एकैकी आच्छादक हो जाते है तत्पश्चात् इनके प्रतिलोम फलन ज्ञात किये जा सकते है।

इन प्रतिबंधित स्थितियों के प्राप्त प्रतिलोम वृत्तीय फलनों के प्रांत एवं परिसर निम्न सारणी में दर्शाये गये है। साथ ही प्रत्येक परिसर खण्ड के लिए हमें प्रतिलोम फलन की एक शाखा प्राप्त होती है। इन शाखाओं में से ही एक मुख्य शाखा होती है जिसके परिसर तथा आकृति को गहरे काले रंग से दर्शाया गया है।

सारणी 2.2

फलन $y=$	**प्रांत**	**परिसर (इनमें से कोई खण्ड)**	**वक्र**
$\sin^{-1} x$	$x=[-1, 1]$	$\ldots\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right];$ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$ $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right],\ldots$	
$\cos^{-1} x$	$x\in[-1, 1]$	$\ldots[-\pi, 0];$ $[0, \pi];$ $[\pi, 2\pi],\ldots$	
$\tan^{-1} x$	$x\in R$	$\ldots\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right);$ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$ $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right),\ldots$ टिप्पणी: $\ldots -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2},\ldots$ इत्यादि पर फलन परिभाषित नहीं है।	

$\cot^{-1} x$	$x \in R$	$...(-\pi, 0)$; $(0, \pi)$; $(\pi, 2\pi), ...$ टिप्पणी: $... -\pi, 0, \pi, 2\pi...$ इत्यादि पर फलन परिभाषित नहीं है।	
$\sec^{-1} x$	$x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$...[-\pi, 0]-\{-\pi/2\}$; $[0, \pi]-\{\pi/2\}$, $[\pi, 2\pi]-\{3\pi/2\}, ...$ टिप्पणी: $... -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2, ...$ इत्यादि पर फलन परिभाषित नहीं है।	
$\operatorname{cosec}^{-1} x$	$x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$...[-3\pi/2, -\pi/2]-\{-\pi\}$; $[-\pi/2, \pi/2]-\{0\}$; $[\pi/2, 3\pi/2]-\{\pi\}, ...$ टिप्पणी: $... -\pi, 0, \pi, ...$ इत्यादि पर फलन परिभाषित नहीं है।	

टिप्पणी: $y = f(x)$ जैसे व्युत्क्रमणीय फलन का प्रतिलोम फलन $x = f^{-1}(y)$ प्राप्त होता है। अर्थात् मूल फलन के आलेख में X तथा Y-अक्षों का परस्पर विनिमय करके प्रतिलोम फलन का आलेख प्राप्त होता है। यही नियम प्रतिलोम वृत्तीय फलनों के आलेख प्राप्त करने में लागू होता है।

(i) जब कभी प्रतिलोम वृत्तीय फलनों की किसी शाखा विशेष का उल्लेख न हो, तो हमारा तात्पर्य उस फलन की मुख्य शाखा से होता है।

(ii) किसी प्रतिलोम वृत्तीय फलन का वह मान, जो उसकी मुख्य शाखा में स्थित होता है प्रतिलोम वृत्तीय फलन का मुख्य मान (Principal value) कहलाता है। इस हेतु सारणी 2.3 देखें।

व्यापक मान (General values):

हम जानते हैं कि $\sin\theta = \sin\left\{n\pi + (-1)^n \theta\right\}$, जहाँ $n \in Z$ पूर्णांक संख्याओं का समुच्चय है।

अब यदि $\sin^{-1} x = \theta$ हो, तो $\sin^{-1} x$ का व्यापक मान $n\pi + (-1)^n \sin^{-1} x$ होता है तथा इसे $\text{Sin}^{-1}x$ से निरूपित किया जाता है। अतः $\quad \text{Sin}^{-1}x = n\pi + (-1)^n \sin^{-1} x, \; n \in Z$

इसी प्रकार $\quad \text{Cos}^{-1}x = 2n\pi \pm \cos^{-1} x, \; n \in Z$

$\text{Tan}^{-1}x = n\pi + \tan^{-1} x$ इत्यादि

जहाँ $\text{Cos}^{-1}x, \text{Tan}^{-1}x$ से हमारा तात्पर्य $\cos^{-1} x, \tan^{-1} x$ के व्यापक मान से है। इसी प्रकार $\text{Sec}^{-1}x, \text{Cosec}^{-1}x, \text{Cot}^{-1}x$ से हमारा तात्पर्य $\sec^{-1} x, \operatorname{cosec}^{-1}x, \cot^{-1} x$ के व्यापक मान से होगा।

मुख्य मान (Principal value):

प्रतिलोम वृत्तीय फलन (Inverse circular function) का मुख्य मान θ का वह छोटे से छोटा धनात्मक या ऋणात्मक मान है जो समीकरण $\sin\theta = x, \cos\theta = x$ इत्यादि को सन्तुष्ट करता है। उदाहरणार्थ $\sin^{-1}\frac{1}{2} = 30^\circ, \sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ मुख्य मान को हम संकेतन में छोटे अक्षर $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x$ इत्यादि से व्यक्त करते हैं।

प्रतिलोम वृत्तीय फलनों के मुख्य मानों के अन्तराल निम्न है :

सारणी 2.3

फलन	मुख्य मान	प्रान्त
$y = \sin^{-1} x$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$	$-1 \le x \le 1$
$y = \cos^{-1} x$	$0 \le y \le \pi$	$-1 \le x \le 1$
$y = \tan^{-1} x$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$	$-\infty < x < \infty$
$y = \sec^{-1} x$	$0 < y \le \pi, y \ne \frac{\pi}{2}$	$(-\infty < x \le -1) \cup (1 \le x < \infty)$
$y = \operatorname{cosec}^{-1}x$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}, y \ne 0$	$(-\infty < x \le -1) \cup (1 \le x < \infty)$
$y = \cot^{-1} x$	$0 < y < \pi$	$-\infty < x < \infty$

टिप्पणी:(i) यदि $x > 0$ है तब सभी प्रतिलोम वृत्तीय फलनों के मुख्य मान प्रथम चतुर्थांश $[0, \pi/2]$ में स्थित है।

(ii) यदि $x < 0$ है तब $\sin^{-1} x, \tan^{-1} x$ तथा $\operatorname{cosec}^{-1}x$ के मुख्य मान चतुर्थ चतुर्थांश $[-\pi/2, 0]$ में स्थित है, जब कि $\cot^{-1} x, \sec^{-1} x$ के मुख्य मान द्वितीय चतुर्थांश $[\pi/2, \pi]$ में स्थित होते हैं।

2.03 प्रतिलोम वृत्तीय फलनों के मध्य सम्बन्ध (Relation between inverse circular functions)

मान लो $\theta = \sin^{-1} x$ तो $\sin\theta = x$ तब $\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$ $\quad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

$$\theta = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$$

इसी प्रकार

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \Rightarrow \theta = \cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \theta = \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{x} \Rightarrow \theta = \operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$$

$$\therefore \quad \sin^{-1} x = \cos^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \sec^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$$

टिप्पणी: इन सूत्रों की सत्यता निश्चित अन्तराल के लिए ही होगी।

2.04 प्रतिलोम वृत्तीय फलनों के गुणधर्म (Properties of inverse circular functions)

(i) $\sin\left(\sin^{-1} x\right) = x, \quad -1 \le x \le 1$ एवं $\sin^{-1}\left(\sin\theta\right) = x, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

प्रमाण: $\because \sin^{-1} x = \theta$ तब $\sin\theta = x$ [परिभाषा से]

θ का मान पुनः रखने पर $\sin\left(\sin^{-1} x\right) = x$

पुनः यदि $\quad \sin\theta = x, -1 \le x \le 1$

तब $\quad \theta = \sin^{-1} x, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ या $\quad \theta = \sin^{-1}\left(\sin\theta\right)$

इसी प्रकार दी गई सारणी के अनुसार x तथा θ के अन्तरालों के लिए

$$\cos\left(\cos^{-1} x\right) = x \qquad \cos^{-1}\left(\cos\theta\right) = \theta$$

$$\tan\left(\tan^{-1} x\right) = x \qquad \tan^{-1}\left(\tan\theta\right) = \theta$$

$$\cot\left(\cot^{-1} x\right) = x \qquad \cot^{-1}\left(\cot\theta\right) = \theta$$

$$\sec\left(\sec^{-1} x\right) = x \qquad \sec^{-1}\left(\sec\theta\right) = \theta$$

$$\operatorname{cosec}\left(\operatorname{cosec}^{-1} x\right) = x \qquad \operatorname{cosec}^{-1}\left(\operatorname{cosec}\theta\right) = \theta$$

टिप्पणी: $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) \neq \frac{2\pi}{3}$ क्योंकि $\sin^{-1}x$ का मुख्य मान $\frac{2\pi}{3}$ नहीं है।

$$\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \sin^{-1}\left[\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right] = \sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

(ii) $\sin^{-1}\frac{1}{x} = \operatorname{cosec}^{-1}x, \quad R \sim (-1, 1)$

प्रमाण: $\sin^{-1}\frac{1}{x} = \theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{x} \Rightarrow \operatorname{cosec}\theta = x \Rightarrow \theta = \operatorname{cosec}^{-1}x \Rightarrow \sin^{-1}\frac{1}{x} = \operatorname{cosec}^{-1}x$

इसी प्रकार $\operatorname{cosec}^{-1}x = \sin^{-1}\frac{1}{x}, x \leq -1, x \geq 1$

$$\cos^{-1}x = \sec^{-1}\frac{1}{x}, -1 \leq x, x \geq 1$$

$$\sec^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1}{x}, x \leq -1, x \geq 1$$

$\tan^{-1}x = \cot^{-1}\frac{1}{x}$ तथा $\cot^{-1}x = \tan^{-1}\frac{1}{x}, x > 0$

(iii) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$ व $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x, -1 \leq x \leq 1$

प्रमाण: $\sin^{-1}(-x) = \theta \Rightarrow -x = \sin\theta \Rightarrow x = -\sin\theta = \sin(-\theta)$

या $\sin^{-1}x = -\theta = -\sin^{-1}(-x)$

या $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$

इसी प्रकार, यदि $\cos^{-1}(-x) = \theta$ तो $x = -\cos\theta$

या $x = \cos(\pi - \theta)$

$\therefore$ $\cos^{-1}x = \pi - \theta$

या $\cos^{-1}x = \pi - \cos^{-1}(-x)$

या $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$

इसी प्रकार $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x, \quad \operatorname{cosec}^{-1}(-x) = -\operatorname{cosec}^{-1}x$

$$\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1}x, \cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1}x$$

2.05 अन्य महत्वपूर्ण मानक सूत्र (Other important standrad formula)

(i) सिद्ध करना है कि

(a) $\sin^{-1}x \pm \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\right\}$

(b) $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}\left\{2x\sqrt{1-x^2}\right\}$

(c) $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}\left\{3x - 4x^3\right\}$

प्रमाण: (a) माना $\sin^{-1} x = \theta_1$ अर्थात् $\sin\theta_1 = x$ तथा $\sin^{-1} y = \theta_2$

अर्थात् $\sin\theta_2 = y$ तब $\cos\theta_1 = \sqrt{1-\sin^2\theta_1} = \sqrt{1-x^2}$

इसी प्रकार $\cos\theta_2 = \sqrt{1-\sin^2\theta_2} = \sqrt{1-y^2}$

अब हम जानते हैं कि

$$\sin(\theta_1 \pm \theta_2) = \sin\theta_1 \cos\theta_2 \pm \cos\theta_1 \sin\theta_2$$

या $$\theta_1 \pm \theta_2 = \sin^{-1}(\sin\theta_1 \cos\theta_2 \pm \cos\theta_1 \sin\theta_2)$$

$\therefore$ $$\sin^{-1} x \pm \sin^{-1} y = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\right]$$

(b) माना $\sin^{-1} x = \theta$ अर्थात् $\sin\theta = x$

$\therefore$ $$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta} = 2x\sqrt{1-x^2}$$

$\Rightarrow$ $$2\theta = \sin^{-1}\left\{2x\sqrt{1-x^2}\right\}$$

$$2\sin^{-1} x = \sin^{-1}\left\{2x\sqrt{1-x^2}\right\}$$

(c) हम जानते हैं कि $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$\therefore$ $$3\theta = \sin^{-1}(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)$$

या $$3\sin^{-1} x = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$$

(ii) सिद्ध करना है कि

(a) $$\cos^{-1} x \pm \cos^{-1} y = \cos^{-1}\left\{xy \mp \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right\}$$

(b) $$2\cos^{-1} x = \cos^{-1}(2x^2 - 1)$$

(c) $$3\cos^{-1} x = \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$$

प्रमाण: (a) माना $\cos^{-1} x = \theta_1$ अर्थात् $\cos\theta_1 = x$

तथा $\cos^{-1} y = \theta_2$ अर्थात् $\cos\theta_2 = y$

तब $\sin\theta_1 = \sqrt{1-x^2}$ तथा $\sin\theta_2 = \sqrt{1-y^2}$

अब हम जानते हैं कि

$$\cos(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 \mp \sin\theta_1 \sin\theta_2$$

या $$\theta_1 \pm \theta_2 = \cos^{-1}(\cos\theta_1 \cos\theta_2 \mp \sin\theta_1 \sin\theta_2)$$

$\therefore$ $$\cos^{-1} x \pm \cos^{-1} y = \left[xy \mp \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right]$$

(b) माना $\cos^{-1} x = \theta$ अर्थात् $\cos\theta = x$ $\therefore$ $\cos 2\theta = \left(2\cos^2\theta\right) - 1 = 2x^2 - 1$

या $2\theta = \cos^{-1}\left(2x^2 - 1\right)$

या $2\cos^{-1} x = \cos^{-1}\left(2x^2 - 1\right)$

(c) हम जानते है कि $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ $\therefore 3\theta = \cos^{-1}\left(4\cos^3\theta - 3\cos\theta\right)$

या $3\cos^{-1} x = \cos^{-1}\left(4x^3 - 3x\right)$

(iii) सिद्ध करना है कि

(a) $$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

(b) $$\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$$

(c) $$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \tan^{-1}\left(\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}\right)$$

(d) $$2\tan^{-1} x = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

(e) $$3\tan^{-1} x = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$$

प्रमाण: (a) माना लो $\tan^{-1} x = \theta_1$ अर्थात् $\tan\theta_1 = x$ तथा $\tan^{-1} y = \theta_2$ अर्थात् $\tan\theta_2 = y$

अब हम जानते हैं कि

$$\tan\left(\theta_1 + \theta_2\right) = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1 \tan\theta_2} = \frac{x+y}{1-xy}$$

या $$\theta_1 + \theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

या $$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

(b) $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$ को भी हम (a) की भाँति सिद्ध कर सकते हैं।

(c) अब $$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

तो $$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + \tan^{-1} z$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\{(x+y)/(1-xy)\}+z}{1-z\{(x+y)/(1-xy)\}}\right]$$ [(*a*) से]

$$= \tan^{-1}\left(\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}\right)$$

(d) माना $\tan^{-1} = \theta$ अर्थात् $\tan\theta = x$

$\therefore$ $$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2x}{1-x^2}$$

या $$2\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

या $$2\tan^{-1} x = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

(e) हम जानते हैं कि $$\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

$\therefore$ $$3\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}\right)$$

या $$3\tan^{-1} x = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$$

(iv) सिद्ध करना है कि

(a) $$\cot^{-1} x + \cot^{-1} y = \cot^{-1}\left(\frac{xy-1}{x+y}\right)$$

(b) $$\cot^{-1} x - \cot^{-1} y = \cot^{-1}\left(\frac{xy+1}{y-x}\right).$$

प्रमाण: (a) माना $\cot^{-1} x = \theta_1$ तथा $\cot^{-1} y = \theta_2$

तब $\cot\theta_1 = x,$ $\cot\theta_2 = y$

हम जानते हैं कि $$\cot(\theta_1+\theta_2)=\frac{\cot\theta_1\cot\theta_2-1}{\cot\theta_1+\cot\theta_2}$$

या $$\theta_1+\theta_2=\cot^{-1}\left(\frac{\cot\theta_1\cot\theta_2-1}{\cot\theta_1+\cot\theta_2}\right)$$

या $$\cot^{-1}x+\cot^{-1}y=\cot^{-1}\left(\frac{xy-1}{x+y}\right).$$

(b) $\cot^{-1}x-\cot^{-1}y=\cot^{-1}\left(\frac{xy+1}{y-x}\right)$ को भी हम (a) की भांति सिद्ध कर सकते हैं।

(iv) सिद्ध करना है कि

(a) $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$ (b) $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}$ (c) $\sec^{-1}x+\operatorname{cosec}^{-1}x=\frac{\pi}{2}$.

प्रमाण : (a) माना $\sin^{-1}x=\theta$ तब $\sin^{-1}x=\theta\Rightarrow x=\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$$\Rightarrow \cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\theta$$

$$\Rightarrow \cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}x$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}.$$

(b) माना $\tan^{-1}x=\theta$ तब $\tan^{-1}x=\theta\Rightarrow x=\tan\theta=\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$$\Rightarrow \cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\theta$$

$$\Rightarrow \cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}x+\cot^{-1}=\frac{\pi}{2}.$$

(c) माना $\sec^{-1}x=\theta$ तब $\sec^{-1}x=\theta\Rightarrow x=\sec\theta=\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$$\Rightarrow \operatorname{cosec}^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\theta$$

$$\Rightarrow \operatorname{cosec}^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\sec^{-1}x$$

$$\Rightarrow \sec^{-1}x+\operatorname{cosec}^{-1}x=\frac{\pi}{2}.$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. निम्नलिखित के मुख्य मान ज्ञात कीजिए

(a) $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$ (c) $\sec^{-1}\left(\sqrt{2}\right)$.

हल: (a) माना कि $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=\theta$, तब $\sin\theta=-\frac{1}{2}$

चूँकि $\sin^{-1}x$ के मुख्य मान अन्तराल $-\frac{\pi}{2}\le\sin^{-1}x\le\frac{\pi}{2}$ में है।

$\therefore$ $$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

परन्तु यहाँ $\sin\theta$ ऋणात्मक है।

$\therefore$ $$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le 0$$

अब $$\sin\theta=-\frac{1}{2}=-\sin\frac{\pi}{6}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{6}$$

अतः $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मुख्य मान $-\frac{\pi}{6}$ है।

(b) माना कि $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)=\theta$, तब $\tan\theta=-\sqrt{3}$

चूँकि $\tan^{-1}x$ के मुख्य मान अन्तराल $-\frac{\pi}{2}<\tan^{-1}x<\frac{\pi}{2}$ में है।

$\therefore$ $$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$$

परन्तु यहाँ $\tan\theta$ ऋणात्मक है।

$\therefore$ $$-\frac{\pi}{2}<\theta<0$$

अब $$\tan\theta=-\sqrt{3}=-\tan\frac{\pi}{3}=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\quad\Rightarrow\quad\theta=-\frac{\pi}{3}$$

अतः $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ का मुख्य मान $-\pi/3$ है।

(c) माना कि $\sec^{-1}\left(\sqrt{2}\right)=\theta$, तब $\sec\theta=\sqrt{2}$

यहाँ चूँकि $x\ge 1$ अर्थात् $1\le x$ के लिए $\sec^{-1}x$ का मुख्य मान का अन्तराल $0\le\sec^{-1}x<\frac{\pi}{2}$ है।

$\therefore$ $$0<\theta\le\frac{\pi}{2}$$

अब $\sec\theta = \sqrt{2} = \sec \pi/4 \quad \Rightarrow \quad \theta = \pi/4$

अतः $\sec^{-1}(\sqrt{2})$ का मुख्य मान $\pi/4$ है।

उदाहरण-2. सिद्ध कीजिए कि $4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{70} + \tan^{-1}\frac{1}{99} = \frac{\pi}{4}$

हल: वाम पक्ष $= 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{70} + \tan^{-1}\frac{1}{99}$

$$= 2\left(2\tan^{-1}\frac{1}{5}\right) - \left(\tan^{-1}\frac{1}{70} - \tan^{-1}\frac{1}{99}\right)$$

$$= 2\tan^{-1}\frac{2/5}{1-1/25} - \tan^{-1}\frac{1/70-1/99}{1+1/70\times 1/99}$$

$$= 2\tan^{-1}\frac{5}{12} - \tan^{-1}\frac{29}{6931}$$

$$= \tan^{-1}\frac{2\times 5/12}{1-25/144} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

$$= \tan^{-1}\frac{120}{119} - \tan^{-1}\frac{1}{239} = \tan^{-1}\left[\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\times\frac{1}{239}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\frac{28561}{28561} = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} = \text{दक्षिण पक्ष (RHS)}$$

उदाहरण-3. सिद्ध कीजिए कि

$$2\tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right\} = \cos^{-1}\left(\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}\right)$$

हल: माना $\tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right\} = \theta$

$\therefore \quad \tan\theta = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}$

अब $\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$$= \frac{1-\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{x}{2}}{1+\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{b\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)+a\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)}{a\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)+b\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{b + a\dfrac{1-\tan^2 x/2}{1+\tan^2 x/2}}{a + b\dfrac{1-\tan^2 x/2}{1-\tan^2 x/2}}$$ [$1+\tan^2 x/2$ का अंश और हर में भाग देने पर]

$$= \frac{b + a\cos x}{a + b\cos x}$$

या $$2\theta = \cos^{-1}\left(\frac{b + a\cos x}{a + b\cos x}\right)$$

अतः $$2\tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right\} = \cos^{-1}\frac{b + a\cos x}{a + b\cos x}.$$

उदाहरण-4. सिद्ध कीजिए कि $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right) = \frac{2b}{a}$.

हल: माना कि $\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b} = \theta$, तब $\cos 2\theta = \frac{a}{b}$

वाम पक्ष $$= \tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\theta}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\theta} + \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\theta}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}$$

$$= \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} + \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

$$= \frac{(1+\tan\theta)^2 + (1-\tan\theta)^2}{(1-\tan\theta)(1+\tan\theta)}$$

$$= 2\left(\frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}\right) = \frac{2}{\left(\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)} = \frac{2}{\cos 2\theta} = \frac{2b}{a}$$ = दक्षिण पक्ष (RHS)

उदाहरण-5. यदि $\cos^{-1}\frac{x}{a} + \cos^{-1}\frac{y}{b} = \alpha$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\alpha + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\alpha.$$

हल: दिया हुआ है कि $$\cos^{-1}\frac{x}{a}+\cos^{-1}\frac{y}{b}=\alpha$$

$$\cos^{-1}\left\{\frac{x}{a}.\frac{y}{b}-\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\right\}=\alpha$$

या $$\frac{xy}{ab}-\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}=\cos\alpha$$

या $$\left(\frac{xy}{ab}-\cos\alpha\right)^2=\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

या $$\frac{x^2y^2}{a^2b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\alpha+\cos^2\alpha=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2y^2}{a^2b^2}$$

या $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\alpha+\frac{y^2}{b^2}=1-\cos^2\alpha$$

या $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\alpha+\frac{y^2}{b^2}=\sin\alpha.$$

उदाहरण-6. निम्न समीकरण को हल कीजिए

$$\cos^{-1}\frac{1-a^2}{1+a^2}+\cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2}=2\tan^{-1}x.$$

हल: माना $a=\tan\theta, b=\tan\phi$, तब $\theta=\tan^{-1}a, \phi=\tan^{-1}b$

$\therefore$ $$\frac{1-a^2}{1+a^2}=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\cos 2\theta$$

तथा $$\frac{1-b^2}{1+b^2}=\frac{1-\tan^2\phi}{1+\tan^2\phi}=\cos 2\phi$$

अतः दिये गये समीकरण से

$$\cos^{-1}(\cos 2\theta)+\cos^{-1}(\cos 2\phi)=2\tan^{-1}x$$

या $$2\theta+2\phi=2\tan^{-1}x$$

या $$\theta+\phi=\tan^{-1}x$$

या $$\tan^{-1}a+\tan^{-1}b=\tan^{-1}x$$

या $$\tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab}=\tan^{-1}x$$

$\therefore$ $$x=\frac{a+b}{1-ab}.$$

उदाहरण-7. सिद्ध कीजिए कि

$$\cos\left[\tan^{-1}\left\{\sin\left(\cot^{-1}x\right)\right\}\right]=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}.$$

हल: माना $\cot^{-1}x=\theta$, तब $\cot\theta=x$

यदि $\cot\theta=x$, तब $\sin\theta=\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta}=\dfrac{1}{\sqrt{\cot^2\theta+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\theta=\cot^{-1}x=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

वाम पक्ष $=\cos\left[\tan^{-1}\left\{\sin\left(\cot^{-1}x\right)\right\}\right]$

$$=\cos\left[\tan^{-1}\left\{\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right\}\right]$$

$$=\cos\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right]$$

हम जानते हैं कि $\tan\phi=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ तो $\cos\phi=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2+x^2}}$

$\therefore$ वाम पक्ष $=\cos\left(\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2+x^2}}\right)$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2+x^2}}=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}=\text{दक्षिण पक्ष (RHS)}$$

उदाहरण-8. निम्न समीकरण को हल किजिए

$$\tan^{-1}\frac{1}{a-1}=\tan^{-1}\frac{1}{x}+\tan^{-1}\frac{1}{a^2-x+1}.$$

हल: $\tan^{-1}\dfrac{1}{a-1}-\tan^{-1}\dfrac{1}{x}=\tan^{-1}\dfrac{1}{a^2-x+1}$

या $$\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{a-1}-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{(a-1)x}}\right)=\tan^{-1}\frac{1}{a^2-x+1}$$

या $$\frac{x-a+1}{ax-x+1}=\frac{1}{a^2-x+1}$$

या $$(x-a+1)(a^2-x+1)=ax-x+1$$

या $$xa^2 - a^3 - x^2 + a^2 + x - a = 0$$

या $$a^2(x-a) - (x+a)(x-a) + (x-a) = 0$$

या $$(x-a)\left[a^2 - (x+a) + 1\right] = 0$$

या $$(x-a)\left(a^2 - x - a + 1\right) = 0$$

या $$x = a \text{ एवं } x = a^2 - a + 1.$$

उदाहरण-9. निम्न समीकरण को हल कीजिए

$$\sin^{-1} x + \sin^{-1} 2x = \frac{\pi}{3}$$

हल: $$\sin^{-1} x + \sin^{-1} 2x = \frac{\pi}{3}$$

या $$\left(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1} 2x\right) = \frac{\pi}{3}$$

या $$\cos^{-1} x + \cos^{-1} 2x = \frac{2\pi}{3}$$

या $$\cos^{-1}\left[x.2x - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2}\right] = \frac{2\pi}{3}$$

या $$2x^2 - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2} = \cos\frac{2\pi}{3}$$

या $$2x^2 - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2} = -\frac{1}{2}$$

या $$2x^2 + \frac{1}{2} = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2}$$

या $$4x^4 + \frac{1}{4} + 2x^2 = \left(1-x^2\right)\left(1-4x^2\right)$$ वर्ग करने पर

या $$4x^4 + \frac{1}{4} + 2x^2 = 1 - 5x^2 + 4x^4$$

या $7x^2 = \frac{3}{4}$ या $x^2 = \frac{3}{28}$ या $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$

परन्तु $x^2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ दिए गए समीकरण को सन्तुष्ट नहीं करता है।

अतः हल $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$.

प्रश्नमाला 2.1

1. निम्नलिखित कोणों के मुख्य मान ज्ञात कीजिए

(i) $\sin^{-1}(1)$ (ii) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (iii) $\sec^{-1}\left(-\sqrt{2}\right)$

(iv) $\operatorname{cosec}^{-1}(-1)$ (v) $\cot^{-1}\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ (vi) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

सिद्ध कीजिए [2 से 8]

2. $2\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$

3. $\tan^{-1}\frac{17}{19}-\tan^{-1}\frac{2}{3}=\tan^{-1}\frac{1}{7}$

4. $\cos^{-1}\frac{63}{65}+2\tan^{-1}\frac{1}{5}=\sin^{-1}\frac{3}{5}$

5. $\sec^2\left(\tan^{-1}2\right)+\operatorname{cosec}^2\left(\cot^{-1}3\right)=15$

6. $2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}=\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$

7. $\tan^{-1}\sqrt{\frac{ax}{bc}}+\tan^{-1}\sqrt{\frac{bx}{ca}}+\tan^{-1}\sqrt{\frac{cx}{ab}}=\pi$, जहाँ $a+b+c=x$

8. $\frac{1}{2}\tan^{-1}x=\cos^{-1}\left\{\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}\right\}^{\frac{1}{2}}$.

9. यदि $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$, तो सिद्ध कीजिए कि $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$.

10. यदि $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y+\sin^{-1}z=\pi$, तो सिद्ध कीजिए कि $x\sqrt{1-x^2}+y\sqrt{1-y^2}+z\sqrt{1-z^2}=2xyz$.
(संकेत: यदि $A+B+C=\pi$ तो $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$)

11. यदि $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\frac{\pi}{2}$, तो सिद्ध कीजिए कि $xy+yz+zx=1$.

12. यदि $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1-x^2}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}+\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{3z-z^3}{1-3z^2}=5\pi$, सिद्ध कीजिए कि $x+y+z=xyz$.

13. यदि $\sec^{-1}\left(\sqrt{1+x^2}\right)+\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+y^2}}{y}\right)+\cot^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=3\pi$, तो सिद्ध कीजिए कि $x+y+z=xyz$.

14. सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1}x+\cot^{-1}(x+1)=\tan^{-1}(x^2+x+1)$.

15. यदि $\tan^{-1}x, \tan^{-1}y, \tan^{-1}z$ समान्तर श्रेढ़ी में हो तो सिद्ध कीजिए कि $y^2(x+z)+2y(1-xz)-x-z=0$

16. यदि $x^3 + px^2 + qx + p = 0$ के मूल α, β, γ हो तो सिद्ध कीजिए कि एक विशेष परिस्थिति के अलावा $\tan^{-1}\alpha + \tan^{-1}\beta + \tan^{-1}\gamma = n\pi$ और वह विशेष स्थिति भी ज्ञात कीजिए जब ऐसा नहीं होता है।

निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए [प्रश्न 17 से 25]:

17. $\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \sec^{-1}\left(\frac{x}{b}\right) = \sec^{-1} b - \sec^{-1} a$

18. $\cos^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) = \frac{2\pi}{3}$

19. $\tan^{-1}\frac{1}{1+2x} + \tan^{-1}\frac{1}{4x+1} = \tan^{-1}\frac{2}{x^2}$

20. $\tan^{-1}\frac{x+7}{x-1} + \tan^{-1}\frac{x-1}{x} = \pi - \tan^{-1} 7$

21. $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{4}$

22. $3\tan^{-1}\frac{1}{2+\sqrt{3}} - \tan^{-1}\frac{1}{x} = \tan^{-1}\frac{1}{3}$

23. $\sin 2\left[\cos^{-1}\left\{6 + \left(2\tan^{-1} x\right)\right\}\right] = 0$

24. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) + 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{6}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{4}$

25. $\sin^{-1} x - \sin^{-1} y = \frac{2\pi}{3}$; $\cos^{-1} x - \cos^{-1} = \frac{\pi}{3}$.

विविध प्रश्नमाला–2

1. $\tan^{-1}(-1)$ का मुख्य मान है

(क) 45° (ख) 135° (ग) -45° (घ) -60°.

2. $2\tan^{-1}(1/2)$ बराबर है

(क) $\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ (ख) $\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ (ग) $\cos^{-1}\left(\frac{5}{3}\right)$ (घ) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$.

3. यदि $\tan^{-1}(3/4) = \theta$ तो $\sin\theta$ का मान है

(क) $\frac{5}{3}$ (ख) $\frac{3}{3}$ (ग) $\frac{4}{3}$ (घ) $\frac{1}{4}$.

4. $\cot\left[\tan^{-1}\alpha + \cot^{-1}\alpha\right]$ का मान है

(क) 1 (ख) ∞ (ग) 0 (घ) इनमें से कोई नहीं।

5. यदि $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = x$ तो x का व्यापक मान है

(क) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (ख) $\frac{\pi}{6}$ (ग) $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (घ) $n\pi(-1)^n\frac{\pi}{6}$.

6. $2\tan\left(\tan^{-1}x+\tan^{-1}x^3\right)$ का मान है

(क) $\frac{2x}{1-x^2}$ (ख) $1+x^2$ (ग) $2x$ (घ) इनमें से कोई नहीं।

7. यदि $\tan^{-1}(3x)+\tan^{-1}(2x)=\frac{\pi}{4}$ तो x का मान है

(क) $\frac{1}{6}$ (ख) $\frac{1}{3}$ (ग) $\frac{1}{10}$ (घ) $\frac{1}{2}$.

8. $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ का मान है

(क) $\frac{\pi}{2}$ (ख) $\frac{\pi}{3}$ (ग) $\frac{2\pi}{3}$ (घ) π.

9. यदि $\tan^{-1}(1)+\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sin^{-1}x$ तो x का मान है

(क) -1 (ख) 0 (ग) 1 (घ) $-\frac{1}{2}$.

10. यदि $\cot^{-1}x+\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{2}$ तो x का मान है

(क) 1 (ख) 3 (ग) $\frac{1}{3}$ (घ) इनमें से कोई नहीं।

11. यदि $4\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\pi$ तो x का मान ज्ञात कीजिए।

12. $\cos\left[(\pi/2)+\sin^{-1}(1/3)\right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

13. यदि $\sin^{-1}(3/4)+\sec^{-1}(4/3)=x$ तो x का मान ज्ञात कीजिए।

14. $\sin^{-1}(4/5)+2\tan^{-1}(1/3)$ का मान ज्ञात कीजिए।

15. यदि $\sin^{-1}(5/x)+\sin^{-1}(12/x)=90^\circ$ तो x का मान ज्ञात कीजिए।

16. सिद्ध कीजिए कि : $\sin^{-1}\frac{3}{5}-\cos^{-1}\frac{12}{13}=\sin^{-1}\frac{16}{65}$.

17. यदि $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\pi$, तो सिद्ध कीजिए : $x+y+z+=xyz$.

18. सिद्ध कीजिए कि : $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan 2A\right)+\tan^{-1}(\cot A)+\tan^{-1}\left(\cot^2 A\right)=0$.

19. सिद्ध कीजिए कि : $\tan^{-1}x=2\tan^{-1}\left[\operatorname{cosec}\left(\tan^{-1}x\right)-\tan\left(\cot^{-1}x\right)\right]$.

20. यदि $\phi=\tan^{-1}\frac{x\sqrt{3}}{2K-x}$ और $\theta=\tan^{-1}\frac{2x-K}{K\sqrt{3}}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\phi-\theta$ का मान 30° है।

21. सिद्ध कीजिए कि: $2\tan^{-1}\left[\tan\left(45^\circ-\alpha\right)\tan\frac{\beta}{2}\right]=\cos^{-1}\left(\frac{\sin 2\alpha+\cos\beta}{1+\sin 2\alpha\cos\beta}\right)$.

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. यदि $\sin\theta = x$ तो $\theta = \sin^{-1} x$ तथा $\sin^{-1} x = \theta$ तो $\sin\theta = x$.
2. $\sin\left(\sin^{-1} x\right) = x,\ \sin^{-1}(\sin x) = x;\ \cos\left(\cos^{-1} x\right) = x, \cos^{-1}(\cos x) = x$ इत्यादि।
3. (i) $\sin^{-1} x, \tan^{-1} x, \cot^{-1} x, \operatorname{cosec}^{-1} x$ के मुख्य मान $-\frac{\pi}{2}$ से $\frac{\pi}{2}$ तक होते हैं।

   (ii) $\cos^{-1} x$ एवं $\sec^{-1} x$ के मुख्य मान 0 से π तक होते हैं।
4. (i) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x,\quad \tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x,\quad \operatorname{cosec}^{-1}(-x) = -\operatorname{cosec}^{-1} x$

   (ii) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x,\quad \sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x,\quad \cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x$
5. (i) $\sin^{-1} x = \operatorname{cosec}^{-1} \frac{1}{x},\quad \cos^{-1} x = \sec^{-1} \frac{1}{x},\quad \tan^{-1} x = \cot^{-1} \frac{1}{x}$

   (ii) $\operatorname{cosec}^{-1} x = \sin^{-1} \frac{1}{x},\quad \sec^{-1} x = \cos^{-1} \frac{1}{x},\quad \cot^{-1} x = \tan^{-1} \frac{1}{x}$
6. $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2},\quad \tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2},\quad \sec^{-1} x + \operatorname{cosec}^{-1} x = \frac{\pi}{2}$
7. (i) $\tan^{-1} x \pm \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x \pm y}{1 \mp xy}\right)$

   (ii) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \tan^{-1}\left(\frac{x + y + z - xyz}{1 - xy - yz - zx}\right)$
8. $2\tan^{-1} x = \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2} = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$
9. $\sin^{-1} x \pm \sin^{-1} y = \sin^{-1}\left(x.\sqrt{1-y^2} \pm y.\sqrt{1-x^2}\right)$
10. $\cos^{-1} x \pm \cos^{-1} y = \cos^{-1}\left(xy \mp \sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-x^2}\right)$
11. (i) $2\sin^{-1} x = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ (ii) $2\cos^{-1} x = \cos^{-1}\left(2x^2 - 1\right)$
12. (i) $3\sin^{-1} x = \sin^{-1}\left(3x - 4x^3\right)$ (ii) $3\cos^{-1} x = \cos^{-1}\left(4x^3 - 3x\right)$

    (iii) $3\tan^{-1} x = \tan^{-1} \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 2.1

1. (i) $\frac{\pi}{2}$ (ii) $\frac{2\pi}{3}$ (iii) $\frac{3\pi}{4}$ (iv) $-\frac{\pi}{2}$ (v) $\frac{2\pi}{3}$ (vi) $\frac{\pi}{6}$

17. $x = ab$ 18. $x = \tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ 19. $x = 0, 3, \frac{-2}{3}$ 20. $x = 11 \pm 4\sqrt{6}$

21. $x = 3$ 22. $x = 2$ 23. $x = \pm 1, \pm\left(1 \pm \sqrt{2}\right)$ 24. $x = \frac{-461}{9}$

25. $x = \frac{1}{2}, y = 1$

विविध प्रश्नमाला–2

1. (ग) 2. (क) 3. (ख) 4.(ग) 5. (घ) 6. (क) 7. (क)
8. (ग) 9. (ग) 10. (ग) 11. 1/2 12. −1/3 13. π/2 14. π/2
15. 13

03

आव्यूह
(Matrix)

3.01 प्रस्तावना (Introduction)

1857 में गणितज्ञ आर्थर केली जब समीकरणों के हल ज्ञात करने का प्रयास कर रहे थे तब ही आव्यूह सिद्धान्त की जानकारी हुई। इसमें एक प्रकार की राशियों अथवा वस्तुओं का एक आयताकार विन्यास बनाया जाता है तथा इन विन्यासों के गुणधर्म के आधार पर विज्ञान एवं विज्ञान से सम्बन्धित अनेक विषयों का अध्ययन सरलता पूर्वक किया जाना संभव हुआ है।

3.02 परिभाषा एवं संकेतन (Definition and notation)

समान राशिओं या संख्याओं के उस व्यवस्थित क्रम को आव्यूह कहते हैं, जिसमें इन्हें पंक्तिओं एवं स्तम्भों के आयताकार या वर्गाकार विन्यास में लिखा जाता है। ये राशियाँ या संख्याएँ वास्तविक अथवा सम्मिश्र हो सकती हैं।

आव्यूह में संख्याएँ किसी भी कोष्ठक में बन्द करके लिखी जा सकती हैं।

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \\ 0 & 7 \end{Vmatrix}$$

सामान्यतः आव्यूह को अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों $A, B, C...$ आदि से प्रदर्शित किया जाता है।

टिप्पणीः आव्यूह एक प्रकार की व्यवस्था है इसका मान ज्ञात नहीं होता है।

3.03 आव्यूह का क्रम (Order of matix)

यदि किसी आव्यूह में m पंक्तियां एवं n स्तम्भ हो तो उसे $m \times n$ के क्रम का आव्यूह कहा जाता है।
जैसे

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mj} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

यह आव्यूह का व्यापक रूप है।

इसमें $a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn}$ आव्यूह के अवयव कहलाते हैं। a_{ij} आव्यूह के i वीं पंक्ति एवं j वें स्तम्भ में आने वाले अवयव को दर्शाता है। अतः संक्षेप रूप में इस आव्यूह को $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ से व्यक्त करते हैं।

टिप्पणी : a_{ij} पादांक अक्षरों में प्रथम अक्षर अर्थात् i सदैव पंक्ति संख्या को तथा द्वितीय अक्षर अर्थात् j सदैव स्तम्भ संख्या को व्यक्त करता है।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

3.04 आव्यूह के प्रकार (Type of matrix)

1. पंक्ति आव्यूह (Row matrix)

वह आव्यूह जिसमें केवल एक ही पंक्ति हो, पंक्ति आव्यूह कहलाती है। इसका क्रम $1 \times n$ होगा, जिसमें n स्तम्भों की संख्या है। जैसे-

(i) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{1\times3}$ (ii) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}_{1\times5}$

2. स्तम्भ आव्यूह (Column matrix)

वह आव्यूह जिसमें केवल एक ही स्तम्भ हो, स्तम्भ आव्यूह कहलाता है। इसका क्रम $m \times 1$ होगा, जिसमें m पंक्तिओं की संख्या है। जैसे-

(i) $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}_{3\times1}$ (ii) $\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}_{5\times1}$

3. शून्य आव्यूह (Zero or Null matrix)

वह आव्यूह, जिसका प्रत्येक अवयव शून्य हो, शून्य आव्यूह कहलाती है। सामान्यतः इसे 'O' (बडे आकार का शून्य) से व्यक्त करते है। जैसे-

(i) $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times2}$ (ii) $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times4}$

4. वर्ग आव्यूह (Square Matrix)

आव्यूह जिसमें पंक्तियों एवं स्तम्भों की संख्या समान हो, वर्ग आव्यूह कहलाता है। जैसे

(i) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}_{2\times2}$ (ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \\ 6 & -4 & 8 \end{bmatrix}_{3\times3}$ (iii) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$

अवयव $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ विकर्ण के अवयव कहलाते हैं तथा इस विकर्ण को मुख्य विकर्ण (Principal diagonal) कहते हैं क्योंकि इस विकर्ण के सभी अवयवों के दोनो पादांक (Subscripts) समान होते हैं।

5. विकर्ण आव्यूह (Diagonal matrix)

वह वर्ग आव्यूह जिसमें मुख्य विकर्ण के अवयवों के अतिरिक्त शेष सभी अवयव शून्य हो विकर्ण आव्यूह कहलाता है अर्थात् $a_{ij} = 0$ यदि $i \neq j$.

जैसे- (i) $\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}_{1\times1}$ (ii) $\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{2\times2}$ (iii) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}_{3\times3}$

6. अदिश आव्यूह (Scalar matrix)

वह विकर्ण आव्यूह, जिसमें मुख्य विकर्ण के सभी अवयव समान हो, अदिश आव्यूह कहलाता है। अतः अदिश आव्यूह

$$A=\left[a_{ij}\right]_{m\times m} \text{ में } a_{ij}=\begin{cases}0 & \text{जब} \quad i\neq j\\ k & \text{जब} \quad i=j;\, k\neq 0\end{cases}$$

जैसे- (i) $\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}_{2\times 2}$ (ii) $\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}_{3\times 3}$

7. इकाई आव्यूह (Unit or Identity matrix)

वह अदिश आव्यूह जिसमें मुख्य विकर्ण के सभी अवयव इकाई (एक) हो, इकाई आव्यूह कहलाता है। इसे I से निरूपित करते है अतः इकाई आव्यूह $I_n=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ में $a_{ij}=\begin{cases}0 & \text{जब} \quad i\neq j\\ 1 & \text{जब} \quad i=j\end{cases}$

जैसे- (i) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}_{2\times 2}$ (ii) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{3\times 3}$

8. त्रिभुजाकार आव्यूह (Triangular matrix)

(*i*) ऊपरी त्रिभुजाकार आव्यूह (Upper triangular matrix)

वह वर्ग आव्यूह जिसमें मुख्य विकर्ण के नीचे के सभी अवयव शून्य हों ऊपरी त्रिभुजाकार आव्यूह कहलाती है।

अतः $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ में $a_{ij}=0$ जब $i>j$

जैसे- (i) $\begin{bmatrix}9 & 5\\ 0 & 2\end{bmatrix}_{2\times 2}$ (ii) $\begin{bmatrix}1 & -2 & 6\\ 0 & 4 & 7\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}_{3\times 3}$

(*ii*) निम्न त्रिभुजाकार आव्यूह (Lower triangular matrix)

वह वर्ग आव्यूह जिसमें मुख्य विकर्ण के ऊपर के सभी अवयव शून्य हो निम्न त्रिभुजाकार आव्यूह कहलाती है। अतः $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ में $a_{ij}=0$ जब $i<j$

जैसे- (i) $\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}_{2\times 2}$ (ii) $\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 6 & 7 & 0\\ 9 & 2 & -4\end{bmatrix}_{3\times 3}$

3.05 आव्यूह के गुणधर्म (Properties of matrx)

1. परिवर्त आव्यूह (Transpose of a matrix)

यदि किसी आव्यूह की पंक्तियों को स्तम्भों में तथा स्तम्भों को पंक्तियों में बदल दिया जाय तो प्राप्त आव्यूह मूल आव्यूह का परिवर्त आव्यूह कहलाता है।

आव्यूह A के परिवर्त आव्यूह को A^T या A' से निरूपित किया जाता है।

अतः $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ तो $A^T=A'=[a_{ji}]_{n\times m}$

जैसे- (i) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 5 & 3 & -4\\ 3 & 8 & 6\end{bmatrix}_{3\times 3} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}1 & 5 & 3\\ 0 & 3 & 8\\ 2 & -4 & 6\end{bmatrix}_{3\times 3}$ (ii) $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 0\\ 2 & -4\end{bmatrix}_{3\times 2} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}1 & 5 & 2\\ 3 & 0 & -4\end{bmatrix}_{2\times 3}$

2. सममित एवं विषम सममित आव्यूह (Symmetric and skew symmetric matrix)

(*i*) सममित आव्यूह (Symmetric matrix)

एक वर्ग आव्यूह A, सममित आव्यूह कहलाता है, यदि और केवल यदि $A=A^T$ हो।

जैसे- (i) $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -3 & 4\end{bmatrix}_{2\times 2}$; $A^T=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -3 & 4\end{bmatrix}_{2\times 2}$

अतः A एक सममित आव्यूह है।

(ii) $A=\begin{bmatrix}a & h & g\\ h & b & f\\ g & f & c\end{bmatrix}_{3\times 3}$; $A^T=\begin{bmatrix}a & h & g\\ h & b & f\\ g & f & c\end{bmatrix}_{3\times 3}$

टिप्पणी : सममित आव्यूह में सभी अवयव मुख्य विकर्ण के सापेक्ष समान दूरी पर समान होते हैं अर्थात् $a_{ij}=a_{ji}$.

(*ii*) विषम सममित आव्यूह (Skew-symmetric matrix)

एक वर्ग आव्यूह A, विषम सममित आव्यूह कहलाता है, यदि और केवल यदि हो $A^T=-A$ हो।

जैसे- (i) $A=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$; $A^T=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}=-A$

(ii) $A=\begin{bmatrix}0 & h & g\\ -h & 0 & -f\\ -g & f & 0\end{bmatrix}$; $A^T=\begin{bmatrix}0 & -h & -g\\ h & 0 & f\\ g & -f & 0\end{bmatrix}=-A$

टिप्पणी: (a) विषम सममित आव्यूह में सभी अवयव मुख्य विकर्ण के सापेक्ष समान दूरी पर परिमाण में समान किन्तु एक दूसरे के ऋणात्मक होते हैं अर्थात् $a_{ij}=-a_{ji}$.

(b) विषम सममित आव्यूह के मुख्य विकर्ण के सभी अवयव शून्य होते हैं, क्योंकि परिभाषा से $a_{ij}=-a_{ji}$ में यदि $i=1, j=1$ तो

$$a_{11}=-a_{11}$$

$$\Rightarrow \quad 2a_{11}=0$$

$$\text{अतः} \quad a_{11}=0=a_{22}=\ldots a_{nn}$$

(c) यदि दो आव्यूह A तथा B योग व गुणन के लिए अनुकुलनीय हो, तो

(i) $(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$ (ii) $(KA)^T=KA^T$, जहाँ K एक अदिश राशि है। (iii) $(AB)^T=B^TA^T$

(d) यदि A एक वर्ग आव्यूह हो तो–

(i) $A+A^T$ एक सममित आव्यूह होता है। (ii) $A-A^T$ एक विषम सममित आव्यूह होता है।

(iii) AA^T तथा A^TA सममित आव्यूह होता है। (iv) $(A^T)^T=A$

(e) प्रत्येक वर्ग आव्यूह को एक सममित एवं एक विषम सममित आव्यूह के योग के रूप में अद्वितीय प्रकार से लिखा जा सकता है।

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^T\right),$$

जहाँ A एक वर्ग आव्यूह है।

$A + A^T$ एक सममित आव्यूह है।

तथा $A - A^T$ एक विषम सममित आव्यूह है।

(f) एक ही क्रम के दो आव्यूह समान आव्यूह कहलाते हैं यदि उनके संगत अवयव समान हैं।

जैसे- $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$

समान आव्यूह है तो संगत अवयव भी समान होंगे

अर्थात् $b_{11} = 2,\ b_{12} = -2,\ b_{13} = 0$

$b_{21} = 3,\ b_{22} = -4,\ b_{23} = 2$

दृष्टांतीय उदारहण

उदाहरण-1. आव्यूह A का क्रम 3×5 है तथा R, A की पंक्ति आव्यूह है तो आव्यूह R का क्रम लिखिए।

हल: $\because$ आव्यूह A का क्रम 3×5 है।

$\therefore$ A की प्रत्येक पंक्ति में 5 अवयव है।

अतः आव्यूह R का क्रम 1×5 है।

उदाहरण-2. एक 2×3 क्रम की आव्यूह $A = [a_{ij}]$ लिखिए जिसके अवयव (i) $a_{ij} = 2i + j$; (ii) $a_{ij} = i^2 - j^2$ हैं।

हल: (i) $a_{ij} = 2i + j$ दिया गया आव्यूह 2×3 क्रम का है अतः $i = 1,\ 2$ तथा $j = 1,\ 2,\ 3$

$\therefore$ $a_{11} = 2 + 1 = 3,\ a_{12} = 2 + 2 = 4,\ a_{13} = 2 + 3 = 5$

$a_{21} = 4 + 1 = 5,\ a_{22} = 4 + 2 = 6,\ a_{23} = 4 + 3 = 7$

अतः अभीष्ट आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ है।

(ii) $a_{ij} = i^2 - j^2$ दिया गया आव्यूह 2×3 क्रम का है अतः $i = 1,\ 2$ तथा $j = 1,\ 2,\ 3$.

$\therefore$ $a_{11} = 1^2 - 1^2 = 0,\ a_{12} = 1^2 - 2^2 = -3,\ a_{13} = 1^2 - 3^2 = -8$

$a_{21} = 2^2 - 1^2 = 3,\ a_{22} = 2^2 - 2^2 = 0,\ a_{23} = 2^2 - 3^2 = -5$

अतः अभीष्ट आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -8 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ है।

उदाहरण-3. x, y तथा z के किन मानों के लिए आव्यूह A तथा B समान आव्यूह हैं, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & x+3 \\ y-4 & 4 & 6 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -2 & 4 & 2z \end{bmatrix}$$

हल: $\because$ A तथा B समान आव्यूह हैं तथा इनका क्रम भी समान है।

$\therefore$ संगत अवयव बराबर होंगे।

अतः $x + 3 = 6,\ y - 4 = -2,$ तथा $2z = 6$

$\Rightarrow$ $x = 3,\ y = 2$ तथा $z = 3$

उदाहरण-4. यदि $\begin{bmatrix} 2x+y & 3 & x-2y \\ a-b & 2a+b & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & -5 \end{bmatrix}$ हो तो x, y, a तथा b के मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\because$ दोनों आव्यूह समान क्रम के समान आव्यूह हैं, अतः इनके संगत अवयव समान होंगे।

$$\therefore \quad 2x+y=3 \qquad (1)$$

$$x-2y=4 \qquad (2)$$

समीकरण (1) व (2) को हल करने पर

$$x=2,\ y=-1$$

पुनः

$$a-b=4 \qquad (3)$$

$$2a+b=-1 \qquad (4)$$

समीकरण (3) व (4) को हल करने पर

$$a=1,\ b=-3$$

$$\therefore \quad x=2,\ y=-1,\ a=1,\ b=-3$$

प्रश्नमाला 3.1

1. यदि आव्यूह $A=[a_{ij}]_{2\times 4}$ हो, तो A में अवयवों की संख्या लिखिए।
2. 4×4 का इकाई आव्यूह लिखिए।
3. यदि $\begin{bmatrix} k+4 & -1 \\ 3 & k-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ तो a का मान ज्ञात कीजिए।
4. 6 अवयवों वाले आव्यूह के सम्भावित क्रम क्या होंगे?
5. 2×2 क्रम का आव्यूह $A=[a_{ij}]$ ज्ञात कीजिए जिसके अवयव

   (i) $a_{ij}=\dfrac{2i-j}{3i+j}$ (ii) $a_{ij}=\dfrac{(i+2j)^2}{2i}$ (iii) $a_{ij}=2i-3j$

6. एक 2×3 क्रम का आव्यूह $A=a_{ij}$ ज्ञात कीजिए जिसके अवयव $a_{ij}=\dfrac{1}{2}|2i-3j|$ हैं।
7. यदि $\begin{bmatrix} a+b & 2 \\ 7 & ab \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 8 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो a व b के मान ज्ञात कीजिए।
8. यदि $\begin{bmatrix} 2x & 3x+y \\ -x+z & 3y-2p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ हो, तो x, y, z व p के मान ज्ञात कीजिए।
9. a, b व c के किन मानों के लिए आव्यूह A तथा B समान आव्यूह हैं। जहाँ

$$A=\begin{bmatrix} a-2 & 3 & 2c \\ 12c & b+2 & bc \end{bmatrix}; \quad B=\begin{bmatrix} b & c & 6 \\ 6b & a & 3b \end{bmatrix}$$

3.06 आव्यूह पर संक्रियाएं (Operations on matrix)

1. योग (Addition)

दोनों आव्यूह A व B योग के लिए अनुकूलनीय होती हैं यदि वे एक ही क्रम के हो। इनका योग भी एक आव्यूह होता है, जिसके अवयव आव्यूह A व B के संगत अवयवों के योग के बराबर होते हैं। इसे $A+B$ से व्यक्त करते हैं। अतः यदि $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ तथा $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ हों, तो $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$

जैसे- (i) यदि $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}_{2\times 2}$ तथा $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}_{2\times 2}$ हो, तो

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

(ii) यदि $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 0 & 6\end{bmatrix}_{2\times 3}$ तथा $B=\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 5\end{bmatrix}_{2\times 3}$ हों, तो

$$A+B=\begin{bmatrix} 2+4 & 5+2 & -3-1 \\ 4+1 & 0+3 & 6+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 7 & -4 \\ 5 & 3 & 11\end{bmatrix}_{2\times 3}$$

2. व्यवकलन (Subtraction)

दो आव्यूह A व B व्यवकलन के लिए अनुकूलनीय होते हैं यदि वे एक ही क्रम के हो। इनका व्यवकलन भी एक आव्यूह होता है, जिसके अवयव आव्यूह A व B के संगत अवयवों के व्यवकलन के बराबर होते हैं इसे $A-B$ से व्यक्त करते है।

अतः यदि $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ तथा $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ हों, तो $A-B=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$

जैसे– (i) यदि $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}_{2\times 2}$ तथा $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}_{2\times 2}$ हो, तो

$$A-B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22}\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

(ii) यदि $A=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 6 & 2 & 1\end{bmatrix}_{2\times 3}$ तथा $B=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 1\end{bmatrix}_{2\times 3}$ हों, तो

$$A-B=\begin{bmatrix} 5-2 & 3-4 & 7-6 \\ 6-3 & 2-4 & 1-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 0\end{bmatrix}_{2\times 3}$$

3. गुणन (Multiplication)

दो आव्यूह A व B गुणन के लिए अनुकूलनीय होते हैं यदि आव्यूह A के स्तम्भों की संख्या B के पंक्तियों की संख्या के बराबर हो। इनका गुणन भी एक आव्यूह होता है, जिसके पंक्ति व स्तम्भ के अवयव A की i वीं पंक्ति तथा B के j वें स्तम्भ के संगत अवयवों के गुणनफल के योग के बराबर होता है। इसे AB से व्यक्त करते हैं।

आव्यूह AB का क्रम $=A$ की पंक्तियों की संख्या $\times B$ के स्तम्भों की संख्या

अतः $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ तथा $B=[b_{ij}]_{p\times n}$ हो, तो

AB का क्रम $m\times\boxed{p \qquad p}\times n=m\times n$ होगा।

जैसे- (i) यदि $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}_{2\times 2}$ तथा $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{bmatrix}_{2\times 3}$ हों, तो

AB का क्रम $2\times\boxed{2 \qquad 2}\times 3=2\times 3$ होगा।

$$\therefore \quad AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}\end{bmatrix}_{2\times 3}$$

(ii) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ तो $B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

AB का क्रम $2 \times \boxed{2 \quad 2} \times 2 = 2 \times 2$ होगा।

अतः $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2\times 5 + 3\times 6 & 2\times 4 + 3\times 0 \\ -1\times 5 + 4\times 6 & -1\times 4 + 4\times 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10+18 & 8+0 \\ -5+24 & -4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 8 \\ 19 & -4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

4. अदिश गुणन (Scalar multiplication)

आव्यूह A को किसी अशून्य अदिश संख्या n से गुणा करने पर प्राप्त आव्यूह nA अदिश गुणन आव्यूह कहलाता है। इसका प्रत्येक अवयव आव्यूह A का n गुना होता है।

अतः $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ हो, तो $nA = [na_{ij}]_{m\times n}$

जैसे- (i) यदि $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3}$ हो, तो

$$nA = n\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} na_{11} & na_{12} & na_{13} \\ na_{21} & na_{22} & na_{23} \end{bmatrix}$$

(ii) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ तो $3A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 3 & -15 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

तथा $-5A = \begin{bmatrix} -10 & -15 \\ -5 & 25 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

3.07 आव्यूह योग–गुणधर्म (Properties of matrix addition)

(i) क्रम विनिमेयता (Commutativity)

यदि A तथा B दो समान क्रम के आव्यूह हों तो $A + B = B + A$

माना $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ तथा $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ तो स्पष्टतः $A + B$ तथा $B + A$ समान क्रम के आव्यूह हैं।

$$[A+B]_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n}$$
$$= [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$
$$= [b_{ij} + a_{ij}]_{m\times n} \qquad \text{(योग क्रम विनिमेय गुणधर्म से)}$$
$$= [b_{ij}]_{m\times n} + [a_{ij}]_{m\times n}$$
$$= [B+A]_{m\times n}$$

$\therefore \quad A + B = B + A$

(ii) साहचर्यता (Associativity)

यदि A, B तथा C तीन समान क्रम के आव्यूह हों, तो $(A+B)+C = A+(B+C)$

माना $A=[a_{ij}]_{m\times n}$; $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ तथा $C=[c_{ij}]_{m\times n}$ स्पष्टतः $(A+B)+C$ तथा $A+(B+C)$ समान क्रम के आव्यूह हैं।

$$\left[(A+B)+C\right]_{m\times n} = \left([a_{ij}]_{m\times n}+[b_{ij}]_{m\times n}\right)+[c_{ij}]_{m\times n}$$
$$=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}+[c_{ij}]_{m\times n}$$
$$=\left[(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}\right]_{m\times n}$$
$$=\left[a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})\right]_{m\times n} \qquad \text{(साहचर्यता गुणधर्म से)}$$
$$=[a_{ij}]_{m\times n}+([b_{ij}]_{m\times n}+[c_{ij}]_{m\times n})$$
$$=\left[A+(B+C)\right]_{m\times n}$$

$\therefore \qquad (A+B)+C = A+(B+C)$

(iii) योज्य तत्समक (Additive identity)

एक $m\times n$ क्रम का शून्य आव्यूह O, $m\times n$ क्रम के आव्यूह A का तत्समक आव्यूह कहलाता है। क्योंकि

$$A+O=A=O+A$$

(iv) योज्य प्रतिलाम (Additive inverse)

आव्यूह $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ के लिए $-A=[-a_{ij}]_{m\times n}$ है, तो आव्यूह $-A$ आव्यूह A का योज्य प्रतिलोम आव्यूह कहलाता है।

क्योंकि $\qquad A+(-A)=O=(-A)+A$, जहाँ O, $m\times n$ का शून्य आव्यूह है।

माना $\qquad A=[a_{ij}]_{m\times n}$ तो $-A=-[a_{ij}]_{m\times n}=[-a_{ij}]_{m\times n}$

$\therefore \qquad A+(-A)=[a_{ij}]_{m\times n}+[-a_{ij}]_{m\times n}=0$

तथा $\qquad (-A)+A=A+(-A)$ $\qquad$ (मैट्रिक्स योग क्रम विनिमेय से)

$$A+(-A)=O=(-A)+A$$

(v) निरसन नियम (Cancellation law)

यदि A, B तथा C एक ही क्रम के तीन आव्यूह हैं, तो

$A+B=A+C \Rightarrow B=C$ $\qquad$ (वाम निरसन नियम)

तथा $\qquad B+A=C+A \Rightarrow B=C$ $\qquad$ (दक्षिण निरसन नियम)

3.08 आव्यूह गुणन–गुणधर्म (Properties of matrix multiplication)

(i) क्रमविनिमेयता (Commutativity)

सामान्यतया आव्यूह गुणन के लिए क्रमविनिमेय गुणधर्म का पालन नहीं करते हैं। इस हेतु निम्न स्थितियों पर विचार कीजिए–

(a) यदि $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ तथा $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ हो, तो AB तथा BA ज्ञात किया जा सकता हैं परन्तु यह आवश्यक नहीं है कि ये बराबर हों।

जैसे $\qquad A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ हों, तो

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

तथा $BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

अतः $AB \neq BA$

(b) यदि $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ तथा $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ हो, तो आव्यूह AB ज्ञात किया जा सकता है परन्तु BA ज्ञात करना सम्भव नहीं है अतः क्रमविनिमेयता का प्रश्न ही नहीं है।

(c) यदि $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ तथा $B = [b_{ij}]_{n\times m}$ हो, तो AB तथा BA ज्ञात किया जा सकता है परन्तु इनके क्रम समान नहीं होंगे अतः $AB \neq BA$

टिप्पणी: उपर्युक्त स्थितियों से यह निष्कर्ष कदापि नहीं लिया जा सकता है कि $AB = BA$ सदैव असंभव हो किसी विशेष परिस्थिति में $AB = BA$ भी हो सकता है।

(ii) साहचर्यता (Associativity)

यदि आव्यूह A, B तथा C आवश्यक गुणन AB तथा BC के लिए अनुकूलनीय हों, तो आव्यूह गुणन के लिए साहचर्य नियम का पालन करते हैं

अर्थात् $(AB)C = A(BC)$

(iii) तत्समकता (Identity)

इकाई आव्यूह ही आव्यूह गुणन के लिए तत्समक आव्यूह कहलाता है अर्थात् यदि A एक $m\times n$ क्रम का आव्यूह है, तो

$$\mathrm{I}_m A = A = AI_n$$

जहाँ I_m, m क्रम का इकाई आव्यूह तथा I_n, n क्रम का इकाई आव्यूह है।

टिप्पणी: वर्ग आव्यूह A के लिए उसी क्रम का इकाई आव्यूह तत्समक आव्यूह का कार्य करता है तथा इस स्थिति में $AI = A = IA$

(iv) बंटनता (Distributivity)

यदि आव्यूह A, B तथा C आवश्यक योग एवं गुणन के लिए अनुकूलनीय हो तो आव्यूह गुणन के लिए बंटन नियम का पालन करता है।

(a) $A(B+C) = AB + AC$

(b) $(A+B)C = AC + BC$

3.09 आव्यूह–अदिश गुणन–गुणधर्म (Properties of scalar multiplication of a matirx)

यदि A तथा B दो समान क्रम की आव्यूह हैं तथा k व ℓ दो अदिश राशियाँ है, तो

(i) $(k+\ell)A = kA + \ell A$ (ii) $k(A+B) = kA + kB$

(iii) $k(\ell A) = \ell(kA) = (\ell k)A$ (iv) $1.A = A$

(v) $(-1)A = -A$

3.10 गुणन प्रतिलोमी आव्यूह (Multiplicative inverse matrix)

यदि समान क्रम के दो वर्ग आव्यूह A तथा B का गुणन इकाई आव्यूह हो तो B को A का गुणन प्रतिलोमी आव्यूह तथा A को B का गुणन प्रतिलोमी आव्यूह कहते हैं। अर्थात्

यदि $AB = I = BA$ हो, तो A तथा B परस्पर गुणन प्रतिलोम कहलाते हैं। जैसे–

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ हों, तो

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-4+2 & -4+2+2 & 2+0-2 \\ 6-10+4 & -8+5+4 & 4+0-4 \\ 9-14+5 & -12+7+5 & 6+0-5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} = I_3$$

तथा
$$BA = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-8+6 & 6-20+14 & 6-16+10 \\ -2+2+0 & -4+5+0 & -4+4+0 \\ 1+2-3 & 2+5-7 & 2+4-5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} = I_3$$

अतः $AB = I_3 = BA$ अर्थात् A तथा B परस्पर गुणन प्रतिलोमी आव्यूह हैं।

3.11 शून्य के भाजक (Zero divisors)

यदि दो अशून्य आव्यूह A तथा B का गुणन AB एक शून्य आव्यूह हो तो A तथा B शून्य के भाजक कहलाते हैं। जैसे–

अतः $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ शून्य के भाजक हैं।

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+1 & 1-1 \\ -3+3 & 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

अतः A तथा B शून्य के भाजक हैं।

3.12 वर्ग आव्यूह की धन पूर्णांक घात (Positive integral power of a square matrix)

एक वर्ग आव्यूह A को स्वयं से गुणा करने पर गुणनफल को A^2 से, A^2 को पुनः A से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल को A^3 से तथा इसी प्रकार आव्यूह A^{n-1} को जब A से गुणा करते है तो प्राप्त आव्यूह को A^n से व्यक्त करते हैं अर्थात्

$$AA = A^2 \qquad A^2A = A^3$$

तथा $A^{n-1}A = A^n$

जैसे $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}$ हों, तो

$$A^2=AA=\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+6 & 3+12\\2+8 & 6+16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 15\\10 & 22\end{bmatrix}$$

तथा $$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}7 & 15\\10 & 22\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7+30 & 21+60\\10+44 & 30+88\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}37 & 81\\54 & 118\end{bmatrix}$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-5. यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & -1\\3 & 2 & 5\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\-1 & 3 & 4\end{bmatrix}$ हो, तो $2A$ - $3B$ ज्ञात कीजिए।

हल: $\because$ $$A=\begin{bmatrix}2 & 4 & -1\\3 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

$\therefore$ $$2A=2\begin{bmatrix}2 & 4 & -1\\3 & 2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 8 & -2\\6 & 4 & 10\end{bmatrix} \qquad (1)$$

तथा $$3B=3\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\-1 & 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 3 & 0\\-3 & 9 & 12\end{bmatrix}$$

$$-3B=\begin{bmatrix}-6 & -3 & 0\\3 & -9 & -12\end{bmatrix}$$

अतः $2A-3B=2A+(-3B)$

$$=\begin{bmatrix}4 & 8 & -2\\6 & 4 & 10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6 & -3 & 0\\3 & -9 & -12\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4-6 & 8-3 & -2+0\\6+3 & 4-9 & 10-12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 5 & -2\\9 & -5 & -2\end{bmatrix}$$

उदाहरण-6. यदि $B=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 0\\3 & 1 & 4\end{bmatrix}$ तथा $C=\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\7 & 1 & 6\end{bmatrix}$ हो, तो आव्यूह A ज्ञात कीजिए जहाँ $2A-3B+5C=O$, जहाँ $O, 2\times 3$ क्रम का शून्य आव्यूह है।

हल: $\because$ $$2A-3B+5C=O$$

$\therefore$ $$2A=3B-5C+O$$

$$=3\begin{bmatrix}-2 & 2 & 0\\3 & 1 & 4\end{bmatrix}+(-5)\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\7 & 1 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-6 & 6 & 0\\9 & 3 & 12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-10 & 0 & 10\\-35 & -5 & -30\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-6-10+0 & 6+0+0 & 0+10+0\\9-35+0 & 3-5+0 & 12-30+0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -16 & 6 & 10 \\ -26 & -2 & -18 \end{bmatrix}$$

अतः $$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -16 & 6 & 10 \\ -26 & -2 & -18 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -8 & 3 & 5 \\ -13 & -1 & -9 \end{bmatrix}$$

उदाहरण-7. यदि $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 6 & -7 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ हो, तो AB, BA अथवा दोनों, जिनका भी अस्तित्व हो, ज्ञात कीजिए।

हल: $\because A$ का क्रम 2×3 तथा B का क्रम 3×3 है।

$\therefore$ AB का अस्तित्व है जबकि BA का नहीं।

अतः $$AB = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -7 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24-2-5 & -28+4+0 & 0+10-15 \\ 6-0+3 & -7+0+0 & 0+0+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -24 & -5 \\ 9 & -7 & 9 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

उदाहरण-8. x के किन मानों के लिए

$$\begin{bmatrix} 1 & x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 15 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = O$$

जहाँ $O, 1\times 1$ क्रम की शून्य आव्यूह है।

हल: $$\begin{bmatrix} 1 & x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 15 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = O$$

या $$\begin{bmatrix} 1+2x+15 & 3+5x+3 & 2+x+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = O$$

या $$\begin{bmatrix} 2x+16 & 5x+6 & x+4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = O$$

या $$\begin{bmatrix} 2x+16+10x+12+x^2+4x \end{bmatrix} = O$$

या $\quad \left[x^2+16x+28\right]=0$

या $\quad x^2+16x+28=0$

या $\quad (x+2)(x+14)=0$

$\Rightarrow x+2=0$ या $x+14=0$

$\Rightarrow x=-2$ या $x=-14$

उदाहरण-9. यदि $A-2I=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix}$ हो, तो AA^T ज्ञात कीजिए, जहाँ I, 3×3 क्रम का इकाई आव्यूह है।

हल: $\because \quad A-2I=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -1\\ -3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$A^T=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ -2 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

अतः $\quad AA^T=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -1\\ -3 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ -2 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1+4+9 & 2-6-3 & -3-2+6\\ 2-6-3 & 4+9+1 & -6+3-2\\ -3-2+6 & -6+3-2 & 9+1+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & -7 & 1\\ -7 & 14 & -5\\ 1 & -5 & 14\end{bmatrix}$$

उदाहरण-10. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ हो, तो निम्नलिखित को सत्यापित कीजिए:

(i) $A^2=2A$ $\qquad$ (ii) $A^3=4A$

हल: (i) वाम पक्ष $A^2=AA=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1 & -1-1\\ -1-1 & 1+1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=2A=\text{दक्षिण पक्ष}$$

(ii) वाम पक्ष $A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2+2 & -2-2 \\ -2-2 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 4A = \text{दक्षिण पक्ष}$$

उदाहरण-11. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ तथा $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो सत्यापित कीजिए

$$A(B+C) = AB + AC$$

हल: वाम पक्ष $= A(B+C)$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 \\ -4 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-12 & 2+18 & 16+15 \\ 3-8 & 1+12 & 8+10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 20 & 31 \\ -5 & 13 & 18 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

दक्षिण पक्ष $= AB + AC$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-9 & -4+6 & 4+12 \\ 1-6 & -2+4 & 2+8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4-3 & 6+12 & 12+3 \\ 2-2 & 3+8 & 6+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 2 & 16 \\ -5 & 2 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 18 & 15 \\ 0 & 11 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 20 & 31 \\ -5 & 13 & 18 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

(1) व (2) से वाम पक्ष = दक्षिण पक्ष

प्रश्नमाला 3.2

1. यदि $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ हो, तो $A+B$ व $A-B$ ज्ञात कीजिए।

2. यदि $A+B = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ तथा $A-B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ हो, तो आव्यूह A व B ज्ञात कीजिए।

3. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ हो, तो आव्यूह C ज्ञात कीजिए, जहाँ $A+2B+C=O$ जहाँ O शून्य आव्यूह है।

4. यदि $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\3 & 2\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}0 & 4\\-1 & 7\end{bmatrix}$ हो, तो $3A^2-2B$ ज्ञात कीजिए।

5. यदि $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}0 & 3\\1 & 2\\2 & 1\\3 & 0\end{bmatrix}$ हो, तो दिखाओं कि $AB \neq BA$

6. यदि $f(x)=\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x & 0\\\sin x & \cos x & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ तो प्रदर्शित कीजिए: $f(A)f(B)=f(A+B)$

7. यदि $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & -5\\1 & 0 & 3\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}6 & -7 & 0\\-1 & 2 & 5\\1 & 0 & 2\end{bmatrix}$ हों, तो सिद्ध कीजिए : $(AB)^T=B^TA^T$

8. सिद्ध कीजिए: $\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & h & g\\h & b & f\\g & f & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ax^2+by^2+cz^2+2hxy+2fyz+2gzx\end{bmatrix}$

9. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\2 & 3 & -1\\-3 & 1 & 2\end{bmatrix}$ तथा I तृतीय क्रम का इकाई आव्यूह हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$A^2-3A+9I=\begin{bmatrix}-6 & 1 & 2\\5 & 4 & 4\\2 & 8 & -3\end{bmatrix}$$

10. यदि $\begin{bmatrix}a & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\1 & 0 & 2\\0 & 2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\4\\1\end{bmatrix}=O$, जहाँ O शून्य आव्यूह है, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

11. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}a & 1\\b & -1\end{bmatrix}$ तथा $(A+B)^2=A^2+B^2$ हो, तो a व b के मान ज्ञात कीजिए।

12. यदि $A=\begin{bmatrix}0 & -\tan\frac{x}{2}\\\tan\frac{x}{2} & 0\end{bmatrix}$ तथा I, 2×2 क्रम का इकाई आव्यूह हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$I+A=(I-A)\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x\\\sin x & \cos x\end{bmatrix}$$

13. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 7\end{bmatrix}$ तथा $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ हो, तो K का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ $A^2=8A+KI$

14. यदि $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ -3 & 4\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}1 & -4 & 3\\ -2 & -10 & 6\\ 13 & 20 & -9\end{bmatrix}$ हो, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

15. यदि $A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ तो सिद्ध कीजिए कि $A^n=\begin{bmatrix}\cos n\alpha & \sin n\alpha\\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha\end{bmatrix}$, जहाँ n धन पूर्णांक है।

विविध प्रश्नमाला–3

1. यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ हो, तो A^2 ज्ञात कीजिए।

2. यदि $A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ हो, तो $(A-2I).(A-3I)$ ज्ञात कीजिए।

3. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}5\\ -1\end{bmatrix}$ हो, तो AB ज्ञात कीजिए।

4. यदि $A=\begin{bmatrix}-i & o\\ o & i\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}o & i\\ i & o\end{bmatrix}$, जहाँ $i=\sqrt{-1}$ हों, तो BA ज्ञात कीजिए।

5. यदि $A-B=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ तथा $A+B=\begin{bmatrix}3 & 5 & -7\\ -1 & 1 & 4\\ 11 & 8 & 0\end{bmatrix}$ हो, तो आव्यूह A तथा B ज्ञात कीजिए।

6. यदि $\begin{bmatrix}-2 & -3 & 1\\ -y-2 & -1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+2 & -3 & 1\\ 5 & -1 & 4\end{bmatrix}$ हो, तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए।

7. आव्यूह A का क्रम 3×4 है तथा B इस प्रकार का आव्यूह है कि A^TB एवं AB^T दोनों ही परिभाषित हैं तो B का क्रम लिखिए।

8. यदि $A=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 1\\ -1 & 7 & 4\\ 1 & -x & -3\end{bmatrix}$ एक सममित आव्यूह है तो x का मान ज्ञात कीजिए।

9. एक 3×3 क्रम का आव्यूह $B=[b_{ij}]$ लिखिए जिनके अवयव $b_{ij}=(i)(j)$ हैं।

10. यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -4\\ -1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\\ -5 & -6\end{bmatrix}$ हों, तो $A+B^T$ ज्ञात कीजिए।

11. आव्यूह A को सममित व विषम सममित आव्यूह के योग के रूप में व्यक्त कीजिए, जहाँ $A=\begin{bmatrix}6 & 2\\ 5 & 4\end{bmatrix}$ है।

12. यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $(A^T)^T = A$

(ii) $A+A^T$ एक सममित आव्यूह है।

(iii) $A-A^T$ एक विषम सममित आव्यूह है।

(iv) AA^T तथा A^TA सममित आव्यूह है।

13. यदि $A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ तथा $3A-2B+C$ एक शून्य आव्यूह है तो आव्यूह C लिखिए।

14. एक 2×3 क्रम का आव्यूह $B=[b_{ij}]$ लिखिए जिसके अवयव $b_{ij}=\dfrac{(i+2j)^2}{2}$ हैं।

15. यदि $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & -2\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 5 & 7\end{bmatrix}$ तथा $C=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ हो, तो आव्यूह ABC के प्रथम पंक्ति के अवयव ज्ञात कीजिए।

16. यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ हो, तो AA^T ज्ञात कीजिए।

17. यदि $\begin{bmatrix}1 & x & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 3 & 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}=O$ तो x का मान ज्ञात कीजिए।

18. यदि $B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि: $B^2-(a+d)B=(bc-ad)I_2$, जहाँ $I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

19. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ हो, तो $(aA+bB)(aA-bB)$ को आव्यूह A के रूप में ज्ञात कीजिए।

20. यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि: $(A-B)^2 \neq A^2-2AB+B^2$

21. यदि $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & -2\end{bmatrix}$ तथा $A^2=kA-2I_2$, हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

22. यदि $A=\begin{bmatrix}i & o\\ o & -i\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}o & i\\ i & o\end{bmatrix}$ जहाँ $i=\sqrt{-1}$ हो, तो निम्नलिखित सम्बन्धों का सत्यापन कीजिए:

(i) $A^2=B^2=C^2=-I_2$

(ii) $AB=-BA=-C$

23. यदि $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $f(A)=A^2-5A+7I$ हो, तो $f(A)$ ज्ञात कीजिए।

24. सिद्ध कीजिए कि:

$$\begin{bmatrix} \cos^2 \propto & \cos \propto \sin \propto \\ \cos \propto \sin \propto & \sin^2 \propto \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \cos \beta \sin \beta \\ \cos \beta \sin \beta & \sin^2 \beta \end{bmatrix}=O$$

जबकि $\propto-\beta=(2m-1)\dfrac{\pi}{2}; m\in N$

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. बन्द कोष्ठक में पंक्ति तथा स्तम्भों के आयताकार या वर्गाकार विन्यास में लिखी हुयी संख्याओं के व्यवस्थित क्रम को आव्यूह कहते हैं।
2. **आव्यूह के प्रकार:** पंक्ति आव्यूह, स्तम्भ आव्यूह, शून्य आव्यूह, वर्ग आव्यूह, विकर्ण आव्यूह, अदिश आव्यूह, इकाई आव्यूह, ऊपरी त्रिभुजाकार आव्यूह, निम्न त्रिभुजाकार आव्यूह, परिवर्त आव्यूह, सममित आव्यूह, विषम सममित आव्यूह इत्यादि।
3. **आव्यूह का योग एवं व्यवकलन:** दो समान क्रम के आव्यूहों का योग अथवा व्यवकलन इनके ही क्रम के आव्यूह होते हैं, जो इनके संगत अवयवों को क्रमशः जोड़ने अथवा घटाने से प्राप्त होते हैं।
4. **आव्यूह का गुणन:** आव्यूह A तथा B का गुणन AB सम्भव होगा यदि A के स्तम्भों की संख्या, B की पंक्तिओं की संख्या के समान हो तथा AB आव्यूह का अवयव $(AB)_{ij}$ आव्यूह A की i वी पंक्ति के अवयवों को आव्यूह B के j वें स्तम्भ के संगत अवयवों से गुणा कर उनके योग से प्राप्त होता है।
5. **अदिश गुणन:** आव्यूह A को किसी अशून्य अदिश संख्या n से गुणा करने पर प्राप्त आव्यूह nA अदिश गुणन आव्यूह कहलाता है। इसका प्रत्येक अवयव आव्यूह A का n गुणा होता है।
6. आव्यूह योग के लिए क्रमविनिमेय एवं साहचर्य गुणधर्म का पालन करते हैं जबकि व्यवकलन में नहीं।
7. आव्यूह गुणन के लिए समान्यतया क्रमविनिमेय गुणधर्म पालन नहीं करते हैं जबकि साहचर्य गुणधर्म का पालन करते हैं।
8. **परिवर्त आव्यूह:** यदि $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ तो $A^T=[a_{ji}]_{n\times m}$
9. **सममित आव्यूह:** $A^T=A$
10. **विषम सममित आव्यूह:** $A^T=-A$
11. यदि A एक वर्ग आव्यूह है, तो
    (i) $A+A^T$ एक सममित आव्यूह होता है।
    (ii) $A-A^T$ एक विषम सममित आव्यूह होता है।
    (iii) AA^T एवं A^TA सममित आव्यूह होता है।
    (iv) $A=\dfrac{1}{2}(A+A^T)+\dfrac{1}{2}(A-A^T)$
12. यदि दो आव्यूह A तथा B योग व गुणन के लिए अनुकूलनीय हो, तो
    (i) $(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$
    (ii) $(A^T)^T=A$
    (iii) $(AB)^T=B^T.A^T$
    (iv) $(kA)^T=k.A^T$, जहाँ $k\neq 0$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 3.1

1. 8 2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 3. $a = 6$ 4. $1 \times 6,\ 6 \times 1,\ 2 \times 3,\ 3 \times 2$

5. (i) $\begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 3/7 & 1/4 \end{bmatrix}$; (ii) $\begin{bmatrix} 9/2 & 25/2 \\ 9/4 & 9 \end{bmatrix}$; (iii) $\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ 6. $\begin{bmatrix} 1/2 & 2 & 7/2 \\ 1/2 & 1 & 5/2 \end{bmatrix}$

7. $a = 4, b = 2$ या $a = 2, b = 4$ 8. $x = 2, y = -1, z = -2, p = 0$ 9. $a = 1, b = 6, c = 3$

प्रश्नमाला 3.2

1. $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $A - B = \begin{bmatrix} -6 & -3 & 3 \\ 2 & -8 & 9 \end{bmatrix}$ 2. $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -4 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 3 & -20 \\ 38 & -11 \end{bmatrix}$ 10. $a = -1, -2$ 11. $a = 1, b = 4$ 13. $k = -7$ 14. $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

विविध प्रश्नमाला—3

1. $A^2 = 2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ 2. O 3. $\begin{bmatrix} 3 \\ -11 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 5. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

6. $x = -4, y = -7$ 7. 3×4 8. -4 9. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ 10. $\begin{bmatrix} 1 & 6 & -9 \\ 1 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 6 & 7/2 \\ 7/2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3/2 \\ 3/2 & 0 \end{bmatrix}$ 13. $\begin{bmatrix} -16 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ 14. $\begin{bmatrix} 9/2 & 25/2 & 49/2 \\ 8 & 18 & 32 \end{bmatrix}$ 15. 8

16. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ या I_2 17. $-9/8$ 19. $(a^2 + b^2)A$ 21. $k = 1$ 23. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

04

सारणिक
(Determinants)

4.01 परिचय (Introduction)

निम्नलिखित समीकरण निकाय पर विचार कीजिए

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2,$$

इस निकाय को अद्वितीयतः हल किया जा सकता है यदि हमें वास्तविक संख्या $a_1b_2 - b_1a_2$ ज्ञात हो जाए तथा यह शून्य के बराबर न हो। अतः संख्या $a_1b_2 - b_1a_2$ काफी महत्वपूर्ण है तथा इसे x तथा y के गुणांकों से प्राप्त आव्यूह

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

से भी सम्बन्धित किया जा सकता है। उपर्युक्त आव्यूह से सम्बन्धित इस संख्या को आव्यूह की सारणिक कहा जाता है। तथा इसे निम्न रूप से प्रदर्शित किया जाता है।

$$\text{सारणिक} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

या $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

इस सारणिक में दो स्तम्भ तथा दो पंक्ति हैं, अतः इसे दो क्रम का सारणिक कहते हैं।

इसी प्रकार तीन, चार, $\cdots$ इत्यादि क्रम के सारणिक भी प्राप्त किये जा सकते हैं।

टिप्पणी: 1. किसी समीकरण निकाय को अद्वितीयतः हल करने के लिए निकाय में जितने चर हो उतने ही समीकरणों की आवश्यकता होती है। अतः किसी भी सारणिक में पंक्ति एवं स्तम्भों की संख्या सदैव समान होती है।

2. एक आव्यूह को अव्युत्क्रमणीय आव्यूह कहते हैं यदि $|A| = 0$ अर्थात् आव्यूह से सम्बन्धित सारणिक का मान शून्य हो।

4.02 सारणिक की परिभाषा (Definition of Determinant)

माना $A = [a_{ij}]$ एक n क्रम का वर्ग आव्यूह है, तब एक अद्वितीय संख्या (unique number) $|a_{ij}|$ आव्यूह A की सारणिक कहलाती है और इसे सारणिक A या $|A|$ से प्रकट करते हैं।

4.03 सारणिक का मान (Value of Determinant)

(i) एक क्रम की सारणिक का मान

माना $A = [a]$ एक क्रम का वर्ग आव्यूह है, तब सारणिक $A = |A| = a$, सारणिक को मान स्वयं संख्या ही है।

उदाहरणार्थ: यदि $A = [3]$ हो, तब सारणिक $A = |A| = |3| = 3$

यदि $A = [3]$ हो, तब सारणिक $A = |A| = |-3| = -3$

टिप्पणी: उपर्युक्त उदाहरणों से सारणिक एवं मापांक में अन्तर स्पष्ट है अतः एक क्रम की सारणिक को मापांक नहीं समझना चाहिए।

(ii) द्वितीय क्रम की सारणिक का मान

माना $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ एक द्वितीय क्रम का वर्ग आव्यूह है, तब सारणिक

$$A=|A|=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$=a_1|b_2|-b_1|a_2|$$

$$=a_1b_2-a_2b_1, \quad \text{सारणिक } A \text{ का मान है।} \qquad (1)$$

अतः $|A|=$ अग्रग विकर्ण के अवयवों का गुणा $-$ पिछले विकर्ण के अवयवों का गुणा

यहाँ संख्याएँ a_1, b_1, a_2 व b_2 सारणिक के अवयव कहलाते हैं। द्वितीय क्रम की सारणिक में कुल $2^2=4$ अवयव होते हैं। इनमें $a_1 \quad b_1$; $a_2 \quad b_2$ दो पंक्तियाँ तथा $a_1 \quad a_2$; $b_1 \quad b_2$ दो स्तम्भ हैं। समीकरण (1) का दायाँ पक्ष सारणिक का प्रसार कहलाता है।

उदाहरणार्थः $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, तो

$$\text{सारणिक } A=|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot(4)-3\,(-1)$$

$$=8+3=11.$$

(iii) तृतीय क्रम की सारणिक का मान

माना $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ एक, तृतीय क्रम का वर्ग आव्यूह है, तब $[A]$ से सम्बन्धित

$$\text{सारणिक } A=|A|=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-b_1(a_2c_3-a_3c_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2) \qquad (2)$$

$$=(a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3)-(a_3b_2c_1+b_3c_2a_1+c_3a_2b_1) \qquad (3)$$

यहाँ संख्याएँ a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3 सारणिक के अवयव कहलाते हैं। तृतीय क्रम की सारणिक में कुल $3^2=9$ अवयव होते हैं। अवयव a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3 क्रमशः प्रथम, द्वितीय तथा तृतीय पंक्ति बनाते हैं, जबकि अवयव a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3 क्रमशः प्रथम, द्वितीय तथा तृतीय स्तम्भ बनाते हैं। a_1, b_2, c_3 अग्रग विकर्ण के अवयव और $a_3. b_2, c_1$ पिछले विकर्ण के अवयव हैं। समीकरण (2) का दायाँ पक्ष, सारणिक की प्रथम पंक्ति से सारणिक का प्रसार कहलाता है।

4.04 तृतीय क्रम की सारणिक के प्रसार के नियम (Rules to expand third order determinant)

(i) प्रथम पंक्ति के अवयवों को एकान्तर क्रम से धनात्मक तथा ऋणात्मक चिह्न लगाकर लिखे।

(ii) इन चिह्नों सहित अवयवों को, द्वितीय क्रम की उन सारणिकों से क्रमशः गुणा करें जो उस पंक्ति व स्तम्भ का दमन (supress) करने पर प्राप्त होती है जिसमें यह अवयव स्थित है।

(iii) इन गुणनफलों का योग, तृतीय क्रम की सारणिक का मान होता है।

उदाहरणार्थ: सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 1(3\times2-1\times0)-2(2\times2-3\times1)+0(2\times0-3\times3)$$
$$= 1(6)-2(1)+0$$
$$= 6-2$$
$$= 4.$$

4.05 तृतीय क्रम की सारणिक का मान ज्ञात करने का सारूस आकृति (Sarrus diagram to determine the vlaue of third order determinant)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right.$$
$$= (a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3) - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1)$$

टिप्पणी: सारूस आकृति से सारणिक का मान ज्ञात करने के लिए उपर्युक्त आकृतिानुसार तीन **अग्रणी विकर्णों** (Leading diagonals) के अवयवों के गुणन के योग में से, तीन पिछले विकर्णों के अवयवों के गुणन के योग को घटाते हैं।

उदाहरणार्थ: सारणिक
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 2 & 4 \end{array}\right.$$
$$= (30+28-12)-(-10+28+36)$$
$$= 46-54 = -8.$$

4.06 आव्यूह व सारणिक में अन्तर (Difference between matrix and determinant)

(i) आव्यूह संख्याओं का एक सुव्यवस्थित रूप है एवं उसका कोई संख्यात्मक मान नहीं होता है जबकि सारणिक का एक निश्चित मान (संख्यात्मक) होता है।

(ii) आव्यूह किसी भी क्रम के हो सकते है जबकि सारणिक में पंक्तियों एवं स्तम्भों की संख्या बराबर होती है।

(iii) आव्यूह की पंक्तियों को स्तम्भों एवं स्तम्भों को पंक्तियों से बदलने पर एक नया आव्यूह प्राप्त होता है जबकि ऐसा करने पर सारणिक के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता है। जिसे हम आगे सिद्ध करेंगे।

4.07 सारणिक के उपसारणिक (लघुसारणिक) तथा सहखण्ड (Minors and confactors of a determinant)

उपसारणिक: एक सारणिक के दिए गए अवयव से गुजरने वाली पंक्ति एवं स्तम्भ के दमन (supress) करने पर जो शेष सारणिक प्राप्त होता है वह उस अवयव की उपसारणिक कहलाता है।

उदाहरणार्थ: $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ सारणिक के अवयव a_2, द्वितीय पंक्ति व प्रथम स्तम्भ में है यदि Δ में द्वितीय पंक्ति व प्रथम स्तम्भ को छोड़ दिया जाए तो शेष सारणिक निम्न प्राप्त होगी।

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ या } \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ जो अवयव a_2 की उपसारणिक है।

इसी प्रकार Δ के अवयव c_3 की उपसारणिक

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ या } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$ है।

इस प्रकार व्यापक रूप में किसी $n \times n$ क्रम की सारणिक में i वीं पंक्ति एवं j वें स्तम्भ के प्रतिच्छेदन पर स्थिति अवयव a_{ij} की उपसारणिक i वीं पंक्ति एवं j वें स्तम्भ का दमन करने पर शेष बची हुई $(n-1)\times(n-1)$ क्रम का सारणिक होगा।

सारणिक के किसी भी अवयव a_{ij} से सम्बन्धित उपसारणिक को सामान्यतया उसके संगत बड़े अक्षर A_{ij} से प्रकट करते हैं। जैसे अवयव a_{11} की उपसारणिक को A_{11} से तथा अवयव a_{12} की उपसारणिक को A_{12} से प्रकट करते हैं।

उदाहरणार्थः सारणिक $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ में अवयव 1 का उपसारणिक $|2|$ होगा।

सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 7 & 0 & 5 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ में अवयव 3 की उपसारणिक $\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}$ एवं अवयव 7 की उपसारणिक $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$ होगा।

सहखण्डः किसी भी सारणिक में i वीं पंक्ति एवं j वें स्तम्भ के प्रतिच्छेदन पर स्थित अवयव a_{ij} का सहखण्ड

$$F_{ij} = (-1)^{i+j} \text{ उपसारणिक}$$

$$\Rightarrow \qquad F_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij},$$

जहाँ A_{ij} एवं F_{ij} अवयव a_{ij} के क्रमशः उपसारणिक एवं सह-खण्ड को प्रकट करते हैं।

अर्थात्
$$F_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & \text{जब } i+j \text{ समसंख्या है।} \\ -A_{ij}, & \text{जब } i+j \text{ विषम संख्या है।} \end{cases}$$

उदाहरणार्थः
$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix}$$ हो, तब

अवयव 7 का सह-खण्ड $= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 6-0=6$

अवयव –5 का सह-खण्ड $= (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -(0-2)=2$

अवयव 4 का सह-खण्ड $= (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-4)=4$

टिप्पणीः (i) शीघ्र गणना के लिए 2 व 3 क्रम की सारणिक में सह-खण्डों के चिह्न संगत स्थिति के अनुसार निम्न प्रकार होते हैं :

$$\begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

(ii) सारणिक में किसी अवयव की स्थिति के अनुसार पंक्ति एवं स्तम्भ का योग सम या विषम होने के अनुसार ही सम्बन्धित उपसारणिक एवं सह–खण्ड के चिह्न समान या विपरीत होंगे।

4.08 सारणिक का प्रसार (Expansion of determinants)

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ एक तृतीय क्रम का सारणिक है।

हम जानते हैं कि इसका प्रथम पंक्ति से विस्तार करने पर निम्न व्यंजक प्राप्त होता है :

$$\Delta=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$=a_{11}A_{11}-a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13},$ जहाँ A_{11}, A_{12} एवं A_{13} संगत अवयवों के उपसारणिक हैं।

$=a_{11}F_{11}+a_{12}F_{12}+a_{13}F_{13},$ जहाँ F_{11}, F_{12} एवं F_{13} इनके संगत अवयवों के सह-खण्ड हैं।

इसी प्रकार हम देख सकते हैं कि

$$\Delta=a_{21}F_{21}+a_{22}F_{22}+a_{23}F_{23}$$

$$\Delta=a_{11}F_{11}+a_{21}F_{21}+a_{31}F_{31}$$

$\Delta=a_{13}F_{13}+a_{23}F_{23}+a_{33}F_{33}$ आदि।

अतः स्पष्ट है कि किसी सारणिक Δ का मान उसके किसी भी पंक्ति या स्तम्भ के समस्त अवयवों के एवं उनके संगत सह-खण्डों से गुणनफल के योग के बराबर होता है।

टिप्पणीः (i) सारणिक का विस्तार किसी भी पंक्ति या स्तम्भ के अनुसार किया जा सकता है।

(ii) सारणिक के प्रसार का यह नियम किसी भी क्रम की सारणिक के लिए सत्य है।

(iii) सारणिक का मान शीघ्र प्राप्त करने के लिए इसका प्रसार उस पंक्ति या स्तम्भ के अनुसार करें, जिसके अधिकतम अवयव शून्य हो।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=(-6)-(8)=-14.$

उदाहरण-2. सारणिक $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}=\left(\cos^2\theta\right)-\left(-\sin^2\theta\right)$

$$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1.$$

उदाहरण-3. सारणिक $\begin{vmatrix} 3 & 11 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 10 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः $\begin{vmatrix} 3 & 11 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 10 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ का प्रसार तृतीय स्तम्भ के अनुसार करने पर

$$=-1\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 3 \end{vmatrix}-0+0=-(15-20)=5.$$

उदाहरण-4. यदि सारणिक $\begin{vmatrix} k & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$ हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल: दिया हुआ है $\begin{vmatrix} k & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$

$$\Rightarrow \quad 4k - 16 = 4$$
$$\Rightarrow \quad k = 5.$$

उदाहरण-5. यदि सारणिक $\begin{vmatrix} k & 3 \\ -1 & k \end{vmatrix} = 7$ हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल: दिया हुआ है $\begin{vmatrix} k & 3 \\ -1 & k \end{vmatrix} = 7$

$$\Rightarrow \quad k^2 - (-3) = 7 \quad \Rightarrow \quad k^2 + 3 = 7$$
$$\Rightarrow \quad k^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad k = \pm 2.$$

उदाहरण-6. यदि सारणिक $A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 7 \end{vmatrix}$ हो, तो दूसरी पंक्ति के सभी अवयवों के उपसारणिक एवं सह-खण्ड लिखिए तथा सारणिक का मान भी ज्ञात कीजिए।

हल: $A_{21} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 28 - 3 = 25, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 14 - (-1) = 15, \quad A_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - (-4) = 10$

$$\therefore \quad F_{21} = -A_{21} = -25, \quad F_{22} = A_{22} = 15, \quad F_{23} = -A_{23} = -10$$

अत: सारणिक A का मान $= 8 \cdot F_{21} + 5 \cdot F_{22} + 2 \cdot F_{23}$

$$= 8(-25) + 5(15) + 2(-10)$$
$$= -200 + 75 - 20 = -145.$$

उदाहरण-7. सारणिक $\begin{vmatrix} 3 & -7 & 13 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 2 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ द्वितीय पंक्ति में दो शून्य हैं अत: द्वितीय पंक्ति के अनुसार प्रसार करने पर

$$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 13 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 2 \end{vmatrix} = 5 \times (-1) \begin{vmatrix} -7 & 13 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} + 0 - 0$$

$$= -5[-14 - 143] = 785.$$

प्रश्नमाला 4.1

1. k के किस मान के लिए सारणिक $\begin{vmatrix} k & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$ का मान शून्य होगा ?

2. यदि $\begin{vmatrix} x & y \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ हो, तो $x : y$ ज्ञात कीजिए।

3. यदि $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ y & x \end{vmatrix} = 4$ तथा $\begin{vmatrix} x & y \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 7$ हो, तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए।

4. यदि $\begin{vmatrix} x-1 & x-2 \\ x & x-3 \end{vmatrix} = 0$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

5. निम्न सारणिकों में प्रथम स्तम्भ के अवयवों की उपसारणिक एवं सह-खण्ड लिखकर उसका मान भी ज्ञात कीजिए।

(i) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$

6. सारणिक $\begin{vmatrix} 3 & -11 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ -10 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

7. सिद्ध कीजिए: $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2 \cdot$

4.09 सारणिक के गुणधर्म (Properties of determinants)

(i) यदि किसी सारणिक में समस्त पंक्तियों को स्तम्भों में और स्तम्भों को पंक्तियों में बदल दें, तो सारणिक के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

उपपत्ति: माना
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

तथा
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

जो Δ की पंक्तियों को स्तम्भों में एवं स्तम्भों को पंक्तियों में बदलने पर प्राप्त होती है।

$$\therefore \quad \Delta = \left|\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{array}$$ सारूस आकृति से

$$\Delta = (a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3) - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1) \quad (1)$$

तथा $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix}$ सारूस आकृति से

$$\Delta_1 = (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) - (c_1b_2a_3 + c_2b_3a_1 + c_3b_1a_2) \qquad (2)$$

अतः (1) एवं (2) से $\Delta = \Delta_1$

अतः $|A^T| = |A|$, जहाँ A^T, वर्ग आव्यूह A की परिवर्त आव्यूह है।

(ii) यदि किसी सारणिक में दो पंक्तियों या दो स्तम्भों को परस्पर विनिमय (Inter-change) किया जाए, तो सारणिक का संख्यात्मक मान तो वही रहता है लेकिन उसका चिह्न बदल जाता है।

उपपत्तिः माना $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

तथा $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$,

जो Δ के प्रथम व द्वितीय स्तम्भों को विनिमय करने से प्राप्त होती है।

$\therefore$ $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$ सारूस आकृति से

$$\Delta = (a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3) - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1) \qquad (1)$$

तथा $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{matrix}$ सारूस आकृति से

$$\Delta_1 = (b_1a_2c_3 + a_1c_2b_3 + c_1b_2a_3) - (b_3a_2c_1 + a_3c_2b_1 + c_3b_2a_1) \qquad (2)$$

अतः (1) एवं (2) से $\Delta_1 = -\Delta$

(iii) यदि किसी सारणिक में कोई दो पंक्तियाँ या दो स्तम्भ सर्वसम (Identical) हो, तो सारणिक का मान शून्य होता है।

उपपत्तिः $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ a & b \\ x & y \end{matrix}$ सारूस आकृति से

$$= (abz + bcx + cay) - (xbc + yca + zab)$$

$$= 0.$$

और $\begin{vmatrix} x & a & x \\ y & b & y \\ z & c & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a & x \\ y & b & y \\ z & c & z \end{vmatrix} \begin{matrix} x & a \\ y & b \\ z & c \end{matrix}$ सारूस आकृति से

$$= (xbz + ayz + xyc) - (zbx + cyx + zya)$$

$$= 0.$$

(iv) यदि किसी सारणिक में एक पंक्ति या एक स्तम्भ के सभी अवयवों को किसी अशून्य संख्या से गुणा कर दिया जावे तो प्राप्त सारणिक का मान, मूल सारणिक के मान तथा संख्या के गुणनफल के बराबर होता है।

उपपत्तिः माना $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

तथा $$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & kb_3 & kc_3 \end{vmatrix},$$

जो कि Δ की तृतीय पंक्ति को k से गुणा करने पर प्राप्त होती है।

$\therefore$ सारूस आकृति की सहायता से

$$\Delta = (a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3) - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1) \qquad (1)$$

तथा $$\Delta_1 = \left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & kb_3 & kc_3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ ka_3 & kb_3 \end{matrix}$$ सारूस आकृति से

$$\Delta_1 = (a_1b_2kc_3 + b_1c_2ka_3 + c_1a_2kb_3) - (ka_3b_2c_1 + kb_3c_2a_1 + kc_3a_2b_1)$$

$$= k\{(a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3) - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1)\}$$

$$= k\Delta$$

अतः $\Delta_1 = k\Delta$

उपप्रमेयः यदि किसी सारणिक Δ के प्रत्येक अवयव को k से गुणा करने पर प्राप्त सारणिक Δ_1 हो, तो

$\Delta_1 = k\Delta$, जब Δ का क्रम एक है।

$\Delta_1 = k^2\Delta$, जब Δ का क्रम दो है।

$\Delta_1 = k^3\Delta$, जब Δ का क्रम तीन है।

$\Delta_1 = k^4\Delta$, जब Δ का क्रम चार है।

अर्थात् $\Delta_1 = k^n\Delta$ जब Δ का क्रम n है।

(v) यदि किसी सारणिक में किसी पंक्ति या स्तम्भ का प्रत्येक अवयव दो या दो से अधिक संख्याओं का योग हो, तो उस सारणिक को उसकी क्रम की दो या दो से अधिक सारणिकों के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

उपपत्तिः माना $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1+d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

इसका प्रथम स्तम्भ से विस्तार करने पर

$$\Delta = (a_1+d_1)\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - (a_2+d_2)\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + (a_3+d_3)\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= \left\{a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right\} + \left\{d_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - d_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + d_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(vi) सारणिक की किसी पंक्ति या स्तम्भ के प्रत्येक अवयव में किसी अन्य पंक्ति या स्तम्भ के संगत अवयवों का कोई अचर गुणज (multiple) जोड़ने या घटाने से सारणिक के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

उपपत्ति: माना $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

तथा $$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 + kc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

जो Δ के प्रथम स्तम्भ में तृतीय स्तम्भ के संगत अवयवों का k गुणा जोड़ने से प्राप्त हुई है।

$$\therefore \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kc_1 & b_1 & c_1 \\ kc_2 & b_2 & c_2 \\ kc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ [गुणधर्म (v) से]

$$= \Delta + k \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ [गुणधर्म (iv) से]

$$= \Delta + k \times 0$$

$$= \Delta.$$ [गुणधर्म (iii) से]

(vii) सारणिक की किसी पंक्ति या स्तम्भ के अवयवों का किसी अन्य पंक्ति या स्तम्भ के संगत सहखण्डों से गुणा करने पर प्राप्त राशियों का योग शून्य होता है।

उपपत्ति: माना $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta = a_{11}F_{11} + a_{12}F_{12} + a_{13}F_{13}$$ (सारणिक का प्रथम पंक्ति से प्रसार करने से) (2)

(1) में a_{11}, a_{12} एवं a_{13} को क्रमशः a_{21}, a_{22} एवं a_{23} से प्रतिस्थापित करने पर

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$ [गुणधर्म (iii) से] (3)

अतः (1) एवं (3) से $\quad 0 = a_{21}F_{11} + a_{22}F_{12} + a_{23}F_{13}$

इसी प्रकार $\quad 0 = a_{31}F_{11} + a_{32}F_{12} + a_{33}F_{13}$ आदि।

(viii) यदि किसी सारणिक के किसी पंक्ति या स्तम्भ के सभी अवयव शून्य हो, तो सारणिक का मान शून्य होता है।

उपपत्ति: $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ का द्वितीय पंक्ति से प्रसार करने पर

$$= -0 \times \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

(ix) त्रिभुजाकार आव्यूह से सम्बन्धित सारणिक का मान उसके मुख्य विकर्ण के अवयवों का गुणन होता है।

उदाहरणार्थः (i) $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} = ac - 0 = ac$

(ii) $\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix} = ac - 0 = ac$

(iii) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & \ell \end{vmatrix} = \ell \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & x \end{vmatrix} = \ell(ax) = a\ell x$

(iv) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & x & 0 \\ c & y & \ell \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} x & 0 \\ y & \ell \end{vmatrix} = a(x\ell - 0) = a\ell x$

उपप्रमेयः $|I_n| = 1$, जहाँ I_n, n क्रम की इकाई आव्यूह है।

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(x) यदि किसी सारणिक में x के बहुपद हों और x के स्थान पर a रखने पर सारणिक का मान शून्य हो जाए तो $x-a$ सारणिक के मान का एक गुणनखण्ड होता है।

उदाहरणार्थः $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{vmatrix}$ में $x = a$ तथा $x = b$ रखने पर Δ का मान गुणधर्म (iii) के अनुसार शून्य हो जाता है। अतः $(x-a)$ एवं $(x-b)$ सारणिक के मान के दो गुणनखण्ड हैं।

अतः Δ का हल करने हेतु द्वितीय पंक्ति में से प्रथम पंक्ति व तृतीय पंक्ति में से प्रथम पंक्ति को घटाने पर

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & a-x & a^2-x^2 \\ 0 & b-x & b^2-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-x & a^2-x^2 \\ b-x & b^2-x^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-x)(b-x)\begin{vmatrix} 1 & a+x \\ 1 & b+x \end{vmatrix}$$

$$= (a-x)(b-x)(b+x-a-x)$$

$$= (a-x)(b-x)(b-a)$$

$$= (x-a)(x-b)(b-a)$$

4.10 प्रारम्भिक संक्रियाएँ (Elementary operations)

यदि सारणिक Δ का क्रम $n \geq 2$ तो $R_1, R_2, R_3, \ldots$ से क्रमशः प्रथम पंक्ति, द्वितीय पंक्ति, तृतीय पंक्ति, . . . तथा $C_1, C_2, C_3, \ldots$ से क्रमशः प्रथम स्तम्भ, द्वितीय स्तम्भ, तृतीय स्तम्भ, . . . को प्रकट करते हैं।

(i) संक्रिया $R_i \leftrightarrow R_j$ से तात्पर्य है कि i वीं एवं j वीं पंक्तियों को परस्पर बदला गया है, तथा $C_i \leftrightarrow C_j$ से तात्पर्य है कि i वें एवं j वें स्तम्भों को परस्पर बदला गया है।

(ii) संक्रिया $R_i \to kR_i$ से तात्पर्य है कि i वीं पंक्ति के प्रत्येक अवयव को k से गुणा किया है। जबकि $C_i \to kC_i$ से तात्पर्य है कि i वें स्तम्भ के प्रत्येक अवयव को k से गुणा किया गया है।

(iii) संक्रिया $R_i = R_i + kR_j$ से तात्पर्य है कि i वें पंक्ति के प्रत्येक अवयव में, j वीं पंक्ति के संगत अवयवों को k से गुणा कर जोड़ा गया है, तथा $C_i = C_i + kC_j$ से तात्पर्य है कि i वीं स्तम्भ के प्रत्येक अवयव में j वें स्तम्भ के संगत अवयवों को k से गुणा कर जोड़ा गया है।

4.11 सारणिकों का गुणनफल (Product of determinants)

I. द्वितीय क्रम की दो सारणिकों का गुणनफल निम्न प्रकार किया जाता है।

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2 & a_1\beta_1 + b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2 & a_2\beta_1 + b_2\beta_2 \end{vmatrix} \quad \text{(पंक्ति से स्तम्भ गुणा)}$$

तथा
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 \end{vmatrix} \quad \text{(पंक्ति से पंक्ति गुणा)}$$

$\because \quad |A^T| = |A|$

II. तृतीय क्रम की दो सारणिकों का गुणनफल निम्न प्रकार किया जाता है।

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2 + c_1\alpha_3 & a_1\beta_1 + b_1\beta_2 + c_1\beta_3 & a_1\gamma_1 + b_1\gamma_2 + c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2 + c_2\alpha_3 & a_2\beta_1 + b_2\beta_2 + c_2\beta_3 & a_2\gamma_1 + b_2\gamma_2 + c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 + b_3\alpha_2 + c_3\alpha_3 & a_3\beta_1 + b_3\beta_2 + c_3\beta_2 & a_3\gamma_1 + b_3\gamma_2 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

(पंक्ति से स्तम्भ गुणा)

तथा
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2 & a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 + c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 & a_2\alpha_3 + b_2\beta_3 + c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2 & a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

(पंक्ति से पंक्ति गुणा)

टिप्पणीः दो भिन्न–भिन्न क्रम की सारणिकों का गुणनफल भी सम्भव है।

उदाहरणार्थः $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ तथा $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

$$\Delta_1 \cdot \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 11 \\ 5 & 4 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= 1(50-44) - 2(40-55) + 3(16-25)$$

$$= 6 + 30 - 27 = 9. \quad (1)$$

अब $$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-4 = -3. \qquad (2)$$

तथा $$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1(4-6)-2(8-3)+3(4-1)$$

$$= -2-10+9 = -3. \qquad (3)$$

अत: (1), (2) और (3) से

$$\Delta_1 \cdot \Delta_2 = 9.$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-8. सारणिक $\begin{vmatrix} 49 & 1 & 6 \\ 39 & 7 & 4 \\ 10 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ का मान बिना विस्तार के ज्ञात कीजिए।

हल: संक्रिया $C_1 \to C_1 - 8C_3$ से

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 7 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ [$\because C_1 = C_2$ गुणधर्म (iii) से]

उदाहरण-9. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$ का मान बिना विस्तार के ज्ञात कीजिए।

हल: $$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & c+a+b \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix}$$ (संक्रिया $C_3 \to C_3 + C_2$)

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix}$$ [गुणधर्म (iv) से]

$$= (a+b+c)(0)$$
$$= 0$$ [$\because C_1 = C_3$ गुणधर्म (iii) से]

उदाहरण-10. सारणिक $\begin{vmatrix} a-b & m-n & x-y \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{vmatrix}$ का मान बिना विस्तार के ज्ञात कीजिए।

हल: $$\begin{vmatrix} a-b & m-n & x-y \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{vmatrix}$$

संक्रिया $R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ से

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{vmatrix} = 0$$ [गुणधर्म (viii) से]

उदाहरण-11. सिद्ध कीजिए

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x).$$

हल: वाम पक्ष $= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$

संक्रिया $R_1 \to R_1 - R_2$ तथा $R_2 \to R_2 - R_3$ से

$$= \begin{vmatrix} 0 & x-y & x^2-y^2 \\ 0 & y-z & y^2-z^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

$$= (x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & 1 & x+y \\ 0 & 1 & y+z \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$ [गुणधर्म (iv) से]

प्रथम स्तम्भ से प्रसार करने पर

$$= (x-y)(y-z)\left\{0-0+1\begin{vmatrix} 1 & x+y \\ 1 & y+z \end{vmatrix}\right\}$$

$$= (x-y)(y-z)(y+z-x-y)$$

$$= (x-y)(y-z)(z-x).$$

= दक्षिण पक्ष इतिसिद्धम्

उदाहरण-12. बिना विस्तार के सिद्ध कीजिए कि

$$\Delta = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

हल:

$$\Delta = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2c & c+a & a+b \\ 2r & r+p & p+q \\ 2z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$ (संक्रिया $C_1 \to C_1 + C_2 - C_3$ से)

$$= 2\begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ r & r+p & p+q \\ z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$ [गुणधर्म (iv) से]

$$= 2\begin{vmatrix} c & a & a+b \\ r & p & p+q \\ z & x & x+y \end{vmatrix}$$ (संक्रिया $C_2 \to C_2 - C_1$ से)

$$=2\begin{vmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{vmatrix}$$ (संक्रिया $C_3 \to C_3 - C_2$ से)

$$=-2\begin{vmatrix} a & c & b \\ p & r & q \\ x & z & y \end{vmatrix}$$ (संक्रिया $C_1 \leftrightarrow C_2$ से)

$$=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$ (संक्रिया $C_2 \leftrightarrow C_3$ से)

उदाहरण-13. यदि x, y, z सभी भिन्न-भिन्न हो, तथा

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix}=0$$

हो, तो सिद्ध कीजिए कि $xyz=-1$·

हलः

दिया हुआ है $$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{vmatrix}=0$$ [गुणधर्म (v) से]

$$\Rightarrow -\begin{vmatrix} x & 1 & x^2 \\ y & 1 & y^2 \\ z & 1 & z^2 \end{vmatrix}+xyz\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}=0$$ [गुणधर्म (ii) व (iv) से]

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}+xyz\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}=0$$ [गुणधर्म (ii) से]

$$\Rightarrow (1+xyz)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}=0$$ [उदाहरण 4 से]

$$\Rightarrow (1+xyz)(x-y)(y-z)(z-x)=0$$

$\because$ $x \neq y \neq z \Rightarrow x-y \neq 0, y-z \neq 0$ तथा $z-x \neq 0$

$\Rightarrow$ $1+xyz=0 \Rightarrow xyz=-1$· इतिसिद्धम्

उदाहरण-14. सारणिक $\begin{vmatrix} 1/a & a^2 & bc \\ 1/b & b^2 & ca \\ 1/c & c^2 & ab \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\begin{vmatrix} 1/a & a^2 & bc \\ 1/b & b^2 & ca \\ 1/c & c^2 & ab \end{vmatrix} = \dfrac{1}{abc}\begin{vmatrix} 1 & a^3 & abc \\ 1 & b^3 & abc \\ 1 & c^3 & abc \end{vmatrix}$ (संक्रिया $R_1 \to aR_1$, $R_2 \to bR_2$ तथा $R_3 \to cR_3$ से)

$$= \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} 1 & a^3 & 1 \\ 1 & b^3 & 1 \\ 1 & c^3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ [$\because C_1 = C_3$, गुणधर्म (iii) से]

उदाहरण-15. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$$

हल: वाम पक्ष $= \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & a & b \\ 2(a+b+c) & b+c+2a & b \\ 2(a+b+c) & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$ (संक्रिया $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ से)

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$ [गुणधर्म (iv) से]

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & b+c+a & 0 \\ 0 & 0 & c+a+b \end{vmatrix}$$ (संक्रिया $R_2 \to R_2 - R_1$ तथा $R_3 \to R_3 - R_1$ से)

$$= 2(a+b+c)\left\{1 \cdot \begin{vmatrix} b+c+a & 0 \\ 0 & c+a+b \end{vmatrix}\right\}$$ (प्रथम स्तम्भ से प्रसार करने पर)

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} a+b+c & 0 \\ 0 & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)(a+b+c)^2$$

$$= 2(a+b+c)^3$$

= दक्षिण पक्ष

इतिसिद्धम्

उदाहरण-16. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

हल: वाम पक्ष $= \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$

$$= abc\begin{vmatrix} \frac{1}{a}+1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & 1+\frac{1}{c} \end{vmatrix}$$

(प्रथम, द्वितीय व तृतीय पंक्तियों में से क्रमशः a, b व c बाहर लेने पर)

$$= abc\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & 1+\frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & 1+\frac{1}{c} \end{vmatrix}$$

(संक्रिया $R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ से)

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{b} & 1+\frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & 1+\frac{1}{c} \end{vmatrix}$$

[गुणधर्म (iv) से]

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \frac{1}{b} \\ 0 & -1 & 1+\frac{1}{c} \end{vmatrix}$$

(संक्रिया $C_1 \to C_1 - C_2$ तथा $C_2 \to C_2 - C_3$ से)

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left\{0+0+1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\right\}$$

(प्रथम पंक्ति से प्रसार करने पर)

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(1-0)$$

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

= दक्षिण पक्ष

इतिसिद्धम्।

उदाहरण-17. समीकरण $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ c & x+b & a \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = 0$ को हल कीजिए।

हल: दिया हुआ है $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ c & x+b & a \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} x+a+b+c & b & c \\ x+a+b+c & x+b & a \\ x+a+b+c & b & x+c \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(संक्रिया } C_1 \to C_1 + C_2 + C_3 \text{ से)}$$

या $$(x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & x+b & a \\ 1 & b & x+c \end{vmatrix} = 0$$

या $$(x+a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & -x & c-a \\ 0 & x & a-x-c \\ 1 & b & x+c \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(संक्रिया } R_1 \to R_1 - R_2 \text{ तथा } R_2 \to R_2 - R_3 \text{ से)}$$

या $$(x+a+b+c)\begin{vmatrix} -x & c-a \\ x & a-x-c \end{vmatrix} = 0 \qquad (C_1 \text{ से प्रसार करने पर})$$

या $$(x+a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & -x \\ x & a-x-c \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(संक्रिया } R_1 \to R_1 + R_2 \text{ से)}$$

$\Rightarrow$ $(x+a+b+c)(0+x^2) = 0$

$\Rightarrow$ $x^2(x+a+b+c) = 0$

$\Rightarrow$ $x^2 = 0$ या $x+a+b+c = 0$

$\Rightarrow$ $x = 0$ या $x = -(a+b+c)$

उदाहरण-18. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = (y-z)(z-x)(x-y)(yz+zx+xy)\cdot$$

हल: वाम पक्ष $= \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix}$

$$=\frac{1}{xyz}\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \\ xyz & xyz & xyz \end{vmatrix}$$ (संक्रिया $C_1 \to xC_1, C_2 \to yC_2, C_3 \to zC_3$ से)

$$=\frac{xyz}{xyz}\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ (संक्रिया R_3 में से xyz बाहर लेने पर)

$$=-\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$$ (संक्रिया $R_2 \leftrightarrow R_3$ से)

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$$ (संक्रिया $R_1 \leftrightarrow R_2$ से)

$$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x^2-y^2 & y^2-z^2 & z^2 \\ x^3-y^3 & y^3-z^3 & z^3 \end{vmatrix}$$ (संक्रिया $C_1 \to C_1 - C_2$ व $C_2 \to C_2 - C_3$ से)

$$=\begin{vmatrix} x^2-y^2 & y^2-z^2 \\ x^3-y^3 & y^3-z^3 \end{vmatrix}$$ (R_1 से प्रसार करने पर)

$$=\begin{vmatrix} (x-y)(x+y) & (y+z)(y-z) \\ (x-y)(x^2+xy+y^2) & (y-z)(y^2+yz+z^2) \end{vmatrix}$$

$$=(x-y)(y-z)\begin{vmatrix} x+y & y+z \\ x^2+xy+y^2 & y^2+yz+z^2 \end{vmatrix}$$

$$=(x-y)(y-z)\begin{vmatrix} x+y & z-x \\ x^2+xy+y^2 & yz+z^2-x^2-xy \end{vmatrix}$$ (संक्रिया $C_2 \to C_2 - C_1$ से)

$$=(x-y)(y-z)\begin{vmatrix} x+y & z-x \\ x^2+xy+y^2 & (z-x)(z+x)+y(z-x) \end{vmatrix}$$

$$=(x-y)(y-z)\begin{vmatrix} x+y & z-x \\ x^2+xy+y^2 & (z-x)(z+x+y) \end{vmatrix}$$

$$=(x-y)(y-z)(z-x)\begin{vmatrix} x+y & 1 \\ x^2+xy+y^2 & z+x+y \end{vmatrix}$$

$$=(x-y)(y-z)(z-x)\{(x+y)(z+x+y)-(x^2+xy+y^2)\}$$

$$=(x-y)(y-z)(z-x)\cdot(zx+x^2+xy+yz+xy+y^2-x^2-xy-y^2)$$

$$=(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$$

= दक्षिण पक्ष। इतिसिद्धम्।

उदाहरण-19. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & \log_x y & \log_x z \\ \log_y x & 1 & \log_y z \\ \log_z x & \log_z y & 1 \end{vmatrix}$ का मान बिना प्रसार के ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि $\log_n m = \dfrac{\log m}{\log n}$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} 1 & \log_x y & \log_x z \\ \log_y x & 1 & \log_y z \\ \log_z x & \log_z y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\log y}{\log x} & \dfrac{\log z}{\log x} \\ \dfrac{\log x}{\log y} & 1 & \dfrac{\log z}{\log y} \\ \dfrac{\log x}{\log z} & \dfrac{\log y}{\log z} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\log x \cdot \log y \cdot \log z} \begin{vmatrix} \log x & \log y & \log z \\ \log x & \log y & \log z \\ \log x & \log y & \log z \end{vmatrix}$$

(संक्रिया $R_1 \to \log x \cdot R_1; R_2 \to \log y \cdot R_2; R_3 \to \log z \cdot R_3$ से)

$$= \frac{1}{\log x \cdot \log y \cdot \log z} \times 0 \qquad (\because \; R_1 = R_2 = R_3)$$

$$= 0$$

उदाहरण-20. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3 \cdot$$

हल: वाम पक्ष $= \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} (b+c)^2 - a^2 & 0 & a^2 \\ 0 & (c+a)^2 - b^2 & b^2 \\ c^2 - (a+b)^2 & c^2 - (a+b)^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

(संक्रिया $C_1 \to C_1 - C_3$ एवं $C_2 \to C_2 - C_3$ से)

$$= \begin{vmatrix} (b+c+a)(b+c-a) & 0 & a^2 \\ 0 & (c+a+b)(c+a-b) & b^2 \\ (c+a+b)(c-a-b) & (c+a+b)(c-a-b) & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ c-a-b & c-a-b & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$ (संक्रिया C_1 व C_2 में से $(a+b+c)$ बाहर लेने पर)

$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ -2b & -2a & 2ab \end{vmatrix}$$ (संक्रिया $R_3 \to R_3 - R_1 - R_2$ से)

$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix} b+c & \frac{a^2}{b} & a^2 \\ \frac{b^2}{a} & c+a & b^2 \\ 0 & 0 & 2ab \end{vmatrix}$$ (संक्रिया $C_1 \to C_1 + \frac{C_3}{a}$ एवं $C_2 \to C_2 + \frac{C_3}{b}$ से)

$$=(a+b+c)^2\left\{0+0+2ab\begin{vmatrix} b+c & \frac{a^2}{b} \\ \frac{b^2}{a} & (c+a) \end{vmatrix}\right\}$$ (R_3 से प्रसार करने पर)

$$=(a+b+c)^2 \cdot 2ab\{(b+c)(c+a)-ab\}$$

$$=(a+b+c)^2 \cdot 2ab\left(bc+ab+c^2+ca-ab\right)$$

$$=(a+b+c)^2 \cdot 2ab\left(bc+c^2+ca\right)$$

$$=(a+b+c)^2 \cdot 2abc(b+c+a)$$

$$=2abc(a+b+c)^3 = \text{दक्षिण पक्ष}$$ इतिसिद्धम

उदाहरण-21. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ac-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix}.$$

हल: वाम पक्ष $$=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \times (-1)\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}$$ (द्वितीय सारणिक में $C_2 \leftrightarrow C_3$ से)

$$=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -a & c & b \\ -b & a & c \\ -c & b & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -a^2+bc+bc & -ab+ab+c^2 & -ac+b^2+ac \\ -ab+c^2+ab & -b^2+ac+ac & -bc+bc+a^2 \\ -ac+ac+b^2 & -bc+a^2+bc & -c^2+ab+ab \end{vmatrix}$$ (पंक्ति से पंक्ति गुणा करने पर)

$$= \begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ac-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix}$$

= दक्षिण पक्ष इतिसिद्धम्

प्रश्नमाला 4.2

1. यदि $\begin{vmatrix} \ell & m \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ हो, तो $\ell : m$ ज्ञात कीजिए।

2. सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \\ 1 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ के द्वितीय पंक्ति के अवयवों की उपसारणिक ज्ञात कीजिए।

3. सारणिक $\begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. यदि किसी सारणिक के प्रथम व तृतीय स्तम्भों को आपस में बदल दें तो सारणिक के मान पर क्या प्रभाव पड़ेगा?

5. सिद्ध कीजिए कि:

$$\begin{vmatrix} 1 & yz & y+z \\ 1 & zx & z+x \\ 1 & xy & x+y \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x).$$

6. सारणिक $\begin{vmatrix} 0 & b^2a & c^2a \\ a^2b & 0 & c^2b \\ a^2c & b^2c & 0 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

7. निम्न समीकरण को हल कीजिए

$$\begin{vmatrix} x-2 & 2x-3 & 3x-4 \\ x-4 & 2x-9 & 3x-16 \\ x-8 & 2x-27 & 3x-64 \end{vmatrix} = 0.$$

8. बिना विस्तार के सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & b & q \\ x & a & p \\ z & c & r \end{vmatrix}.$$

9. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} b+c & a+b & a \\ c+a & b+c & b \\ a+b & c+a & c \end{vmatrix} = a^3+b^3+c^3-3abc.$$

10. सारणिक $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

11. यदि ω इकाई का घनमूल हो, तो सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & \omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 1 & \omega \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

12. सिद्ध कीजिए कि:

$$\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2 \cdot$$

13. यदि सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ में $A_1, B_1, C_1, \ldots$ आदि क्रमशः अवयव $a_1, b_1, c_1, \ldots$ आदि के सह-खण्ड हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}.$$

[संकेत : $\Delta \cdot \Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$,

$= \begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^3$ (पंक्ति से पंक्ति को गुणा करने पर)

$\therefore \quad \Delta\Delta' = \Delta^3$ या $\Delta' = \Delta^2$]

विविध प्रश्नमाला–4

1. सारणिक $\begin{vmatrix} \cos 80^\circ & -\cos 10^\circ \\ \sin 80^\circ & \sin 10^\circ \end{vmatrix}$ का मान है

(क) 0 (ख) 1 (ग) –1 (घ) इनमें से कोई नहीं।

2. सारणिक $\begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ में प्रथम स्तम्भ के सह-खण्ड है

(क) $-1, 3$ (ख) $-1, -3$ (ग) $-1, 20$ (घ) $-1, -20$.

3. यदि $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ हो, तो सारणिक $\begin{vmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -8 & -10 & -12 \\ -2 & -4 & -8 \end{vmatrix}$ का मान होगा

(क) -2Δ (ख) 8Δ (ग) -8Δ (घ) -6Δ.

4. निम्न में से कौनसा सारणिक, सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ के समान है?

(क) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ (ख) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}$ (ग) $-\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ (घ) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix}$.

5. सारणिक $\begin{vmatrix} \cos 50^\circ & \sin 10^\circ \\ \sin 50^\circ & \cos 10^\circ \end{vmatrix}$ का मान है

(क) 0 (ख) 1 (ग) $1/2$ (घ) $-1/2$.

6. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{vmatrix}$ का मान है

(क) $ab+bc+ca$ (ख) 0 (ग) 1 (घ) abc.

7. यदि ω इकाई का एक घनमूल हो, तो सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & \omega^4 & \omega^8 \\ \omega^4 & \omega^8 & 1 \\ \omega^8 & 1 & \omega^4 \end{vmatrix}$ का मान है

(क) ω^2 (ख) ω (ग) 1 (घ) 0.

8. यदि $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ हो, तो x का मान है

(क) 6 (ख) 7 (ग) 8 (घ) 0.

9. यदि $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ तथा $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots$ के संगत सह–खण्ड क्रमश $F_{11}, F_{12}, F_{13}, \ldots$ हो, तो सत्य कथन है

(क) $a_{12}F_{12} + a_{22}F_{22} + a_{32}F_{32} = 0$ (ख) $a_{12}F_{12} + a_{22}F_{22} + a_{32}F_{32} \neq \Delta$

(ग) $a_{12}F_{12} + a_{22}F_{22} + a_{32}F_{32} = \Delta$ (घ) $a_{12}F_{12} + a_{22}F_{22} + a_{32}F_{32} = -\Delta$.

10. सारणिक $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ का मान है

(क) $x+y+z$ (ख) $2(x+y+z)$ (ग) 1 (घ) 0.

11. निम्न समीकरण को हल कीजिए:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & x & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

12. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 1 \\ 9 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

13. सारणिक $\begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

14. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2.$$

15. सिद्ध कीजिए कि निम्न समीकरण का एक मूल $x = 2$ है तथा इसके शेष मूल भी ज्ञात कीजिए

$$\begin{vmatrix} x & -6 & -1 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix} = 0.$$

सिद्ध कीजिए: [प्र.सं. 16 से 20]

16. $$\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & c+a+b \end{vmatrix} = 2(a+b)(b+c)(c+a).$$

17. $$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3.$$

18. $\begin{vmatrix} y+z & x & y \\ z+x & z & x \\ x+y & y & z \end{vmatrix} = (x+y+z)(x-z)^2.$

19. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c).$

20. $\begin{vmatrix} \dfrac{a^2+b^2}{c} & c & c \\ a & \dfrac{b^2+c^2}{a} & a \\ b & b & \dfrac{c^2+a^2}{b} \end{vmatrix} = 4abc$ (संकेत: संक्रिया $R_1 \to cR_1, R_2 \to aR_2$ एवं $R_3 \to bR_3$ से)

21. यदि $a+b+c=0$ हो, तो निम्न समीकरण को हल कीजिए

$$\begin{vmatrix} a-x & c & b \\ c & b-x & a \\ b & a & c-x \end{vmatrix} = 0.$$

22. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a+2b \\ a+2b & a & a+b \\ a+b & a+2b & a \end{vmatrix} = 9(a+b)b^2$$

23. यदि $p+q+r=0$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} pa & qb & rc \\ qc & ra & pb \\ rb & pc & qa \end{vmatrix} = pqr\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

(संकेत: वाम पक्ष $= pqr(a^3+b^3+c^3) - abc(p^3+q^3+r^3)$ $\because$ $p+q+r=0 \Rightarrow p^3+q^3+r^3 = 3pqr$

$\therefore$ वाम पक्ष $= pqr(a^3+b^3+c^3-3abc) =$ दक्षिण पक्ष]

24. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} x+4 & 2x & 2x \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x+4 \end{vmatrix} = (5x+4)(x-4)^2$$

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. द्वितीय क्रम का सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \cdot$

2. तृतीय क्रम का सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$ सारूस आकृति से

$$= (a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3) - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1)$$

3. आव्यूह एवं सारणिक में अंतर
   (i) आव्यूह का मान नहीं होता जबकि सारणिक का संख्यात्मक मान होता है।
   (ii) आव्यूह का क्रम कोई भी हो सकता है जबकि सारणिक का क्रम $n \times n$ ही होता है।
   (iii) सारणिक में $|A| = |A^T|$ जबकि आव्यूह में $[A] \neq [A^T] \cdot$

4. उपसारणिक n क्रम की सारणिक में किसी अवयव वाली पंक्ति और स्तम्भ के दमन करने पर जो शेष सारणिक प्राप्त होता है वह उस अवयव की उपसारणिक होता है।

5. सह-खण्ड किसी सारणिक के अवयव a_{ij} का सह-खण्ड $= (-1)^{i+j}$ उप सारणिक

   $\Rightarrow$ अवयव a_{ij} का सह-खण्ड $= a_{ij}$ का उपसारणिक, जब $i + j$ सम है।

   $= -(a_{ij}$ का उपसारणिक), जब $i + j$ विषम है।

6. सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ का विस्तार
   (i) इसके उपसारणिकों के पदों में: $\Delta = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ आदि।
   (ii) इसके सह-खण्डों के पदों में: $\Delta = a_{11}F_{11} + a_{12}F_{12} + a_{13}F_{13}$

7. सारणिक के गुणधर्म:
   (i) किसी सारणिक की समस्त पंक्तियों को स्तम्भों में या स्तम्भों को पंक्तियों में बदल दिया जाए तो सारणिक का मान अपरिवर्तित रहता है।
   (ii) किसी सारणिक की किन्हीं दो पंक्तियों या दो स्तम्भों को परस्पर बदल दिया जाए तो सारणिक का संख्यात्मक मान तो वही रहता है किन्तु चिह्न बदल जाता है।
   (iii) यदि किसी सारणिक में एक पंक्ति या एक स्तम्भ के सभी अवयवों को किसी अशून्य संख्या से गुणा कर दिया जाए तो प्राप्त सारणिक का मान मूल सारणिक के मान एवं उस अशून्य संख्या के गुणनफल के बराबर होता है।
   (iv) किसी सारणिक में किसी पंक्ति या स्तम्भ का प्रत्येक अवयव दो संख्याओं का योग हो, तो सारणिक को उसी क्रम की दो सारणिकों के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।
   (v) किसी सारणिक में किसी पंक्ति (स्तम्भ) के प्रत्येक अवयव में किसी अन्य पंक्ति (स्तम्भ) के संगत अवयवो का कोई अचर गुणज जोड़ने या घटाने पर सारणिक के मान पर कोई भी प्रभाव नहीं पड़ता है।
   (vi) किसी सारणिक की एक पंक्ति या स्तम्भ के सभी अवयव शून्य हों तो उसका मान शून्य होता है।

(vii) सारणिक की किसी पंक्ति या स्तम्भ के अवयवों को किसी अन्य पंक्ति या स्तम्भ के संगत सह-खण्डों से गुणा करने पर प्राप्त राशियों का योग शून्य होता है।

$$a_{11}F_{31} + a_{12}F_{32} + a_{13}F_{33} = 0 \cdot$$

(viii) त्रिभुजाकार आव्यूह से सम्बन्धित सारणिक का मान उसके मुख्य विकर्ण के अवयवों का गुणनफल होता है।

(ix) दो भिन्न-भिन्न क्रम की सारणिकों का गुणनफल भी सम्भव होता है। परन्तु गुणन करने से पूर्व दोनो को समान क्रम के सारणिक बनाना आवश्यक होता है।

(x) दो सारणिकों का गुणा, पंक्ति से स्तम्भ और पंक्ति से पंक्ति नियम से किया जा सकता है।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 4.1

1. $\frac{-8}{3}$ 2. $1:2$ 3. $x = \frac{-5}{2}, y = -3$ 4. $\frac{3}{2}$

5. (i) $A_{11} = -12, A_{21} = -16, A_{31} = -4$

$F_{11} = -12, F_{21} = 16, F_{31} = -4, \quad 40$

(ii) $A_{11} = bc - f^2, \; A_{21} = hc - fg, \; A_{31} = hf - bg$

$F_{11} = bc - f^2, \; F_{21} = fg - hc, \; F_{31} = hf - bg;$

$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

6. 15

प्रश्नमाला 4.2

1. 2 : 3 2. 3 की उपसारणिक $= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$, 6 की उपसारणिक $= \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}$ एवं 5 की उपसारणिक $= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$.

7. 0 8. सारणिक का चिह्न बदल जाएगा। 10. $2a^3b^3c^3$ 11. 4 14. -8 15. 3

विविध प्रश्नमाला–4

1. (ख) 2. (घ) 3. (ग) 4. (ग) 5. (ग) 6. (ख) 7. (घ)
8. (क) 9. (ग) 10. (घ) 11. 5 12. -676 13. $1+a+b+c$

15. $1, -3$ 21. $0, \pm\sqrt{\frac{3}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)}$

❑

05

व्युत्क्रम आव्यूह एवं रैखिक समीकरण (Inverse of a Matrix and Linear Equations)

5.01 व्युत्क्रमणीय आव्यूह (Non-singular Matirx)

यदि किसी वर्ग आव्यूह A की सारणिक $|A| \neq 0$ हो, तो आव्यूह A व्युत्क्रमणीय आव्यूह कहलाता है।

उदाहरणार्थ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है

क्योंकि $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2 \neq 0$

5.2 अव्युत्क्रमणीय आव्यूह (Singular matrix)

यदि किसी वर्ग आव्यूह A की सारणिक $|A| = 0$ हो, तो आव्यूह A अव्युत्क्रमणीय आव्यूह कहलाता है।

जैसे– $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है क्योंकि $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$

5.3 वर्ग आव्यूह का सहखण्डज आव्यूह (Adjoint of a square matrix)

यदि किसी वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ की सारणिक $|A|$ के अवयव a_{ij} का सहखण्ड F_{ij} हो, तो वर्ग आव्यूह $[F_{ij}]$ का परिवर्त आव्यूह को A का सहखण्डज आव्यूह कहते हैं तथा इसे $adjA$ से व्यक्त करते हैं।

अर्थात् यदि $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ तो आव्यूह A की सारणिक $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

तथा $|A|$ के अवयवों के सहखण्डों का आव्यूह

$$[F_{ij}] = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad [F_{ij}]^T = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{21} & F_{31} \\ F_{12} & F_{22} & F_{32} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} \end{bmatrix} = AdjA$$

जैसे– (i) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 2} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}_{2\times 2}$

$\therefore$ सारणिक $|A|$ के अवयव $a_{11}(=2)$ का सहखण्ड $=|5|=5$

$a_{12}(=3)$ का सहखण्ड $=-|4|=-4$

$a_{21}(=4)$ का सहखण्ड $=-|3|=-3$

$a_{22}(=5)$ का सहखण्ड $=|2|=2$

$\therefore$ सारणिक $|A|$ के सहखण्डों का आव्यूह $B=\begin{bmatrix}5 & -4\\ -3 & 2\end{bmatrix}_{2\times 2}$

अतः आव्यूह A की सहखण्डज आव्यूह $adjA=B^T=\begin{bmatrix}5 & -3\\ -4 & 2\end{bmatrix}$

टिप्पणीः लघुविधि द्वितीय क्रम के आव्यूह A का सहखण्डज आव्यूह A के अग्रग विकर्ण के अवयवों का स्थान परिवर्तन तथा पिछले विकर्ण के अवयवों का चिह्न बदलकर प्राप्त कर सकते हैं।

(ii) आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\\ 4 & 6 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\\ 4 & 6 & 4\end{vmatrix}$

$\therefore$ सारणिक A के अवयव $a_{11}(=1)$ का सहखण्ड $=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 6 & 4\end{vmatrix}=-10$

$a_{12}(=2)$ का सहखण्ड $=-\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 4\end{vmatrix}=-8$

$a_{13}(=0)$ का सहखण्ड $=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 4 & 6\end{vmatrix}=22$

$a_{21}(=3)$ का सहखण्ड $=-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 6 & 4\end{vmatrix}=-8$

$a_{22}(=-1)$ का सहखण्ड $=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & 4\end{vmatrix}=4$

$a_{23}(=1)$ का सहखण्ड $=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 6\end{vmatrix}=2$

$a_{31}(=4)$ का सहखण्ड $=\begin{vmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2$

$a_{32}(=6)$ का सहखण्ड $=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-1$

$a_{33}(=4)$ का सहखण्ड $=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-7$

$\therefore$ सहखण्डों का आव्यूह $B = \begin{bmatrix} -10 & -8 & 22 \\ -8 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -7 \end{bmatrix}$

अतः आव्यूह A का सहखण्डज आव्यूह $adjA = B^T = \begin{bmatrix} -10 & -8 & 2 \\ -8 & 4 & -1 \\ 22 & 2 & -7 \end{bmatrix}$

5.04 आव्यूह का व्युत्क्रम (Inverse of a matrix)

यदि A किसी भी क्रम का एक वर्ग आव्यूह है तथा B भी उसी क्रम का एक अन्य वर्ग आव्यूह इस प्रकार हो कि $AB = I = BA$, जहाँ I इसी क्रम का इकाई आव्यूह है, तो आव्यूह B, आव्यूह A का व्युत्क्रम आव्यूह कहलाता है तथा इसे A^{-1} से व्यक्त करते हैं। अतः $B = A^{-1} \Rightarrow AA^{-1} = I = A^{-1}A$ सममित सम्बन्ध $AB = BA$ से स्पष्ट है कि आव्यूह A को भी B का व्युत्क्रम आव्यूह कह सकते हैं। अर्थात् यदि दो आव्यूह A तथा B इस प्रकार हो कि $AB = I = BA$ तो आव्यूह A तथा B परस्पर व्युत्क्रम कहलाते हैं।

5.05 कुछ महत्वपूर्ण प्रमेय (Some important theorems)

प्रमेय–1 एक वर्ग आव्यूह A के व्युत्क्रमणीय होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त शर्त है कि $|A| \neq 0$

प्रमाणः आवश्यक शर्तः माना B, वर्ग आव्यूह A का व्यूत्क्रम आव्यूह है अतः परिभाषा से $AB = BA = I$

$\Rightarrow \quad |AB| = |I|$

$\Rightarrow \quad |A|.|B| = 1 \qquad [\because |I| = 1]$

$\Rightarrow \quad |A| \neq 0$

अतः शर्त आवश्यक है।

पर्याप्त शर्तः माना $|A| \neq 0$ तब

$$A \cdot (adjA) = |A| I = (adjA).A$$

$|A|$ का भाग देने पर

$$A.\frac{adjA}{|A|} = I = \frac{(adjA)}{|A|}.A \qquad [\because |A| \neq O]$$

जो $\quad A.B = I = B.A$ रूप का ही है।

अतः $\quad A^{-1} = B = \frac{adjA}{|A|}$

$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{adjA}{|A|}$

अतः A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

प्रमेय–2 यदि A तृतीय क्रम का वर्ग आव्यूह हो, तो

$$A \cdot (adjA) = |A| I_3 = (adjA) \cdot A, \qquad \text{जहाँ } I_3 \text{ तृतीय क्रम का इकाई आव्यूह है।}$$

प्रमाणः माना $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ एक तृतीय क्रम का वर्ग आव्यूह है।

$$\therefore \qquad adjA=\begin{bmatrix} F_{11} & F_{21} & F_{31} \\ F_{12} & F_{22} & F_{32} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} \end{bmatrix}$$

अतः $$A.(adjA)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_{11} & F_{21} & F_{31} \\ F_{12} & F_{22} & F_{32} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$$ (आव्यूह गुणन सिद्धान्त से)

$$=|A|\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=|A|I_3 \qquad (1)$$

इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हैं कि

$$(adjA)\cdot A=|A|I_3 \qquad (2)$$

अतः (1) व (2) से

$$A\cdot(adjA)=|A|I_3=(adjA)\cdot A$$ इति सिद्धम्

टिप्पणीः यदि A तथा B, n क्रम का वर्ग आव्यूह है, तो

(i) $A.(adjA)=|A|I_n=(adjA).A$

(ii) $adj(adjA)=|A|^{n-2}A$

(iii) $adjA^T=(adjA)^T$

(iv) $adj(AB)=adjB.adjA$

प्रमेय–3 प्रत्येक व्युत्क्रमणीय आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह अद्वितीय (unique) होता है।

प्रमाणः माना A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है तथा B व C इसके दो व्युत्क्रम आव्यूह है, तब

$AB=BA=I$ (1)

तथा $AC=CA=I$ (2)

अब $AB=I \Rightarrow C(AB)=CI \Rightarrow (CA)B=CI$ (साहचर्यता से)

$\Rightarrow$ $I\,B=CI$ [(2) के प्रयोग से]

$\Rightarrow$ $B=C$

अतः व्युत्क्रमणीय आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह अद्वितीय होता है।

प्रमेय–4 यदि A तथा B एक ही क्रम के व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह है तो $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

प्रमाणः $\because$ A तथा B एक ही क्रम के वर्ग आव्यूह है।

$\therefore$ गुणन AB सम्भव है।

$\because$ A तथा B व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

$\therefore \quad |A| \neq 0$ तथा $|B| \neq 0$

$\Rightarrow \quad |AB| = |A||B| \neq 0$

$\Rightarrow \quad AB$ व्यूत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह है।

अब एक आव्यूह C इस प्रकार लें कि $C = B^{-1}A^{-1}$

अतः $\quad (AB)C = (AB)(B^{-1}A^{-1})$

$= A.(BB^{-1})A^{-1}$ (साहचर्यता से)

$= A.I.A^{-1}$ $[\because BB^{-1} = I]$

$= AA^{-1} = I$

इसी प्रकार $\quad C(AB) = (B^{-1}A^{-1})(AB)$

$= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB$ $[\because A^{-1}A = I]$

$= B^{-1}B = I$

$\therefore \quad (AB)C = C(AB)$

अतः आव्यूह AB का एक मात्र व्युत्क्रम आव्यूह C है।

$\therefore \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

व्यापकताः $\quad (ABC...XYZ)^{-1} = Z^{-1}Y^{-1}X^{-1}...B^{-1}A^{-1}$

प्रमेय–5 यदि A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है तो आव्यूह A^T भी व्युत्क्रमणीय होगा तथा $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

प्रमाणः $\because \quad |A| = |A^T| \quad |A| \neq 0$ $(\because A$ व्युत्क्रमणीय है)

$\therefore \quad |A^T| \neq 0$

अतः आव्यूह A^T भी व्युत्क्रमणीय है।

$\because \quad A$ व्युत्क्रमणीय है $\Rightarrow A^{-1}$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि

$AA^{-1} = I = A^{-1}A$

$\Rightarrow \quad (AA^{-1})^T = I^T = (A^{-1}A)^T$

$\Rightarrow \quad (A^{-1})^T A^T = I = A^T(A^{-1})^T$ $[\because (AB)^T = B^T A^T]$

$\Rightarrow \quad A^T$ का एक मात्र व्यूत्क्रम $(A^{-1})^T$ है।

$\Rightarrow \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो

(i) A का सहखण्डज आव्यूह $(adjA)$ ज्ञात कीजिए।

(ii) सिद्ध कीजिए कि $A.(adjA) = |A| I_2 = (adjA).A$

(iii) A^{-1} ज्ञात कीजिए।

(iv) सिद्ध कीजिए कि $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

हल: (i) $\because$ दिया आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

$\therefore$ $a_{11}(=1)$ का सहखण्ड $=4$

$a_{12}(=3)$ का सहखण्ड $=-2$

$a_{21}(=2)$ का सहखण्ड $=-3$

$a_{22}(=4)$ का सहखण्ड $=1$

अतः $adjA=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}4 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ (1)

(ii) $|A|=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix}=4-6=-2.$

अतः $A\cdot(adjA)=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}4 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-6 & -3+3\\ 8-8 & -6+4\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=|A|I_2$ (2)

तथा $(adjA).A=\begin{bmatrix}4 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-6 & 12-12\\ -2+2 & -6+4\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=|A|I_2.$ (3)

(2) व (3) से $A\cdot(adjA)=|A|I_2=(adjA)\cdot A$ इति सिद्धम्।

(iii) $A^{-1}=\dfrac{adjA}{|A|}=\dfrac{-1}{2}\begin{bmatrix}4 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 3/2\\ 1 & -1/2\end{bmatrix}$ (4)

(iv) $\because$ $A^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 3/2\\ 1 & -1/2\end{bmatrix}$

$\therefore$ $(A^{-1})^T=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{bmatrix}$ (5)

तथा $A^T=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow|A^T|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0$

$\therefore$ $(A^T)^{-1}$ का अस्तित्व है।

$adj(A^T)=\begin{bmatrix}4 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$

$$\because \quad (A^T)^{-1} = \frac{adj(A^T)}{|A^T|} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

(5) व (6) से $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$. इति सिद्धम्।

उदाहरण-2. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए।

हल: $\because \quad A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad |A| = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

अतः $|A| \neq 0$ अर्थात् A^{-1} का अस्तित्व है।

$$adjA = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

उदाहरण-3. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि $A^{-1}A = I_3$

हल: दिया है आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(6-1) - 2(4-3) + 3(2-9) = 5 - 2 - 21 = -18 \neq 0.$$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

अब $adjA = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

अतः $\therefore$ $$A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = -\frac{1}{18}\begin{bmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

अतः $$A^{-1}A = -\frac{1}{18}\begin{bmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{18}\begin{bmatrix} 5-2-21 & 10-3-7 & 15-1-14 \\ -1-14+15 & -2-21+5 & -3-7+10 \\ -7+10-3 & -14+15-1 & -21+5-2 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{18}\begin{bmatrix} -18 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3.$$

इति सिद्धम्।

उदाहरण-4. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

हल: यहाँ $$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \qquad (1)$$

$\therefore$ A^{-1} का अस्तित्व है।

तथा $$|B| = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \qquad (2)$$

$\therefore$ B^{-1} का अस्तित्व है।

अतः $$AB = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18+49 & 24+63 \\ 12+35 & 16+45 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 67 & 87 \\ 47 & 61 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

$\therefore$ $$(AB)^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 61 & -87 \\ -47 & 67 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

तथा $$B^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

$$\because \qquad B^{-1}A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 45+16 & -63-24 \\ -35-12 & 49+18 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 61 & -87 \\ -47 & 67 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

अतः (4) व (7) से $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. इति सिद्धम्।

उदाहरण-5. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि: $A^2 - 4A + I = 0$, जहाँ $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ एवं $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा A^{-1} भी ज्ञात कीजिए।

हल: $\because \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3 & 6+6 \\ 2+2 & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

अतः $A^2 - 4A + I = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -12 \\ -4 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7-8+1 & 12-12+0 \\ 4-4+0 & 7-8+1 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$, यहाँ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0$.

$\therefore \qquad A^{-1}$ का अस्तित्व है।

अब $\quad A^2 - 4A + I = 0 \qquad \Rightarrow A^2 - 4A = -I \qquad \Rightarrow A(A-4I) = -I$

$\Rightarrow A^{-1}A(A-4I) = -A^{-1}I \qquad \Rightarrow (A^{-1}A)(A-4I) = -A^{-1} \qquad \Rightarrow I(A-4I) = -A^{-1}$

$\Rightarrow A - 4I = -A^{-1} \qquad \Rightarrow A^{-1} = 4I - A$

$$\Rightarrow A^{-1} = 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

प्रश्नमाला 5.1

1. x के किस मान के लिए आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & 2 & -3 \end{bmatrix}$ अव्युत्क्रमणीय है।

2. यदि आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ हो, तो $adjA$ ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि $A\cdot(adjA)=|A|I_3=(adjA)\cdot A$

3. निम्नलिखित आव्यूह के व्युत्क्रमणीय आव्यूह ज्ञात कीजिए

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

4. यदि आव्यूह $A=F(\alpha)=\begin{bmatrix} \cos\propto & -\sin\propto & 0 \\ \sin\propto & \cos\propto & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि

(i) $A^{-1}A=I_3$ (ii) $A^{-1}=F(-\alpha)$ (iii) $A\cdot(adjA)=|A|I=(adjA)\cdot A$

5. यदि $A=\frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}$ तो सिद्ध कीजिए कि $A^{-1}=A^T$

6. यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A^{-1}=A^3$

7. यदि $A=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो $(AB)^{-1}$ ज्ञात कीजिए।

8. यदि $A=\begin{bmatrix} 1 & \tan\alpha \\ -\tan\alpha & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A^T A^{-1}=\begin{bmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$

9. सिद्ध कीजिए कि आव्यूह $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ समीकरण $x^2-6A+7=0$ को सन्तुष्ट करता है तथा A^{-1} भी ज्ञात कीजिए।

10. यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A^2+4A-42I=0$ तत्पश्चात A^{-1} ज्ञात कीजिए।

5.06 सारणिकों के अनुप्रयोग (Applications of daterminants)

1. त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of a triangle)

यदि एक त्रिभुज के शीर्ष $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ तथा (x_3, y_3) हो, तो हम जानते हैं

त्रिभुज का क्षेत्रफल $\Delta = \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_1) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$ (1)

तथा $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1\begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} - x_2\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + x_3\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}$ (प्रथम स्तम्भ से प्रसार करने पर)

$= x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$ (2)

(1) व (2) से $\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

अतः शीर्ष $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ तथा (x_3, y_3) वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल होता है $\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

टिप्पणी: चूंकि क्षेत्रफल हमेशा एक धनात्मक राशि होती है, इसलिए क्षेत्रफल ज्ञात करते समय सारणिक का धनात्मक मान (positive value) ही लिया जाता है।

उदाहरणार्थ: त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जबकि त्रिभुज के शीर्ष $A(-3, 3), B(2, 3)$ तथा $C(2, -2)$ हैं।

हल: $\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\left\{-3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\right\}$

$= \frac{1}{2}\{-3(3+2) - 3(2-2) + 1(-4-6)\}$

$= \frac{1}{2}(-15 + 0 - 10)$

$= \frac{-25}{2} = -12.5$ वर्ग इकाई

$\because$ त्रिभुज का क्षेत्रफल एक धनात्मक राशि होती है अतः $\Delta = 12.5$ वर्ग इकाई।

2. तीन बिन्दुओं के संरेखीय होने की शर्त (Condition of collinearity of three points)

यदि तीन बिन्दु $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ तथा $C(x_3, y_3)$ संरेखीय है, तो त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल शून्य होगा।

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

उदाहरणार्थः बिन्दु $A(3,-2), B(5,2)$ तथा $C(8,8)$ संरेखीय हैं अतः

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 8 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\{3(2-8)+2(5-8)+1(40-16)\}$$

$$= \frac{1}{2}(-18-6+24) = 0$$

3. दो बिन्दुओं से गुजरने वाली रेखा का समीकरण (Equation of a line passing through two points)

यदि दो बिन्दु $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ है तथा माना $P(x, y)$, AB से गुजरने वाली रेखा पर स्थित है, तो बिन्दु P, A तथा B संरेखीय होंगे। अतः

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

जो कि रेखा का अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरणार्थः बिन्दु $A(3,1)$ तथा $B(9,3)$ से गुजरने वाली रेखा का समीकरण $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \quad x(1-3)-y(3-9)+1(9-9)=0$$

$$\Rightarrow \quad -2x+6y=0$$

$$\Rightarrow \quad x-3y=0$$

5.07 रैखिक समीकरण निकाय का हल (Solution of system of linear equations)

यदि समीकरण निकाय

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

में $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ हो, तो निकाय समघाती (Homogeneous) कहलाता है अन्यथा विषमघाती (Non-Homogeneous) कहलाता है।

यहाँ हम विषमघाती रैखिक समीकरण निकाय का हल ज्ञात करेंगे।

1. सारणिकों के प्रयोग से: क्रेमर नियम (Cramer's rule)

(i) दो चरों वाले रैखिक समीकरण निकाय के हल (Solution of system of linear equations of two variables)

दो चरों वाले रैखिक समीकरण निकाय

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad (1)$$
$$a_2x + b_2y = c_2 \qquad (2)$$

के हल क्रेमर नियम से

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

या $$\frac{x}{\Delta_1} = \frac{y}{\Delta_2} = \frac{1}{\Delta}, \ \Delta \neq 0 \qquad \text{(समर्मित रूप में)}$$

जहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ तथा $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

प्रमाण: $\because$ $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$\therefore$ $$x\Delta = x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x & b_1 \\ a_2x & b_2 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ $$x\Delta = \begin{vmatrix} a_1x + b_1y & b_1 \\ a_2x + b_2y & b_2 \end{vmatrix} = \Delta_1 \qquad \text{(संक्रिया } C_1 \to C_1 + yC_2 \text{ से)}$$

$\Rightarrow$ $$x\Delta = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta_1 \qquad \text{(समीकरण (1) व (2) के प्रयोग से)}$$

इसी प्रकार $$y\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \Delta_2$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} \text{ तथा } y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \text{ जहाँ } \Delta \neq 0$$

विशेष स्थिति: यह समीकरण निकाय वास्तव में दो सरल रेखाओं को निरूपित करता है:

(क) यदि $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ हो, तो निकाय का हल अद्वितीय है तथा निकाय संगत एवं स्वतंत्र है।

(ख) यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ हो, तो निकाय का हल संभव नहीं है तथा निकाय अंसगत है।

(ग) यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ हो, तो निकाय के अनन्त हल हैं तथा निकाय संगत तो है परन्तु स्वतंत्र नहीं है।

(ii) तीन चरों वाले रैखिक निकाय के हल (Solution of system of linear equation for three variables)

तीन चरों वाले रैखिक समीकरण निकाय

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \qquad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \qquad (2)$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \qquad (3)$$

के हल क्रेमर नियम से $\quad x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$

या $\quad \frac{x}{\Delta_1} = \frac{y}{\Delta_2} = \frac{z}{\Delta_3} = \frac{1}{\Delta} \quad ;\Delta \neq 0$ (सममित रूप)

जहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ तथा $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$

प्रमाण: $\because \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$\therefore \quad x\Delta = x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

या $\quad x\Delta = \begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ (संक्रिया $C_1 \to C_1 + yC_2 + zC_3$)

या $\quad x\Delta = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta_1$ (समीकरण (1), (2) तथा (3) के प्रयोग से)

इसी प्रकार $y\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta_2$ तथा $z\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \Delta_3$

$\therefore \quad x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ तथा $z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$ बशर्ते $\Delta \neq 0$

विशेष स्थितिः (i) यदि $\Delta \neq 0$ हो, तो समीकरण निकाय संगत होता है तथा निकाय का हल अद्वितीय होगा।

(ii) यदि $\Delta = 0$ तथा $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ हो, तो समीकरण निकाय संगत या असंगत हो सकता है। यदि निकाय संगत है तो उसके अनन्त हल होंगे।

(iii) यदि $\Delta = 0$ तथा $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ में से कोई एक अशून्य हो, तो समीकरण निकाय अंसगत होगा तथा निकाय का हल सम्भव नहीं होगा।

2. आव्यूह सिद्धान्त की सहायता सेः

माना हमें निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल करना हैः

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{array}\right\} \quad (1)$$

इसी समीकरण निकाय को हम आव्यूह रूप में निम्न प्रकार लिख सकते हैं

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

या $\quad AX = B \quad (3)$

जहाँ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

यहाँ आव्यूह A को चरों x, y, z का गुणांक आव्यूह कहते हैं तथा X समीकरण निकाय में उपस्थित चरों का आव्यूह है जिनके मान हमें ज्ञात करने हैं।

अब यदि $|A| \neq 0$ तो समीकरण (3) से

$$AX = B$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow \quad (A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow \quad I\,X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow \quad X = A^{-1}B$$

टिप्पणीः (i) $|A| \neq 0$, तो A^{-1} का अस्तित्व होगा।

(ii) $|A| = 0$, तो A^{-1} का अस्तित्व नहीं होगा। इसका तात्पर्य यह नहीं है कि समीकरण निकाय का हल नहीं होगा।

जैसे– $x+3y=5$

$2x+6y=10,$

यहाँ $|A|=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{vmatrix}=0$ परन्तु इस निकाय के अनन्त हल होंगे।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-6. त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जबकि त्रिभुज के शीर्ष $A(2,3), B(-5,4)$ तथा $C(4,3)$ हैं।

हलः त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

$$\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ -5 & 4 & 1\\ 4 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\{2(4-3)+5(3-3)+4(3-4)\}$$

$$=\frac{1}{2}(2+0-4)$$

$$=-1$$

$=1$ (संख्यात्मक मान) वर्ग इकाई।

उदाहरण-7. यदि बिन्दु $(x,-2), (5,2), (8,8)$ संरेख हैं, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हलः $\because$ दिए बिन्दु $(x,-2), (5,2)$ तथा $(8,8)$ संरेख हैं

$$\therefore \quad \begin{vmatrix}x & -2 & 1\\ 5 & 2 & 1\\ 8 & 8 & 1\end{vmatrix}=0$$

या $x(2-8)+2(5-8)+1(40-16)=0$

या $-6x-6+24=0$

या $-6x+18=0$

या $x=3$.

उदाहरण-8. सिद्ध कीजिए बिन्दु $[bc, a(b+c)]$, $[ca, b(c+a)]$ तथा $[ab, c(a+b)]$ संरेख हैं।

हलः तीन बिन्दु संरेख होने के प्रतिबन्ध से

$$\therefore \quad \begin{vmatrix}bc & a(b+c) & 1\\ ca & b(c+a) & 1\\ ab & c(a+b) & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}bc+ab+ca & a(b+c) & 1\\ ca+bc+ab & b(c+a) & 1\\ ab+ca+bc & c(a+b) & 1\end{vmatrix} \quad \text{(संक्रिया } C_1\to C_1+C_2 \text{ से)}$$

$$=(ab+bc+ca)\begin{vmatrix}1 & a(b+c) & 1\\ 1 & b(c+a) & 1\\ 1 & c(a+b) & 1\end{vmatrix}$$

$$=(ab+bc+ca).0 \quad (\because \text{दो समान स्तम्भ})$$

$$=0$$

अतः दिए गए बिन्दु संरेख हैं। इतिसिद्धम्।

उदाहरण-9. दो बिन्दुओं $A(4, 3)$ तथा $B(-5, 2)$ को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए तथा k का मान ज्ञात कीजिए, यदि त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल 2 वर्ग इकाई, जबकि $C(k, 0)$ है।

हल: माना रेखा AB पर स्थित कोई बिन्दु $P(x, y)$ है, तब ΔABC का क्षेत्रफल $= 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left[4(2-y)-3(-5-x)+1(-5y-2x)\right]=0$$

$$\Rightarrow \quad 8-4y+15+3x-5y-2x=0$$

$$\Rightarrow \quad x-9y+23=0.$$

जो कि रेखा AB का अभीष्ट समीकरण है।

अब ΔABC का क्षेत्रफल $= 2$ वर्ग इकाई

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = \pm 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left[4(2-0)-3(-5-k)+1(0-2k)\right]=\pm 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left[8+15+3k-2k\right]=\pm 2$$

$$\Rightarrow \quad 23+k=\pm 4$$

$$\Rightarrow \quad k=\pm 4-23$$

$$\Rightarrow \quad k=-19,\,-27$$

उदाहरण-10. निम्न समीकरण निकाय कैसे हैं? यदि हल सम्भव हो, तो क्रेमर नियम से हल कीजिए।

(i) $2x-3y=3$, $2x+3y=9$ (ii) $x+2y=5$, $2x+4y=10$

हल: (i)

$$2x-3y=3$$
$$2x+3y=9$$

यहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6+6=12 \neq 0$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 9+27=36 \neq 0$ तथा $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 18-6=12 \neq 0$

$\because \quad \Delta \neq 0,\ \Delta_1 \neq 0,\ \Delta_2 \neq 0$

$\therefore$ समीकरण निकाय संगत व स्वतंत्र है तथा इसका हल अद्वितीय है।

अतः क्रेमर नियम से

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{36}{12}=3, \qquad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{12}{12}=1$$

अतः समीकरण निकाय का हल $x=3,\ y=1$.

(ii) $$\begin{aligned} x+2y&=5 \\ 2x+4y&=10 \end{aligned}$$

यहाँ $\Delta=\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}=4-4=0$, $\Delta_1=\begin{vmatrix}5&2\\10&4\end{vmatrix}=20-20=0$ तथा $\Delta_2=\begin{vmatrix}1&5\\2&10\end{vmatrix}=10-10=0$

$\because$ $\Delta=0,\ \Delta_1=0,\ \Delta_2=0$

$\therefore$ समीकरण निकाय अंसगत है तथा इसके हल अनन्त होंगे।

माना $y=k$ तब $x+2k=5 \Rightarrow x=5-2k$ अतः $x=5-2k,\ y=k$ समीकरण निकाय के हल है जहाँ k स्वेच्छ वास्तविक संख्या है।

उदाहरण-11. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित समीकरण निकाय असंगत है तथा इसका हल सम्भव नहीं है।

$$\begin{aligned} x+y+z&=2 \\ x+2y+3z&=5 \\ 2x+3y+4z&=11. \end{aligned}$$

हल: यहाँ $$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\2&3&4\end{vmatrix}=1(8-9)-1(4-6)+1(3-4)=-1+2-1=0.$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}2&1&1\\5&2&3\\11&3&4\end{vmatrix}=2(8-9)-1(20-33)+1(15-22)=-2+13-7=4\neq 0.$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&5&3\\2&11&4\end{vmatrix}=1(20-23)-2(4-6)+1(11-10)=-13+4-1=-8\neq 0.$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&5\\2&3&11\end{vmatrix}=1(22-15)-1(11-10)+2(3-4)=7-1-2=4\neq 0.$$

$\because$ $\Delta=0$ तथा $\Delta_1\neq 0, \Delta_2\neq 0, \Delta_3\neq 0$.

$\therefore$ समीकरण निकाय असंगत है तथा इसका हल सम्भव नहीं है।

उदाहरण-12. निम्नलिखित समीकरण निकाय का क्रेमर नियम से हल ज्ञात कीजिए

$$\begin{aligned} x+y+z&=9 \\ 2x+5y+7z&=52 \\ 2x+y-z&=0 \end{aligned}$$

हल: यहाँ $$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&5&7\\2&1&-1\end{vmatrix}=1(-5-7)-1(-2-14)+1(2-10)=-12+16-8=-4\neq 0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 52 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 9(-5-7)-1(-52-0)+1(52-0) = -108+52+52 = -4 \neq 0 .$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 2 & 52 & 7 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1(-52-0)-9(-2-14)+(0-104) = -52+144-104 = -12 \neq 0 .$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & 5 & 52 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(0-52)-1(0-104)+9(2-10) = -52+104-72 = -20 \neq 0 .$$

अतः क्रेमर नियम से

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1, \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-12}{-4} = 3, \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-20}{-4} = 5$$

अतः $x = 1, y = 3, z = 5$.

उदाहरण-13. आव्यूह सिद्धान्त का प्रयोग कर, निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए:

$$5x - 3y = 2$$
$$x + 2y = 3 .$$

हलः दिए गए समीकरण निकाय का आव्यूह रूप

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

अर्थात् $AX = B$

जहाँ $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\because$ $|A| = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13 \neq 0$

$\therefore$ A^{-1} का अस्तित्व है।

$$A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

अब $X = A^{-1}B = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 4+9 \\ -2+15 \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 13 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $x = 1, y = 1$.

उदाहरण-14. निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को आव्यूह रूप में लिखिए

$$2x - y + 3z = 9$$
$$x + y + z = 6$$
$$x - y + z = 2.$$

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए तथा समीकरण निकाय का हल ज्ञात कीजिए।

हल: $\because AX = B$, जहाँ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

अतः रैखिक समीकरण निकाय का आव्यूह रूप

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

यहाँ $\quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(1+1) + 1(1-1) + 3(-1-1) = 4 + 0 - 6 = -2 \neq 0$

$\therefore \quad A^{-1}$ का अस्तित्व है।

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & -3/2 \end{bmatrix}$$

$\because \quad X = A^{-1}B$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 18 - 12 - 8 \\ 0 - 6 + 2 \\ -18 + 6 + 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad x = 1, y = 2, z = 3.$

उदाहरण-15. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}2 & 2 & -4\\ -4 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 5\end{bmatrix}$ हो, तो AB ज्ञात कीजिए तथा इसकी सहायता से निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए

$$x-y=3;\quad 2x+3y+4z=17,\quad y+2z=7.$$

हल:

$$AB=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2 & -4\\ -4 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

$$=6\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=6I_3$$

$$\Rightarrow \quad A\cdot\left(\frac{1}{6}B\right)=I_3$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1}=\frac{1}{6}B=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2 & 2 & -4\\ -4 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 5\end{bmatrix} \qquad (1)$$

अब दिए गए समीकरण निकाय का आव्यूह रूप

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 17\\ 7\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad AX=C$$

$$\Rightarrow \quad X=A^{-1}C$$

$$\Rightarrow \quad X=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2 & 2 & -4\\ -4 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 5\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}3\\ 17\\ 7\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6+34-28\\ -12+34-28\\ 6-17+35\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}12\\ -6\\ 24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x=2,\ y=-1,\ z=4.$$

उदाहरण-16. निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y \\ z \\ 3y \end{bmatrix}$$

हल: दिया गया समीकरण निकाय

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y \\ z \\ 3y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 3x+3z \\ 2x+y \\ 4x+2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+2y \\ 1+z \\ 4+3y \end{bmatrix}$$

अतः
$$\left.\begin{aligned} 3x+3z=8+2y &\Rightarrow 3x-2y+3z=8 \\ 2x+y=1+z &\Rightarrow 2x+y-z=1 \\ 4x+2z=4+3y &\Rightarrow 4x-3y+2z=4 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

समीकरण निकाय (1) का आव्यूह रूप

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

अर्थात् $AX = B$

$\Rightarrow$ $X = A^{-1}B$

$$= -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \left[\because A^{-1} = \frac{adjA}{|A|}\right]$$

$$= -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -8-5-4 \\ -64-6+36 \\ -80+1+28 \end{bmatrix} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -17 \\ -34 \\ -51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $x = 1, y = 2, z = 3$.

प्रश्नमाला 5.2

1. सारणिक का प्रयोग कर त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष निम्न हैं
   (i) (2, 5), (–2, –3) तथा (6, 0) (ii) (3, 8), (2, 7) तथा (5, –1)
   (iii) (0, 0), (5, 0) तथा (3, 4)
2. सारणिक का प्रयोग कर शीर्ष (1, 4), (2, 3) तथा (–5, –3) वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। क्या दिए गए बिन्दु संरेख है?
3. k का मान ज्ञात कीजिए यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई है जबकि शीर्ष $(k, 4)$ $(2, -6)$ तथा $(5, 4)$ हैं।
4. सारणिक का प्रयोग कर k का मान ज्ञात कीजिए यदि बिन्दु $(k, 2-2k)$, $(-k+1, 2k)$ तथा $(-4-k, 6-2k)$ संरेख हों।
5. यदि बिन्दु $(3, -2)$, $(x, 2)$ तथा $(8, 8)$ संरेख हैं तो x का मान सारणिक का प्रयोग कर ज्ञात कीजिए।
6. सारणिक प्रयोग से दो बिन्दुओं (3, 1) तथा (9, 3) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए तथा त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए यदि तीसरा बिन्दु (–2, –4) हो।
7. क्रेमर नियम से निम्नलिखित समीकरण निकायों को हल कीजिए।

   (i) $2x+3y=9$, $3x-2y=7$ (ii) $2x-7y-13=0$, $5x+6y-9=0$
8. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित समीकरण निकाय अंसगत है।

   (i) $3x+y+2z=3$, $2x+y+3z=5$, $x-2y-z=1$ (ii) $x+6y+11=0$, $3x+20y-6z+3=0$, $6y-18z+1=0$
9. क्रेमर नियम से निम्नलिखित समीकरण निकायों को हल कीजिए।

   (i) $x+2y+4z=16$, $4x+3y-2z=5$, $3x-5y+z=4$ (ii) $2x+y-z=0$, $x-y+z=6$, $x+2y+z=3$
10. सारणिकों की सहायता से निम्नलिखित समीकरण निकायों को हल कीजिए।

    (i) $6x+y-3z=5$, $x+3y-2z=5$, $2x+y+4z=8$ (ii) $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{10}{z}=4$, $\frac{4}{x}-\frac{6}{y}+\frac{5}{z}=1$, $\frac{6}{x}+\frac{9}{y}-\frac{20}{z}=2$
11. आव्यूह सिद्धान्त का प्रयोग कर निम्नलिखित समीकरण निकायों को हल कीजिए।

    (i) $2x-y=-2$, $3x+4y=3$ (ii) $5x+7y+2=0$, $4x+6y+3=0$ (iii) $x+y-z=1$, $3x+y-2z=3$, $x-y-z=-1$ (iv) $6x-12y+25z=4$, $4x+15y-20z=3$, $2x+18y+15z=10$
12. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए तथा निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए।

    $x-2y=10, \quad 2x+y+3z=8, \quad -2y+z=7.$

13. आव्यूहों $\begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ तथा $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ का गुणन ज्ञात कीजिए तथा इसकी सहायता से निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए

$$\begin{aligned} x - y + z &= 4 \\ x - 2y - 2z &= 9 \\ 2x + y + 3z &= 1 \cdot \end{aligned}$$

14. आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात कीजिए तथा इसकी सहायता से निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2y \\ 6z \\ -2x \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

15. यदि समबाहु त्रिभुज की भुजा a तथा शीर्ष (x_1, y_1), (x_2, y_2) तथा (x_3, y_3) हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 2 \\ x_2 & y_2 & 2 \\ x_3 & y_3 & 2 \end{vmatrix}^2 = 3a^4$$

विविध प्रश्नमाला–5

1. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए।

2. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए।

3. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & 2 & -3 \end{bmatrix}$ एक अव्यूत्क्रमणीय आव्यूह हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

4. क्रेमर नियम का प्रयोग कर निम्नलिखत समीकरण निकाय हल कीजिए:

(i) $2x - y = 17$
$3x + 5y = 6.$

(ii) $3x + ay = 4$
$2x + ay = 2, \quad a \neq 0$

(iii) $x + 2y + 3z = 6$
$2x + 4y + z = 7$
$3x + 2y + 9z = 14.$

5. क्रेमर नियम का प्रयोग कर सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखत समीकरण निकाय असंगत है:

(i) $2x - y = 5$
$4x - 2y = 7$

(ii) $x + y + z = 1$
$x + 2y + 3z = 2$
$3x + 4y + 5z = 3$

6. एक द्वितीय क्रम का आव्यूह A ज्ञात कीजिए

जहाँ $A\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

7. यदि $A = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A^2 + 4A - 42I = 0$ तथा इसकी सहायता से A^{-1} भी ज्ञात कीजिए।

8. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $A^{-1} = \frac{1}{19}A$.

9. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए तथा दर्शाइए कि $A^{-1}A = I_3$

10. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $A^2 - 4A - 5I = 0$ तत्पश्चात् इसकी सहायता से A^{-1} भी ज्ञात कीजिए।

11. आव्यूह सिद्धान्त का प्रयोग कर निम्नलिखत रैखिक समीकरण निकाय के हल ज्ञात कीजिए:

(i) $5x - 7y = 2$
$7x - 5y = 3$

(ii) $3x + y + z = 3$
$2x - y - z = 2$
$-x - y + z = 1$

(iii) $x + 2y - 2z + 5 = 0$
$-x + 3y + 4 = 0$
$-2y + z - 4 = 0$

12. दिए शीर्षों के लिए त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(i) $A(-3, 5), B(3, -6), C(7, 2)$

(ii) $A(2, 7)$ $B(2, 2)$ $C(10, 8)$

13. यदि बिन्दु $(2, -3), (\lambda, -2)$ तथा $(0, 5)$ संरेख हों तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

14. आव्यूह A ज्ञात कीजिए जबकि

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

15. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए। तत्पश्चात् इसकी सहायता से निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए:

$$x + y + 2z = 0, \quad x + 2y - z = 9, \quad x - 3y + 3z = -14$$

16. यदि $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & \frac{1+bc}{a} \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए तथा दर्शाइए कि $aA^{-1}=\left(a^2+bc+1\right)I-aA$.

17. सारणिक की सहायता से निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए

$$x+y+z=1$$
$$ax+by+z=k$$
$$a^2x+b^2y+c^2z=k^2.$$

18. यदि $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए। तत्पश्चात् इसकी सहायता से निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए।

$$x+2y-3z=-4, \quad 2x+3y+2z=2, \quad 3x-3y-4z=11.$$

19. यदि $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \mathrm{X} = \begin{bmatrix} -16 & -6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ हो, तो X का मान ज्ञात कीजिए।

20. निम्नलिखित समीकरण निकाय के अनन्त हल हो तो a तथा b का मान ज्ञात कीजिए

$$2x+y+az=4$$
$$bx-2y+z=-2$$
$$5x-5y+z=-2.$$

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. **अव्युत्क्रमणीय आव्यूहः** एक वर्ग आव्यूह A, जिसके लिए $|A|=0$
2. **व्युत्क्रमणीय आव्यूहः** एक वर्ग आव्यूह A, जिसके लिए $|A|\neq 0$
3. **सहखण्डज आव्यूहः** किसी वर्ग आव्यूह A, के सारणिक $|A|$ के अवयवों के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह का परिवर्त आव्यूह सहखण्डज आव्यूह होता है।
4. **आव्यूह का व्युत्क्रमः** यदि एक वर्ग आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है अर्थात् $|A|\neq 0$ तो $A^{-1}=\dfrac{adjA}{|A|}$
5. **सहखण्डज आव्यूह एवं व्युत्क्रम आव्यूह के महत्वपूर्ण प्रमेयः**
   (i) एक वर्ग आव्यूह A के व्युत्क्रमणीय होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त शर्त है कि $|A|\neq 0$
   (ii) यदि A एक n क्रम को वर्ग आव्यूह है तो $A.(adjA)=|A|I_n=(adjA).A$
   (iii) यदि A तथा B एक ही क्रम की व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह है तो $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
   (iv) यदि A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है तो आव्यूह A^T भी व्युत्क्रमणीय होगा तथा $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$
6. तीन अज्ञात राशियों x, y, z के रैखिक समीकरण निकाय

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

का हल सारणिक एवं आव्यूह के व्युत्क्रम विधियों से ज्ञात किया जा सकता हैं।

(i) सारणिक विधि से हल: क्रेमर नियम
उपर्युक्त समीकरण निकाय (1) के लिए

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \text{ तथा } \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \text{ तो}$$

स्थिति–I: जब $\Delta \neq 0$ हो समीकरण निकाय का हल अद्वितीय है तथा $\dfrac{x}{\Delta_1} = \dfrac{y}{\Delta_2} = \dfrac{z}{\Delta_3} = \dfrac{1}{\Delta}$

स्थिति–II: जब $\Delta = 0$ तथा $\Delta_1 \neq 0$ या $\Delta_2 \neq 0$ या $\Delta_3 \neq 0$ तो समीकरण निकाय असंगत है तथा ऐसे समीकरण निकाय का हल सम्भव नहीं है।

स्थिति–III: जब $\Delta = 0$ तथा $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ तो समीकरण निकाय संगत या असंगत हो सकता है। यदि निकाय संगत है तो उसके अनन्त हल होंगे।

(ii) आव्यूह विधि से : उपर्युक्त समीकरण निकाय के लिए आव्यूह रूप $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

अर्थात् $AX = B$

$\Rightarrow \quad X = A^{-1}B,$ जहाँ $A^{-1} = \dfrac{adjA}{|A|}$.

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 5.1

1. $x = -1$

2. $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -11 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

3.(i) $\dfrac{1}{27}\begin{bmatrix} 4 & 17 & 3 \\ -1 & -11 & 6 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$; (ii) $\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (iii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} -2 & 19 & -27 \\ -2 & 18 & -25 \\ -3 & 29 & -42 \end{bmatrix}$

10. $\dfrac{1}{42}\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

प्रश्नमाला 5.2

1. (i) 26 वर्ग इकाई ; (ii) $11/2$ वर्ग इकाई ; (iii) 10 वर्ग इकाई
2. $13/2$ वर्ग इकाई, नहीं
3. $x = -2, 12$
4. $k = -1, 1/2$
5. $x = 5$
6. $3x - 6y = 0$, 10 वर्ग इकाई
7. (i) $x = 3, y = 1$ (ii) $x = 3, y = -1$
9. (i) $x = 2, y = 1, x = 3$; (ii) $x = 2, y = -1, z = 3$
10. (i) $x = 1, y = 2, z = 1$; (ii) $x = 2, y = 3, z = 5$
11. (i) $x = \dfrac{-5}{11}, y = \dfrac{12}{11}$; (ii) $x = \dfrac{9}{2}, y = \dfrac{-7}{2}$; (iii) $x = 2, y = 1, z = 2$; (iv) $x = \dfrac{1}{2}, y = \dfrac{1}{3}, z = \dfrac{1}{5}$

12. $A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 7 & 2 & -6 \\ -2 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$; $x = 4, y = -3, z = 1$

13. $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, x = 3, y = -2, z = -1$

14. $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, x = 2, y = -1, z = 1$

विविध प्रश्नमाला–5

1. $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

2. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

3. $x = -1$

4. (i) $x = 7, y = -3$; (ii) $x = 2, y = \frac{-2}{a}$; (iii) $x = y = z = 1$

6. $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

7. $\frac{1}{42}\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10. $A^{-1} = \frac{1}{5}2\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

11. (i) $x = \frac{11}{24}, y = \frac{1}{24}$; (ii) $x = 1, y = -1, z = 1$; (iii) $x = 1, y = -1, z = 2$

12. (i) 46 वर्ग इकाई ; (ii) 20 वर्ग इकाई

13. $\lambda = \frac{7}{4}$

14. $A = \begin{bmatrix} 21 & -29 \\ -13 & 18 \end{bmatrix}$

15. $A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 9 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}, x = 1, y = 3, z = -2$

16. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1+bc}{a} & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

17. $x = \frac{(c-k)(k-b)}{(c-a)(a-b)}, y = \frac{(k-c)(a-k)}{(b-c)(a-b)}, z = \frac{(b-k)(k-a)}{(b-c)(c-a)}$

18. $A^{-1} = \frac{1}{67}\begin{bmatrix} -6 & 17 & 13 \\ 14 & 5 & -8 \\ -15 & 9 & -1 \end{bmatrix}, x = 3, y = -2, z = 1$

19. $X = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11/2 & 2 \end{bmatrix}$

20. $a = -2, b = 1$

06

संततता तथा अवकलनीयता
(Continuity and Differentiability)

6.01 प्रस्तावना (Introduction)

पूर्व कक्षा में हम फलन की सीमा का अध्ययन कर चुके हैं। यहाँ हम सीमा की सहायता से संतत फलनों का अध्ययन करेंगे। यदि फलन का किसी दिए अन्तराल में लेखा चित्र (Graph) खींचने पर वक्र कहीं पर टूटा हुआ नहीं हो अर्थात् दिए अन्तराल में x में अल्प परिवर्तन से $f(x)$ में भी अल्प परिवर्तन हो तब फलन, इस अन्तराल में संतत कहलाता है। स्पष्ट है कि ऐसे फलनों के लेखा चित्रों को बिना पेन्सिल को ऊपर उठाए बनाया जा सकता है। किन्तु संतत फलन की यह परिभाषा अकगणितीय होने के साथ-साथ उन फलनों के लिए भी महत्वहीन हो जाती है, जिनके लेखाचित्र न हो। अतः हमें संतत फलन की गणितीय परिभाषा की आवश्यकता होती है जिसे कोशी (Cauchy) द्वारा निम्न प्रकार परिभाषित किया है-

6.02 सांतत्य की कोशी परिभाषा (Cauchy's definition of continuity)

कोई फलन $f(x)$, इसके प्रान्त D के किसी बिन्दु a पर संतत कहलाता है यदि किसी स्वैच्छ सुक्ष्म धनात्मक संख्या $\in$, जो कि कितनी भी छोटी क्यों न हो, के संगत एक धनात्मक संख्या δ ($\in$ पर निर्भर) इस प्रकार विद्यमान है ताकि

$$|f(x)-f(a)|<\in \text{ जबकि } |x-a|<\delta$$

अर्थात् दूसरे शब्दों में, फलन $f(x)$, अपने प्रान्त D के किसी बिन्दु a पर संतत कहलाता है यदि प्रत्येक $\in>0$ के लिए अन्तराल $(a-\delta, a+\delta)$ के प्रत्येक बिन्दु के लिए $f(x)$ तथा $f(a)$ का संख्यात्मक अन्तर $\in$ से कम किया जा सके।

6.03 सांतत्य की वैकल्पिक परिभाषा (Alternate definition of continuity)

फलन $f(x)$, अपने प्रान्त D के किसी बिन्दु a पर संतत होता है यदि और केवल यदि $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ विद्यमान हो तथा यह $f(a)$ के बराबर हो अर्थात्

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$$

या $$f(a+0)=f(a-0)=f(a)$$

अर्थात् a पर $f(x)$ की दक्षिण (बायीं) सीमा $=a$ पर $f(x)$ की वाम (बायीं) सीमा $=a$ पर $f(x)$ का मान

6.04 एक बिन्दु पर बायीं तथा दायीं ओर से सांतत्य (Continuity at a point from left and right)

कोई फलन $f(x)$ अपने प्रांत के किसी बिन्दु a पर

(i) बायीं ओर से संतत कहलाता है यदि

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$$

अर्थात् $$f(a-0)=f(a)$$

(ii) दायीं ओर से संतत कहलाता है यदि

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$$

अर्थात् $$f(a+0)=f(a)$$

6.05 विवृत्त अन्तराल में संतत फलन (Continuous function in an open interval)

फलन $f(x)$, विवृत्त अन्तराल (a, b) में संतत कहलाता है यदि वह उस अन्तराल के प्रत्येक बिन्दु पर संतत हो।

6.06 संवृत्त अन्तराल में संतत फलन (Continuous function in a closed interval)

फलन $f(x)$, संवृत्त अन्तराल $[a, b]$ में संतत कहलाता है यदि वह

(i) बिन्दु a पर दायीं ओर से संतत है,

(ii) बिन्दु b पर बायीं ओर से संतत है तथा

(iii) विवृत्त अन्तराल (a, b) में संतत हो।

6.07 संतत फलन (Continuous function)

यदि कोई फलन अपने प्रान्त के प्रत्येक बिन्दु पर संतत है, तो वह संतत फलन कहलाता है। कुछ संतत फलनों के उदाहरण निम्न है-

(i) तत्समक फलन $f(x)=x$, (ii) अचर फलन $f(x)=c$, जहाँ c अचर है,

(iii) बहुपद फलन $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$, (iv) त्रिकोणमितीय फलन $f(x)=\sin x, \cos x$

(v) चरघातांकीय फलन $f(x)=a^x, a>0$ (vi) लघुगणकीय फलन $f(x)=\log_e x$

(vii) निरपेक्ष मान फलन $f(x)=|x|, x+|x|, x-|x|, x|x|$

6.08 असंतत फलन (Discontinuous function)

कोई फलन $f(x)$, अपने प्रान्त D में असंतत कहलाता है। यदि वह उस प्रान्त के कम से कम एक बिन्दु पर संतत नहीं हो। यदि फलन किसी अन्तराल के प्रत्येक बिन्दु पर असंतत हो, तो फलन दिए गए अन्तराल में पूर्णरूपेण असंतत कहलाता है।

असंतत फलनों के कुछ उदाहरण निम्न हैं-

(i) $f(x)=[x]=$अधिकतम पूर्णांक जो कि x से कम या बराबर है, सभी पूर्णांकों पर असंतत है।

(ii) $f(x)=x-[x]$, प्रत्येक पूर्णांक पर असंतत है।

(iii) $f(x)=\tan x, \sec x$, $x=\pm\dfrac{\pi}{2}, \pm\dfrac{3\pi}{2}, \ldots$ पर असंतत है।

(iv) $f(x)=\cot x, \operatorname{cosec} x, x=0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ पर असंतत है।

(v) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}, \cos\dfrac{1}{x}, x=0$ पर असंतत है।

(vi) $f(x)=e^{1/x}, x=0$ पर असंतत है।

(vii) $f(x)=\dfrac{1}{x}, x=0$ पर असंतत है।

6.09 संतत फलनों के गुणधर्म (Properties of continuous functions)

(i) यदि $f(x)$ तथा $g(x)$ अपने प्रांत D में कोई दो संतत फलन हैं तो $f(x)\pm g(x), f(x)\cdot g(x), cf(x)$ भी प्रांत D में संतत होंगे। इसी प्रकार $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ उन बिन्दुओं पर संतत होगा, जहाँ $g(x)\neq 0, \quad \forall \ x\in D$.

(ii) यदि $f(x)$ तथा $g(x)$ अपने-अपने प्रांत में दो संतत फलन है तो इनका संयुक्त फलन $(g\circ f)(x)$ भी प्रांत D मे संतत फलन होगा।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. फलन $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-|x|}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

की बिन्दु $x=0$ पर सांतत्य की जाँच कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि

$$|x|=\begin{cases}-x, & \text{यदि } x<0\\ x, & \text{यदि } x\geq 0\end{cases}$$

तब दिए गए फलन को निम्न प्रकार व्यक्त कर सकते हैं

$$f(x)=\begin{cases}0, & x>0\\ 2, & x<0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

$x=0$ पर संततता

फलन की परिभाषा से $f(0)=1$

$\therefore$ $$f(0-0)=\lim_{h\to 0} f(0-h)=2$$

$$f(0+0)=\lim_{h\to 0} f(0+h)=0$$

$\therefore$ $$f(0)\neq f(0-0)\neq f(0+0)$$

अतः फलन $f(x), x=0$ पर संतत नहीं है।

उदाहरण-2. फलन $f(x)=|x|+|x-1|$ का $x=0$ तथा $x=1$ पर सांतत्य का परीक्षण कीजिए।

हल: फलन $f(x)$ को निम्न प्रकार लिख सकते हैं

$$f(x)=\begin{cases}1-2x, & \text{यदि } x\leq 0\\ 1, & \text{यदि } 0<x<1\\ 2x-1, & \text{यदि } x\geq 1\end{cases}$$

$x=0$ पर संततता

यहाँ $$f(0)=1-2(0)=1$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1-2x)$$

$$=\lim_{h\to 0}\{1-2(0-h)\}=1$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 1=1$$

अतः $$f(0-0)=f(0+0)=f(0)$$

फलतः फलन $f(x),\ x=0$ पर संतत है।

$x=1$ पर संततता

फलन की परिभाषा से $f(1)=2(1)-1=1$

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 1=1$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2x-1)$$

$$=\lim_{x\to 1^+}[2(1+h)-1]=1$$

अतः $\quad f(1-0)=f(1+0)=f(1)$

फलतः फलन $f(x)$, $x=1$ पर संतत है।

उदाहरण-3. प्रदर्शित कीजिए कि फलन $f(x)$, जो निम्न प्रकार परिभाषित है

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}}; & x\neq 0\\ 0 & ; x=0\end{cases}$$

$x=0$ पर संतत नहीं हैं।

हलः फलन की परिभाषा से $\quad f(0)=0$

$x=0$ पर दायीं सीमा, $\quad f(0+0)=\lim_{h\to 0} f(0+h)$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^{1/(0+h)}}{1+e^{1/(0+h)}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{e^{-1/h}+1}=\frac{1}{0+1}=1$$

$x=0$ पर बायीं सीमा, $\quad f(0-0)=\lim_{h\to 0} f(0-h)$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^{1/(0-h)}}{1+e^{1/(0-h)}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-1/h}}{1+e^{-1/h}}=\frac{0}{1+0}=0$$

अतः $f(0-0)\neq f(0+0)$

फलतः फलन $f(x)$, $x=0$ पर संतत नहीं है।

उदाहरण-4. फलन $f(x)=\begin{cases}x^2 & ; \quad x<1\\ x & ; \quad 1\leq x<2\\ \dfrac{x^3}{4} & ; \quad x\geq 2\end{cases}$

की $x=2$ पर सांतत्य का परीक्षण कीजिए।

हलः फलन की परिभाषा से $f(2)=\dfrac{2^3}{4}=2$

$x=2$ पर $f(x)$ की दायीं सीमा, $\quad f(2+0)=\lim_{h\to 0} f(2+h)$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3}{4}$$

$$=\frac{(2+0)^3}{4}=2$$

$x=2$ पर $f(x)$ की बायीं सीमा, $\quad f(2-0)=\lim_{h\to 0} f(2-h)$

$$=\lim_{h\to 0}(2-h)=2$$

उपरोक्त से, $f(2-0)=f(2+0)=f(2)=2$

अतः फलन $f(x)$, $x=2$ पर संतत है।

उदाहरण-5. यदि निम्न फलन

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos(cx)}{x\sin x} & ; \quad x\neq 0\\[2mm] \dfrac{1}{2} & ; \quad x=0\end{cases}$$

बिन्दु $x=0$ पर संतत है तो c का मान ज्ञात कीजिए।

हल: फलन की परिभाषा से $f(0)=\dfrac{1}{2}$ (1)

$x=0$ पर फलन $f(x)$ की सीमा ज्ञात करने पर,

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(cx)}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(cx/2)}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(c^2/2)\left(\dfrac{\sin(cx/2)}{cx/2}\right)^2}{(\sin x/x)}$$

$$=\frac{(c^2/2)\cdot 1^2}{1}=\frac{c^2}{2} \qquad (2)$$

$\because \quad f(x)$ बिन्दु $x=0$ पर संतत है अतः

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

समीकरण (1) व (2) से

$$\Rightarrow \quad \frac{c^2}{2}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad c^2=1 \quad \Rightarrow \quad c=\pm 1$$

उदाहरण-6. यदि फलन $f(x)=\begin{cases}3 & ; \quad x\leq 4\\ ax+b & ; \quad 4<x<6\\ 7 & ; \quad x\geq 6\end{cases}$

तब a तथा b के मान ज्ञात कीजिए जिससे कि फलन $f(x)$, अन्तराल $[4, 6]$ में संतत हो।

हलः दिया है कि फलन $f(x)$, संवृत्त अन्तराल [4, 6] में संतत है।

$x=4$ पर फलन $f(x)$ की दायीं सीमा,

$$f(4+0)=\lim_{h\to 0} f(4+h)$$

$$=\lim_{h\to 0}\{a(4+h)+b\}$$

$$=4a+b \qquad (1)$$

तथा $$f(4)=3 \qquad (2)$$

$x=6$ पर फलन की बायीं सीमा,

$$f(6-0)=\lim_{h\to 0} f(6-h)$$

$$=\lim_{h\to 0}\{a(6-h)+b\}$$

$$=6a+b \qquad (3)$$

तथा $$f(6)=7 \qquad (4)$$

$\because$ फलन $f(x)$ संवृत्त अन्तराल [4,6] के बायें अन्तिम बिन्दु $x=4$ पर संतत है अतः $f(4+0)=f(4)$

$\Rightarrow$ $$4a+b=3 \qquad (5)$$

इसी प्रकार फलन $f(x)$, अन्तराल [4, 6] के दायें अन्तिम बिन्दु $x=6$ पर संतत है अतः $f(6-0)=f(6)$

$\Rightarrow$ $$6a+b=7 \qquad (6)$$

समीकरणों (5) व (6) को हल करने पर

$$a=2,\ b=-5$$

जो कि a तथा b के अभीष्ट मान है।

उदाहरण-7. फलन $f(x)=\begin{cases} x^m \sin(1/x) & ; \quad x\neq 0 \\ 0 & ; \quad x=0 \end{cases}$

के लिए m पर वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए ताकि $f(x)$, बिन्दु $x=0$ पर संतत हो।

हलः फलन की परिभाषा से $f(0)=0$

$$f(0-0)=\lim_{h\to 0} f(0-h)$$

$$=\lim_{h\to 0}(0-h)^m \sin\left(1/(0-h)\right)$$

$$=(-1)^{m+1}\lim_{h\to 0} h^m \sin\left(1/h\right)$$

$$=(-1)^{m+1}(0)^m \times (-1 \text{ व } 1 \text{ के मध्य एक परिमित राशि})$$

$$=0, \text{ यदि } m>0$$

इसी प्रकार $f(0+0)=0$, यदि $m>0$

उपरोक्त से $f(0-0)=f(0+0)=f(0)=0$, यदि $m>0$

अतः फलन $f(x)$, $x=0$ पर संतत तभी होगा जबकि $m>0$

उदाहरण-8. निम्न फलन $f(x)=\begin{cases} \sin x/x+\cos x & ; \quad x\neq 0 \\ 2 & ; \quad x=0 \end{cases}$

का बिन्दु $x=0$ पर सांतत्य का परीक्षण कीजिए।

हल: फलन की परिभाषा से $f(0)=2$

$$f(0-0)=\lim_{h\to 0} f(0-h)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\sin(-h)}{(-h)}+\cos(-h)\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\sin h}{h}+\cos h\right\}=1+1=2$$

तथा $$f(0+0)=\lim_{h\to 0} f(0+h)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\sin h}{h}+\cos h\right\}=\{1+1\}=2$$

अत: $$f(0-0)=f(0+0)=f(0)=2$$

अत: फलन $f(x)$, $x=0$ पर संतत है।

प्रश्नमाला 6.1

1. निम्न फलनों की सांतत्य का परीक्षण कीजिए

(a) $f(x)=\begin{cases} x\{1+(1/3)\sin(\log x^2)\} & ; \quad x\neq 0 \\ 0 & ; \quad x=0 \end{cases}$

$x=0$ पर।

(b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{1/x}}{x} & ; \quad x\neq 0 \\ 0 & ; \quad x=0 \end{cases}$

$x=0$ पर।

(c) $f(x)=\begin{cases} 1+x & ; \quad x\leq 3 \\ 7-x & ; \quad x>3 \end{cases}$

$x=3$ पर।

(d) $f(x)=\begin{cases} \sin x & ; \quad \dfrac{-\pi}{2}<x\leq 0 \\ \tan x & ; \quad 0<x<\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

$x=0$ पर।

(e) $f(x)=\begin{cases} \cos(1/x) & ; \quad x\neq 0 \\ 0 & ; \quad x=0 \end{cases}$

$x=0$ पर।

(f) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(x-a)}.\operatorname{cosec}(x-a) & ; \quad x\neq a \\ 0 & ; \quad x=a \end{cases}$

$x=a$ पर।

(g) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{a}-a, x<a & ; \quad x<a \\ 0 & ; \quad x=a \\ a-\dfrac{a^3}{x^2} & ; \quad x>a\end{cases}$

$x=a$ पर।

2. फलन $f(x)=x-[x]$ की $x=3$ पर संततता का परीक्षण कीजिए।

3. यदि निम्न फलन

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+x^2-16x+20}{(x-2)^2} & ; \quad x\neq 2 \\ k & ; \quad x=2\end{cases}$$

बिन्दु $x=2$ पर संतत है तब k का मान ज्ञात कीजिए।

4. निम्न फलन

$$f(x)=\begin{cases}-x^2 & ; \quad -1\le x<0 \\ 4x-3 & ; \quad 0<x\le 1 \\ 5x^2-4x & ; \quad 1<x\le 2\end{cases}$$

की अन्तराल $[-1, 2]$ में सांतत्य का परीक्षण कीजिए।

6.10 अवकलनीयता (Differentiability)

पूर्व कक्षा में हमने फलनों की सीमा के संदर्भ में सहजानुभूत बोध तथा प्रथम सिद्धान्त से अवकलन ज्ञात करने का अध्ययन किया था। यहाँ हम एक विशेष सीमा प्रक्रिया के प्रयोग से अवकलन ज्ञात करने की विधि का अध्ययन करेंगे। यदि वक्र का समीकरण $y=f(x)$ है तब फलन $f(x)$ इस वक्र के किसी बिन्दु $x=a$ पर अवकलनीय कहलाता है यदि वक्र के इस बिन्दु पर स्पर्श रेखा खींचीं जा सके। यदि बिन्दु $x=a$ पर वक्र टूटा हुआ हो (Break) या इस बिन्दु पर वक्र अपनी दिशा बदल रहा हो तब फलन $f(x)$ इस बिन्दु $x=a$ पर अवकलनीय नहीं होगा। गणितीय रूप में अवकलनीयता का अध्ययन हम निम्न प्रकार करेंगें।

1. एक वास्तविक फलन $f:(a, b)\to R$ बिन्दु $c\in(a, b)$ पर अवकलनीय कहलाता है यदि $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ परिमित रूप से विद्यमान हो। यह सीमा फलन f का बिन्दु c पर अवकलज कहलाती है तथा इसे $f'(c)$ से व्यक्त करते हैं।

2. फलन f बिन्दु c पर अवकलनीय होता है यदि प्रत्येक दिए हुए $\in>0$ के संगत $\exists\delta>0$ ताकि

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-f'(c)\right|<\in \text{ जबकि } |x-c|<\delta$$

अर्थात् $\Rightarrow f'(c)-\in \;<\; \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \;<\; f'(c)+\in$

6.11 फलन का बायाँ अवकलज (Left hand derivative of a function)

कोई फलन $f(x)$ अपने प्रान्त के किसी बिन्दु c पर बायीं तरफ से अवकलनीय कहलाता है, यदि सीमा $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(c-h)-f(c)}{-h}, h>0$ का मान विद्यमान एवं परिमित हो। सीमा के इस मान को संकेत में हम $LDf(c)$ या $Lf'(c)$ या $f'(c-0)$ से व्यक्त करते हैं तथा इसे $f(x)$ का बिन्दु c पर बायां अवकलज या वाम पक्षीय अवकलज कहते हैं।

6.12 फलन का दायाँ अवकलज (Right hand derivative of a function)

कोई फलन $f(x)$ अपने प्रान्त के किसी बिन्दु c पर दायीं तरफ से अवकलनीय कहलाता है। यदि सीमा $\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}, h>0$ का मान विद्यमान एवं परिमित हो। सीमा के इस मान को संकेत में हम $RDf(c)$ या $Rf'(c)$ या $f'(c+0)$ से व्यक्त करते हैं तथा इसे $f(x)$ का बिन्दु c पर दायाँ अवकलज या दक्षिण पक्षीय अवकलज कहते हैं।

6.13 अवकलनीय फलन (Differentiable function)

कोई फलन अपने प्रान्त के किसी बिन्दु c पर अवकलनीय कहलाता है यदि बिन्दु c पर इसके बायें तथा दायें अवकलज, परिमित रूप से विद्यमान हो तथा समान हो अर्थात्

$$f'(c-0)=f'(c+0)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c-h)-f(c)}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

टिप्पणी: निम्न स्थितियों में, फलन $f(x)$ बिन्दु c पर अवकलनीय नहीं होगा, यदि

(i) $f'(c-0)\neq f'(c+0)$

(ii) $f'(c-0)$ तथा $f'(c+0)$ में से कोई एक या दोनों अपरिमित हो।

(iii) $f'(c-0)$ तथा $f'(c+0)$ में से कोई एक या दोनों विद्यमान नहीं हो।

6.14 अन्तराल में अवकलनीयता (Differentiability in an interval)

1. फलन $f(x)$ विवृत्त अन्तराल (a, b) में अवकलनीय कहलाता है यदि $f(x)$ इस अन्तराल के प्रत्येक बिन्दु पर अवकलनीय हो।
2. फलन $f(x)$ संवृत्त अन्तराल (a, b) में अवकलनीय कहलाता है यदि
   (i) $f'(c)$ विद्यमान है जबकि $c\in(a, b)$
   (ii) बिन्दु a पर $f(x)$ का दायाँ अवकलज विद्यमान हो।
   (iii) बिन्दु b पर $f(x)$ का बायाँ अवकलज विद्यमान हो।

6.15 कुछ महत्वपूर्ण परिणाम (Some important results)

(i) दिए अन्तराल के किसी बिन्दु c पर अवकलनीय फलन आवश्यक रूप से संतत होता है परन्तु इस अन्तराल में संतत फलन का अवकलनीय होना आवश्यक नहीं है। स्पष्ट है कि यदि कोई फलन संतत नहीं है तो वह निश्चित रूप से अवकलनीय भी नहीं होगा।

टिप्पणी: किसी फलन की किसी बिन्दु पर अवकलनीयता का परीक्षण करने से पूर्व उस बिन्दु पर इस फलन की संततता का परीक्षण किया जाना चाहिए। फलन के संतत होने पर ही उसकी अवकलनीयता का परीक्षण करें।

(ii) प्रत्येक बहुपदीय, चरघातांकीय तथा अचर फलन, वास्तविक संख्याओं पर सदैव अवकलनीय होते हैं।

(iii) लघुगणकीय फलन, त्रिकोणमितीय फलन, अपने प्रान्त में अवकलनीय होते हैं।

(iv) दो अवकलनीय फलनों का योग, अन्तर, गुणनफल, भागफल (जबकि हर शून्य नहीं हो) तथा संयुक्त फलन, सदैव अवकलनीय ही होते है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-9. यदि निम्न फलन

$$f(x)=\begin{cases} x^2\left(\dfrac{e^{1/x}-e^{-1/x}}{e^{1/x}+e^{-1/x}}\right) & ; \quad x\neq 0 \\ 0 & ; \quad x=0\end{cases}$$

$x=0$ पर संतत है तो इसकी बिन्दु $x=0$ पर अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

हल: $x=0$ पर $f(x)$ का बायाँ अवकलज,

$$f'(0-0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0-h)-f(0)}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-h)^2\left(\dfrac{e^{-1/h}-e^{-(-1/h)}}{e^{-1/h}+e^{-(-1/h)}}\right)-0}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} -h\left(\frac{e^{-2/h}-1}{e^{-2/h}+1}\right)$$

$$= 0\times\left(\frac{0-1}{0+1}\right)=0$$

तथा $x=0$ पर $f(x)$ का दायाँ अवकलज,

$$f'(0+0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(h)^2\left(\dfrac{e^{1/h}-e^{-1/h}}{e^{1/h}+e^{-1/h}}\right)-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left(\frac{1-e^{-2/h}}{1+e^{-2/h}}\right)$$

$$= 0\times\left(\frac{1-0}{1+0}\right)=0$$

अतः $f'(0-0)=f'(0+0)$

फलतः फलन $f(x), x=0$ पर अवकलनीय है।

उदाहरण-10. यदि निम्न फलन

$$f(x)=\begin{cases} x\left(1+\dfrac{1}{3}\sin(\log x^2)\right) & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$$

सर्वत्र संतत है तो इसकी बिन्दु $x=0$ पर अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

हल: $x=0$ पर $f(x)$, का दायाँ अवकलज

$$f'(0+0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h\left(1+1/3.\sin(\log h^2)\right)-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\{1+1/3.\sin(\log h^2)\}$$

यह सीमा विद्यमान नहीं है। क्योंकि $\lim_{h\to 0}\sin(\log h^2), -1$ तथा 1 के मध्य दोलन करती है अतः $\lim_{h\to 0}\{1+1/3.\sin(\log h^2)\}$, $2/3$ तथा $4/3$ के मध्य दोलन करेगी।

फलतः फलन $f'(0+0)$ का अस्तित्व नहीं है। अतः फलन $f(x), x=0$ पर अवकलनीय नहीं है।

उदाहरण-11. m के किन मानों के लिए फलन

$$f(x)=\begin{cases} x^m \sin\dfrac{1}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$$

बिन्दु $x=0$ पर अवकलनीय है तथा $f'(x)$ संतत है।

हल: $x=0$ का अवकलनीयता

$x=0$ पर $f(x)$ का बायाँ अवकलज,

$$f'(0-0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0-h)-f(0)}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(-h)^m \sin\dfrac{1}{(-h)}-0}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(-1)^m h^{m-1}\sin\frac{1}{h} \qquad (1)$$

$x=0$ पर $f(x)$ का दायाँ अवकलज,

$$f'(0+0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^m \sin\dfrac{1}{h}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}h^{m-1}\sin\frac{1}{h} \qquad (2)$$

यदि $f(x), x=0$ पर अवकलनीय है तब $f'(0-0)=f'(0+0)$, जो कि समीकरण (1) व (2) से तभी सम्भव है जबकि $m-1>0$ या $m>1$

अतः दिया गया फलन $f(x), x=0$ पर अवकलनीय होगा यदि $m>1$

$x=0$ पर $f'(x)$ की सांत्यता

दिए हुए फलन के लिए

$$f'(x),=mx^{m-1}\sin(1/x)-x^{m-2}\cos(1/x)\neq 0$$

$$f'(0)=0$$

सूक्ष्म रूप से $f'(x), x=0$ पर संतत है यदि $m>2$

अतः $f'(x)$, की मूल बिन्दु पर सांतत्यता का प्रतिबन्ध $m>2$ है।

उदाहरण-12. यदि फलन $f(x)=|x-1|+2|x-2|+3|x-3|,\ \forall\ x\in R$ के बिन्दुओं $x=1,\ 2,\ 3$ पर संतत है तो इन बिन्दुओं पर इसकी अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

हल: दिए गए फलन $f(x)$ को हम निम्न प्रकार लिख सकते है

$$f(x)=\begin{cases} 14-6x, & \text{यदि} \quad x\leq 1 \\ 12-4x, & \text{यदि} \quad 1<x\leq 2 \\ 4, & \text{यदि} \quad 2<x\leq 3 \\ 6x-14, & \text{यदि} \quad x>3 \end{cases}$$

$x = 1$ पर अवकलनीयता

$x=1$ पर $f(x)$ का बायाँ अवकलज,

$$f'(1-0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0-h)-f(1)}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{14-6(1-h)\}-\{14-6(1)\}}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(6h)}{-h}=-6 \qquad (1)$$

$x=1$ पर $f(x)$ का दायाँ अवकलज,

$$f'(1+0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{12-4(1+h)\}-\{14-6(1)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-4h}{h}=-4 \qquad (2)$$

समीकरण (1) व (2) से

$$f'(1-0)\neq f'(1+0)$$

अतः फलन $f(x), x=1$ पर अवकलनीय नहीं है। इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है कि फलन $f(x), x=2,\ x=3$ पर भी अवकलनीय नहीं है।

उदाहरण-13. निम्न फलन

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}\cdot\sin 1/x, & \text{यदि } x\neq 0 \\ 0, & \text{यदि } x=0 \end{cases}$$

की बिन्दु $x=0$ पर अवकलनीयता की जाँच कीजिए।

हल: $x=0$ पर $f(x)$ का बायाँ अवकलज,

$$f'(0-0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0-h)-f(0)}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-1/(-h)^2}\cdot\sin(1/(-h))-0}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(1/h)}{he^{1/h^2}} \qquad (1)$$

अब,

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(1/h)}{h\left[1+\frac{1}{h^2}+\frac{1}{\lfloor 2\, h^4}+\ldots\right]}$$

$$=(-1 \text{ एवं } 1 \text{ के मध्य परिमित राशि})/\lim_{h\to 0}\left\{h+\frac{1}{h}+\frac{1}{\lfloor 2}\cdot\frac{1}{h^3}+\ldots\right\}=0 \qquad (2)$$

$x=0$ पर $f(x)$ का दायाँ अवकलज,

$$f'(0+0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^{1/h^2}\cdot\sin(1/h)-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin 1/h}{he^{-1/h^2}}$$

$$=0 \text{ (उपर्युक्तानुसार)} \qquad (3)$$

अतः $\qquad f'(0-0)=f'(0+0)=0$

फलतः फलन $f(x), x=0$ पर अवकलनीय है।

उदाहरण-14. क्या फलन $f(x)=|x-2|$, बिन्दु $x=2$ पर अवकलनीय है?

हलः $x=2$ पर $f(x)$, का बायाँ अवकलज,

$$f'(2-0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|2-h-2|-0}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{|-h|}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{-h}=\lim_{h\to 0}(-1)=-1 \qquad (1)$$

$x=2$ पर $f(x)$ का दायाँ अवकलज,

$$f'(2+0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|2+h-2|-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}(1)=1 \qquad (2)$$

समीकरण (1) व (2) से

अतः $f(x)$ बिन्दु $x=2$ पर अवकलनीय नहीं है।

प्रश्नमाला 6.2

1. सिद्ध कीजिए की निम्न फलन x के प्रत्येक मान के लिए अवकलनीय हैं

   (i) तत्समक फलन $f(x)=x$ (ii) अचर फलन $f(x)=c$, जहाँ c अचर है

   (iii) $f(x)=e^x$ (iv) $f(x)=\sin x$.

2. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x)=|x|$ बिन्दु $x=0$ पर अवकलनीय नहीं है।

3. फलन $f(x)=|x-1|+|x|$, की बिन्दुओं $x=0, 1$ पर अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

4. फलन $f(x)=|x-1|+|x-2|$, की अन्तराल $[0, 2]$ में अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

5. निम्न फलन

$$f(x)=\begin{cases} x\tan^{-1}x & ; \quad x\neq 0 \\ 0 & ; \quad x=0 \end{cases}$$

की बिन्दु $x=0$ पर अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

6. फलन $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{2} & ; \quad x\le 0\\ \dfrac{x-2x^2}{2} & ; \quad x>0\end{cases}$

की बिन्दु $x=0$ पर अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

7. सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन

$$f(x)=\begin{cases}x^m\cos(1/x) & ; \quad x\ne 0\\ 0 & ; \quad x=0\end{cases}$$

(i) बिन्दु $x=0$ पर संतत है यदि $m>0$

(ii) बिन्दु $x=0$ पर अवकलनीय है यदि $m>1$

8. निम्न फलन की $x=0$ पर अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{1/x^2}} & ; \quad x\ne 0\\ 0 & ; \quad x=0\end{cases}$$

9. फलन $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & ; \quad x\ne 0\\ 1 & ; \quad x=0\end{cases}$

की बिन्दु $x=0$ पर अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

10. फलन $f(x)=\begin{cases}1+\sin x & ; \quad 0<x<\pi/2\\ 2+(x-\pi/2)^2 & ; \quad x\ge \pi/2\end{cases}$

की बिन्दु $x=\pi/2$ पर अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

11. m तथा n के मान ज्ञात कीजिए जबकि फलन

$$f(x)=\begin{cases}x^2+3x+m, & \text{जब} \quad x\le 1\\ nx+2, & \text{जब} \quad x>1\end{cases}$$

प्रत्येक बिन्दु पर अवकलनीय है।

विविध प्रश्नमाला—6

1. यदि $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}, x=3$ पर संतत है तब $f(3)$ का मान होगा

(क) 6 (ख) 3 (ग) 1 (घ) 0.

2. यदि $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x} & ; \quad x\ne 0\\ m & ; \quad x=0\end{cases}$, $x=0$ पर संतत है तब m का मान होगा

(क) 3 (ख) $1/3$ (ग) 1 (घ) 0.

3. यदि $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\log(1+mx)-\log(1-nx)}{x} & ; \quad x\ne 0\\ k & ; \quad x=0\end{cases}$, बिन्दु $x=0$ पर संतत है तब k का मान होगा

(क) o (ख) $m+n$ (ग) $m-n$ (घ) $m\cdot n$.

4. ; fn $f(x)=\begin{cases} x+\lambda & ; \quad x<3 \\ 4 & ; \quad x=3 \\ 3x-5 & ; \quad x>3 \end{cases}$, बिन्दु $x=3$ पर संतत है तब λ का मान है

(क) 4 (ख) 3 (ग) 2 (घ) 1.

5. यदि $f(x)=\cot x$, $x=\dfrac{n\pi}{2}$ पर असंतत है तब

(क) $n\in Z$ (ख) $n\in N$ (ग) $n/2\in Z$ (घ) केवल $n=0$.

6. फलन $f(x)=x|x|$ के उन बिन्दुओं का समुच्चय, जिन पर वह अवकलनीय है

(क) $(0, \infty)$ (ख) $(-\infty, \infty)$ (ग) $(-\infty, 0)$ (घ) $(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$

7. निम्न फलनों में से कौनसा, $x=0$ पर अवकलनीय नहीं है-

(क) $x|x|$ (ख) $\tan x$ (ग) e^{-x} (घ) $x+|x|$

8. फलन $f(x)=\begin{cases} 1+x, & \text{जब} \quad x\le 2 \\ 5-x, & \text{जब} \quad x>2 \end{cases}$, के लिए $f(x)$ का $x=2$ पर बायें अवकलज का मान है-

(क) -1 (ख) 1 (ग) -2 (घ) 2.

9. फलन $f(x)=[x]$ अवकलनीय नहीं है-

(क) प्रत्येक पूर्णांक पर (ख) प्रत्येक परिमेय संख्या पर (ग) मूल बिन्दु पर (घ) सर्वत्र।

10. फलन $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x^2}{x}, & \text{जब } x\ne 0 \\ 0, & \text{जब } x=0 \end{cases}$, बिन्दु $x=0$ पर अवकलनीय है तब $x=0$ पर $f(x)$ का दायाँ अवकलज का मान है

(क) -1 (ख) 1 (ग) 0 (घ) अपरिमित।

11. फलन $f(x)=|\sin x|+|\cos x|+|x|,\ \forall\ x\in R$ की सांतत्य का परीक्षण कीजिए।

12. यदि फलन $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin(m+1)x+\sin x}{x} & ; \quad 0<0 \\ 1/2 & ; \quad x=0 \\ \dfrac{x^{3/2}+1}{2} & ; \quad x>0 \end{cases}$

बिन्दु $x=0$ पर संतत है तब m का मान ज्ञात कीजिए।

13. m तथा n का मान ज्ञात कीजिए जबकि निम्न फलन संतत हो-

$$f(x)=\begin{cases} x^2+mx+n & ; \quad 0\le x<2 \\ 4x-1 & ; \quad 2\le x\le 4 \\ mx^2+17n & ; \quad 4<x\le 6 \end{cases}$$

14. फलन $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\tan x}{\sin x} & ; \quad x\ne 0 \\ 1 & ; \quad x=0 \end{cases}$, के लिए बिन्दु $x=0$ पर सातंत्य का परीक्षण कीजिए।

15. फलन $f(x)=\begin{cases}|x-3| & ; \quad x\geq 1 \\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{3x}{2}+\dfrac{13}{4} & ; \quad x<1\end{cases}$, के लिए बिन्दु $x=1, 3$ पर सातंत्य का परीक्षण कीजिए।

16. यदि $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(a+1)x+\sin x}{x}, & \text{यदि} \quad x<0 \\ c, & \text{यदि} \quad x=0 \\ \dfrac{\sqrt{x+bx^2}-\sqrt{x}}{bx\sqrt{x}}, & \text{यदि} \quad x>0\end{cases}$,

बिन्दु $x=0$ पर संतत है तब a, b तथा c के मान ज्ञात कीजिए।

17. फलन $f(x)=\dfrac{|3x-4|}{3x-4}$ के लिए $x=\dfrac{4}{3}$ पर संततता का परीक्षण कीजिए।

18. अन्तराल $[-1, 2]$ में फलन $f(x)=|x|+|x-1|$ के संतत होने का परीक्षण कीजिए।

19. यदि फलन $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$, बिन्दु $x=0$ पर संतत है तब $f(0)$ का मान ज्ञात कीजिए।

20. फलन $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{1/x}-1}{e^{-1/x}+1}, & \text{जबकि} \quad x\neq 0 \\ 1 & \text{जबकि} \quad x=0\end{cases}$, की बिन्दु $x=0$ पर $f(x)$ के सांतत्य का परीक्षण कीजिए।

21. फलन $f(x)=\sin x, x$ के किन मानों के लिए अवकलनीय हैं।

22. फलन $f(x)=\begin{cases}x^2\sin x & ; \quad x\neq 0 \\ 0 & ; \quad x=0\end{cases}$, की $x\in R$ के लिए अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए तथा $f'(0)$ का मान ज्ञात कीजिए।

23. फलन $f(x)=\begin{cases}(x-a)^2\sin\left(\dfrac{1}{x-a}\right) & ; \quad x\neq a \\ 0 & ; \quad x=a\end{cases}$,

की बिन्दु $x=a$ पर अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

24. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & ; \quad x\geq 1 \\ 1-x & ; \quad x<1\end{cases}$,

बिन्दु $x=1$ पर अवकलनीय नहीं हैं।

25. फलन $f(x)=\begin{cases}-x & ; \quad x\leq 0 \\ x & ; \quad x>0\end{cases}$,

की बिन्दु $x=0$ अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

26. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\log_e\cos x}{\log_e(1+x^2)} & ; \quad x\neq 0 \\ 0 & ; \quad x=0\end{cases}$

बिन्दु $x=0$ पर अवकलनीय है।

27. फलन $f(x)=|x-2|+2|x-3|$ की अन्तराल $[1, 3]$ में अवकलनीयता का परीक्षण कीजिए।

28. यदि फलन $f(x)=x^3, x=2$ पर अवकलनीय है तब $f'(2)$ ज्ञात कीजिए।

29. सिद्ध कीजिए कि महत्तम मान फलन $f(x)=[x]$, बिन्दु $x=2$ पर अवकलनीय नहीं है।

30. फलन $f(x)=\begin{cases} x-1 & ; \quad x<2 \\ 2x-3 & ; \quad x\geq 2 \end{cases}$ तब $f'(2-0)$ ज्ञात कीजिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. **सांतत्य की कोशी परिभाषा**

   कोई फलन $f(x)$, अपने प्रान्त के बिन्दु a पर संतत कहलाता है यदि प्रत्येक स्वैच्छ सूक्ष्म धनात्मक संख्या $\in$ के संगत एक धनात्मक संख्या δ ($\in$ पर निर्भर) इस प्रकार विद्यमान हो ताकि $|f(x)-f(a)|<\in$ जबकि $|x-a|<\delta$

2. **बिन्दु पर सांतत्य फलन की वैकल्पिक परिभाषा**

   कोई फलन $f(x)$, अपने प्रान्त के बिन्दु a पर संतत कहलाता है, यदि $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

   अर्थात् $\quad \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

   या $\quad f(a-0)=f(a+0)=f(a)$

   अर्थात् a पर $f(x)$ की बायीं सीमा $=a$ पर $f(x)$ की दायीं सीमा $=a$ पर $f(x)$ का मान

3. **प्रान्त में संतत फलन**

   कोई फलन $f(x)$, अपने प्रान्त D में संतत कहलाता है यदि $f(x)$, D के प्रत्येक बिन्दु पर संतत हो।

4. **असांतत्य फलन**

   (i) कोई फलन $f(x)$, बिन्दु a पर असंतत कहलाता है यदि $f(x)$ इस बिन्दु पर संतत नहीं हो।

   (ii) फलन $f(x)$, अपने प्रान्त D में असंतत कहलाता है यदि $f(x)$, D के कम से कम एक बिन्दु पर असंतत हो।

5. **सातंत्य के गुणधर्म**

   (i) यदि $f(x)$ तथा $g(x)$ किसी प्रान्त D में संतत फलन है तब $f(x)\pm g(x)$ तथा $f(x).g(x)$ तथा $c\cdot f(x)$, जहाँ c अचर है, भी प्रान्त D में संतत फलन होंगे तथा $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, D के उन बिन्दुओं पर संतत होगा जहाँ $g(x)\neq 0$

   (ii) यदि $f(x)$ तथा $g(x)$ अपने-अपने प्रान्त D एवं E में कोई दो संतत फलन है तब उनके संयुक्त फलन $(gof)(x)$ भी प्रांत D में संतत फलन होगा।

6. **अवकलनीयता**

   कोई फलन $f(x)$ बिन्दु $x=c$ पर अवकलनीय होगा, यदि बिन्दु $x=c$ पर इसके बायाँ तथा दायाँ अवकलज विद्यमान एवं परिमित हो तथा समान हो अर्थात् $f'(c-0)=f'(c+0)$

   या $\quad \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(c-h)-f(c)}{-h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$

7. **बिन्दु पर फलन का अवकलनीय न होना:**

   फलन $f(x)$, बिन्दु c पर अवकलनीय नहीं होगा यदि

   (i) $f'(c-0)\neq f'(c+0)$

   या

   (ii) $f'(c-0)$ तथा $f'(c+0)$ में से कोई एक या दोनों अपरिमित हो

   या

   (iii) $f'(c-0)$ या $f'(c+0)$ में से कोई एक या दोनों विद्यमान नहीं है।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 6.1

1. (a) संतत ; (b) असंतत ; (c) संतत ; (d) असंतत ; (e) असंतत ; (f) असंतत ; (g) संतत

2. असंतत   3. $k = 7$ 4. असंतत

प्रश्नमाला 6.2

3. अवकलनीय नहीं   4. अवकलनीय नहीं   5. अवकलनीय नहीं   6. अवकलनीय नहीं

7. अवकलनीय नहीं   8. अवकलनीय नहीं   9. अवकलनीय नहीं   10. अवकलनीय नहीं

11. $m = 3, n = 5$

विविध प्रश्नमाला–6

1. (क)   2. (क)   3. (ख)   4. (घ)   5. (ग)   6. (ख)   7. (घ)

8. (ख)   9. (क)   10. (ख)   11. R में सर्वत्र संतत   12. $m = \frac{-3}{2}$

13. $m = 2, n = -1$ 14.संतत   15. संतत   16. $a = -3/2, c = 1/2$ तथा $b \in R$

17. असंतत   18. $[-1, 2]$ में संतत   19. $1/6$ 20. दायीं तरफ से संतत (अर्थात् असंतत)

21. R 22. प्रत्येक $x \in R$ के लिए अवकलनीय तथा $f'(0) = 0$ 23. अवकलनीय नहीं

25. अवकलनीय नहीं   27. $x = 2$ पर अवकलनीय नहीं   28. 12 30. 1

07

अवकलन
(Differentiation)

7.01 प्रस्तावना (Introduction)

पूर्व कक्षा में हमने दिए फलन का अवकलज प्रथम सिद्धान्त से ज्ञात करने की विधि का अध्ययन किया हैं तथा कुछ मानक परिणाम निम्नानुसार प्राप्त किए हैं

मानक परिणाम

(i) $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ (ii) $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$

(iii) $\dfrac{d}{dx}(a^x) = a^x \log_e a$ (iv) $\dfrac{d}{dx}(\log_e x) = \dfrac{1}{x}$

(v) $\dfrac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ (vi) $\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

(vii) $\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ (viii) $\dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\cos ec^2 x$

(ix) $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$ (x) $\dfrac{d}{dx}(\cos ecx) = -\cos ecx \cot x$

इन परिणामों के अध्ययन एवं उपयोग द्वारा अन्य विभिन्न प्रकार के फलनों के अवकलन प्राप्त करने का प्रयास करेगें।

7.02 संयुक्त फलनों के अवकलज (Derivative of composite functions)

प्रमेयः यदि अन्तराल $[a, b]$ पर परिभाषित फलन f तथा g, अन्तराल $[a, b]$ के किसी बिन्दु c पर अवकलनीय है, तो $f \pm g$, fg तथा f/g बिन्दु c पर अवकलनीय होंगे तथा

(i) $D(f \pm g)(c) = f'(c) \pm g'(c)$

(ii) $D(fg)(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$

(iii) $D\{f/g\}(c) = \dfrac{g(c)f'(c) - g'(c)f(c)}{[g(c)]^2}$, शर्त $g(c) \neq 0$

प्रमाणः चूँकि फलन f तथा g बिन्दु $c \in [a, b]$ पर अवकलनीय है, तथा $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$

तथा $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{g(x) - g(c)}{x - c} = g'(c)$

(i) $$D(f \pm g)(c) = \lim_{x \to c} \frac{(f \pm g)(x) - (f \pm g)(c)}{x - c}$$

$$= \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \pm \lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} = f'(c) \pm g'(c).$$

(ii)
$$D(fg)(c) = \lim_{x\to c}\frac{(fg)(x)-(fg)(c)}{x-c}$$
$$= \lim_{x\to c}\frac{f(x)g(x)-f(c)g(c)}{x-c}$$
$$= \lim_{x\to c}\frac{f(x)g(x)-f(c)g(x)+f(c)g(x)-f(c)g(c)}{x-c}$$
$$= \lim_{x\to c}\frac{g(x)\{f(x)-f(c)\}+f(c)\{g(x)-g(c)\}}{x-c}$$
$$= \lim_{x\to c} g(x).\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}+f(c)\lim_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}$$
$$= g(c)f'(c)+f(c)g'(c).$$

(iii)
$$D(f/g) = \lim_{x\to c}\frac{(f/g)(x)-(f/g)(c)}{x-c}$$
$$= \lim_{x\to c}\frac{f(x)/g(x)-f(c)/g(c)}{x-c}$$
$$= \lim_{x\to c}\frac{f(x)g(c)-g(x)f(c)}{g(x)g(c)(x-c)}$$
$$= \lim_{x\to c}\frac{f(x)g(c)-f(c)g(c)+f(c)g(c)-g(x)f(c)}{g(x)g(c)(x-c)}$$
$$= \lim_{x\to c}\frac{g(c)\{f(x)-f(c)\}-f(c)\{g(x)-g(c)\}}{g(x)g(c)(x-c)}$$
$$= \lim_{x\to c}\frac{1}{g(x)g(c)}.\left[g(c)\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-f(c)\lim_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}\right]$$
$$= \frac{g(c)f'(c)-f(c)g'(c)}{[g(c)]^2},\quad g(c)\neq 0.$$

7.03 फलनों के फलन का अवकलज (Derivative of a function of funcitons) या अवकलज का शृखला नियम (Chain rule of derivative)

माना कि $y = f(u)$ अर्थात् y, u का फलन है तथा $u=\phi(x)$ अर्थात् u स्वयं, x का फलन है। माना कि स्वतंत्र चर x में वृद्धि δx के संगत u में वृद्धि δu तथा u में वृद्धि के संगत y में वृद्धि δy है, तब $\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{\delta y}{\delta u}.\frac{\delta u}{\delta x}$

अब यदि $\delta x \to 0$ तब $\delta u \to 0$ अतः

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta u\to 0}\frac{\delta y}{\delta u}.\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta u}{\delta x}$$

या
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. निम्न फलनों का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए

(i) $\log_e \log_e x^2$ (ii) $e^{\sin x^2}$ (iii) $\tan\left(\log_e \sqrt{1+x^2}\right)$

हल: (i) माना कि $y = \log_e \log_e x^2$

माना $\log_e x^2 = u,\ x^2 = v$

तब $y = \log_e u,\ u = \log_e v,\ v = x^2$

$$\therefore \quad \frac{dy}{du} = \frac{1}{u},\quad \frac{du}{dv} = \frac{1}{v},\quad \frac{dv}{dx} = 2x$$

अब $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} = \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{v}.2x = \frac{1}{\log_e x^2}\cdot\frac{1}{x^2}.2x = \frac{2}{x\log_e x^2}$$

वैकल्पिक विधि: माना $y = \log_e \log_e x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\log_e \log_e x^2 = \frac{1}{\log x^2}\cdot\frac{d}{dx}\log_e x^2$$

$$= \frac{1}{\log x^2}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = \frac{2x}{x^2\cdot\log x^2}\cdot\frac{2}{x\log x^2}$$

(ii) माना कि $y = e^{\sin x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{\sin x^2}\right)$$

$$= e^{\sin x^2}\frac{d}{dx}\left(\sin x^2\right) = e^{\sin x^2}\left(\cos x^2\right)\frac{d}{dx}\left(x^2\right)$$

$$= e^{\sin x^2}(\cos x^2)(2x) = 2x\cos x^2.e^{\sin x^2}$$

(iii) माना कि $y = \tan\left(\log_e \sqrt{1+x^2}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\tan(\log_e \sqrt{1+x^2})\right\}$$

$$= \sec^2(\log_e \sqrt{1+x^2})\frac{d}{dx}(\log_e \sqrt{1+x^2})$$

$$= \sec^2(\log_e \sqrt{1+x^2})\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{d}{dx}(\sqrt{1+x^2})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\sec^2(\log_e \sqrt{1+x^2}).\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}.\frac{d}{dx}(1+x^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\sec^2(\log_e \sqrt{1+x^2}).\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(0+2x)$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)}.\sec^2(\log_e \sqrt{1+x^2}).$$

उदाहरण-2. निम्न फलनों का x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए

(i) $\dfrac{\sin(ax+b)}{\cos(cx+d)}$ (ii) $\cos x^3.\sin^2(x^5)$ (iii) $\sec(\tan\sqrt{x})$

हलः (i) माना $y=\dfrac{\sin(ax+b)}{\cos(cx+d)}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left\{\frac{\sin(ax+b)}{\cos(cx+d)}\right\}$$

$$=\frac{\cos(cx+d)\frac{d}{dx}\sin(ax+b)-\sin(ax+b)\frac{d}{dx}\cos(cx+d)}{\cos^2(cx+d)}$$

$$=\frac{\cos(cx+d).\cos(ax+b)\frac{d}{dx}(ax+b)-\sin(ax+b)(-\sin cx+d)\frac{d}{dx}(cx+d)}{\cos^2(cx+d)}$$

$$=\frac{\cos(cx+d)\cos(ax+b)(a)+\sin(ax+b)\sin(cx+d)(c)}{\cos^2(cx+d)}.$$

(iii) माना $y=\cos x^3\cdot\sin^2(x^5)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\{\cos x^3\cdot\sin^2(x^5)\}$$

$$=\cos x^3\frac{d}{dx}\sin^2(x^5)+\sin^2(x^5)\frac{d}{dx}\cos x^3$$

$$=\cos x^3.2\sin(x^5)\frac{d}{dx}\sin(x^5)+\sin^2(x^5)(-\sin x^3)\frac{d}{dx}(x^3)$$

$$=\cos x^3.2\sin(x^5)\cos(x^5).\frac{d}{dx}(x^5)-\sin^2(x^5)\sin x^3(3x^2)$$

$$=\cos x^3.2\sin(x^5)\cos(x^5).5x^4-\sin^2(x^5)\sin x^3(3x^2)$$

$$=10x^4\cos x^3.\sin(x^5)\cos(x^5)-3x^2\sin(x^5)\sin x^3.$$

(iii) माना $y=\sec(\tan\sqrt{x})$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\sec(\tan\sqrt{x})$$

$$=\sec(\tan\sqrt{x}).\tan(\tan\sqrt{x}).\frac{d}{dx}(\tan\sqrt{x})$$

$$=\sec(\tan\sqrt{x}).\tan(\tan\sqrt{x})\sec^2\sqrt{x}\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$=\sec(\tan\sqrt{x})\tan(\tan\sqrt{x})\sec^2\sqrt{x}.\frac{1}{2}x^{1/2-1}$$

$$=\frac{1}{2}\sec(\tan\sqrt{x})\tan(\tan\sqrt{x})\sec^2\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

उदाहरण-3. निम्न फलनों का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए

(i) $2\sqrt{\cot\left(x^2\right)}$ (ii) $\cos\left(\sqrt{x}\right)$

हलः (i) माना कि $y = 2\sqrt{\cot(x^2)}$

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{d}{dx}(\sqrt{\cot x^2})$$

$$= 2.\frac{1}{2\sqrt{\cot x^2}}.\frac{d}{dx}(\cot x^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cot x^2}}.\left\{-\operatorname{cosec}^2(x^2)\right\}\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= -\frac{\operatorname{cosec}^2(x^2)}{\sqrt{\cot x^2}}.(2x) = -\frac{2x\sqrt{\tan x^2}}{\sin^2(x^2)}$$

$$= \frac{-2x\sqrt{\sin x^2}}{\sin^2(x^2)\sqrt{\cos x^2}} = \frac{-2x}{\sin(x^2)\sqrt{\sin x^2 \cos x^2}}$$

$$= \frac{-2\sqrt{2}x}{\sin(x^2)\sqrt{2\sin x^2 \cos x^2}} = \frac{-2\sqrt{2}x}{\sin(x^2)\sqrt{\sin(2x^2)}}.$$

(ii) माना कि $y = \cos\left(\sqrt{x}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\cos\sqrt{x}) = -\sin\sqrt{x}\,\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

प्रश्नमाला 7.1

निम्न फलनों का x के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए

1. $\sin x^2$
2. $\tan(2x+3)$
3. $\sin\left\{\cos\left(x^2\right)\right\}$
4. $\dfrac{\sec x - 1}{\sec x + 1}$
5. $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$
6. $\sin x^{\circ}$
7. $\log_e \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$
8. $\sec x^{\circ}$
9. $\log\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$
10. $\log_e\left\{\dfrac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right\}$
11. $\log_e\left\{\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right\}$
12. $\tan\left\{\log_e \sqrt{1+x^2}\right\}$
13. $a^{\tan 3x}$
14. $\log_e(\sec x + \tan x)$
15. $\sin^3 x.\sin 3x$

7.04 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज (Derivatives of inverse trigonometrical functions)

हम जानते हैं कि प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन संतत होते हैं। हम इन फलनों के अवकलजों को ज्ञात करने के लिए अवकलन का श्रृंखला नियम का प्रयोग करेंगे।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-4. फलन $\sin^{-1} x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए, जहाँ $x \in (-1, 1)$

हल: माना कि $y = \sin^{-1} x$

$\Rightarrow \quad x = \sin y$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर $1 = \cos y \dfrac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} \qquad \ldots (1)$$

यहाँ $\dfrac{dy}{dx}$, तभी विद्यमान होगा जबकि $\cos y \neq 0$

$\Rightarrow \quad \cos(\sin^{-1} x) \neq 0$

$\Rightarrow \quad \sin^{-1} x \neq \dfrac{-\pi}{2}$ या $\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad \Rightarrow x \neq -1, 1 \qquad \Rightarrow x \in (-1, 1)$

समीकरण (1) से $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \because \sin y = x$

टिप्पणी: शेष त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज निम्न होंगे, जिन्हें आप सामान्य अभ्यास से आसानी से ज्ञात कर सकते हैं।

(i) $\dfrac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ (ii) $\dfrac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \dfrac{1}{1+x^2}$

(iii) $\dfrac{d}{dx}\left(\cot^{-1} x\right) = -\dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ (iv) $\dfrac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

(v) $\dfrac{d}{dx}\left(\operatorname{cosec}^{-1} x\right) = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

उदाहरण-5. निम्नलिखित फलनों के लिए $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए

(i) $y = \sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$ $\qquad$ (ii) $\sin^{-1}\sqrt{\cos x}$

(iii) $y = \sqrt{\cos^{-1}\sqrt{x}}$ $\qquad$ (iv) $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}\right), x \in \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

हल: (i) दिया है $\qquad y = \sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

यहाँ $\qquad x = \tan\theta$ रखने पर

$$y = \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$$

$$= \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta = 2\tan^{-1} x \qquad [\because\ x = \tan\theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1} x]$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

(ii) दिया है $$y = \sin^{-1}\left(\sqrt{\cos x}\right)$$

माना $\sqrt{\cos x} = u$, तब

$$y = \sin^{-1} u$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

$\because$ $$u = \sqrt{\cos x}$$

$\therefore$ $$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\cos x}}\frac{d}{dx}(\cos x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$$

अब $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\left\{\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}\right\} \qquad [(1) \text{ व } (2) \text{ के प्रयोग से}]$$

u का मान रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}\left\{\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}\right\} = \frac{-\sin x}{2\sqrt{1-\cos x}\sqrt{\cos x}}$$

(iii) $$y = \sqrt{\cot^{-1}\sqrt{x}}$$

माना $\sqrt{x} = u$ तथा $\cot^{-1}\sqrt{x} = \cot^{-1} u = t$, तब

$$y = \sqrt{t},\ t = \cot^{-1} u \text{ तथा } u = \sqrt{x}$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}},\ \frac{dt}{du} = \frac{-1}{1+u^2},\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

अब $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)\cdot\left(\frac{-1}{1+u^2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{-1}{4\sqrt{t}\sqrt{x}\left(1+u^2\right)}$$

$$= \frac{-1}{4\sqrt{\left(\cot^{-1} u\right)}\left(\sqrt{x}\right)\left(1+u^2\right)} \qquad [\because t = \cot^{-1} u]$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{4\sqrt{x}(1+x)\sqrt{\cot^{-1}\sqrt{x}}} \qquad [\because u = \sqrt{x}\,]$$

(iv) दिया है $y = \tan^{-1}\left(\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}\right)$

माना $x = \tan\theta$

$\therefore$ $y = \tan^{-1}\left(\frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}\right) = \tan^{-1}(\tan 3\theta)$

$\because$ $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\Rightarrow$ $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow$ $-\frac{1}{\sqrt{3}} < \tan\theta < \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow$ $-\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}$ $\Rightarrow$ $3.\frac{\pi}{6} < 3\theta < 3.\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow$ $-\frac{\pi}{2} < 3\theta < \frac{\pi}{2}$

अतः $y = \tan^{-1}(\tan 3\theta)$ $\left(\because -\frac{\pi}{2} < 3\theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow$ $y = 3\theta \Rightarrow y = 3\tan^{-1} x$

अतः $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{1 + x^2}$

उदाहरण-6. निम्न फलनों का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए

(i) $\tan^{-1}(\sin e^x)$ (ii) $\sin^{-1}\left(\sqrt{\sin x^2}\right)$ (iii) $\sin^{-1}\left(\frac{a + b\cos x}{b + a\cos x}\right)$

हल: (i) माना कि $y = \tan^{-1}(\sin e^x)$

यहाँ $\sin e^x = u$, $e^x = v$ रखने पर

$y = \tan^{-1}(u), \quad u = \sin v, \quad v = e^x$

$\Rightarrow$ $\frac{dy}{du} = \frac{1}{1+u^2}, \quad \frac{du}{dv} = \cos v, \quad \frac{dv}{dx} = e^x$

अब, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dv}.\frac{dv}{dx} = \frac{1}{1+u^2}.\cos v.e^x$

u तथा v के मान रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \sin^2 e^x}.\cos(e^x).e^x = \frac{e^x \cos e^x}{1 + \sin^2 e^x}$$

(ii) माना कि $y = \sin^{-1}(\sqrt{\sin x^2})$

यहाँ $\sqrt{\sin x^2} = u$, $\sin x^2 = v$, $x^2 = \omega$ रखने पर

$y = \sin^{-1} u, \quad u = \sqrt{v}, \quad v = \sin\omega, \quad \omega = x^2$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{du}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}},\quad \frac{du}{dv}=\frac{1}{2\sqrt{v}},\quad \frac{dv}{d\omega}=\cos\omega,\quad \frac{d\omega}{dx}=2x$$

अब, $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{d\omega}\cdot\frac{d\omega}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{v}}.\cos\omega.2x$$

u, v तथा ω के मान रखने पर

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\sin x^2}}.(\cos x^2)(2x)=\frac{x\cos x^2}{\sqrt{(\sin x^2)(1-\sin x^2)}}$$

(iii) माना कि $$y=\sin^{-1}\left(\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x}\right)$$

यहाँ $\dfrac{a+b\cos x}{b+a\cos x}=u$ रखने पर,

$$y=\sin^{-1}u,\qquad u=\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x}$$

$$\frac{dy}{du}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}};\ \frac{du}{dx}=\frac{(b+a\cos x)\frac{d}{dx}(a+b\cos x)-(a+b\cos x)\frac{d}{dx}(b+a\cos x)}{(b+a\cos x)^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{du}=\frac{b+a\cos x}{\sqrt{(b+a\cos x)^2-(a+b\cos x)^2}}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{(b+a\cos x)(-b\sin x)-(a+b\cos x)(-a\sin x)}{(b+a\cos x)^2}=\frac{(a^2-b^2)\sin x}{(b+a\cos x)^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{du}{dx}=\frac{(a^2-b^2)\sin x}{(b+a\cos x)^2}$$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=\frac{b+a\cos x}{\sqrt{(b+a\cos x)^2-(a+b\cos x)^2}}\cdot\frac{(a^2-b^2)\sin x}{(b+a\cos x)^2}$$

$$=\frac{-(b^2-a^2)\sin x}{(b+a\cos x)\sqrt{(b^2-a^2)\sin^2 x}}=\frac{-\sqrt{(b^2-a^2)}}{(b+a\cos x)}$$

उदाहरण-7. निम्नलिखित फलनों का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए

(i) $\tan^{-1}(\sec x+\tan x)$ (ii) $\sin^{-1}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ (iii) $\tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}\right)$ (iv) $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$

हलः (i) माना $y = \tan^{-1}(\sec x + \tan x)$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{(\cos x/2 + \sin x/2)^2}{\cos^2 x/2 - \sin^2 x/2}\right\}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\cos x/2 + \sin x/2}{\cos x/2 - \sin x/2}\right) = \tan^{-1}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right\}$$

$\therefore$ $y = \pi/4 + x/2.$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(ii) माना $y = \sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

यहाँ $x = \tan\theta$ रखने पर

$$y = \sin^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$$

$$= \sin^{-1}(\cos 2\theta) = \sin^{-1}\{\sin(\pi/2 \pm 2\theta)\}$$

$$= \frac{\pi}{2} \pm 2\theta = \frac{\pi}{2} \pm 2\tan^{-1} x$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = 0 \pm \frac{2}{1+x^2} = \pm\frac{2}{1+x^2}.$$

(iii) माना कि $y = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)$

यहाँ $x = a\cos 2\theta$ रखने पर,

$\therefore$
$$y = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a - a\cos 2\theta}{a + a\cos 2\theta}}\right) = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta}}\right) = \tan^{-1}(\tan\theta) = \theta$$

$$= \frac{1}{2}\cos^{-1}(x/a) \qquad [\because x = a\cos 2\theta \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\cos^{-1}(x/a)]$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2/a^2}}.\frac{1}{a} = -\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}.$$

(iv) माना कि $$y=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$$

यहाँ $x=\tan\theta$ रखने पर

$$y=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan\theta}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\sec\theta-1}{\tan\theta}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{2\sin^2(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\tan(\theta/2)\right)=\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\tan^{-1}x \qquad [\because x=\tan\theta]$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}.$$

उदाहरण-8. निम्न फलनों का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

(i) $\tan^{-1}\left(\frac{3a^2x-x^3}{a\left(a^2-3x^2\right)}\right)$ (ii) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)$

(iii) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right)$ (iv) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right)$

हल: (i) माना कि $$y=\tan^{-1}\left(\frac{3a^2x-x^3}{a\left(a^2-3x^2\right)}\right)$$

यहाँ $x=a\tan\theta$ रखने पर,

$$y=\tan^{-1}\left(\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}\right)=\tan^{-1}\left(\tan 3\theta\right)=3\theta=3\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

अतः $$\frac{dy}{dx}=3\frac{1}{1+x^2/a^2}\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{3a}{x^2+a^2}.$$

(ii) माना $$y=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)$$

यहाँ $x=\cos\theta$ रखने पर

$$y=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\cos\theta}+\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{1+\cos\theta}-\sqrt{1-\cos\theta}}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\cos(\theta/2)+\sqrt{2}\sin(\theta/2)}{\sqrt{2}\cos(\theta/2)-\sqrt{2}\sin(\theta/2)}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1+\tan(\theta/2)}{1-\tan(\theta/2)}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot\cos^{-1}x. \qquad [\because \cos\theta=x]$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = 0 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

(iii) माना कि $y = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right)$

यहाँ $x^2 = \cos\theta$ रखने पर

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\cos\theta}+\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{1+\cos\theta}-\sqrt{1-\cos\theta}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\cos(\theta/2)+\sqrt{2}\sin(\theta/2)}{\sqrt{2}\cos(\theta/2)-\sqrt{2}\sin(\theta/2)}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1+\tan\theta/2}{1-\tan\theta/2}\right) = \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos^{-1}x^2$$

$[\because x^2 = \cos\theta]$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = 0 + \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}.2x\right\} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^4}}$$

(iv) माना कि $y = \tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right\}$

$$= \tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{(\cos x/2+\sin x/2)^2}+\sqrt{(\cos x/2-\sin x/2)^2}}{\sqrt{(\cos x/2+\sin x/2)^2}-\sqrt{(\cos x/2-\sin x/2)^2}}\right\}$$

$$= \tan^{-1}\left\{\frac{(\cos x/2+\sin x/2)+(\cos x/2-\sin x/2)}{(\cos x/2+\sin x/2)-(\cos x/2-\sin x/2)}\right\}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2\cos x/2}{2\sin x/2}\right) = \tan^{-1}(\cot x/2) = \tan^{-1}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right\} = \frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}$$

अतः $\frac{dy}{dx} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$

प्रश्नमाला 7.2

निम्न फलनों का x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए

1. (a) $\sin^{-1}\{2x\sqrt{1-x^2}\},\ -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\sin^{-1}(3x-4x^3) x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

2. (a) $\cos^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right), x\in(-1,1)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right),\ x\in(0,1)$

3. (a) $\cos^{-1}(4x^3-3x),\ x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right)$ (संकेत $x=\cos\theta$)

4. (a) $\sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right); x\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right),\ x\in(0,\ \infty)$

5. (a) $\sin^{-1}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$ (b) $\cos^{-1}(2x)+2\cos^{-1}\left(\sqrt{1-4x^2}\right)$

(संकेत $\sin^{-1}\theta+\cos^{-1}\theta=\pi/2$) (संकेत $2x=\cos\theta$)

6. (a) $\tan^{-1}\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)$ (संकेत $x=\tan\theta,\ a=\tan\alpha$) (b) $\tan^{-1}\left(\frac{2^{x+1}}{1-4^x}\right)$ (संकेत $2^x=\tan\theta$)

7. (a) $\sin\left\{2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right\}$ (संकेत $x=\cos\theta$) (b) $\cot^{-1}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$ (संकेत $x=\tan\theta$)

7.05 अस्पष्ट फलनों का अवकलन (Derivative of implicit functions)

जब किसी समीकरण में x तथा y दोनों चर हों तथा इसमें y को x के (या x को y के) फलन के रूप में स्पष्ट पदों में व्यक्त किया जा सके तब y को x के (या x को y के) स्पष्ट फलन (Explicit Funcition) कहते हैं। उपर्युक्त में यदि y को x के (या x को y के) फलन के रूप में स्पष्ट पदों में व्यक्त नहीं किया जा सके तो ऐसे फलनों को अस्पष्ट फलन (Implicit Function) कहते हैं।

उदाहरणार्थ (i) समीकण $x-2y-4=0$ में y को x के स्पष्ट पदों के रूप में $\left(y=\frac{1}{2}(x-4)\right)$ लिख सकते हैं। इसी प्रकार x को y के स्पष्ट पदों के रूप में लिख सकते हैं तब इस तरह के फलन को स्पष्ट फलन कहते हैं।

(ii) समीकरण $x^3+y^3+3axy=c$ में न तो y को x के स्पष्ट पदों के रूप में और न ही x को y के स्पष्ट पदों के रूप में लिखा जा सकता है तब इस तरह के फलन को अस्पष्ट फलन कहते हैं।

अस्पष्ट फलनों का अवकलन ज्ञात करने के लिए y को x का फलन मानकर समीकरण $f(x,y)=0$ के प्रत्येक पद का x के सापेक्ष अवकलन करके $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करते हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-9. निम्नलिखित से $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए

(i) $x^3+x^2y+xy^2+y^3=81$ (ii) $\sin^2 y+\cos xy=\pi$

(iii) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ (iv) $2x+3y=\sin x$

हलः (i) दिया है कि $$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 81$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$3x^2 + x^2\frac{dy}{dx} + y(2x) + x\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + y^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(x^2 + 2xy + 3y^2\right)\frac{dy}{dx} = -\left(3x^2 + 2xy + y^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{(3x^2 + 2xy + y^2)}{x^2 + 2xy + 3y^2}.$$

(ii) $\because$ $$\sin^2 y + \cos xy = \pi$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2\sin y\frac{d}{dx}(\sin y) + (-\sin xy)\frac{d}{dx}(xy) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin y\cos y\frac{dy}{dx} - \sin(xy)\left\{x\frac{dy}{dx} + y\right\} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (2\sin y\cos y - x\sin xy)\frac{dy}{dx} = y\sin xy$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y\sin xy}{2\sin y\cos y - x\sin xy} = \frac{y\sin xy}{\sin 2y - x\sin xy}.$$

(iii) $\because$ $$\sin^2 x + \cos^2 y = 1$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2\sin x\frac{d}{dx}(\sin x) + 2\cos y\frac{d}{dx}(\cos y) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin x\cos x + 2\cos y(-\sin y)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin 2x - \sin 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2x}{\sin 2y}$$

(iv) $\because$ $$2x + 3y = \sin x$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2 + 3\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x - 2}{3}.$$

उदाहरण-10. निम्न से $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए

(i) $xy + y^2 = \tan x + y$ (ii) $ax + by^2 = \cos y$

हलः (i) $\because$ $xy + y^2 = \tan x + y$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = \sec^2 x + \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad (x + 2y - 1)\frac{dy}{dx} = \sec^2 x - y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x - y}{x + 2y - 1}$$

7.06 लघुगणकीय अवकलन (Logarithimic differentiation)

जब फलन $[f(x)]^{\phi(x)}$ रूप का हो तब ऐसे फलन का अवकलन ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम फलन का लघुगणक लेते हैं तथा इससे प्राप्त परिणाम का अवकलन करते हैं। इस को लघुगणकीय अवकलन विधि कहते हैं। यदि फलन, गुणनखण्डों का गुणन हो तब भी यह विधि उपयोगी सिद्ध होती है।

क्रिया विधिः माना कि $y = u^v$, जहाँ u तथा v, x के फलन हैं।

दोनों तरफ लघुगणक लेने पर $\log_e y = \log_e u^v$

$$\Rightarrow \quad \log_e y = v \log_e u$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = v.\frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \log_e u.\frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y\left\{\frac{v}{u}\frac{du}{dx} + \log_e u\frac{dv}{dx}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = u^v\left\{\frac{v}{u}\frac{du}{dx} + \log_e u\frac{dv}{dx}\right\}$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-11. निम्न फलनों का x के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए

(i) x^x (ii) $(\sin x)^x$ (iii) $x^{\log_e x}$ (iv) $x^{\sin x}$

हलः (i) माना कि $y = x^x$

दोनों तरफ लघुगणक लेने पर

$$\log_e y = \log_e(x^x)$$

$$\Rightarrow \quad \log_e y = x \log_e x$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x\frac{1}{x} + \log_e x$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = y\{1+\log_e x\} = x^x\{1+\log_e x\} = x^x \log_e ex$$

(ii) माना कि $\qquad y = (\sin x)^x$

दोनों तरफ लघुगणक लेने पर $\qquad \log_e y = x \log_e \sin x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{\sin x}.\cos x + 1.\log_e \sin x$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = y\{x\cot x + \log_e \sin x\}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = (\sin x)^x \{x\cot x + \log_e \sin x\}$$

(iii) माना कि $\qquad y = x^{\log_e x}$

दोनों तरफ लघुगणक लेने पर

$$\log_e y = \log_e x.\log_e x$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.\log_e x + \frac{1}{x}.\log_e x$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}\log_e x = \frac{2x^{\log_e x}}{x}.\log_e x = 2x^{(\log_e x - 1)}.\log_e x$$

(iv) माना कि $\qquad y = x^{\sin x}$

दोनों तरफ लघुगणक लेने पर

$$\log_e y = \sin x \log_e x$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sin x.\frac{1}{x} + \log_e x(\cos x)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = y\left\{\frac{\sin x}{x} + \cos x.\log_e x\right\}$$

$$= x^{\sin x}\left\{\frac{\sin x}{x} + \cos x.\log_e x\right\}$$

$$= x^{\sin x - 1}.\sin x + x^{\sin x}.\cos x.\log_e x.$$

उदाहरण-12. निम्न फलनों का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए

(i) $\cos x.\cos 2x.\cos 3x$ $\qquad$ (ii) $(\log x)^{\cos x}$ $\qquad$ (iii) $\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}$

हल: (i) माना कि $\qquad y = \cos x.\cos 2x.\cos 3x$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log y = \log(\cos x) + \log(\cos 2x) + \log(\cos 3x)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) + \frac{1}{\cos 2x}(-2\sin 2x) + \frac{1}{\cos 3x}(-3\sin 3x)$$

$$\frac{dy}{dx} = -y\{\tan x + 2\tan 2x + 3\tan 3x\}$$

$$= -\cos x.\cos 2x.\cos 3x\{\tan x + 2\tan 2x + 3\tan 3x\}$$

(ii) माना कि $\quad y = (\log x)^{\cos x}$

दोनों तरफ लघुगणक लेने पर

$$\log y = \cos x \log(\log x)$$

x सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cos x\frac{d}{dx}\{\log(\log x)\} + \log(\log x)\frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= \cos x.\frac{1}{\log x}.\frac{1}{x} - \sin x.\log(\log x)$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left\{\frac{\cos x}{x\log x} - \sin x.\log(\log x)\right\}$$

$$= (\log x)^{\cos x}\left\{\frac{\cos x}{x\log x} - \sin x\log(\log x)\right\}$$

(iii) माना कि $\quad y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}$

दोनों पक्षों में लघुगणक लेने पर

$$\log y = \frac{1}{2}\{\log(x-1) + \log(x-2) - \log(x-3) - \log(x-4) - \log(x-5)\}$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{(x-3)} - \frac{1}{(x-4)} - \frac{1}{(x-5)}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2}\left[\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{(x-3)} - \frac{1}{(x-4)} - \frac{1}{(x-5)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}\left[\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{(x-3)} - \frac{1}{(x-4)} - \frac{1}{(x-5)}\right]$$

उदाहरण-13. $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए

(i) $x^y = y^x$ (ii) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + ...\infty}}}$ (iii) $(\cos x)^y = (\sin y)^x$ (iv) $x^y.y^x = \kappa$

हलः (i) यहाँ $$x^y = y^x$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$y\log x = x\log y$$

x के सापेक्ष अवकलन करन पर

$$y.\frac{1}{x} + \log x.\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + \log y.1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}\left\{\log x - \frac{x}{y}\right\} = \log y - \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y(x\log y - y)}{x(y\log x - x)}.$$

(ii) यहाँ $$y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + ...\infty}}}$$

$$\therefore \quad y = \sqrt{x + y}$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = x + y$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2y\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$(2y - 1)\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y - 1}$$

(iii) यहाँ $$(\cos x)^y = (\sin y)^x$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$y\log(\cos x) = x\log(\sin y)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$y.\frac{1}{\cos x}(-\sin x) + \log(\cos x)\frac{dy}{dx} = x.\frac{\cos y}{\sin y}\frac{dy}{dx} + \log(\sin y).1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log(\sin y) + y\tan x}{\log(\cos x) - x\cot y}$$

(iv) यहाँ $$x^y.y^x = k$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log x^y + \log y^x = \log k$$

$$\Rightarrow \quad y\log x + x\log y = \log k$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$y.\frac{1}{x} + \log x\frac{dy}{dx} + x.\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + \log y.1 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\log x+\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{dx}=-\left(\log y+\frac{y}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{-y(x\log y+y)}{x(y\log x+x)}.$$

उदाहरण-14. $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए

(i) $x^a.y^b=(x+y)^{a+b}$ (ii) $\sqrt{x^2+y^2}=\log(x^2-y^2)$

(iii) $x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}=0$ (iv) $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=a(x-y)$

हल: (i) यहाँ $x^a.y^b=(x+y)^{a+b}$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर,

$$\log x^a+\log y^b=(a+b)\log(x+y)$$

$$\Rightarrow \qquad a\log x+b\log y=(a+b)\log(x+y)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$a.\frac{1}{x}+b.\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=(a+b).\frac{1}{(x+y)}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{b}{y}-\frac{a+b}{x+y}\right)\frac{dy}{dx}=\frac{a+b}{x+y}-\frac{a}{x}$$

$$\Rightarrow \qquad \left\{\frac{b(x+y)-y(a+b)}{y(x+y)}\right\}\frac{dy}{dx}=\frac{x(a+b)-a(x+y)}{x(x+y)}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}.$$

(ii) यहाँ $\sqrt{x^2+y^2}=\log(x^2-y^2)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{(x^2-y^2)}\left(2x-2y\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\left\{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{2y}{x^2-y^2}\right\}\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{x^2-y^2}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x\sqrt{x^2+y^2}-x\left(x^2-y^2\right)}{y\left(x^2-y^2\right)+2y\sqrt{x^2+y^2}}.$$

(iii) यहाँ $x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}=0$

$$\Rightarrow \qquad x\sqrt{1+y}=-y\sqrt{1+x}$$

वर्ग करने पर

$$x^2(1+y) = y^2(1+x)$$

$\Rightarrow$ $$x^2 - y^2 + x^2y - xy^2 = 0$$

$\Rightarrow$ $$(x-y)(x+y) + xy(x-y) = 0$$

$\Rightarrow$ $$(x-y)(x+y+xy) = 0$$

यदि $x-y=0$ या $x=y$ जो कि दी गई समीकरण को संतुष्ट नहीं करता अतः $x-y \neq 0$

अतः $x+y+xy=0$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$1 + \frac{dy}{dx} + 1.y + x\frac{dy}{dx} = 0$$

$\Rightarrow$ $$(1+x)\frac{dy}{dx} = -(1+y)$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{1+y}{1+x}\right)$$

(iv) यहाँ $$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = a(x-y)$$

यहाँ $x = \sin\theta,\ y = \sin\phi$ रखने पर

$$\sqrt{1-\sin^2\theta} + \sqrt{1-\sin^2\phi} = a(\sin\theta - \sin\phi)$$

$\Rightarrow$ $$\cos\theta + \cos\phi = a(\sin\theta - \sin\phi)$$

$\Rightarrow$ $$2\cos\frac{\theta+\phi}{2}.\cos\frac{\theta-\phi}{2} = 2a\cos\frac{\theta+\phi}{2}\sin\frac{\theta-\phi}{2}$$

$\Rightarrow$ $$\cot\frac{\theta-\phi}{2} = a$$

$\Rightarrow$ $$\frac{\theta-\phi}{2} = \cot^{-1}(a)$$

$\Rightarrow$ $$\theta - \phi = 2\cot^{-1}(a)$$

$\Rightarrow$ $$\sin^{-1}x - \sin^{-1}y = 2\cot^{-1}a$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{dy}{dx} = 0$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$$

उदाहरण-15. $\dfrac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए–

(i) $y = \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \ldots\infty}}}$ (ii) $y = (\sin x)^{(\sin x)^{\ldots\infty}}$ (iii) $y = e^{x+e^{x+e^{x+\ldots\infty}}}$

हलः (i) यहाँ $$y=\sqrt{\log x+\sqrt{\log x+\sqrt{\log x+\ldots\infty}}}$$

या $$y=\sqrt{\log x+y}$$

वर्ग करने पर $$y^2=\log x+y$$

x के सापेक्ष करने अवकलन करने पर

$$2y\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}+\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad (2y-1)\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x(2y-1)}.$$

(ii) यहाँ $$y=(\sin x)^{(\sin x)^{\ldots\infty}}$$

$$=(\sin x)^y$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log y=y\log(\sin x)$$

x के सापेक्ष करने अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=y.\frac{1}{\sin x}.\cos x+\log(\sin x).\frac{dy}{dx}$$

$$\left\{\frac{1}{y}-\log(\sin x)\right\}\frac{dy}{dx}=y\cot x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2\cot x}{1-y\log(\sin x)}.$$

(iii) यहाँ $$y=e^x+e^x+e^x+\ldots\infty=e^{x+y}$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log y=(x+y)\log e$$

$$\Rightarrow \quad \log y=x+y$$

x के सापेक्ष करने अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=1+\frac{dy}{dx}$$

$$\left(\frac{1}{y}-1\right)\frac{dy}{dx}=1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y}{1-y}.$$

प्रश्नमाला 7.3

निम्नलिखित फलनों से $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए

1.	(a) $2x+3y=\sin y$	(b) $x^2+xy+y^2=200$
2.	(a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$	(b) $\tan(x+y)+\tan(x-y)=4$
3.	(a) $\sin x+2\cos^2 y+xy=0$	(b) $x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=1$
4.	(a) $(x^2+y^2)^2=xy$	(b) $\sin(xy)+\frac{x}{y}=x^2-y$
5.	(a) $x^3+y^3=3axy$	(b) $x^y+y^x=a^b$
6.	(a) $y=x^y$	(b) $x^a.y^b=(x-y)^{a+b}$
7.	(a) $e^x+e^{x^2}+....+e^{x^5}$	(b) $\sqrt{e^{\sqrt{x}}},\ x>0$
8.	(a) $\frac{\cos x}{\log x},\ x>0$	(b) $y=\sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\dots\infty}}}$
9.	(a) $y\sqrt{1-x^2}=\sin^{-1}x$	(b) $y\sqrt{1+x}=\sqrt{1-x}$
10.	(a) $y=\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\dots\infty}}}$	(b) $y^x+x^y+x^x=a^b$

7.07 फलनों के प्राचलिक रूपों के अवकलज (Derivative of parametric functions)

यदि चरों x तथा y दोनों किसी अन्य चर के पदों में व्यक्त किए जाते हैं जैसे $x=f(t),\ y=\phi(t)$ तब चर राशि t को प्राचल कहते है तथा इस प्रकार की समीकरण को प्राचलिक समीकरण (parametric equation) कहते हैं। यदि दी गई प्राचलिक समीकरण से प्राचल का विलोपन, कठिन हो तब $\frac{dy}{dx}$ का मान निम्न सूत्र से ज्ञात किया जाता है

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt},\ \text{जहाँ}\ \frac{dx}{dt}\neq 0.$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-16. $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए जबकि

(i) $x=2at^2,\ y=at^4$ (ii) $x=\sin t,\ y=\cos 2t$ (iii) $x=4t,\ y=\frac{4}{t}$

हल: (i) यहाँ $x=2at^2 \quad \Rightarrow \frac{dx}{dt}=4at$

तथा $y=at^4 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dt}=4at^3$

अतः, $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{4at^3}{4at}=t^2.$$

(ii) यहाँ $$x = \sin t \quad \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \cos t$$

तथा $$y = \cos 2t \quad \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -2\sin 2t$$

अतः $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -\frac{2\sin 2t}{\cos t} = \frac{-2.2\sin t\cos t}{\cos t} = -4\sin t$$

(iii) यहाँ $$x = 4t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 4$$

तथा $$y = \frac{4}{t} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{4}{t^2}$$

अतः $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-4/t^2}{4} = -\frac{1}{t^2}$$

उदाहरण-17. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, जबकि

(i) $x = \sin^{-1}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right), \quad y = \cos^{-1}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$ (ii) $x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$

(iii) $x = e^{\theta}\left(\theta + \frac{1}{\theta}\right), \quad y = e^{-\theta}\left(\theta - \frac{1}{\theta}\right)$

हल: (i) $x = \sin^{-1}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right), \quad y = \cos^{-1}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$

यहाँ $t = \tan\theta$ रखने पर,

$$x = \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) = \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta \qquad \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = 2$$

तथा $$y = \cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right) = \cos^{-1}(\cos 2\theta) = 2\theta \qquad \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = 2$$

अतः $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{2}{2} = 1.$$

(ii) यहाँ $$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

t के सापेक्ष करने अवकलन करने पर

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(1+t^3)(3a) - 3at(0+3t^2)}{(1+t^3)^2} = \frac{3a - 6at^3}{(1+t^3)^2}$$

तथा $$\frac{dy}{dt}=\frac{(1+t^3)(6at)-3at^2(0+3t^2)}{(1+t^3)^2}=\frac{6at-3at^4}{(1+t^3)^2}$$

अतः $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{6at-3at^4}{3a-6at^3}=\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$$

(iii) यहाँ $$x=e^{\theta}\left(\theta+\frac{1}{\theta}\right),\quad y=e^{-\theta}\left(\theta-\frac{1}{\theta}\right)$$

θ के सापेक्ष करने अवकलन करने पर

$$\frac{dx}{d\theta}=e^{\theta}.\left(\theta+\frac{1}{\theta}\right)+e^{\theta}\left(1-\frac{1}{\theta^2}\right)=e^{\theta}\left(\frac{\theta^2-1+\theta^3+\theta}{\theta^2}\right)$$

$$\frac{dy}{d\theta}=-e^{-\theta}\left(\theta-\frac{1}{\theta}\right)+e^{-\theta}\left(1+\frac{1}{\theta^2}\right)=e^{-\theta}\left(\frac{\theta^2+1-\theta^3+\theta}{\theta^2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\frac{e^{-\theta}(\theta^2+1-\theta^3+\theta)}{e^{\theta}(\theta^2-1+\theta^3+\theta)}.$$

उदाहरण-18. यदि $x^2+y^2=t-\frac{1}{t}$ तथा $x^4+y^4=t^2+\frac{1}{t^2}$ तब सिद्ध कीजिए $x\frac{dy}{dx}+y=0$

हल: दिया है $t-\frac{1}{t}=x^2+y^2$ तथा $t^2+\frac{1}{t^2}=x^4+y^4$

$\because$ $$\left(t-\frac{1}{t}\right)^2=t^2+\frac{1}{t^2}-2$$

$\Rightarrow$ $$(x^2+y^2)^2=x^4+y^4-2$$

$\Rightarrow$ $$x^4+y^4+2x^2y^2=x^4+y^4-2$$

$\therefore$ $$x^2y^2=-1$$

x के सापेक्ष करने अवकलन करने पर

$$x^2.2y\frac{dy}{dx}+2x.y^2=0$$

$\Rightarrow$ $$2xy\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)=0$$

$\Rightarrow$ $$x\frac{dy}{dx}+y=0.$$

प्रश्नमाला 7.4

$\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, जबकि

1. (a) $x = a\sec t,\ y = b\tan t$ (b) $x = \log t + \sin t,\ y = e^t + \cos t$
2. (a) $x = \log t,\ y = e^t + \cos t$ (b) $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$
3. (a) $x = \cos\theta - \cos 2\theta,\ y = \sin\theta - \sin 2\theta$ (b) $x = \theta - \sin\theta,\ y = a(1+\cos\theta)$
4. (a) $x = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}},\ y = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$ (b) $x = a\left(\cos t + \log\tan\frac{t}{2}\right),\ y = a\sin t$
5. (a) $x = \sqrt{\sin 2\theta},\ y = \sqrt{\cos 2\theta}$ (b) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$
6. यदि $x^3 + y^3 = t - \frac{1}{t}$ तथा $x^6 + y^6 = t^2 + \frac{1}{t^2}$ तब सिद्ध कीजिए कि $x^4 y^2 \frac{dy}{dx} = 1$

7.08 द्वितीय कोटि का अवकलज (Second order derivative)

माना कि $\quad y = f(x)$

तब $$\frac{dy}{dx} = f'(x) \qquad (1)$$

अब यदि $f'(x)$ अवकलनीय है तब हम समीकरण (1) का x के सापेक्ष पुनः अवकलन कर सकते है। तब बायाँ पक्ष $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ हो जाता है, जिसे $f(x)$ का द्वितीय कोटि का अवकलज कहते हैं तथा संकेत में इसे $\frac{d^2y}{dx^2}$ से निरूपित करते हैं। $f(x)$ के द्वितीय क्रम या कोटि के अवकलज को $f''(x)$ से भी निरूपित करते हैं। इसी प्रकार उच्च कोटि के अवकलन भी इसी प्रकार प्राप्त किए जाते हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-19. निम्न फलनों के द्वितीय क्रम के अवकलज ज्ञात कीजिए

(i) x^{20} (ii) $x^3\log x$ (iii) $e^{6x}.\cos 3x$

(iv) $\log(\log x)$ (v) $\sin(\log x)$ (vi) $\tan^{-1} x.$

हल: (i) माना कि $\quad y = x^{20}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 20x^{19}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 20.19x^{18} = 380x^{18}.$$

(ii) माना कि $\quad y = x^3\log x$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = x^3.\frac{1}{x} + \log x.3x^2 = x^2 + 3x^2\log x$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2x + 3\left\{x^2.\frac{1}{x} + \log x.2x\right\}$$

$$= 2x + 3(x + 2x\log x) = 5x + 6x\log x = x(5 + 6\log x).$$

(iii) माना कि $$y = e^{6x}\cos 3x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = e^{6x}(-\sin 3x).3 + \cos 3x.e^{6x}.6$$

$$= 6e^{6x}.\cos 3x - 3e^{6x}.\sin 3x$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 6\{e^{6x}(-\sin 3x).3 + \cos 3x.e^{6x}.6\} - 3\{e^{6x}.\cos 3x.3 + \sin 3x.e^{6x}.6\}$$

$$= -18e^{6x}\sin 3x + 36e^{6x}\cos 3x - 9e^{6x}\cos 3x - 18e^{6x}\sin 3x$$

$$= 9e^{6x}(3\cos 3x - 4\sin 3x).$$

(iv) माना कि $$y = \log(\log x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log x}.\frac{1}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\log x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2\log x} + \frac{1}{x}\left\{\frac{\log x.(0) - 1.\frac{1}{x}}{(\log x)^2}\right\} = -\frac{1}{x^2\log x} + \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x(\log x)^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2\log x} - \frac{1}{x^2(\log x)^2} = -\frac{1}{x^2\log x}\left(1 + \frac{1}{\log x}\right).$$

(v) माना कि $$y = \sin(\log x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \cos(\log x).\frac{1}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \cos(\log x)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x}(-\sin(\log x)).\frac{1}{x}$$

$$= -\frac{\cos(\log x)}{x^2} - \frac{\sin(\log x)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}\{\cos(\log x) + \sin(\log x)\}.$$

(vi) माना कि $$y = \tan^{-1}x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1+x^2)(0) - 1.(0+2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

उदाहरण-20. यदि $y = (x + \sqrt{x^2-1})^m$ तब सिद्ध कीजिए कि

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - m^2y = 0.$$

हलः दिया है कि $$y=(x+\sqrt{x^2-1})^m$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx}=m\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{m-1}\left\{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right\}$$

$$=m(x+\sqrt{x^2-1})^{m-1}\frac{(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{m(x+\sqrt{x^2-1})^m}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{my}{\sqrt{x^2-1}}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$\left(x^2-1\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=m^2y^2$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\left(x^2-1\right)\cdot 2\left(\frac{dy}{dx}\right).\frac{d^2y}{dx^2}+2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=m^2 2y\frac{dy}{dx}$$

$2\frac{dy}{dx}$ से भाग देने पर

$$\left(x^2-1\right)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-m^2y=0.$$

उदाहरण-21. यदि $x^3+y^3+3ax^2=0$ तब सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2a^2x^2}{y^5}=0.$$

हलः यहाँ $$x^3+y^3+3ax^2=0 \qquad (1)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}+3a.2x=0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx}=-\left(\frac{x^2+2ax}{y^2}\right) \qquad (2)$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\left[\frac{y^2(2x+2a)-(x^2+2ax)2y\frac{dy}{dx}}{(y^2)^2}\right]$$

$\frac{dy}{dx}$ का मान समीकरण (2) से रखने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{y^3}\left\{y(2x+2a)+\left(x^2+2ax\right)2.\frac{\left(x^2+2ax\right)}{y^2}\right\}$$

$$=-\frac{2}{y^5}\left\{y^3(x+a)+x^4+4a^2x^2+4ax^3\right\}$$

समीकरण (1) से $y^3 = -(3ax^2 + x^3)$ रखने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{y^5}\left\{-(3ax^2 + x^3)(x+a) + x^4 + 4a^2x^2 + 4ax^3\right\}$$

$$= -\frac{2}{y^5}\left\{-3ax^3 - x^4 - 3a^2x^2 - ax^3 + x^4 + 4a^2x^2 + 4ax^3\right\}$$

$$= -\frac{2}{y^5}(a^2x^2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2a^2x^2}{y^5} = 0$$

उदाहरण-22. यदि $y = \sin(a\sin^{-1}x)$ तब सिद्ध कीजिए कि

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 + a^2y = 0$$

हल: यहाँ $y = \sin(a\sin^{-1}x)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$y_1 = \cos(a\sin^{-1}x).\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}$$

वर्ग करने पर $(1-x^2)y_1^2 = a^2\cos^2(a\sin^{-1}x) = a^2\{1-\sin^2(a\sin^{-1}x)\}$

$\Rightarrow \quad (1-x^2)y_1^2 = a^2(1-y^2)$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$(1-x^2)2y_1y_2 - 2xy_1^2 = a^2(0 - 2yy_1)$$

$2y_1$ से भाग देने पर

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 + a^2y = 0.$$

प्रश्नमाला 7.5

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ का मान ज्ञात कीजिए जबकि

   (a) $y = x^3 + \tan x$ (b) $y = x^2 + 3x + 2$ (c) $y = x\cos x$

   (d) $y = 2\sin x + 3\cos x$ (e) $y = e^{-x}\cos x$ (f) $y = a\sin x - b\cos x$

2. यदि $y = a\sin x + b\cos x$, तब सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

3. यदि $y = \sec x + \tan x$, तब सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}.$$

4. यदि $y = a\cos nx + b\sin nx$, तब सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = 0.$$

5. यदि $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ तब $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ पर $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. यदि $x^3+y^3-3axy=0$ तब सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2a^2xy}{(ax-y^2)^3}.$$

7. यदि $y=\sin^{-1}x,$ तब सिद्ध कीजिए कि

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=0.$$

8. यदि $y=(\sin^{-1}x)^2$ तब सिद्ध कीजिए कि

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-2=0.$$

7.09 रोले का मध्यमान प्रमेय (Rolle's mean value theorem)

यदि एक वास्तविक फलन f संवृत अन्तराल $[a, b]$ में निम्न प्रकार परिभाषित है

(i) f संतृत अन्तराल $[a, b]$ में संतत है।

(ii) f विवृत अन्तराल (a, b) में अवकलनीय है।

(iii) $f(a)=f(b)$

तब विवृत अन्तराल (a, b) में कम से कम एक बिन्दु c इस प्रकार विद्यमान होगा कि $f'(c)=0$

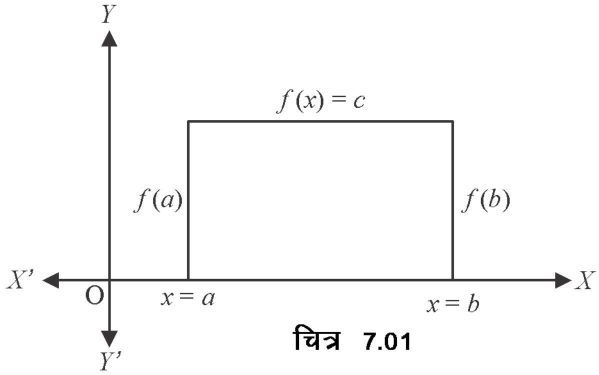
7.10 रोले प्रमेय का ज्यामितीय अर्थ (Geometrical meaning of Rolle's theorem)

रोले प्रमेय की ज्यामितीय व्याख्या हम निम्न दो स्थितियों में करते हैं–

स्थिति I: जब फलन f अचर हो अर्थात्

$$f(x)=c,\quad \forall\ x\in[a,b]$$

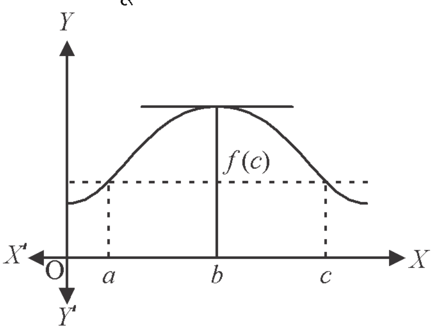
इस फलन का आरेख x-अक्ष के समान्तर एक सरल रेखा होगी। अतः विवृत अन्तराल (a, b) के प्रत्येक बिन्दु के लिए $f'(x)=0$ होगा (देखे चित्र 7.01)



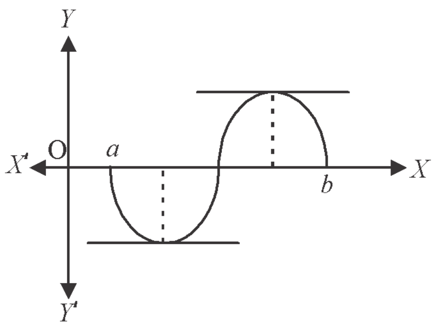
चित्र 7.01

स्थिति II: जब फलन f, अचर नहीं हो।

रोल प्रमेय की प्रथम शर्त से फलन f, अन्तराल $[a, b]$ में संतत है तथा द्वितीय शर्त के अनुसार अन्तराल (a, b) में f अवकलनीय है अर्थात् f के आरेख पर बिन्दु $x=a$ तथा $x=b$ के मध्य प्रत्येक बिन्दु पर स्पर्श रेखा खीचीं जा सकती है। तृतीय शर्त के अनुसार $f(a)=f(b)$ है। इससे स्पष्ट है कि फलन $f(x)$ का मान या तो पहले बढ़ेगा, फिर घटेगा या विलोम (देखे चित्र 7.02)। दोनों ही स्थितियों में आरेख पर कम से कम एक ऐसा बिन्दु स्थिति होगा जहाँ पर खीचीं गई स्पर्श रेखा, x-अक्ष के समान्तर होगी, अर्थात् इन बिन्दुओं पर $f'(x)=0$ होगा। अर्थात् इन बिन्दुओं पर स्पर्श रेखा की प्रवणता शून्य हो जाती है।



(a)



(b)

चित्र 7.02

7.11 लाग्राँज मध्यमान प्रमेय (Lagrange's mean value theorem)

यदि एक वास्तविक फलन f, संवृत अन्तराल $[a, b]$ में इस प्रकार परिभाषित है कि

(i) f, $[a, b]$ में संतत है।

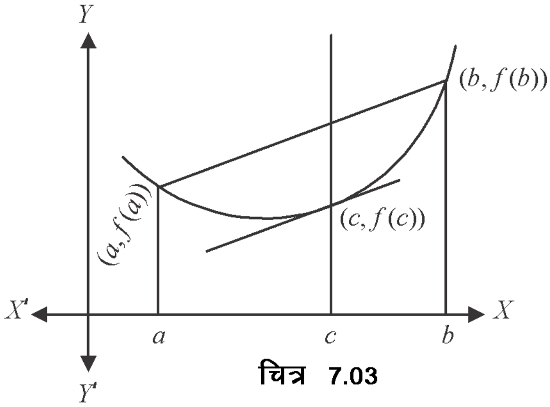
(ii) f, (a, b) में अवकलनीय है।

तब अन्तराल (a, b) में कोई बिन्दु c इस प्रकार स्थित होगा कि $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

टिप्पणी: ध्यान देने योग्य है कि मध्यमान प्रमेय, रोल प्रमेय का विस्तार है।

7.12 लाग्राँज मध्यमान प्रमेय का ज्यामितीय अर्थ

माना फलन $y = f(x)$ का आलेख, निम्नानुसार चित्र 7.03 है। चूँकि $f'(c)$ वक्र $y = f(x)$ के बिन्दु $(c, f(c))$ पर खीचीं गई स्पर्श रेखा की प्रवणता है। चित्र से स्पष्ट है कि $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ बिन्दुओं $(a, f(a))$ तथा $(b, f(b))$ के मध्य खीचीं गई छेदक रेखा की प्रवणता है। मध्यमान प्रमेय में कहा गया है कि अन्तराल (a, b) में एक बिन्दु c इस प्रकार है कि बिन्दु $(c, f(c))$ पर खीचीं गई स्पर्श रेखा, बिन्दुओं $(a, f(a))$ और $(b, f(b))$ के मध्य खीचीं गई छेदक रेखा के समान्तर होती है।



चित्र 7.03

7.13 लाग्राँज मध्यमान प्रमेय का अन्य रूप (Other form of Lagrange's mean value theorem)

यदि हम लाग्राँज मध्यमान प्रमेय में $b = a + h,\ h > 0, c = a + \theta h,\ 0 < \theta < 1$ ले तब $c \in (a, b) \Rightarrow a + \theta h \in (a, a + h)$, तथा लाग्राँज मध्यमान प्रमेय निम्न रूप ले लेती है–

यदि वास्तविक फलन f अन्तराल $[a, a + h]$ में इस प्रकार परिभाषित है कि–

(i) f, संवृत अन्तराल $[a, a + h]$ मे संतत है।

(ii) f, विवृत्त अन्तराल $(a, a + h)$ में अवकलनीय है तब अन्तराल $(0, 1)$ में कम से कम एक वास्तवितक संख्या θ इस प्रकार विद्यमान होगी कि $f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h)$

टिप्पणी: इस प्रमेय के लिए $f(a) = f(b)$ प्रतिबन्ध आवश्यक नहीं है। यदि $f(a) = f(b)$ हो जाता है। तब यह प्रमेय रोले प्रमेय में परिवर्तित हो जाती है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-23. निम्न फलनों के लिए रोले प्रमेय को सत्यापित कीजिए

(i) $f(x) = \sqrt{4 - x^2};\quad x \in [-2, 2]$ (ii) $f(x) = e^x \sin x;\quad x \in [0, \pi]$

हल: (i) स्पष्ट है कि फलन $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, अन्तराल $[-2, 2]$ में संतत है। तथा $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$, जो कि विवृत अन्तराल $(-2, 2)$ के प्रत्येक बिन्दु पर परिमित व विद्यमान है अर्थात् $f(x)$, अन्तराल $(-2, 2)$ में अवकलनीय है।

$\because \qquad f(-2) = 0 = f(2)$

$\Rightarrow \qquad f(-2) = f(2)$

उपरोक्त से फलन $f(x)$, दिए गए अन्तराल मे रोले प्रमेय के तीनों प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है

अब, $\qquad f'(c) = 0 \Rightarrow \dfrac{-c}{\sqrt{4 - c^2}} = 0$

$\Rightarrow \qquad c = 0 \qquad \because c \in (-2, 2)$

अतः रोले प्रमेय सत्यापित होती है।

(ii) $$f(x) = e^x \sin x,\ \ x \in [0, \pi]$$

स्पष्ट है कि फलन $f(x)$, अन्तराल $[0, \pi]$ में संतत है तथा $f'(x) = e^x \cos x + e^x \sin x$, जो कि अन्तराल $(0, \pi)$ के प्रत्येक बिन्दु पर परिमित व विद्यमान है अर्थात् $f(x)$, $(0, \pi)$ में अवकलनीय है।

$\because$ $$f(0) = 0 = f(\pi)$$

उपर्युक्त से फलन $f(x)$ दिए गए अन्तराल में रोले प्रमेय के तीनों प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है।

अब $$f'(c) = 0 \Rightarrow e^c \cos c + e^c \sin c = 0$$

$\Rightarrow$ $$e^c(\cos c + \sin c) = 0$$

$\Rightarrow$ $$\cos c + \sin c = 0$$

$\Rightarrow$ $$c = \frac{3\pi}{4} \qquad \because c \in (0, \pi)$$

अतः रोले प्रमेय सत्यापित होती है।

उदाहरण-24. निम्न फलनों के लिए रोले प्रमेय की शर्तों एवं निष्कर्षो की जाचँ कीजिए

(i) $f(x) = 3 + (x-2)^{2/3};\ \ x \in [1, 3]$ (ii) $f(x) = \sin\frac{1}{x};\ \ x \in [-1, 1]$

हल: (i) $$f(x) = 3 + (x-2)^{2/3};\ \ x \in [1, 3]$$

स्पष्ट है कि $f(x)$, अन्तराल $[1, 3]$ में सतंत है।

$f'(x) = \dfrac{2}{3(x-2)^{1/3}}$, जो कि $x = 2 \in [1, 3]$ पर अपरिमित (∞) है अर्थात् $f(x), x = 2$ पर अवकलनीय नहीं है फलतः $f(x)$, अन्तराल $(1,\ 3)$ में अवकलनीय नहीं है।

अतः $f(x)$ के लिए अन्तराल $[1,\ 3]$ में रोले प्रमेय लागू नहीं होती है।

(ii) $$f(x) = \sin\frac{1}{x};\ \ x \in [-1, 1]$$

$\because$ फलन $f(x) = \sin\frac{1}{x}, x = 0$ पर संतत नहीं है तथा $0 \in [-1, 1]$ फलतः $f(x), [-1, 1]$ में संतत् नहीं है। फलनः $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ के लिए अन्तराल $[-1, 1]$ में रोले प्रमेय सत्यापित नहीं होती है।

उदाहरण-25. निम्न लिखित फलनों के लिए लाग्राँज मध्यमान प्रमेय की वैधता की जाचँ कीजिए

(i) $f(x) = |x|;\ \ x \in [-1, 1]$ (ii) $f(x) = \frac{1}{x};\ \ x \in [-1, 1]$

(iii) $f(x) = x - \frac{1}{x};\ \ x \in [1, 3]$ (iv) $f(x) = x - 2\sin x;\ \ x \in [-\pi, \pi]$

हल: (i) $\because f(x) = |x|$ सर्वत्र संतत फलन है अतः यह अन्तराल $[-1,\ 1]$ में भी संतत होगा, परन्तु $f(x) = |x|$, $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है फलतः फलन $f(x)$, अन्तराल $(-1,\ 1)$ में अवकलनीय नहीं है। अतः $f(x)$ के लिए अन्तराल $[-1,\ 1]$ में लाग्राँज मध्यमान प्रमेय लागू नहीं होती है।

(ii) $\because f(x) = \frac{1}{x};\ \ x = 0 \in [-1, 1]$ पर संतत नहीं है। अर्थात $f(x)$, अन्तराल $[-1,\ 1]$ में संतत नहीं है। फलतः दिए गए फलन के लिए लाग्राँज मध्यमान प्रमेय लागू नहीं होती है।

(iii) यहाँ $f(x)=x-\dfrac{1}{x};\quad x\in[1,3]$, जो कि अन्तराल $[1,\ 3]$ में संतत है तथा $f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}$, जो कि अन्तराल $(1,\ 3)$ में परिमित व विद्यमान है अतः $f(x)$, अन्तराल $(1, 3)$ में अवकलनीय है। फलतः फलन $f(x)$, लाग्रॉंज मध्यमान प्रमेय के दोनों प्रतिबन्धों को सतुंष्ट करता है।

अब,
$$f'(c)=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}$$

$$\Rightarrow \quad 1+\frac{1}{c^2}=\frac{3-\frac{1}{3}-\left(1-\frac{1}{1}\right)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 1+\frac{1}{c^2}=\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{c^2}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad c=\pm\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad x=\sqrt{3}\in(1,3)$$

अतः लाग्रॉंज मध्यमान प्रमेय सत्यापित होती है।

(iv) यहाँ $f(x)=x-2\sin x;\quad x\in[-\pi,\pi]$ स्पष्ट है कि फलन $f(x)$, अन्तराल $[-\pi,\pi]$ में संतत व अवकलनीय है अतः अन्तराल $[-\pi,\pi]$ में लाग्रॉंज मध्यमान प्रमेय दोनों प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है अतः अन्तराल $[-\pi,\pi]$ में एक बिन्दु c इस प्रकार विद्यमान होगा कि

$$f'(c)=\frac{f(\pi)-f(-\pi)}{\pi-(-\pi)}$$

$$\Rightarrow \quad 1-2\cos c=\frac{\pi-(-\pi)}{2\pi}=\frac{2\pi}{2\pi}=1$$

$$\Rightarrow \quad \cos c=0$$

$$\Rightarrow \quad c=\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{2} \qquad \because c=\pm\frac{\pi}{2}\in(-\pi,\pi)$$

अतः लाग्रॉंज मध्यमान प्रमेय सत्यापित होती है।

प्रश्नमाला 7.6

1. निम्नलिखित फलनों के लिए रोल प्रमेय की सत्यता की जाचँ कीजिए

(a) $f(x)=e^x(\sin x-\cos x);\quad x\in\left[\pi/4,\ 5\pi/4\right]$ (b) $f(x)=(x-a)^m(x-b)^n;\quad x\in[a,b], m,n\in N$

(c) $f(x)=|x|;\quad x\in[-1,1]$ (d) $f(x)=x^2+2x-8;\quad x\in[-4,2]$

(e) $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & ;\ 0\le x\le 1\\ 3-x & ;\ 1<x\le 2\end{cases}$ (f) $f(x)=[x];\quad x\in[-2,2]$

2. निम्नलिखित फलनों के लिए रोले प्रमेय का सत्यापन कीजिए

(a) $f(x)=x^2+5x+6;\quad x\in[-3,-2]$ (b) $f(x)=e^{-x}\sin x;\quad x\in[0,\pi]$

(c) $f(x)=\sqrt{x(1-x)};\quad x\in[0,1]$ (d) $f(x)=\cos 2x;\quad x\in[0,\pi]$

3. निम्नलिखित फलनों के लिए लाग्रॉंज मध्यमान प्रमेय की सत्यता की जाचँ कीजिए

(a) $f(x)=x+\frac{1}{x}; \quad x\in[1,3]$ (b) $f(x)=\frac{x^2-4}{x-1}; \quad x\in[0,2]$

(c) $f(x)=x^2-3x+2; \quad x\in[-2,3]$ (d) $f(x)=\frac{1}{4x-1}; \quad x\in[1,4]$

विविध उदाहरण

उदाहरण-26. निम्नलिखित फलनों का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए

(a) $\cos x^\circ$ (b) $\sin\log(1+x^2)$ (c) $\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$

(d) $\log(x+\sqrt{x^2+a^2})$ (e) $\log_7(\log x)$

हल: (a) माना कि $y=\cos x^\circ$

$\because$ $180^\circ=\pi$ रेडियन

$x^\circ=\frac{\pi}{180}x$ रेडियन

$$y=\cos\left(\frac{\pi x}{180}\right)$$

x के सापेक्ष अवकल करने पर

$$\frac{dy}{dx}=-\sin\left(\frac{\pi x}{180}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi x}{180}\right)=\frac{-\pi}{180}\sin\left(\frac{\pi x}{180}\right)=\frac{-\pi}{180}\sin x^\circ.$$

(b) माना कि $y=\sin\log\left(1+x^2\right)$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\cos\log\left(1+x^2\right)\frac{d}{dx}\left\{\log\left(1+x^2\right)\right\}$$

$$=\cos\left(\log\left(1+x^2\right)\right).\frac{1}{\left(1+x^2\right)}\frac{d}{dx}\left(1+x^2\right)$$

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)}\cos\left(\log(1+x^2)\right)(0+2x)=\frac{2x}{1+x^2}\cos\log(1+x^2)$$

(c) माना कि $y=\log\tan\left(\pi/4+x/2\right)$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\tan(\pi/4+x/2)}\frac{d}{dx}\{\tan(\pi/4+x/2)\}$$

$$=\frac{1}{\tan(\pi/4+x/2)}\sec^2(\pi/4+x/2)\frac{d}{dx}(\pi/4+x/2)$$

$$=\frac{1}{2\sin(\pi/4+x/2)\cos(\pi/4+x/2)}$$

$$=\frac{1}{\sin 2(\pi/4+x/2)}=\frac{1}{\sin(\pi/2+x)}=\frac{1}{\cos x}=\sec x.$$

(d) माना कि
$$y = \log(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 + a^2})} \frac{d}{dx}(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

$$= \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 + a^2})} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)} \left(\frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\sqrt{\left(x^2 + a^2\right)}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

(e) माना कि $y = \log_7(\log x) = \dfrac{1}{\log_e 7}\{\log_e(\log x)\}$, (आधार परिवर्तन के सूत्र द्वारा)

जो सभी वास्तविक संख्याओं $x > 1$ के लिए परिभाषित है।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(\log 7)} \frac{d}{dx}\{\log(\log x)\}$$

$$= \frac{1}{\log_7} \cdot \frac{1}{\log x} \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x \log 7 . \log x}.$$

उदाहरण-27. निम्नलिखित का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए

(a) $\sin^{-1}\left(\dfrac{2^{x+1}}{1+4^x}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\dfrac{x^{1/3} + a^{1/3}}{1-(ax)^{1/3}}\right)$ (c) $\sin^{-1}(x\sqrt{1-x} - \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x^2})$.

हल: (a) माना कि
$$y = \sin^{-1}\left(\frac{2^{x+1}}{1+4^x}\right)$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{2^x \cdot 2}{1+(2^x)^2}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) \qquad [2^x = \tan\theta \text{ रखने पर}]$$

$$= \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta = 2\tan^{-1}(2^x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{1+(2^x)^2} \frac{d}{dx}(2^x) = \frac{2}{(1+4^x)} . 2^x \log 2 = \frac{2^{x+1}\log 2}{1+4^x}.$$

(b) माना कि
$$y = \tan^{-1}\left(\frac{x^{1/3} + a^{1/3}}{1-(ax)^{1/3}}\right)$$

(सूत्र $\tan^{-1}\left(\dfrac{A+B}{1-AB}\right) = \tan^{-1} A + \tan^{-1} B$ का प्रयोग करने पर)

$$y = \tan^{-1}(x^{1/3}) + \tan^{-1}(a^{1/3})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+(x^{1/3})} \frac{d}{dx}(x^{1/3}) + 0$$

$$= \frac{(1/3)x^{-2/3}}{1+x^{2/3}} = \frac{1}{3x^{2/3}(1+x^{2/3})}.$$

(c) माना कि $$y = \sin^{-1}(x\sqrt{1-x} - \sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x^2})$$

(सूत्र $\sin^{-1} A - \sin^{-1} B = \sin^{-1}(A\sqrt{1-B^2} - B\sqrt{1-A^2})$ का प्रयोग करने पर)

$$y = \sin^{-1}(x) - \sin^{-1}(\sqrt{x})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}.$$

उदाहरण-28. $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए जबकि $x = (t+1/t)^a$ तथा $y = a^{t+1/t}$, जहाँ a अचर है।

हल: स्पष्ट है कि दोनों x तथा y समस्त वास्तविक संख्या $t \neq 0$ के लिए परिभाषित है।

अब $$\frac{dx}{dt} = a\left(t+\frac{1}{t}\right)^{a-1}\frac{d}{dt}\left(t+\frac{1}{t}\right) = a\left(t+\frac{1}{t}\right)^{a-1}\left(1-\frac{1}{t^2}\right).$$

यहाँ $\frac{dx}{dt} \neq 0$ यदि $1-\frac{1}{t^2} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad t \neq \pm 1$

तथा $$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(a^{t+1/t}) = a^{t+1/t}.\log a\frac{d}{dt}(t+1/t) = a^{t+1/t}\cdot\log a\left(1-\frac{1}{t^2}\right)$$

अब, $t \neq \pm 1$ के लिए

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a^{(t+1/t)}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\log a}{a(t+1/t)^{a-1}(1-1/t^2)} = \frac{a^{(t+1/t)}\log a}{a(t+1/t)^{a-1}}.$$

उदाहरण-29. यदि $p^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$ तब सिद्ध कीजिए कि $p + \frac{d^2p}{d\theta^2} = \frac{a^2b^2}{p^3}$.

हल: दिया है कि $$p^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta \qquad (1)$$

θ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2P\frac{dp}{d\theta} = -2a^2\cos\theta\sin\theta + 2b^2\sin\theta\cos\theta$$

$$= (b^2 - a^2)\sin 2\theta \qquad (2)$$

θ के सापेक्ष पुनः अवकलन करने पर

$$2p\frac{d^2p}{d\theta^2} + 2\left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2 = 2(b^2 - a^2)\cos 2\theta$$

दोनों तरफ p^2 से गुणा करने पर

$$p^3\frac{d^2p}{d\theta^2} + p^2\left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2 = p^2(b^2 - a^2)\cos 2\theta$$

दोनों तरफ p^4 जोड़ने पर

$$p^4 + p^3 \frac{d^2 p}{d\theta^2} + \left(p\frac{dp}{d\theta}\right)^2 = p^4 + p^2\left(b^2 - a^2\right)\cos 2\theta$$

समीकरण (2) से मान रखने पर

$$p^4 + p^3 \frac{d^2 p}{d\theta^2} + \frac{\left(b^2 - a^2\right)^2}{4} \cdot \sin^2 2\theta = p^4 + p^2(b^2 - a^2)\cos 2\theta$$

$$\Rightarrow \quad p^4 + p^3 \frac{d^2 p}{d\theta^2} + (b^2 - a^2)\sin^2\theta\cos^2\theta = p^2\{p^2 + (b^2 - a^2)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\}$$

$$= p^2\{(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta) + (b^2 - a^2)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\}$$ [समीकरण (1) से]

$$= p^2(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)$$

$$= (a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)$$ [समीकरण (1) से]

$$\Rightarrow \quad p^4 + p^3 \frac{d^2 p}{d\theta^2} = a^2b^2(\sin^4\theta + \cos^4\theta) + a^4\sin^2\theta\cos^2\theta + b^4\sin^2\theta\cos^2\theta - (b^2 - a^2)^2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= a^2b^2(\sin^4\theta + \cos^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta) = a^2b^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = a^2b^2$$

$$\Rightarrow \quad p + \frac{d^2 p}{d\theta^2} = \frac{a^2b^2}{p^3}$$

उदाहरण-30. यदि $x = a\cos\theta + b\sin\theta$, $y = a\sin\theta - b\cos\theta$ तब सिद्ध कीजिए कि $y^2y_2 - xy_1 + y = 0$

हल: दी गई समीकरण, $x = a\cos\theta + b\sin\theta$, $y = a\sin\theta - b\cos\theta$ से,

$$x^2 + y^2 = \left(a\cos\theta + b\sin\theta\right)^2 + \left(a\sin\theta - b\cos\theta\right)^2 = a^2 + b^2$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\Rightarrow \quad 2x + 2yy_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = -\frac{x}{y} \tag{1}$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$y_2 = -\left\{\frac{y.1 - xy_1}{y^2}\right\} = -\left\{\frac{y + x\cdot x/y}{y^2}\right\}$$ [समीकरण (1) से]

$$= -\frac{y^2 + x^2}{y^3} \tag{2}$$

अब, $$y^2y_2 - xy_1 + y = y^2\left(-\frac{y^2 + x^2}{y^3}\right) - x\left(\frac{-x}{y}\right) + y$$

$$= \frac{1}{y}\{-y^2 - x^2 + x^2 + y^2\} = 0.$$

उदाहरण-31. निम्न फलनों के लिए रोल प्रमेय की शर्तों एवं निष्कर्षो की जाँच कीजिए

(i) $f(x)=\log\left\{\dfrac{x^2+ab}{x(a+b)}\right\}; \quad x\in[a,b], x\neq 0$ (ii) $f(x)=\tan x; \quad x\in[0,\pi]$

हल: (i)
$$f(x)=\log\left\{\frac{x^2+ab}{x(a+b)}\right\}; \quad x\in[a,b], x\neq 0$$
$$=\log(x^2+ab)-\log x-\log(a+b)$$

स्पष्ट है कि $f(x)$, अन्तराल $[a, b]$ में संतत है तथा लघुगणकीय फलन, अवकलनीय होते है। अतः $f(x)$, (a, b) में अवकलनीय है।

अब
$$f(a)=\log\left\{\frac{a^2+ab}{a(a+b)}\right\}=\log 1=0$$

तथा
$$f(b)=\log\left\{\frac{b^2+ab}{b(a+b}\right\}=\log 1=0$$

$\Rightarrow$ $f(a)=f(b)$

उपरोक्त से $f(x)$, रोले प्रमेय के तीनों प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है। अतः
$$f'(c)=0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{c^2-ab}{c(c^2+ab)}=0$$
$$\Rightarrow \quad c=\sqrt{ab}\in(a,b)$$

अतः रोले, दिए गए फलन के लिए सत्यापित होती है।

(ii) $\because$ $f(x)=\tan x$, $x=\pi/2$ पर संतत नहीं है तथा $\pi/2\in[0,\pi]$ अर्थात् $f(x)$, अन्तराल $[0, \pi]$ में संतत नहीं है फलनः फलन $f(x)=\tan x; \quad x\in=[0,\pi]$ के लिए रोले प्रमेय लागू नहीं होती है।

विविध प्रश्नमाला–7

प्रश्न संख्या 1 से 10 तक दिए गए फलनों का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए:

1. $\sin^{-1}(x\sqrt{x}); \quad 0\le x\le 1$

2. $\dfrac{\cos^{-1} x/2}{\sqrt{2x+7}}; \quad -2<x<2$

3. $\cot^{-1}\left\{\dfrac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right\}; \quad 0<x<\dfrac{\pi}{2}$

4. $x^3.e^x.\sin x$

5. $\log\left(\dfrac{x}{a^x}\right)$

6. $(x\log x)^{\log x}$

7. $\log x=\tan^{-1}\left(\dfrac{y-x^2}{x^2}\right)$

8. $x^{x^2-3}+(x-3)^{x^2}; \quad x>3$

9. $y=12(1-\cos t), \quad x=10(t-\sin t)$

10. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$

11. यदि $\cos^{-1}\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=\tan^{-1}a$ तब सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$

12. यदि $\sin y = x\sin(a+y)$ तब सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$

13. यदि $y = (\sin x - \cos x)^{(\sin x - \cos x)}$ तब $\dfrac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

14. यदि $y = \sin(\sin x)$ तब प्रदर्शित कीजिए कि

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \tan x.\frac{dy}{dx} + y\cos^2 x = 0.$$

15. (a) यदि $y = e^{ax}\sin bx$ तब प्रदर्शित कीजिए कि

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + \left(a^2 + b^2\right)y = 0.$$

(b) यदि $y = \dfrac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ तब सिद्ध कीजिए कि

$$(1-x^2)y_2 = 3ay_1 - y = 0.$$

16. निम्नलिखित फलनों के लिए रोले प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

(a) $f(x) = (x-2)\sqrt{x};\quad x \in [0, 2]$

(b) $f(x) = (x-1)(x-3);\quad x \in [1, 3]$

17. निम्नलिखित फलनों के लिए लाग्रॉज मध्यमान प्रमेय की सत्यता की जाँच कीजिए।

(a) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3);\quad x \in [0, 4]$

(b) $f(x) = \begin{cases} 1+x & ; \quad x < 2 \\ 5-x & ; \quad x \geq 2 \end{cases};\quad x \in [1, 3]$

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. यदि अन्तराल $[a, b]$ पर परिभाषित फलन f तथा g, अन्तराल $[a, b]$ के किसी बिन्दु c पर अवकलनीय है तो $f \pm g, fg$ तथा f/g बिन्दु c पर अवकलनीय होंगे तथा

(i) $D(f \pm g)(c) = f'(c) \pm g'(c)$

(ii) $D(fg)(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$

(iii) $D(f/g)(c) = \dfrac{g(c)f'(c) - g'(c)f(c)}{[g(c)]^2}$; शर्त $g(c) \neq 0$

2. यदि $y = f(u)$ तथा $u = \phi(x)$ तो $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}.\dfrac{du}{dx}$

3. (i) $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1}x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; (ii) $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1}x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; (iii) $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}x = \dfrac{1}{1+x^2}$

(iv) $\dfrac{d}{dx}\cot^{-1}x = -\dfrac{1}{1+x^2}$; (v) $\dfrac{d}{dx}\sec^{-1}x = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$; (vi) $\dfrac{d}{dx}\left(\cos ec^{-1}x\right) = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

4. अस्पष्ट फलनों का अवकलन ज्ञात करने के लिए y को x का फलन मानकर समीकरण $f(x, y) = 0$ के प्रत्येक पद का x के सापेक्ष अवकलन करके $\dfrac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करते हैं।

5. $y = u^v$ प्रकार के फलनों के अवकलन ज्ञात करने के लिए दोनों तरफ log लेकर अवकलन करना चाहिए।

6. $x = f(t), y = g(t)$ में प्राचल t है। इससे $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$ प्राप्त करते है। जहाँ $dx/dt \neq 0$

7. ; fn $f'(x)$ भी x का संतत फलन है तो इसका पुनः अवकलन किया जा सकता है।

8. **रोले का मध्यमान प्रमेयः** यदि एक वास्तविक फलन f संवृत अन्तराल $[a, b]$ में निम्न प्रकार परिभाषित है
   (i) f संतृत अन्तराल $[a, b]$ में संतत है।
   (ii) f विवृत अन्तराल (a, b) में अवकलनीय है।
   (iii) $f(a) = f(b)$
   तब विवृत अन्तराल (a, b) में कम से कम एक बिन्दु c इस प्रकार विद्यमान होगा कि $f'(c) = 0$

9. **लाग्राँज मध्यमान प्रमेयः** यदि एक वास्तविक फलन f, संवृत अन्तराल $[a, b]$ में इस प्रकार परिभाषित है कि
   (i) f, $[a, b]$ में संतत है।
   (ii) f, (a, b) में अवकलनीय है।
   तब अन्तराल (a, b) में कोई बिन्दु c इस प्रकार स्थित होगा कि $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

10. **लाग्राँज मध्यमान प्रमेयः** यदि वास्तविक फलन f अन्तराल $[a, a + h]$ में इस प्रकार परिभाषित है कि–
   (i) f, संवृत अन्तराल $[a, a + h]$ मे संतत है।
   (ii) f, विवृत्त अन्तराल $(a, a + h)$ में अवकलनीय है तब अन्तराल $(0, 1)$ में कम से कम एक वास्तवितक संख्या θ इस प्रकार विद्यमान होगी कि $f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h)$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 7.1

1. $2x\cos x^2$ 2. $2\sec^2(2x+3)$ 3. $-2x\sin x^2\cos\left(\cos x^2\right)$ 4. $\dfrac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$ 5. $\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

6. $\dfrac{\pi}{180}\cos x^\circ$ 7. $\cos ecx$ 8. $\dfrac{\pi}{180}\sec x^\circ \tan x^\circ$ 9. $\sec x$ 10. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ 11. $\dfrac{2(1-x^2)}{1+x^2+x^4}$

12. $\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)\sec^2\left(\log\sqrt{1+x^2}\right)$ 13. $3.a^{\tan 3x}.\sec^2 3x.\log a$ 14. $\sec x$ 15. $3\sin^2 x.\sin 4x$

प्रश्नमाला 7.2

1.(a) $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ 2.(a) $\dfrac{-2}{1+x^2}$ (b) $\dfrac{2}{1+x^2}$ 3.(a) $\dfrac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$

4.(a) $\dfrac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\dfrac{2}{1+x^2}$ 5.(a) 0 (b) $\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$ 6.(a) $\dfrac{1}{1+x^2}$ (b) $\dfrac{2^{x+1}.\log 2}{1+4^x}$

7.(a) $\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $-\dfrac{1}{2\left(1+x^2\right)}$

प्रश्नमाला 7.3

1.(a) $\dfrac{2}{\cos y-3}$ (b) $\dfrac{-(2x+y)}{x+2y}$ 2.(a) $-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ (b) $\dfrac{\sec^2(x+y)+\sec^2(x-y)}{\sec^2(x-y)-\sec^2(x+y)}$

3.(a) $\dfrac{\cos x+y}{2\sin 2y-x}$ (b) $\dfrac{-y}{x}\left(\dfrac{\sqrt{y}+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}\right)$ 4.(a) $\dfrac{4x^3+4xy^2-y}{x-4x^2y-4y^3}$ (b) $\dfrac{y\left\{2xy-1-y^2\cos(xy)\right\}}{\left\{y^2x\cos(xy)-x+y^2\right\}}$

5.(a) $\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$ (b) $-\left\{\dfrac{yx^{y-1}+y^x\log y}{xy^{x-1}+x^y\log x}\right\}$ 6.(a) $\dfrac{y^2}{x(1-y\log x)}$ (b) $\dfrac{y}{x}$

7.(a) $e^x+2xe^{x^2}+3x^2e^{x^3}+4x^3e^{x^4}+5x^4e^{x^5}$ (b) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{x.e^{\sqrt{x}}}}$

8.(a) $\dfrac{x\sin x\log x+\cos x}{x(\log x)^2}$ (b) $\dfrac{y^2}{x(2-y\log x)}$ 9. (a) $\dfrac{1+xy}{1+x^2}$ (b) $\dfrac{y}{x^2-1}$

10.(a) $\dfrac{\cos x}{2y-1}$ (b) $-\left\{\dfrac{y^x.\log y+y.x^{y-1}+x^x(1+\log x)}{x.y^{x-1}+x^y\log x}\right\}$

प्रश्नमाला 7.4

1. (a) $\dfrac{b}{a}.\operatorname{cosec} t$ (b) $\dfrac{t(e^t-\sin t)}{1+t\cos t}$ 2. (a) $t\left(e^t-\sin t\right)$ (b) $\dfrac{-b}{a}\cot\theta$

3. (a) $\dfrac{\cos\theta-2\cos 2\theta}{2\sin 2\theta-\sin\theta}$ (b) $-\cot\dfrac{\theta}{2}$ 4. (a) $\dfrac{\cos t(1-2\cos 2t)}{1+2\cos 2t}$ (b) $\tan t$

5. (a) $-(\tan 2\theta)^{3/2}$ (b) $-\tan t$

प्रश्नमाला 7.5

1.(a) $6x+2\sec^2 x\tan x$; (b) 2 ; (c) $-(x\cos x+2\sin x)$; (d) $-2\sin x-3\cos x$; (e) $2e^{-x}\sin x$;

(f) $-a\sin x+b\cos x$ 5. $\dfrac{4\sqrt{2}}{3a}$

प्रश्नमाला 7.6

1. (a) वैध (b) वैध (c) वैध नहीं (d) वैध (e) वैध नहीं (f) वैध नहीं
3. (a) वैध (b) वैध नहीं (c) वैध नहीं (d) वैध (e) वैध (f) वैध नहीं

विविध प्रश्नमाला–7

1. $\dfrac{3}{2}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}$ 2. $-x\left\{\dfrac{2x+7+\sqrt{4-x^2}\cos^{-1}x/2}{\sqrt{4-x^2}(2x+7)^{3/2}}\right\}$ 3. $\dfrac{1}{2}$ 4. $x^3e^x\cos x+x^3e^x\sin x+3x^2e^x\sin x$

5. $\dfrac{1}{x}-\log a$ 6. $(x\log x)^{\log x}.\left\{\dfrac{\log x(1+\log x)}{x\log x}+\dfrac{\log(x.\log x)}{x}\right\}$ 7. $2x\{1+\tan(\log x)\}+x\sec^2(\log x)$

8. $x^{x^2-3}\left\{\dfrac{x^2-3}{x}+2x\log x\right\}+(x-3)^{x^2}\left\{\dfrac{x^2}{x-3}+2x\log(x-3)\right\}$ 9. $\dfrac{6}{5}\cot\left(\dfrac{t}{2}\right)$ 10. 0

13. $(\sin x-\cos x)^{\sin x-\cos x}.(\cos x+\sin x)\{1+\log(\sin x-\cos x)\}; \sin x>\cos x$

08

अवकलज के अनुप्रयोग (Application of Derivativs)

8.01 प्रस्तावना (Introduction)

हमने पूर्व अध्याय में संयुक्त फलनों, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों, अस्पष्ट फलनों, चर घातांकीय तथा लघुणगकीय फलनों का अवकलन किया है। इस अध्याय में हम विज्ञान एवम् अभियांत्रिकी के साथ-साथ सामाजिक विज्ञान के क्षेत्र में अवकलज के अनुप्रयोग का अध्ययन करेंगे। उदाहरण के लिए, किस प्रकार अवकलज का प्रयोग, राशियों के परिवर्तन की दर ज्ञात करने में या वक्र के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब की समीकरण ज्ञात करने में किया जा सकता है, का अध्ययन करेंगे।

8.02 राशियों के परिवर्तन की दर (Rate of change of quantities)

माना P एक राशि है जो कि समय के साथ परिवर्तित होती है। माना समय t में लघु परिवर्तन δt के संगत P में परिवर्तन δP है। तब $\dfrac{\delta P}{\delta t}$, राशि P में प्रति इकाई समय औसत परिवर्तन की दर है तथा t के सापेक्ष P में क्षणिक परिवर्तन की दर $\dfrac{dP}{dt}$ है, जहाँ $\dfrac{dP}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \dfrac{\delta P}{\delta t}$.

यहाँ $\dfrac{dP}{dt}$, समय t के सापेक्ष P में परिवर्तन की दर है।

यदि v तथा r दोनों प्राचल t के फलन है, तब

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

स्पष्ट है v तथा r में से किसी एक की समय t के सापेक्ष परिवर्तन की दर ज्ञात हो, तो दूसरी राशि में परिवर्तन की दर ज्ञात की जा सकती है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. एक गोले के आयतन में परिवर्तन की दर, इसके पृष्ठीय क्षेत्रफल के सापेक्ष ज्ञात कीजिए, जबकि गोले की त्रिज्या 2 सेमी है।

हल: $\because$ गोले का आयतन $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \dfrac{dV}{dr} = 4\pi r^2$

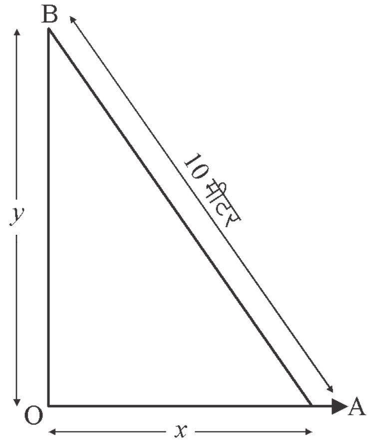
तथा गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $s = 4\pi r^2 \Rightarrow \dfrac{ds}{dr} = 8\pi r$

अतः
$$\frac{dV}{ds} = \frac{dV/dr}{ds/dr} = \frac{4\pi r^2}{8\pi r} = \frac{r}{2}$$

$$\left(\frac{dV}{ds}\right)_{r=2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ सेमी।}$$

उदाहरण-2. एक 10 मीटर लम्बी सीढ़ी दीवार के सहारे झुकी हुई है। यदि सीढ़ी के पाद को 1.2 मीटर/सैकण्ड की दर से जमीन के सहारे दीवार से दूर खींचा जाता है तब ज्ञात कीजिए कि सीढ़ी का ऊपरी सिरा किस दर से दीवार पर नीचे की ओर फिसल रहा है, जबकि सीढ़ी का पाद दीवार से 6 मीटर दूर है?

हल: माना किसी समय t पर सीढ़ी की स्थित AB है।



आकृति 8.01

माना $\quad OA = x,\ OB = y$ तब $x^2 + y^2 = 10^2 \qquad (1)$

दिया है कि $\quad \frac{dx}{dt} = 1.2$ मीटर/सैकण्ड

समीकरण (1) का t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \qquad (2)$$

$x = 6$ के लिए, समीकरण (1) से $6^2 + y^2 = 10^2 \Rightarrow y = 8$ मीटर

समीकरण (2) से, $2\times6\times1.2 + 2\times8\frac{dy}{dt} = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{14.4}{16} = -0.9$$ मी./सै. (जमीन की तरफ)

उदाहरण-3. एक घन का आयतन 9 सेमी³/सै. की दर से बढ़ रहा है। यदि इसकी कोर की लम्बाई 10 सेमी. है तब ज्ञात कीजिए कि इसके पृष्ठ का क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है?

हल: माना कि घन की कोर की लम्बाई x सेमी है। माना घन का आयतन V तथा घन के पृष्ठ का क्षेत्रफल S है तब $V = x^3,\ S = 6x^2$, जहाँ x, समय t का फलन है।

अतः दिया है कि $\quad \frac{dV}{dt} = 9$ सेमी³/सै.

$$\Rightarrow \quad 9 = \frac{d}{dt}(x^3) = \frac{d}{dx}(x^3)\frac{dx}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{3}{x^2} \qquad (1)$$

तथा $\quad \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(6x^2) = \frac{d}{dx}(6x^2)\frac{dx}{dt} = 12x\left(\frac{3}{x^2}\right) = \frac{36}{x}$ [समीकरण (1) से]

$\because \quad x = 10$ सेमी.

$\Rightarrow \quad \frac{dS}{dt} = \frac{36}{10} = 3.6$ सेमी²/सै.

उदाहरण-4. एक गोल बुलबुले का पृष्ठीय क्षेत्रफल 2 सेमी²/सै. की दर से बढ़ रहा है। यदि बुलबुले की त्रिज्या 6 सेमी. है तब ज्ञात कीजिए कि बुलबुले का आयतन किस दर से बढ़ रहा है?

हल: माना कि r त्रिज्या वाले गोल बुलबुले का आयतन तथा पृष्ठीय क्षेत्रफल क्रमशः V तथा S हैं।

तब $\quad S = 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{dS}{dr} = 8\pi r$

तथा $\quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$

दिया है कि $\quad \frac{dS}{dt} = 2$ सेमी²/सै.

$\because$ $$\frac{dS}{dt}=\frac{dS}{dr}.\frac{dr}{dt}\Rightarrow 2=8\pi r\frac{dr}{dt}\Rightarrow\frac{dr}{dt}=\frac{1}{4\pi r}$$

$\because$ $$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dr}.\frac{dr}{dt}=4\pi r^2.\frac{1}{4\pi r}=r$$

अतः $$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{r=6}=6 \text{ सेमी}^3/\text{सै.}$$

उदाहरण-5. यदि किसी आयत की लम्बाई x सेमी./मि. की दर से घट रही है तथा इसकी चौडाई y, 2 सेमी./मि. की दर से बढ़ रही है। जब $x=12$ सेमी. तथा $y=6$ सेमी. है तब आयत के परिमाप तथा क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

हलः दिया है कि समय t के सापेक्ष लम्बाई x घट रही है जबकि चौड़ाई y बढ़ रही है अतः प्रश्नानुसार,

$$\frac{dx}{dt}=-3 \text{ सेमी/मि.,}\quad \frac{dy}{dt}=2 \text{ सेमी/मि.}$$

$\because$ आयत का परिमाप $$p=2(x+y)$$

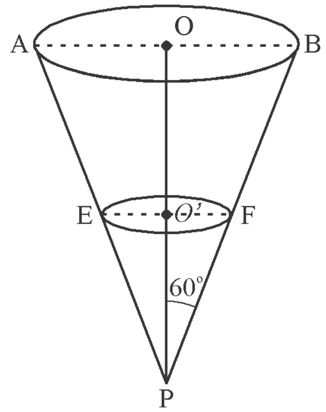
$\Rightarrow$ $$\frac{dp}{dt}=2\left(\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\right)=2(-3+2)=-2 \text{ सेमी/मि.}$$

तथा आयत का क्षेत्रफल $$A=x.y$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dA}{dt}=x\frac{dy}{dt}+\frac{dx}{dt}.y$$
$$=(12)(2)+(-3).6$$
$$=24-18$$
$$=6 \text{ सेमी}^2/\text{मि.}$$

उदाहरण-6. एक शंक्वाकार आकृति के कीप के आधार में शीर्ष पर सूक्ष्म छेद से 4 सेमी.^{3}/सै. की एक समान दर से पानी बूँद-बूँद टपक रहा है। पानी के शंकु की तिर्यक ऊँचाई घटने की दर ज्ञात कीजिए, जबकि पानी की तिर्यक ऊचाँई 4 सेमी है तथा कीप का ऊर्ध्वाधर अर्द्ध शीर्ष कोण 60° है।

हलः माना कि t समय पर शकुं में पानी का आयतन V है अर्थात् पानी के शंकु PEF का आयतन V तथा तिर्यक ऊचाँई $PE=\ell$ है।



आकृति 8.02

$\therefore$ $$O'E=\ell\sin 60^\circ=\ell.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

तथा $$O'P=\ell\cos 60^\circ=\ell.\frac{1}{2}$$

$\because$ $$V=\frac{1}{3}\pi(O'E)^2.O'P$$
$$=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2.\left(\frac{\ell}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ $$V=\frac{\pi\ell^3}{8}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dV}{dt}=\frac{3\pi\ell^2}{8}\frac{d\ell}{dt}$$

दिया है कि $\dfrac{dV}{dt} = -4$

अतः $-4 = \dfrac{3\pi\ell^2}{8}\dfrac{d\ell}{dt}$

$\Rightarrow$ $\dfrac{d\ell}{dt} = -\dfrac{32}{3\pi\ell^2}$

अतः $\ell = 4$ पर $\dfrac{d\ell}{dt} = \dfrac{-32}{3\pi(4)^2} = -\dfrac{2}{3\pi}$ सेमी./सै.

प्रश्नमाला 8.1

1. वृत्त के क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर इसकी त्रिज्या r के सापेक्ष ज्ञात कीजिए जबकि $r = 3$ सेमी. तथा $r = 4$ सेमी. है।
2. एक कण वक्र $y = \dfrac{2}{3}x^3 + 1$ पर चलता है। वक्र पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जहाँ y-निर्देशांक में परिवर्तन की दर, x-निर्देशांक में परिवर्तन की दर की दुगुनी है।
3. एक 13 मीटर लम्बी सीढ़ी दीवार के सहारे झुकी हुई है। सीढ़ी के पाद को 1.5 मी./सै. की दर से जमीन के सहारे दीवार से दूर खींचा जाता है। सीढ़ी तथा जमीन के मध्य का कोण किस दर से परिवर्तित हो रहा है जबकि सीढ़ी का पाद दीवार से 12 मीटर दूर हो।
4. एक परिवर्तन शील घन का किनारा 3 सेमी./सै. की दर से बढ़ रहा है। घन का आयतन किस दर से बढ़ रहा है जबकि किनारा 10 सेमी. लम्बा है।
5. एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है, एक पम्प द्वारा 900 सेमी^{3} गैस प्रति सैकण्ड भर कर फुलाया जाता है। गुब्बारे कि त्रिज्या के पतिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जबकि त्रिज्या 15 सेमी. है।
6. एक गुब्बारा, जो सदैव गोलाकार रहता है, का व्यास $\dfrac{3}{2}(2x+1)$ है। इसके आयतन के परिवर्तन की दर, x के सापेक्ष ज्ञात कीजिए।
7. किसी वस्तु की x इकाइयों के उत्पादन में कुल लागत $c(x)$ रुपये में निम्न समीकरण द्वारा ही गई है-
$$c(x) = 0.005\, x^3 - 0.02\, x^2 + 30\, x + 5000$$
सीमान्त लागत (Marginal cost) ज्ञात कीजिए जब वस्तु की 3 इकाई उत्पादित की जाती है। जहाँ सीमान्त लागत का अर्थ किसी स्तर पर उत्पादन के सम्पूर्ण लागत में तात्कालिक परिवर्तन की दर है।
8. एक साबुन के गोलीय बुलबुले की त्रिज्या में 0.2 सेमी/सै. की दर से वृद्धि हो रही है। इसके पृष्ठीय क्षेत्रफल में वृद्धि की दर ज्ञात कीजिए जबकि बुलबुले की त्रिज्या 7 सेमी हो तथा इसके आयतन में वृद्धि की दर ज्ञात कीजिए जबकि बुलबुले की त्रिज्या 5 सेमी हो।
9. एक नली से 12 सेमी.^{3} /सै. की दर से बालू उंडेली जा रही है। उंडेली गई बालू से एक शंकु का निर्माण इस प्रकार होता है कि शंकु की ऊँचाई सदैव आधार की त्रिज्या का $1/6$ वाँ भाग होती है। बालू के शंकु की ऊँचाई में किस गति से वृद्धि हो रही है जबकि ऊँचाई में किस गति से वृद्धि हो रही है जबकि ऊँचाई 4 सेमी है।
10. किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय $R(x)$ रुपयों में निम्न समीकरण द्वारा दी गई है-
$$R(x) = 13x^2 + 26\, x + 15$$
सीमांत आय ज्ञात कीजिए जब $x = 15$ है।

8.03 वर्धमान या ह्रासमान फलन (Increasing and decreasing functions)

यहाँ हम अवकलन का अनुप्रयोग करके यह ज्ञात करेंगे कि दिया गया फलन वर्धमान है या ह्रासमान या इनमें से कोई नहीं है।

वर्धमान फलनः कोई फलन $f(x)$ विवृत अन्तराल (a, b) में वर्धमान फलन कहलाता है यदि

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2), \quad \forall \;\; x_1, x_2 \in (a,b)$$

निरन्तर वर्धमान फलनः फलन $f(x)$ विवृत अन्तराल (a, b) में निरन्तर वर्धमान फलन कहलाता है, यदि

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \quad \forall \quad x_1, x_2 \in (a,b)$$

अर्थात् विवृत अन्तराल (a, b) में x के बढ़ने के साथ-साथ $f(x)$ भी बढ़ता है।

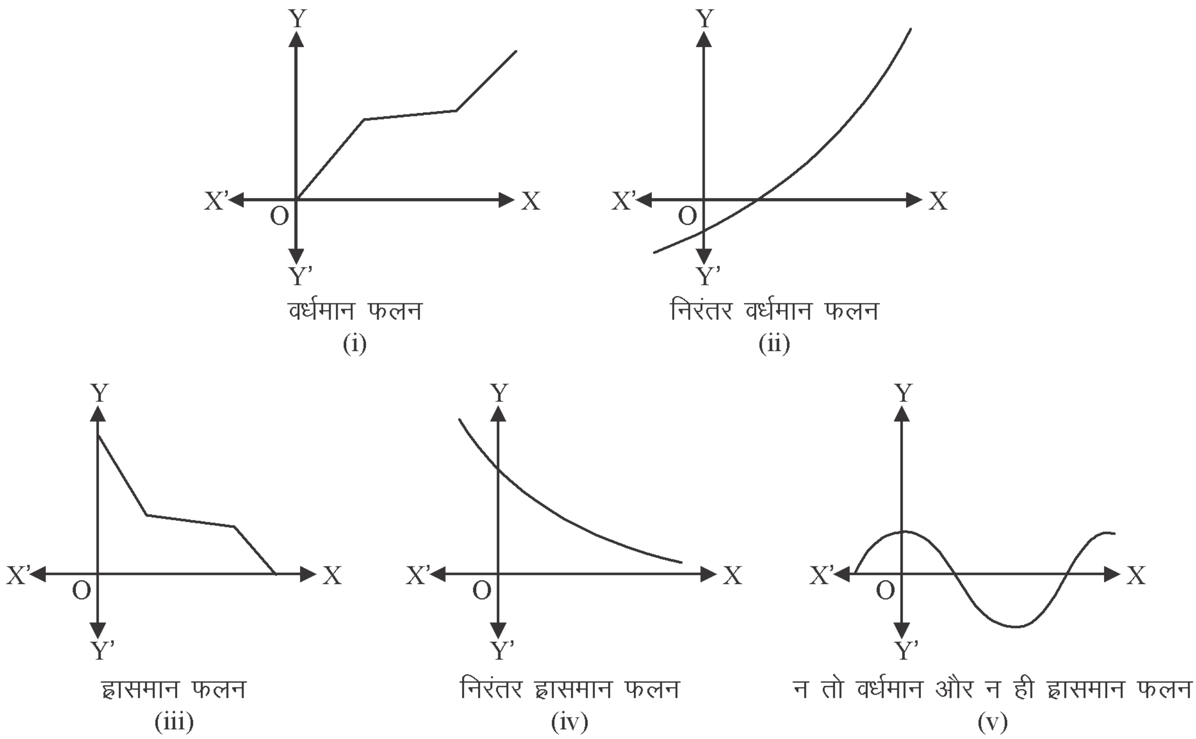
ह्रासमान फलनः फलन $f(x)$ विवृत अन्तराल (a, b) में ह्रासमान फलन कहलाता है, यदि

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2), \quad \forall \quad x_1, x_2 \in (a,b)$$

निरन्तर ह्रासमान फलनः फलन $f(x)$, विस्तृन्त अन्तराल (a, b) में निरन्तर ह्रासमान फलन कहलाता है यदि

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \quad \forall \quad x_1, x_2 \in (a,b)$$

अर्थात् विवृत अन्तराल (a, b) में x के बढ़ने के साथ-साथ $f(x)$ घटता है।



आकृति 8.03

8.04 प्रमेय

यदि फलन f, अन्तराल $[a, b]$ में संतत तथा विवृत अन्तराल (a, b) में अवकलनीय है, तब

(i) $f'(x) > 0, \quad \forall \quad x \in [a,b] \Rightarrow f(x), \; [a,b]$ में वर्धमान फलन है।

(ii) $f'(x) < 0, \quad \forall \quad x \in [a,b] \Rightarrow f(x), \; [a,b]$ में ह्रासमान फलन है।

(iii) $f'(x) = 0, \quad \forall \quad x \in [a,b] \Rightarrow f(x), \; [a,b]$ में अचर फलन है।

प्रमाणः (i) माना $x_1, x_2 \in [a,b]$ इस प्रकार है कि $x_1 < x_2$ तब लाग्रॉंज मध्यमान प्रमेय से $c \in (a,b)$ इस प्रकार है कि

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow \qquad f(x_2) - f(x_1) > 0 \qquad (\because f'(c) > 0)$$

$$\Rightarrow \qquad f(x_2) > f(x_1)$$

अतः $\qquad \forall \quad x_1, x_2 \in [a,b]$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

अतः $f(x), \; [a,b]$ में एक दिष्ट वर्धमान फलन है।

भाग (ii) व (iii) का प्रमाण भी इसी प्रकार हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-7. वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें फलन $f(x)=2x^3-9x^2+12x+3$,

(a) वर्धमान है। (b) ह्रासमान है।

हलः $f(x)=2x^3-9x^2+12x+3$

$\Rightarrow \quad f'(x)=6x^2-18x+12$

$\qquad = 6(x^2-3x+2)$

अब $\quad f'(x)=0 \Rightarrow 6(x^2-3x+2)=0$

$\Rightarrow \quad (x-2)(x-1)=0$

$\Rightarrow \quad x=1,\ 2$ क्रांतिक बिन्दु हैं।

आकृति 8.04

(a) $f(x)$ वर्धमान है तथा $f'(x)>0$

$\Rightarrow \quad 6(x^2-3x+2)>0$

$\Rightarrow \quad (x-1)(x-2)>0$

$\Rightarrow \quad x<1$ या $x>2$

$\Rightarrow \quad x\in(-\infty,\ 1)\cup(2,\ \infty)$

अतः $f(x)$, अन्तराल $(-\infty,\ 1)\cup(2,\ \infty)$ में वर्धमान है।

(b) $f(x)$ ह्रासमान है तब $f'(x)<0$

$\Rightarrow \quad 6(x^2-3x+2)<0$

$\Rightarrow \quad (x-1)(x-2)<0$

$\Rightarrow \quad x>1$ या $x<2$

$\Rightarrow \quad x\in(1,\ 2)$

अतः $f(x)$, अन्तराल $(1, 2)$ में ह्रासमान है।

उदाहरण-8. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x)=x^3-3x^2+4x$, समस्त वास्तविक संख्याओं के लिए निरंतर वर्धमान फलन है।

हलः $\because \quad f(x)=3x^3-3x^2+4x$

$\Rightarrow \quad f'(x)=3x^2-6x-4$

$\qquad =3(x^2-2x+1)+1$

$\qquad =3(x-1)^2+1>0, \quad \forall \quad x\in R$

अतः दिया गया फलन $f(x)$, R पर निरंतर वर्धमान फलन है।

उदाहरण-9. वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें फलन $f(x)=-2x^3+3x^2+12x+25$

(a) वर्धमान तथा (b) ह्रासमान है।

हलः $\because \quad f(x)=-2x^3+3x^2+12x+25$

$\Rightarrow \quad f'(x)=-6x^2+6x+12$

$\qquad =-6(x^2-x-2)$

अतः $\quad f'(x)=0 \Rightarrow -6(x^2-x-2)=0$

$\Rightarrow \quad x^2-x-2=0$

$\Rightarrow \quad (x+1)(x-2)=0$

$\Rightarrow \quad x=-1,\ 2$ क्रान्तिक बिन्दु है।

आकृति 8.05

(a) $f(x)$ वर्धमान हो तब $\quad f'(x) > 0$

$\Rightarrow \quad -6(x^2 - x - 2) > 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - x - 2 < 0$

$\Rightarrow \quad (x+1)(x-2) < 0$

$\Rightarrow \quad x > -1$ या $x < 2$

$\Rightarrow \quad x \in (-1, 2)$

अतः $f(x)$, अन्तराल $(-1, 2)$ में वर्धमान है।

(b) $f(x)$ ह्रासमान है तब $\quad f'(x) < 0$

$\Rightarrow \quad -6(x^2 - x - 2) < 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - x - 2 > 0$

$\Rightarrow \quad (x+1)(x-2) > 0$

$\Rightarrow \quad x < -1$ या $x > 2$

$\Rightarrow \quad x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$

अतः $f(x)$, अन्तराल $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ में ह्रासमान है।

उदाहरण-10. वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें फलन $f(x) = \sin x - \cos x$ वर्धमान या ह्रासमान हो जबकि $x \in (0, \pi)$

हलः $\because \quad f(x) = \sin x - \cos x$

$\Rightarrow \quad f'(x) = \cos x + \sin x$

$\Rightarrow \quad f'(x) = 0$

$\Rightarrow \quad \cos x + \sin x = 0$

$\Rightarrow \quad \sin(\pi/2 + x) + \sin x = 0$

$\Rightarrow \quad 2\sin(\pi/4 + x) \cdot \cos \pi/4 = 0$

$\Rightarrow \quad \sin(\pi/4 + x) = 0 = \sin \pi$

$\Rightarrow \quad \pi/4 + x = \pi$

$\Rightarrow \quad x = 3\pi/4$, जो कि क्रान्तिक बिन्दु है।

$f(x)$ वर्धमान है तब $\quad f'(x) > 0$

$\Rightarrow \quad \cos x + \sin x > 0$

$\Rightarrow \quad 2\sin(\pi/4 + x)\cos \pi/4 > 0$

$\Rightarrow \quad \sin(\pi/4 + x) > 0$

$\Rightarrow \quad \sin\{\pi - (\pi/4 + x)\} > 0$

$\Rightarrow \quad \sin(3\pi/4 - x) > 0$

$\Rightarrow \quad 3\pi/4 - x > 0$

$\Rightarrow \quad x < 3\pi/4$

$\Rightarrow \quad x \in (0, 3\pi/4)$

अतः $f(x)$ वर्धमान फलन होगा यदि $x \in (0, 3\pi/4)$

$f(x)$ ह्रासमान फलन है तब $\quad f'(x)<0$

$\Rightarrow \quad \cos x+\sin x<0$

$\Rightarrow \quad \sin(\pi/2+x)+\sin x<0$

$\Rightarrow \quad 2\sin(\pi/4+x)\cos\pi/4<0$

$\Rightarrow \quad \sin(\pi/4+x)<0$

$\Rightarrow \quad \sin\{\pi-(\pi/4+x)\}<0$

$\Rightarrow \quad \sin(3\pi/4-x)<0$

$\Rightarrow \quad 3\pi/4-x<0$

$\Rightarrow \quad x>3\pi/4 \Rightarrow x\in(3\pi/4,\pi)$

अतः $f(x)$ ह्रासमान फलन होगा यदि $x\in(3\pi/4,\pi)$

उदाहरण-11. x के किन मानों के लिए फलन $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ वर्धमान तथा ह्रासमान है?

हल: दिया है $\quad f(x)=\dfrac{x}{1+x^2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

$\therefore \quad f'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=0$

$\Rightarrow \quad x^2-1=0$

$\Rightarrow \quad (x-1)(x+1)=0$

$\Rightarrow \quad x=-1,1$ जो कि क्रांतिक बिन्दु है।

आकृति 8.06

$f(x)$ वर्धमान फलन है तब $f'(x)>0$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}>0$

$\Rightarrow \quad 1-x^2>0$

$\Rightarrow \quad -(x^2-1)>0$

$\Rightarrow \quad x^2-1<0$

$\Rightarrow \quad (x-1)(x+1)<0$

$\Rightarrow \quad x\in(-1,1)$

अतः $x\in(-1,1)$ के लिए $f(x)$ वर्धमान फलन है।

$f(x)$ ह्रासमान फलन है तब $f'(x)<0$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}<0$

$\Rightarrow \quad 1-x^2<0$

$\Rightarrow \quad x^2-1>0$

$\Rightarrow \quad (x-1)(x+1)>0$

$\Rightarrow \quad x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

अत : $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ के लिए $f(x)$ ह्रासमान फलन है।

उदाहरण-12. वह अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें निम्नलिखित फलन वर्धमान या ह्रासमान है

(a) x^2+2x+5 (b) $10-6x-2x^2$ (c) $(x+1)^3(x-3)^3$

हल: (a) माना कि $f(x)=x^2+2x+5$

$\Rightarrow$ $f'(x)=2x+2=2(x+1)$

$\therefore$ $f'(x)=0 \Rightarrow 2(x+1)=0$

$\Rightarrow$ $x=-1$

स्थिति-I: जब $x<-1$

$\Rightarrow$ $x+1<0$

$\therefore$ $f'(x)=2(-ve)=$ ऋणात्मक <0

अतः $f(x)$ अन्तराल $(-\infty,-1)$ में ह्रासमान है।

स्थिति-II: जब $x>-1$

$\Rightarrow$ $x+1>0$

$\therefore$ $f'(x)=$ धनात्मक >0

अतः $f(x)$ अन्तराल $(-1,\infty)$ में वर्धमान है।

(b) माना कि $f(x)=10-6x-2x^2$

$\Rightarrow$ $f'(x)=-6-4x=-2(3+2x)$

$\therefore$ $f'(x)=0 \Rightarrow -2(3+2x)=0$

$\Rightarrow$ $x=-3/2$

स्थिति-I: जब $x<-3/2$

$\Rightarrow$ $3+2x<0$

$\Rightarrow$ $f'(x)=-2(-ve)=$ धनात्मक >0

अतः $f(x)$ अन्तराल $(-\infty,-3/2)$ में वर्धमान हैं।

स्थिति-II: जब $x>-3/2$

$\Rightarrow$ $3+2x>0$

$\Rightarrow$ $f'(x)=-2(+ve)=$ ऋणात्मक <0

$\Rightarrow$ $f(x)$ अन्तराल $(-3/2,\infty)$ में ह्रासमान है।

(c) माना कि $f(x)=(x+1)^3(x-3)^3$

$$\Rightarrow \quad f'(x)=3(x+1)^2(x-3)^3+3(x+1)^3(x-3)^2$$

$$=3(x+1)^2(x-3)^2\{x-3+x+1\}$$

$$=6(x+1)^2(x-3)^2(x-1)$$

$f(x)$ वर्धमान फलन है तब $f'(x)>0$

$\Rightarrow$ $6(x+1)^2(x-3)^2(x-1)>0$

$\Rightarrow$ $x-1>0$ $[\because 6(x+1)^2(x-3)^2>0]$

$\Rightarrow$ $x>1$

अतः $f(x)$ अन्तराल $(1,\infty)$ में वर्धमान है।

$f(x)$ ह्रासमान फलन है तब $f'(x) < 0$

$\Rightarrow \quad 6(x+1)^2(x-3)^2(x-1) < 0$

$\Rightarrow \quad x-1 < 0$

$\Rightarrow \quad x < 1$

अतः $f(x)$, अन्तराल $(-\infty, 1)$ में ह्रासमान है।

उदाहरण-13. सिद्ध कीजिए कि अन्तराल $[0, \pi/2]$ में $y = \dfrac{4\sin\theta}{2+\cos\theta} - \theta$ वर्धमान फलन है।

हल: माना कि
$$f(\theta) = y = \frac{4\sin\theta}{2+\cos\theta} - \theta$$

$$\Rightarrow \quad f'(\theta) = \frac{(2+\cos\theta).4\cos\theta - 4\sin\theta(-\sin\theta)}{(2+\cos\theta)^2} - 1$$

$$= \frac{4\cos\theta - \cos^2\theta}{(2+\cos\theta)^2} = \frac{\cos\theta(4-\cos\theta)}{(2+\cos\theta)^2}$$

$$\therefore \quad f'(\theta) = 0 \Rightarrow \frac{\cos\theta\left(4-\cos\theta\right)}{\left(2+\cos\theta\right)^2} = 0$$

$\Rightarrow \quad \cos\theta = 0$

$\Rightarrow \quad \theta = \pi/2$

जब $0 < \theta < \pi/2$ तब $f'(\theta) > 0$

अतः $y = f(\theta)$ अन्तराल $(0, \pi/2)$ में वर्धमान है।

उदाहरण-14. सिद्ध कीजिए कि अन्तराल $(-1, 1)$ में फलन $f(x) = x^2 - x + 1$ न तो वर्धमान है ओर न ही ह्रासमान है।

हल: यहाँ $\quad f(x) = x^2 - x + 1$

$\Rightarrow \quad f'(x) = 2x - 1$

$\therefore \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1/2$

स्थिति-I: जब $-1 < x < 1/2$ तब $f'(x) < 0$

अतः $f(x)$ अन्तराल $\left(-1, 1/2\right)$ में ह्रासमान है।

स्थिति-II: जब $1/2 < x < 1$ तब $f'(x) > 0$

अतः $f(x)$ अन्तराल $(1/2, 1)$ में वर्धमान है।

फलतः अन्तराल $(-1, 1)$ में $f(x)$, न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है।

उदाहरण-15. a के वह मान समूह ज्ञात कीजिए जिसके लिए अन्तराल $[1, 2]$ में $f(x) = x^2 + ax + 1$, वर्धमान है।

हल: दिया है $\quad f(x) = x^2 + ax + 1$

$\Rightarrow \quad f'(x) = 2x + a$

$f(x)$ के अन्तराल $[1, 2]$ मे वर्धमान होने के लिए $f'(x) > 0 \quad \forall\ x \in R$

अब $\quad f'(x) = 2x + a$

$\Rightarrow \quad f''(x) = 2 > 0, \quad \forall\ x \in R$

$\Rightarrow \quad x \in R$ पर $f'(x)$ वर्धमान है।

$\Rightarrow$ $[1, 2]$ पर $f'(x)$ वर्धमान है।

$\Rightarrow$ $[1, 2]$ में $f'(x)$ का निम्नतम मान $f'(1)$ है।

$\therefore$ $f'(x) > 0 \quad \forall \; x \in [1, 2]$

$f'(1) > 0 \Rightarrow 2 + a > 0$

$\Rightarrow$ $a > -2$

$\Rightarrow$ $a \in (-2, \infty)$

प्रश्नमाला 8.2

1. सिद्ध कीजिए $f(x) = x^2$ अन्तराल $(0, \infty)$ में वर्धमान तथा अन्तराल $(-\infty, 0)$ में ह्रासमान है।
2. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = a^x, o < a < 1, R$ में ह्रासमान है।

सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन सम्मुख दिए गए अन्तराल में वर्धमान है।

3. $f(x) = \log \sin x, \quad x \in (0, \pi/2)$
4. $f(x) = x^{100} + \sin x + 1, \quad x \in (0, \pi/2)$
5. $f(x) = (x-1)e^x + 1, \quad x > 0$
6. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 1, \quad x \in R$

सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन, सम्मुख दिए गए अन्तराल में ह्रासमान है.

7. $f(x) = \tan^{-1} x - x, \quad x \in R$
8. $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x, \quad x \in (0, \pi/4)$
9. $f(x) = 3/x + 5, \quad x \in R, x \neq 0$
10. $f(x) = x^2 - 2x + 3, \quad x < 1$

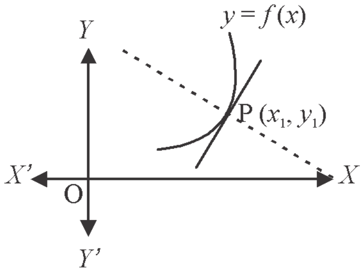
अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें निम्नलिखित फलन वर्धमान या ह्रासमान है।

11. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$
12. $f(x) = x^4 - 2x^2$
13. $f(x) = 9x^3 - 9x^2 + 12x + 5$
14. $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 5$
15. ग का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए जब कि फलन $f(x) = x^3 + 9x + 5,$ अन्तराल खए 2, में वर्धमान है।
16. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x)$, अन्तराल $(0, \pi/4)$ में वर्धमान फलन है।

8.05 8.05 स्पर्श रेखाएँ एवं अभिलम्ब (Tangents and normals)

यहाँ हम अवकलन के प्रयोग से दिए गए वक्र के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात करेंगे।

वक्र $y = f(x)$ के किसी बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता या ढाल $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}$ होती है। अतः वक्र $y = f(x)$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण निम्न होगा-



चित्र 8.04

$$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} (x - x_1)$$

चूँकि वक्र के किसी बिन्दु पर अभिलम्ब, उस बिन्दु पर स्पर्श रेखा के लम्बवत होता है, अतः वक्र के स्पर्श बिन्दु (x_1, y_1) पर अभिलम्ब की प्रवणता $-\dfrac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}}$ है।

अतः वक्र $y = f(x)$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर अभिलम्ब के समीकरण निम्न है।

$$y - y_1 = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}}(x - x_1)$$

$$\Rightarrow \qquad (y - y_1)\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} + (x - x_1) = 0$$

टिप्पणी: यदि वक्र $y = f(x)$ की कोई स्पर्श रेखा x- अक्ष की धन दिशा से ψ कोण बनाए, तब $\frac{dy}{dx}$ = स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \tan\psi$

8.06 विशेष स्थितियाँ

(i) यदि $\psi = 0$ अर्थात् स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर हो तब $\frac{dy}{dx} = \tan 0 = 0$ होगा। इस स्थिति में बिन्दु पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर होती है।

(ii) यदि $\psi = 90^\circ$, अर्थात् स्पर्श रेखा x-अक्ष के लम्बवत् हो तब $\frac{dy}{dx} = \tan 90^\circ = \infty$ होगा। इस स्थिति में बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के लम्बवत होती है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-16. वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$ के बिन्दु $(1, 1)$ पर स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल: $\because$
$$x^{2/3} + y^{2/3} = 2$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$$

वक्र के बिन्दु $(1, 1)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,1)} = -1$ है।

अतः बिन्दु $(1, 1)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण निम्न होगा-

$$y - 1 = (-1)(x - 1)$$

$$\Rightarrow \qquad x + y - 2 = 0 \qquad (1)$$

बिन्दु $(1, 1)$ पर अभिलम्ब का समीकरण निम्न होगा।

$$y - 1 = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,1)}}(x - 1)$$

$$= -\frac{1}{(-1)}(x - 1) = x - 1 \qquad (2)$$

$$y - x = 0$$

$\Rightarrow$ (1) व (2) अभीष्ट स्पर्श रेखा एवं अभिलम्ब के समीकरण है।

उदाहरण-17. वक्र $x^2+y^2-2x-3=0$ पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जहाँ स्पर्श रेखा

(i) x-अक्ष के समान्तर हो।

(ii) x-अक्ष के लम्बवत हो।

(iii) दोनों अक्षों से समान कोण बनाती हो।

हल: वक्र का समीकरण $x^2+y^2-2x-3=0$ (1)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2x+2y\frac{dy}{dx}-2=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1-x}{y}$$

(i) जब स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है तब

$$\psi=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\tan 0=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1-x}{y}=0\Rightarrow 1-x=0$$

$$\Rightarrow \quad x=1$$

$x=1$ समीकरण (1) में रखने पर

$$y^2-4=0\Rightarrow y=\pm 2$$

अतः अभीष्ट बिन्दु $(1, 2)$ तथा $(1, -2)$ हैं।

(ii) जब स्पर्श रेखा x-अक्ष के लम्बवत है। तब

$$\psi=90^\circ\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\tan 90=\infty$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1-x}{y}=\infty$$

$$\Rightarrow \quad y=0$$

$y=0$ समीकरण (1) में रखने पर

$$x^2-2x-3=0$$

$$(x-3)(x+1)=0$$

$$\Rightarrow \quad x=3,-1$$

अतः अभीष्ट बिन्दु $(3, 0)$ तथा $(-1, 0)$ है।

(iii) जब स्पर्श रेखा, दोनों अक्षों के साथ समान कोण बनाती है। तब $\psi=\frac{\pi}{4}$

अतः स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{dy}{dx}=\tan\frac{\pi}{4}=1$

$$\Rightarrow \quad \frac{1-x}{y}=1\Rightarrow y=1-x \quad (2)$$

$y=1-x$ समीकरण (1) में रखने पर

$$x^2+(1-x)^2-2x-3=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2-2x-1=0$$

$$\Rightarrow \quad x=1\pm\sqrt{2}$$

x का यह मान समीकरण (2) में रखने पर

$$y=\mp\sqrt{2}$$

अतः अभीष्ट बिन्दु $(1+\sqrt{2},-\sqrt{2})$ तथा $(1-\sqrt{2},\sqrt{2})$ है।

उदाहरण-18. वक्र $y=x^3-11x+5$ पर उस बिन्दु को ज्ञात कीजिए जिस पर स्पर्श रेखा $y=x-11$ है।

हल: यहाँ
$$y=x^3-11x+5 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=3x^2-11 \quad (2)$$

स्पर्श रेखा $y=x-11$ की प्रवणता $=1$

अतः समीकरण (2) से

$$1=3x^2-11$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2=12 \Rightarrow x=\pm 2$$

समीकरण (1) में $x=2$ रखने पर

$$y=2^3-11(2)+5=-9$$

तथा समीकरण (1) में $x=-2$ रखने पर

$$y=(-2)^3-11(-2)+5=19$$

परन्तु बिन्दु (–2, 19) वक्र (1) पर स्थित नहीं है अतः वक्र के बिन्दु (–2, 9) पर स्पर्श रेखा $y=x-11$ है।

उदाहरण-19. शून्य प्रवणता वाली सभी रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र $y=\frac{1}{x^2-2x+3}$ को स्पर्श करती है।

हल: यहाँ
$$y=\frac{1}{x^2-2x+3} \quad (1)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{(2x-2)}{(x^2-2x+3)^2}$$

यहाँ प्रवणता $=0$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-(2x-2)}{(x^2-2x+3)^2}=0$$

$$\Rightarrow \quad 2x-2=0$$

$$\Rightarrow \quad x=1$$

$x=1$ समीकरण (1) में रखने पर,

$$y=\frac{1}{1^2-2(1)+3}=\frac{1}{2}$$

अतः बिन्दु $(1, 1/2)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $=0$ तथा बिन्दु $(1,1/2)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण निम्न है-

$y-\frac{1}{2}=0(x-1) \Rightarrow y=\frac{1}{2}$, जो कि स्पर्श रेखा का अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण-20. वक्र $2x^2-y^2=14$ पर सरल रेखा $x+3y=6$ के समान्तर अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हलः माना वक्र $2x^2-y^2=14$ पर बिन्दु (x_1, y_1) है जहाँ अभिलम्ब, सरल रेखा $x+3y=6$ के समान्तर है।

$$\therefore \quad 2x_1^2-y_1^2=14 \qquad (1)$$

$$\because \quad 2x^2-y^2=14$$

$$\Rightarrow \quad 4x-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{4x}{2y}=\frac{2x}{y}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}=\frac{2x_1}{y_1}$$

$\because$ बिन्दु (x_1, y_1) पर अभिलम्ब, रेखा $x+3y=6$ के समान्तर हैं अतः (x_1, y_1) पर अभिलम्ब की प्रवणता $=$ रेखा $x+3y=6$ की प्रवणता

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}}=-\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y_1}{2x_1}=\frac{1}{3} \Rightarrow y_1=\frac{2}{3}x_1$$

$y_1=\frac{2}{3}x_1$, समीकरण (1) मे रखने पर

$$2x_1^2-\left(\frac{2}{3}x_1\right)^2=14$$

$$\Rightarrow \quad \frac{14}{9}x_1^2=14 \Rightarrow x_1=\pm 3$$

$$x_1=3 \text{ पर } y_1=\frac{2}{3}\times 3=2$$

$$\text{तथा} \quad x_1=-3 \text{ पर } y_1=\frac{2}{3}(-3)=-2$$

अतः बिन्दुओं $(3, 2)$ तथा $(-3, -2)$ पर अभिलम्ब, रेखा $x+3y=6$ के समान्तर है।

बिन्दु $(3, 2)$ पर अभिलम्ब का समीकरण

$$y-2=-1/3(x-3) \Rightarrow x+3y=9$$

बिन्दु $(-3, -2)$ पर अभिलम्ब का समीकरण

$$y+2=-1/3(x+3) \Rightarrow x+3y+9=0.$$

उदाहरण-21. वक्र $y = x^2 - 2x + 7$ की स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो

(i) रेखा $2x - y + 9 = 0$ के समान्तर है।

(ii) रेखा $5y - 15x = 13$ के लम्बवत् है।

हल: वक्र का समीकरण $$y = x^2 - 2x + 7 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2x - 2 = 2(x-1) \quad (2)$$

(i) रेखा $2x - y + 9 = 0$ या $y = 2x + 9$ की प्रवणता $= 2$

$\because$ स्पर्श रेखा, इस रेखा के समान्तर है अतः

$$2(x-1) = 2$$

$$\Rightarrow \quad x = 1$$

जब $x = 1$ तब (1) से

$$y = 1^2 - 2(1) + 7 = 6$$

अतः बिन्दु $(1, 6)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण जो रेखा $2x - y + 9 = 0$ के समान्तर है, निम्न होगा

$$y - 6 = 2(x-1)$$

$$\Rightarrow \quad 2x - y + 4 = 0$$

(ii) रेखा $5y - 15x = 13$ या $5y = 15x + 13$

$\Rightarrow$ $y = 3x + 13/5$ की प्रवणता $= 3$

रेखा $5y - 15x = 13$ के लम्बवत् रेखा की प्रवणता $= -1/3$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 2(x-1) = -1/3$$

$$\Rightarrow \quad 6x - 6 = -1$$

$$\Rightarrow \quad x = 5/6$$

जब $x = 5/6$ तब समीकरण (1) से

$$y = \left(\frac{5}{6}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{6}\right) + 7 = \frac{217}{36}$$

अतः बिन्दु $\left(\frac{5}{6}, \frac{217}{36}\right)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण निम्न होगा-

$$y - \frac{217}{36} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{5}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{36y - 217}{36} = -\frac{1}{3}\left(\frac{6x-5}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 12x + 36y - 227 = 0$$

यही स्पर्श रेखा का समीकरण है।

उदाहरण-22. सिद्ध कीजिए कि x के प्रत्येक मान के लिए सरल रेखा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$, वक्र $(x/a)^n+(y/b)^n=1$ को बिन्दु (a,b) पर स्पर्श करती है।

हल: वक्र का समीकरण $(x/a)^n+(y/b)^n=1$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{a^n}nx^{n-1}+\frac{1}{b^n}ny^{n-1}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{b^n x^{n-1}}{a^n y^{n-1}}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,b)}=-\frac{b^n\cdot a^{n-1}}{a^n b^{n-1}}=-\frac{b}{a}$$

अतः वक्र के बिन्दु (a,b) पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$y-b=-\frac{b}{a}(x-a)$$

$$\Rightarrow \quad ay-ab=-bx+ab$$

$$\Rightarrow \quad bx+ay=2ab$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$$

प्रश्नमाला 8.3

1. वक्र $y=x^3-x$ बिन्दु $x=2$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।
2. वक्र $y=\frac{x-1}{x-2}, x\neq 2$ के बिन्दु $x=10$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।
3. वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जहाँ वक्र $y=\sqrt{(4x-3)}-1$ की स्पर्श रेखा की प्रवणता $2/3$ है।
4. उन सभी रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र $y+\frac{2}{x-3}=0$ की स्पर्श रेखाएँ हैं तथा जिनकी प्रवणता 2 है।
5. वक्र $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ पर वे बिन्दु ज्ञात कीजिए जहाँ स्पर्श रेखा

   (i) x-अक्ष के समान्तर (ii) y-अक्ष के समान्तर
6. वक्र $x=a\sin^3 t, y=b\cos^3 t$ की $t=\pi/2$ स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।
7. वक्र $y=\sin^2 x$ के बिन्दु $\left(\frac{\pi}{3},\frac{3}{4}\right)$ पर अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए।
8. निम्न वक्रों के लिए उनके सम्मुख अंकित बिन्दु पर स्पर्श रेखा एवम् अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए

   (a) $y=x^2+4x+1, x=3$ पर है। (b) $y^2=4ax, x=a$ पर है।

   (c) $xy=a^2,\left(at,\frac{a}{t}\right)$ पर (d) $y^2=4ax,\left(\frac{a}{m^2},\frac{2a}{m}\right)$ पर

(e) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, (a\sec\theta, b\tan\theta)$ पर (f) $y=2x^2-3x-1, (1,-2)$ पर

(g) $x=at^2, y=2at, t=1$ पर (h) $x=\theta+\sin\theta, y=1-\cos\theta, \theta=\pi/2$ पर

8.07 सन्निकटन (Approximation)

यहाँ हम दी गई राशियों के सन्निकटन मान ज्ञात करने के लिए अवकलन का प्रयोग करेंगे।

माना $y=f(x)$ दिए गए वक्र का समीकरण है। इसमें x में होने वाली अल्प वृद्धि को संकेत में Δx से व्यक्त करते हैं जबकि इसके संगत y में होने वाली वृद्धि को Δy से व्यक्त करते हैं, जहाँ $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$ है। हम x के अवकलज को dx से व्यक्त करते हैं तथा इसे $dx=\Delta x$ से परिभाषित करते हैं। इसी प्रकार y के अवकलज को dy से व्यक्त करते हैं तथा $dy=f'(x)dx$ या $dy=\frac{dy}{dx}.\Delta x$ से परिभाषित करते हैं।

उपर्युक्त स्थिति में x की तुलना में $dx=\Delta x$ अति सूक्ष्म होता है तथा Δy का एक उपयुक्त सन्निकटन dy होता है तथा इसे हम $dy \approx \Delta y$ द्वारा व्यक्त करते हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-23. अवकलज का प्रयोग करके $\sqrt{26}$ का सन्निकटन मान ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि $y=\sqrt{x}$

जहाँ $x=25, \Delta x=1$ तथा $x+\Delta x=26$

$\because$ $y=\sqrt{x}=x^{1/2}$ (1)

$\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\because$ $\Delta y=\frac{dy}{dx}.\Delta x=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x=\frac{1}{2\times 5}\times 1=\frac{1}{10}=0.1$

समीकरण (1) से $y+\Delta y=(x+\Delta x)^{1/2}$

$\Rightarrow$ $x^{1/2}+\Delta y=(x+\Delta x)^{1/2}$

मान रखने पर $(25)^{1/2}+0.1=(26)^{1/2}$

$\Rightarrow$ $\sqrt{26}=5+0.1=5.1.$

उदाहरण-24. $(66)^{1/3}$ का सन्निकटन करने के लिए अवकलज का प्रयोग कीजिए।

हल: माना कि $y=x^{1/3}$ (1)

जहाँ $x=64, \Delta x=2$ तथा $x+\Delta x=66$

$\because$ $y=x^{1/3}$

$\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3x^{2/3}}$

$\because$ $\Delta y=\frac{dy}{dx}.\Delta x=\frac{1}{3x^{2/3}}.\Delta x=\frac{1}{3\times(64)^{2/3}}\times 2$

$$=\frac{1}{3\times(4)^2}\times 2=\frac{1}{24}$$

अब समीकरण (1) से

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^{1/3}$$

$\Rightarrow$ $$x^{1/3}+\frac{1}{24}=(66)^{1/3}$$

$\Rightarrow$ $$(64)^{1/3}+\frac{1}{24}=(66)^{1/3}$$

$\Rightarrow$ $$(4^3)^{1/3}+\frac{1}{24}=(66)^{1/3}$$

$\Rightarrow$ $$4+0.041=(66)^{1/3}$$

$\Rightarrow$ $$(66)^{1/3}=4.041.$$

उदाहरण-25. अवकलज का प्रयोग करके निम्न का सन्निकटन ज्ञात कीजिए

(i) $\log_{10}(10.2)$ जबकि $\log_{10}e=0.4343$

(ii) $\log_e(4.04)$ जबकि $\log_e 4=1.3863$

(iii) $\cos 61^\circ$ जबकि $1^\circ=0.01745$ रेडियन

हल: (i) माना कि $$y=\log_{10}x \qquad (1)$$

जहाँ $$x=10,\ \Delta x=0.2$$

$\Rightarrow$ $$x+\Delta x=10.2$$

$\because$ $$y=\log_{10}x=\log_{10}e.\log_e x$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dy}{dx}=\log e_{10}e.\frac{1}{x}=\frac{0.4343}{10}$$

$\because$ $$\Delta y=\frac{dy}{dx}.\Delta x=\frac{0.4343}{10}\times(0.2)=0.008686$$

समीकरण (1) से

$$y+\Delta y=\log_{10}(x+\Delta x)$$

$\Rightarrow$ $$\log_{10}x+\Delta y=\log_{10}(x+\Delta x)$$

$\Rightarrow$ $$\log_{10}10+0.008686=\log_{10}(10.2)$$

$\Rightarrow$ $$1+0.008686=\log_{10}(10.2)$$

$\Rightarrow$ $$\log_{10}(10.2)=1.008686$$

(ii) माना कि $$y=\log_e x \qquad (2)$$

जहाँ $x=4, \Delta x=0.04$ तथा $x+\Delta x=4.04$

$\because$ $$y=\log_e x$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$$

$\because$ $$\Delta y=\frac{dy}{dx}.\Delta x=\frac{\Delta x}{x}=\frac{0.04}{4}=0.01$$

समीकरण (2) से

$$y+\Delta y=\log_e(x+\Delta x)$$

$\Rightarrow$ $$\log_e x+\Delta y=\log_e(x+\Delta x)$$

मान रखने पर

$$\log_e 4+0.01=\log_e(4.04)$$

$\Rightarrow$ $$\log_e(4.04)=1.3863+0.01$$

$$=1.3963$$

(iii) माना कि $$y=\cos x \qquad (3)$$

जहाँ $x=60^\circ, \Delta x=1^\circ=0.01745$ रेडियन तथा $x+\Delta x=61^\circ$

$\because$ $$y=\cos x$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dy}{dx}=-\sin x$$

$\because$ $$\Delta y=\frac{dy}{dx}\Delta x=-\sin x.\Delta x$$

$$=-\sin 60^\circ(0.01745)$$

$$=-0.1745\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-0.01511 \qquad (\because \sqrt{3}=1.73205)$$

समीकरण (3) से

$$y+\Delta y=\cos(x+\Delta x)$$

$\Rightarrow$ $$\cos x+\Delta y=\cos(x+\Delta x)$$

$$\cos 60^\circ+(-0.01511)=\cos(61^\circ)$$

$\Rightarrow$ $$\cos 61^\circ=\frac{1}{2}-0.01511$$

$$=0.48489.$$

उदाहरण-26. सिद्ध कीजिए कि त्रिज्या मापने में हुई त्रुटि के कारण से गोले आयतन की गणना में प्रतिशत त्रुटि, त्रिज्या में प्रतिशत त्रुटि की लगभग 3 गुना होती है।

हलः माना कि गोले की त्रिज्या r तथा आयतन V है तब

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dr}=4\pi r^2$$

$\because$ $$\Delta V=\frac{dV}{dr}.\Delta r$$

$\Rightarrow$ $$\Delta V=4\pi r^2\Delta r$$

$\Rightarrow$ $$\frac{\Delta V}{V}=\frac{4\pi r^2\Delta r}{V}=\frac{4\pi r^2\Delta r}{4/3\pi r^3}=3\frac{\Delta r}{r}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{\Delta V}{V}\times 100=3\left(\frac{\Delta r}{r}\times 100\right)$$

$\Rightarrow$ आयतन में प्रतिशत त्रुटि $=3$ (त्रिज्या में प्रतिशत त्रुटि)

उदाहरण-27. $f(5.001)$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए जहाँ $f(x)=x^3-7x^2+15$ है।

हल: माना कि $$y=f(x) \quad (1)$$

जहाँ $x=5, \Delta x=0.001$ तथा $x+\Delta x=5.001$

समीकरण (1) से

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$

$$\Rightarrow \quad f(x)+\frac{dy}{dx}.\Delta x=f(x+\Delta x) \quad (2)$$

$$\because \quad y=f(x)=x^3-7x^2+15$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=3x^2-14x$$

समीकरण (2) में प्रयोग करने पर

$$(x^3-7x^2+15)+(3x^2-14x).\Delta x=f(x+\Delta x)$$

x का मान रखने पर

$$(5)^3-7(5)^2+15+\{3(5)^2-14(5)\}\times(0.001)=f(5.001)$$

$$\Rightarrow \quad f(5.001)=125-175+15+(75-70)(0.001)$$

$$=-34.995$$

उदाहरण-28. x मीटर भुजा वाले घन की भुजा में 1% वृद्धि होने के कारण घन के आयतन में होने वाला सन्निकटन परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि धन का आयतन V है तब

$$\Delta x=x \text{ का } 1\%=\frac{x}{100}$$

$$\because \quad V=x^3 \Rightarrow \frac{dV}{dx}=3x^2$$

अतः घन के आयतन में परिवर्तन,

$$dV=\frac{dV}{dx}\Delta x$$

$$=3x^2\times\frac{x}{100}=\frac{3}{100}x^3$$

$$=0.03x^3 \text{ मीटर}^3$$

उदाहरण-29. एक गोले की त्रिज्या 7 सेमी मापी जाती है जिसमें 0.02 सेमी की त्रुटि है। इस त्रुटि के कारण इसके आयतन की गणना में सन्निकटन त्रुटि ज्ञात कीजिए।

हल: गोले की त्रिज्या $=7$ सेमी

त्रिज्या मापने में हुई त्रुटि $\Delta r=0.02$ सेमी

माना गोले का आयतन V है तब

$$V=4/3\pi r^3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dV}{dr}=4\pi r^2$$

$$\because \quad dV=\frac{dV}{dr}\Delta r=4\pi r^2.\Delta r$$

$$=4\pi(7)^2\times.002=3.92\pi$$

प्रश्नमाला 8.4

अवकलज का प्रयोग करके निम्न का सन्निकटन मान ज्ञात कीजिए।

1. $(0.009)^{1/3}$ 2. $(0.999)^{1/10}$ 3. $\sqrt{0.0037}$

4. $\frac{1}{(2.002)^2}$ 5. $(15)^{1/4}$ 6. $\sqrt{401}$

7. $(3.968)^{3/2}$ 8. $(32.15)^{1/5}$ 9. $\sqrt{0.6}$

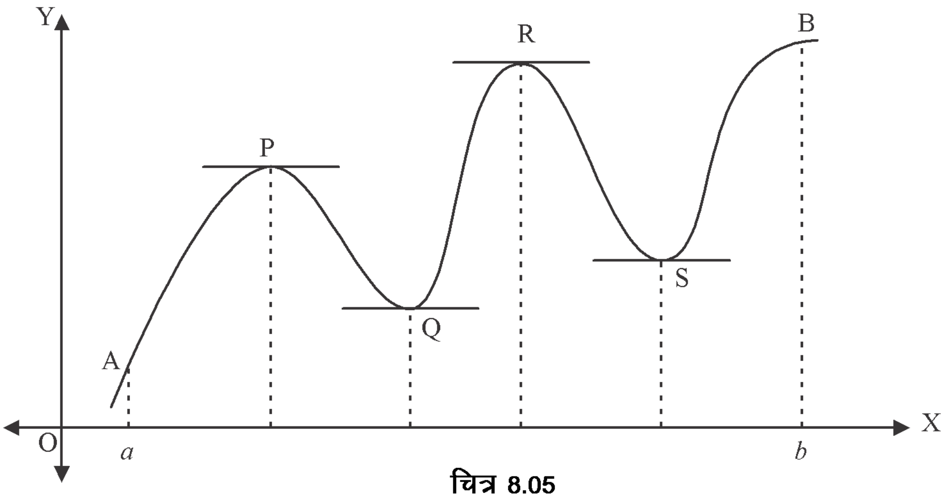
10. $\log_{10}(10.1)$, जबकि $\log_{10} e = 0.4343$ 11. $\log_e(10.02)$ ए जबकि $\log_e 10 = 2.3026$

12. यदि $y = x^2 + 4$ तथा x का मान 3 से 3.1 परिवर्तित होता है तब अवकलज के प्रयोग से y में परिवर्तन का सन्निकटन मान ज्ञात कीजिए।
13. सिद्ध कीजिए कि एक घनाकार सन्दूक के आयतन की गणना में प्रतिशत त्रुटि, घन की कोर की लम्बाई मापने में त्रुटि की लगभग तीन गुना होती है।
14. यदि गोले की त्रिज्या 10 सेमी से 9.8 सेमी तक सिकुड़ती है तब इसके आयतन में सन्निकटन त्रुटि ज्ञात कीजिए।

8.08 उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ (Maxima and minima)

यहाँ हम अवकलजों का प्रयोग विभिन्न फलनों के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान ज्ञात करने में करेंगे।

फलन $y = f(x)$ के आरेख में अन्तराल $[a, b]$ में स्थित बिन्दुओं A, P, Q, R, S तथा B की कोटियों पर ध्यान दीजिए।



चित्र 8.05

बिन्दुओं P तथा R के लघु सामीप्य में इन बिन्दुओं की कोटियाँ अधिकतम है, जबकि बिन्दुओं Q तथा S के लघु सामीप्य में इन बिन्दुओं की कोटियाँ न्यूनतम है। बिन्दु A की कोटि सबसे कम तथा B की कोटि सबसे अधिक है। बिन्दुओं P, Q, R तथा S पर खीचीं गई वक्र की स्पर्श रेखाएँ, x-अक्ष के समान्तर है अर्थात् इनकी प्रवणताएँ $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ शून्य है। बिन्दु P तथा R को फलन के उच्चिष्ठ बिन्दु एवम् Q तथा S को फलन के निम्निष्ठ बिन्दु कहते हैं। उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ बिन्दुओं को फलन के चरम बिन्दु (Extreme points) भी कहते हैं।

8.09 कुछ परिभाषाएँ (Some difinitions)

(i) सापेक्ष उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान (Relative maximum and miniman value)

किसी फलन $f(x)$ का मान बिन्दु $x = c$ पर सापेक्ष उच्चिष्ठ कहलाता है यदि $f(x)$ का मान c के अल्प प्रतिवेश $(c-h, c+h)$ के प्रत्येक बिन्दु पर $f(c)$ से छोटा हो अर्थात् $f(x) \le f(c)$, $\forall\ x \in (c-h, c+h)$, जहाँ h अति सूक्ष्म धनात्मक संख्या है।

इसी प्रकार फलन $f(x)$ का मान बिन्दु $x = c$ पर सापेक्ष निम्निष्ठ कहलाता है यदि $f(x)$ का मान c के अल्प प्रतिवेश $(c-h, c+h)$ के प्रत्येक बिन्दु पर $f(c)$ से बड़ा हो अर्थात् $f(x) \ge f(c)$, $\forall\ x \in (c-h, c+h)$

सापेक्ष उच्चिष्ठ मान को सामान्यतः उच्चिष्ठ या अधिकतम तथा सापेक्ष निम्निष्ठ मान को निम्निष्ठ मान कहते हैं।

(ii) निरपेक्ष उच्चिष्ठ एवम् निम्निष्ठ मान (Absolute maximun and minimum value)

किसी फलन $f(x)$ का मान प्रान्त D में बिन्दु C पर निरपेक्ष उच्चिष्ठ कहलाता है यदि $f(x) \le f(c)$, $\forall\ x \in D$

इसी प्रकार फलन $f(x)$ का मान प्रान्त D में बिन्दु C पर निरपेक्ष निम्निष्ठ (least) कहलाता है यदि $f(x) \ge f(c)$, $\forall\ x \in D$

टिप्पणी: किसी प्रान्त में फलन के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान एक से अधिक हो सकते है परन्तु प्रान्त में निरपेक्ष उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान केवल एक ही होता है। एक उच्चिष्ठ मान निम्निष्ठ मान से कम हो सकता है। इसी प्रकार एक निम्निष्ठ मान, उच्चिष्ठ मान से अधिक हो सकता है। फलन के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान को फलन के चरम मान भी कहते है।

8.10 फलन के चरम मान के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध (Necessary condition for the extreme value of a function)

प्रमेयः यदि $f(x)$ एक अवकलनीय फलन है तब $x=c$ पर $f(x)$ के चरम मान होने के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध यह है कि $f'(c)=0$

टिप्पणी: किसी फलन $f(x)$ के बिन्दु $x=c$ पर उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान विद्यमान होने के लिए $f'(c)=0$ केवल आवश्यक प्रतिबन्ध है परन्तु पर्याप्त नहीं है उदाहरणार्थ यदि $f(x)=x^3$ तब $x=0$ पर $f'(0)=0$ परन्तु $f(0)$, फलन का चरम मान नहीं है क्योंकि जब $x>0 \Rightarrow f(x)>f(0)$ तथा जब $x<0 \Rightarrow f(x)<f(0)$ अतः $f(0)$ न तो उच्चिष्ठ है और न निम्निष्ठ।

फलन के चरम मान के लिए पर्याप्त प्रतिबन्ध (Sufficient condition for the extreme value of a funciton)

प्रमेयः (i) बिन्दु $x=c$ पर फलन $f(x)$ का उच्चिष्ठ मान विद्यमान होगा यदि $f'(c)=0$ तथा $f''(c)<0$

(ii) बिन्दु $x=c$ पर फलन $f(x)$ का निम्निष्ठ मान विद्यमान होगा यदि $f'(c)=0$ तथा $f''(c)>0$

टिप्पणी: यदि बिन्दु $x=c$ पर फलन $f(x)$ के लिए $f'(c)=0, f''(c)=0$ परन्तु $f'''(c)\neq 0$ तब यह बिन्दु, नति परिवर्तन बिन्दु कहलाता है।

8.11 फलन के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ के गुणधर्म (Properties of maxima and minima of a function)

यदि $f(x)$ संतत फलन है और उसका रेखा चित्र खींच सके तो हम आसानी से निम्नलिखित गुणधर्म देख सकते हैः

(i) फलन $f(x)$ के दो समान मानों के मध्य कम से कम एक उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान अवश्य विद्यमान होता है।

(ii) उच्चिष्ठ व निम्निष्ठ मान एकान्तर क्रम में स्थित होते है।

(iii) जबकि x (अग्रसर होता हुआ) उस मान से गुजरता जब $f'(x)$ का चिह्न धन से ऋण होता है तब $f(x)$ उच्चिष्ठ बिन्दु से गुजरता है तथा जब $f'(x)$ का चिह्न ऋण से धन होता है तब $f(x)$ निम्निष्ठ बिन्दु से गुजरता है।

(iv) यदि किसी बिन्दु के दोनों ओर $f'(x)$ का चिह्न नहीं बदलता है तब यह बिन्दु नति परिवर्तन बिन्दु होता है।

(v) उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ बिन्दु पर $f'(x)=0$ होने के कारण, इस बिन्दु पर रेखा $x-$ अक्ष के समान्तर होती है।

8.12 उच्चिष्ठ एवम् निम्निष्ठ ज्ञात करने की क्रिया विधि (Working method to find maxima and minima)

1. सर्वप्रथम दिए गए फलन को $y=f(x)$ रूप में लिखते है तथा $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करते है।

2. समीकरण $\frac{dy}{dx}=0$ को हल करते है। माना इसके हल $x=a_1, a_2, \ldots$ है।

3. $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात करते है तथा प्रत्येक बिन्दु $x=a_1, a_2, \ldots$ पर इसका मान ज्ञात करते है।

4. यदि $x=a_r$ (जहाँ $r=1, 2, \ldots.$) पर $\frac{d^2y}{dx^2}<0$ तब $x=a_r$ पर फलन $f(x)$ का उच्चिष्ठ मान होगा।

5. यदि $x=a_r$ (जहाँ $r=1, 2, \ldots.$) पर $\frac{d^2y}{dx^2}>0$ तब $x=a_r$ पर फलन का निम्निष्ठ मान होगा। यदि $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ हो तब आगे अवकलन करते है।

6. यदि $x = a_r$ (जहाँ $r = 1, 2, ...$) पर $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ हो तो फलन का आगे अवकलज कर $\frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}$.......आदि ज्ञात करते है जब तक कि $x = a_r$ का मान शून्य हो।

(i) यदि अशून्य होने वाला अवकल गुणांक विषम कोटि जैसे $\frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^5y}{dx^5}$.... तब $x = a_r$ पर फलन न तो उच्चिष्ठ है और निम्निष्ठ है।

(ii) यदि अशून्य होने वाला अवकल गुणांक सम कोटि जैसे $\frac{d^4y}{dx^4}, \frac{d^6y}{dx^6}$.... तब वही स्थिति होगी जो $\frac{d^2y}{dx^2} \neq 0$ होने के साथ होती है।

8.13 स्तब्ध बिन्दु (Stationary point)

वे बिन्दु जिन पर फलन $f(x)$ की चर x के सापेक्ष परिवर्तन दर शून्य होती है अर्थात् $f'(x) = 0$, स्तब्ध बिन्दु कहलाते हैं।

टिप्पणी: प्रत्येक चरम बिन्दु स्तब्ध बिन्दु होता है परन्तु स्तब्ध बिन्दु का चरम बिन्दु होना आवश्यक नहीं है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-30. निम्नलिखित फलनों के उच्चतम तथा निम्नतम मान, यदि कोई हो तो, ज्ञात कीजिए

(a) $y = (2x-1)^2 + 3$ (b) $y = 9x^2 + 12x + 2$

(c) $y = -(x-1)^2 + 10$ (d) $y = x^3 + 1$

हल: (a) $(2x-1)^2$ का निम्नतम मान शून्य है अतः $(2x-1)^2 + 3$ का निम्नतम मान 3 होगा। जबकि स्पष्ट है कि इसका कोई उच्चतम मान नहीं होगा।

(b) $\because$
$$y = 9x^2 + 12x + 2$$
$$= (3x+2)^2 - 2$$

$\because$ $(3x+2)^2$ का निम्नतम मान शून्य होगा। अतः $(3x+2)^2 - 2$ का निम्नतम मान -2 है जो कि $3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$ पर प्राप्त होगा। स्पष्ट है कि $y = 9x^2 + 12x + 2$ का उच्चतम मान विद्यमान नहीं होगा।

(c) स्पष्ट है कि $-(x-1)^2$ का उच्चतम मान शून्य होगा अतः फलन $y = -(x-1)^2 + 10$ का अधिकतम मान 10 होगा। स्पष्ट है कि इसका कोई निम्नतम मान नहीं होगा।

(d) स्पष्ट है कि $x \to \infty$ पर $y \to \infty$
तथा $x \to -\infty$ पर $y \to -\infty$
अतः दिए गए फलन का न हो उच्चतम मान होगा व निम्नतम मान।

उदाहरण-31. निम्न फलनों के उच्चिष्ठ का निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए ।

(a) $x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 2$ (b) $(x-2)^6(x-3)^5$ (c) $(x-1)^2 e^x$

हल: (a) माना कि
$$y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 2$$

$\Rightarrow$
$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$$

तथा
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3 - 60x^2 + 30x$$

फलन के चरम बिन्दु के लिए, $\frac{dy}{dx}=0$

$\Rightarrow$ $5x^4-20x^3+15x^2=0$

$\Rightarrow$ $5x^2(x^2-4x+3)=0$

$\Rightarrow$ $5x^2(x-1)(x-3)=0$

$\Rightarrow$ $x=0,1,3$

अब $x=0$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}=0$

अतः $\frac{d^3y}{dx^3}=60x^2-120x+30$

$x=0$ पर $\frac{d^3y}{dx^3}=30\neq 0$

अतः $x=0$ पर फलन का कोई चरम मान नहीं है।

$x=1$ पर, $\frac{d^2y}{dx^2}=20(1)^3-60(1)^2+30(1)=-10<0$

अतः $x=1$ पर फलन का मान उच्चिष्ठ है तथा उच्चिष्ठ मान

$=(1)^5-5(1)^4+5(1)^3-2=-1$

इसी प्रकार $x=3$ पर, $\frac{d^2y}{dx^2}=20(3)^3-60(3)^2+30(3)$

$=540-540+90=90>0$

अतः $x=3$ पर फलन का मान निम्निष्ठ है तथा निम्निष्ठ मान

$=(3)^5-5(3)^4+5(3)^3-2$

$=-29$

(b) माना कि $y=(x-2)^6(x-3)^5$

$\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}=6(x-2)^5(x-3)^5+(x-2)^6 5(x-3)^4$

$=(x-2)^5(x-3)^4\{6x-18+5x-10\}$

$=(x-2)^5(x-3)^4(11x-28)$

फलन के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ के लिए, $\frac{dy}{dx}=0$

$\Rightarrow$ $(x-2)^5(x-3)^4(11x-28)=0$

$\Rightarrow$ $x=2,3,28/11$

चूँकि बिन्दु $x=2$ पर $\frac{dy}{dx}$ का चिह्न धन से ऋण में परिवर्तित होता है।($\because$ जब $x<2$ तब $\frac{dy}{dx}>0$ तथा $x>2$ तब $\frac{dy}{dx}<0$)

अतः $x=2$ पर फलन का मान उच्चिष्ठ है तथा उच्चिष्ठ मान $=0$

$\because x=3$ पर $\frac{dy}{dx}$ के चिह्न में कोइ परिवर्तन नहीं होता है। ($\because$ जब $x<3$ तब $\frac{dy}{dx}>0$ तथा $x>3$ तब $\frac{dy}{dx}>0$)

अतः $x=3$ पर फलन का मान न तो उच्चिष्ठ है और न निम्निष्ठ।

पुनः $x=\frac{28}{11}$ पर $\frac{dy}{dx}$ का चिह्न ऋण से धन में परिवर्तित होता है। ($\because$ जब $x<\frac{28}{11}$ तब $\frac{dy}{dx}<0$ तथा $x>\frac{28}{11}$ तब $\frac{dy}{dx}>0$)

अतः $x=\frac{28}{11}$ पर फलन का निम्निष्ठ मान है तथा निम्निष्ठ मान $=\left(\frac{28}{11}-2\right)^6\left(\frac{28}{11}-3\right)^5=-\frac{6^5.5^5}{11^{11}}$

(c) माना कि $$y=(x-1)^2e^x$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx}=\{(x-1)^2+2(x-1)\}e^x$$

तथा $$\frac{d^2y}{dx^2}=\{(x-1)^2+4(x-1)+2\}e^x$$

फलन के चरम मान के लिए $$\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \qquad \{(x-1)^2+2(x-1)\}e^x=0$$

$$\Rightarrow \qquad (x-1)^2+2(x-1)=0 \qquad \{\because e^x\neq 0\}$$

$$\Rightarrow \qquad x^2-1=0$$

$$\Rightarrow \qquad x=\pm 1$$

अब $x=1$ पर, $$\frac{d^2y}{dx^2}=\{0+4(0)+2\}e^1=2e>0$$

अतः $x=1$ पर फलन का निम्निष्ठ मान है तथा

निम्निष्ठ मान $=(1-1)^2e^1=0$

पुनः $x=-1$ पर, $$\frac{d^2y}{dx^2}=\{(-1-1)^2+4(-1-1)+2\}e^{-1}$$

$$=\{4-8+2\}e^{-1}=\frac{-2}{e}<0$$

अतः $x=-1$ फलन का मान उच्चिष्ठ है तथा उच्चिष्ठ मान $=(-1-1)^2e^{-1}=\frac{4}{e}$.

उदाहरण-32. फलन $(1/x)^x$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए

हलः माना कि $$y=(1/x)^x$$

$$\Rightarrow \qquad \log y=x\log\frac{1}{x}$$

$$=-x\log x=z \text{ (माना)}$$

फलन y का मान अधिकतम या न्यूनतम होगा यदि $\log y$ अर्थात् z का मान अधिकतम या न्यूनतम है।

अब, $$\frac{dz}{dx} = -x.\frac{1}{x} - 1.\log x = -(1+\log x)$$

तथा $$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{1}{x}$$

अतः z अर्थात् y के अधिकतम या न्यूनतम मान के लिए

$$\frac{dz}{dx} = 0 \Rightarrow 1 + \log x = 0$$

$\Rightarrow$ $$\log x = -1$$

$\Rightarrow$ $$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$x = 1/e$ पर $$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{1}{1/e} = -e < 0$$

अतः $x = 1/e$ पर y का मान अधिकतम होगा तथा

अधिकतम मान $= \left[\frac{1}{1/e}\right]^{1/e} = e^{1/e}$.

उदाहरण-33. किसी बिन्दु $(0, a)$ से परवलय $x^2 = y$ की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए, जहाँ $a \in [0, 5]$.

हल: माना परवलय पर कोई बिन्दु (h, k) है तथा माना कि $(0, a)$ तथा (h, k) के मध्य की दूरी D है तब

$$D = \sqrt{(h-o)^2 + (k-c)^2} = \sqrt{h^2 + (k-c)^2} \qquad (1)$$

$\because$ बिन्दु (h, k) परवलय $x^2 = y$ पर स्थित है अतः $h^2 = k$

इसका प्रयोग समीकरण (1) में करने पर

$$D = \sqrt{k + (k-c)^2}$$

$\Rightarrow$ $$D(k) = \sqrt{k + (k-c)^2}$$

$\Rightarrow$ $$D'(k) = \frac{\{1 + 2(k-c)\}}{2\sqrt{k + (k-c)^2}} \qquad (2)$$

अब $$D'(k) = 0 \Rightarrow k = \frac{2c-1}{2}$$

जब $k < \frac{2c-1}{2}$ तब $2(k-c)+1 < 0$

$\Rightarrow$ $D'(k) < 0$ [समीकरण (2) से]

तथा जब $k > \frac{2c-1}{2}$ तब $2(k-c)+1 < 0$

$\Rightarrow$ $D'(k) > 0$ [समीकरण (4) से]

अतः $k = \frac{2c-1}{2}$ पर D निम्नतम है तथा अभीष्ट न्यूनतम दूरी

$$= \sqrt{\frac{2c-1}{2} + \left(\frac{2c-1}{2} - c\right)^2} = \frac{\sqrt{4c-1}}{2}.$$

उदाहरण-34. निम्नलिखित फलनों के निरपेक्ष उच्चतम तथा निम्नतम मान उनके सम्मुख दिए अन्तरालों में ज्ञात कीजिए

(a) $f(x)=x^3,\quad x\in[-2,2]$

(b) $f(x)=4x-\frac{1}{2}x^2,\quad x\in\left[-2,9/2\right]$

(c) $f(x)=(x-1)^2+3,\quad x\in[-3,1]$

(d) $f(x)=\sin x+\cos x,\quad x\in[0,\pi]$

हल: (a) दिया है $\quad f(x)=x^3,\, x\in[-2,2]$

$\Rightarrow\quad f'(x)=3x^2$

$\therefore\quad f'(x)=0\Rightarrow 3x^2=0\Rightarrow x=0\Rightarrow f(0)=0$

अब $f(-2)=(-2)^3=-8$; $f(0)=(0)^3=0$ तथा $f(2)=(2)^3=8$

उपर्युक्त से फलन $f(x)$ का निरपेक्ष उच्चतम मान 8 है जो कि वह $x=2$ पर प्राप्त करता है तथा निरपेक्ष निम्नतम मान -8 है जो कि वह $x=-2$ पर प्राप्त करता है।

(b) दिया है $\quad f(x)=4x-\frac{x^2}{2}$

$\Rightarrow\quad f'(x)=4-\frac{2x}{2}=4-x$

$f(x)$ के चरम मान के लिए, $\quad f'(x)=0$

$\Rightarrow\quad 4-x=0$

$\Rightarrow\quad x=4$

अतः बिन्दु -2, 4 तथा $9/2$ है जिन पर फलन के मान को ज्ञात करते है

$\because$ दिया फलन $f(x)=4x-\frac{x^2}{2}$ है, अतः $f(-2)=4(-2)-\frac{(-2)^2}{2}=-10;\quad f(4)=4(4)-\frac{(4)^2}{2}=8$

तथा $f(9/2)=4(9/2)-\frac{(9/2)^2}{2}=-9/4$

अतः दिये अन्तराल में फलन का निरपेक्ष उच्चतम मान$=8$ तथा निम्नतम मान$=-10$

(c) दिया फलन है $f(x)=(x-1)^2+3,\, x\in[-3,1]$

$\Rightarrow\quad f'(x)=2(x-1)$

$f(x)$ के चरम मान के लिए $\quad f'(x)=0$

$\Rightarrow\quad 2(x-1)=0$

$\Rightarrow\quad x=1$

अतः $x=1,-3,0$ पर $f(x)$ के मान निम्न होंगे-

$f(1)=(1-1)^2+3=0+3=3$; $f(-3)=(-3-1)^2+3=16+3=19$ तथा $f(0)=(0-1)^2+3=1+3=4$

अतः दिए गए अन्तराल में फलन का निरपेक्ष उच्चतम मान 19 है जो कि बिन्दु $x=-3$ पर प्राप्त करता है तथा निरपेक्ष निम्नतम मान 3 है जो कि बिन्दु $x=1$ पर प्राप्त होता है।

(d) दिया फलन है $f(x)=\sin x+\cos x,\, x\in[0,\pi]$

$\Rightarrow\quad f'(x)=\cos x-\sin x$

$f(x)$ के अधिकतम तथा निम्नतम मान के लिए, $f'(x)=0$

$\Rightarrow \quad \cos x - \sin x = 0$

$\Rightarrow \quad \sin x = \cos x$

$\Rightarrow \quad \tan x = 1$

$\Rightarrow \quad x = \pi/4$

अब $\quad f(0) = \sin 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

तथा $\quad f(\pi) = \sin\pi + \cos\pi = 0 + (-1) = -1$

अतः दिए गए अन्तराल में $f(x)$ के उच्चतम व निम्नतम मान क्रमशः $\sqrt{2}$ तथा -1 है।

उदाहरण-35. ऐसी दो धनात्मक संख्याएँ x तथा y ज्ञात कीजिए जो इस प्रकार हैं कि

(a) इनका योग 60 तथा xy^3 अधिकतम है। (b) इनका योग 16 तथा x^3+y^3 निम्नतम है।

हल: (a) माना कि $p = xy^3$

दिया है कि $x + y = 60 \Rightarrow x = 60 - y$

$\therefore \quad p = (60-y)y^3 = 60y^3 - y^4$

$\Rightarrow \quad \frac{dp}{dt} = 180y^2 - 4y^3$

तथा $\quad \frac{d^2p}{dy^2} = 360y - 12y^2$

p के चरम मान के लिए, $\quad \frac{dp}{dy} = 0$

$\Rightarrow \quad 180y^2 - 4y^3 = 0$

$\Rightarrow \quad 4y^2(45 - y) = 0$

$\Rightarrow \quad y = 45 \qquad \{\because y = 0$ सम्भव नहीं है, $y > 0\}$

अब $\quad \left(\frac{d^2p}{dy^2}\right)_{y=45} = 360(45) - 12(45)^2 = -8100 < 0$

अतः $y = 45$ पर P का मान उच्चतम है।

जब $y = 45$ तब $x = 60 - 45 = 15$

अतः संख्याएं $x = 15$ तथा $y = 45$ है।

(b) माना कि $\quad p = x^3 + y^3 \qquad (1)$

दिया है कि $\quad x + y = 16$

$\Rightarrow \quad y = 16 - x \qquad (2)$

समीकरण (1) से

$$p = x^3 + (16-x)^3$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dp}{dx} = 3x^2 + 3(16-x)^2(-1)$$

$$= 3x^2 - 3(256 - 32x + x^2)$$

$$= 3(32x - 256) \qquad (3)$$

अब $$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow 3(32x-256) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{256}{32} = 8$$

समीकरण (3) से $\dfrac{d^2p}{dx^2} = 96 > 0$

अतः $x = 8$ पर p निम्नतम है।

फलनः अभीष्ट धनात्मक संख्याएं $x = 8, y = 16 - 8 = 8$ है।

प्रश्नमाला 8.5

1. निम्नमलिखित फलनों के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए

   (a) $2x^3 - 15x^2 + 36x + 10$ (b) $(x-1)(x-2)(x-3)$

   (c) $\sin x + \cos 2x$ (d) $x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$

2. निम्नलिखित फलनों के अधिकतम तथा निम्नतम मान, यदि कोई हो तो, ज्ञात कीजिए

   (a) $-|x+1|+3$ (b) $|x+2|-1$ (c) $|\sin 4x + 3|$ (d) $\sin 2x + 5$

3. निम्नलिखित फलनों के दिये गए अन्तराल में, अधिकतम तथा निम्नतम मान ज्ञात कीजिए

   (a) $2x^3 - 24x + 107, \quad x \in [1, 3]$ (b) $3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 6x + 1, \quad x \in [0, 2]$

   (c) $x + \sin 2x, \quad x \in [0, 2\pi]$ (d) $x^3 - 18x^2 + 96x, \quad x \in [0, 9]$

4. निम्न फलनों के चरम मान ज्ञात कीजिए

   (a) $\sin x . \cos 2x$ (b) $a \sec x + b \operatorname{cosec} x, o < a < b$

   (c) $x^{1/x}, x > 0$ (d) $\dfrac{1}{x}.\log x, x \in (0, \infty)$

5. सिद्ध कीजिए कि फलन $\dfrac{x}{1 + x\tan x}$ का मान $x = \cos x$ पर उच्चिष्ठ है।

6. सिद्ध कीजिए फलन $\sin^2 x.(1+\cos x)$ का मान $\cos x = 1/3$ पर उच्चिष्ठ है।

7. सिद्ध कीजिए कि फलन $y = \sin^p \theta . \cos^q \theta$ का मान $\tan\theta = \sqrt{p/q}$ पर उच्चिष्ठ है।

8.14 उच्चिष्ठ एवम् निम्निष्ठ के अनुप्रयोग (Applications of maxima and minima)

निम्नलिखित उदाहरणों की सहायता से हम अवकलनों का अनुप्रयोग अन्य शाखाओं यथा

(i) समतल ज्यामिती (Plane Geometry); (ii) ठोस ज्यामिती (Solid geometry); (iii) यांत्रिकी (Mechanics); (iv) वाणिज्य एवं अर्थशास्त्र (Commerce and Economics) इत्यादि में करेंगे।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-36. सिद्ध कीजिए कि एक वृत्त के अन्दर सभी आयतों में वर्ग का क्षेत्रफल अधिकतम होता है।

हलः चित्रानुसार, वृत्त के अन्दर $PQRS$ एक आयत है तथा वृत्त का केन्द्र O है तथा a त्रिज्या है।

माना कि $\quad PQ = 2x, QR = 2y$

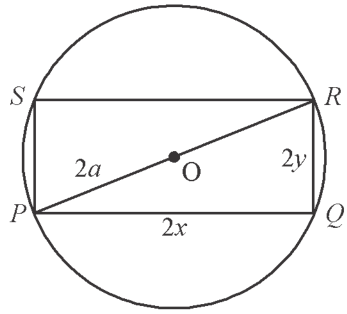
अतः समकोण ΔPQR से

$$PQ^2 + QR^2 = PR^2$$

$$\Rightarrow \quad (2x)^2 + (2y)^2 = (2a)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = a^2$$

$$\Rightarrow \quad y = \sqrt{a^2 - x^2} \qquad (1)$$



चित्र 8.06

माना आयत $PQRS$ का क्षेत्रफल A है तब

$$A = (2x)\left(2\sqrt{a^2 - x^2}\right) = 4x\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dA}{dx} = 4\left\{\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right\} = \frac{4(a^2 - 2x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad (2)$$

A के अधिकतम या निम्नतम मान के लिए, $\quad \frac{dA}{dx} = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{4(a^2 - 2x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad a^2 - 2x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

समीकरण (2) से

$$\frac{d^2A}{dx^2} = 4\left\{\frac{-4x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{x(a^2 - 2x^2)}{(a^2 - x^2)^{3/2}}\right\}$$

$x = a/\sqrt{2}$ पर, $\frac{d^2A}{dx^2} = -16 < 0$

अतः $x = a/\sqrt{2}$ पर A अधिकतम है।

$x = a/\sqrt{2}$, समीकरण (1) में रखने पर $y = a/\sqrt{2}$

अतः $x = y = a/\sqrt{2}$ फलतः क्षेत्रफल अधिकतम है जबकि $x = y$

$\Rightarrow 2x = 2y$ अतः आयत एक वर्ग है।

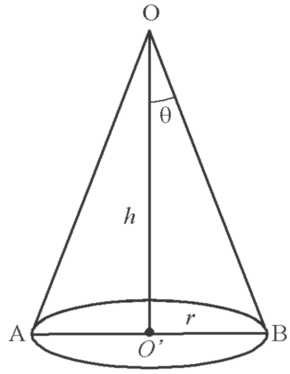
उदाहरण-37. सिद्ध कीजिए कि दी गई तिर्यक ऊचाँई और महत्तम आयतन वाले शंकु का अर्ध शीर्ष कोण $\tan^{-1}\sqrt{2}$ होता है।

हलः माना कि शंकु की तिर्यक ऊचाँई ℓ है तथा शंकु का अर्ध शीर्ष कोण θ है। समकोण $\Delta OO'B$

$OO' = \ell\cos\theta = h$ (शंकु की ऊचाँई)

$O'B = \ell\sin\theta = r$ (शंकु की त्रिज्या)

अतः शकुं का आयतन



चित्र 8.07

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3}\pi \ell^2 \sin^2\theta . \ell\cos\theta$$

$$= \frac{1}{3}\pi \ell^3 \sin^2\theta\cos\theta$$

$\therefore$ $$\frac{dV}{d\theta} = \frac{1}{3}\pi\ell^3\{\sin^2\theta(-\sin\theta) + 2\sin\theta\cos\theta\cos\theta\}$$

$$= \frac{1}{3}\pi\ell^3\left(2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta\right)$$

तथा $$\frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{1}{3}\pi\ell^3(2\cos\theta.\cos^2\theta - 4\sin\theta\cos\theta\sin\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{3}\pi\ell^3(2\cos^3\theta - 7\sin^2\theta\cos\theta)$$

महत्तम आयतन के लिए $\frac{dV}{d\theta} = 0$

$\Rightarrow$ $$\sin\theta(2\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$$

$\Rightarrow$ $$\sin\theta\{2(1-\sin^2\theta) - \sin^2\theta\} = 0$$

$\Rightarrow$ $$\sin\theta\{2 - 3\sin^2\theta\} = 0$$

$\Rightarrow$ $$\sin\theta = 0, \sqrt{2/3}, -\sqrt{2/3}$$

अब $\sin\theta = \sqrt{2/3}$ या $\cos\theta = 1/\sqrt{3}$ तब

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{1}{3}\pi\ell^3\left\{2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - 7\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 . \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\pi\ell^3\left\{\frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{14}{3\sqrt{3}}\right\} = -\frac{1}{3}\pi\ell^3\frac{12}{3\sqrt{3}} < 0$$

अतः $\sin\theta = \sqrt{2/3}$ के लिए शंकु का आयतन, महत्तम होगा।

इस स्थिति में $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{2/3}}{\sqrt{1/3}} = \sqrt{2}$

$\therefore$ अर्धशीर्ष कोण $\theta = \tan^{-1}(\sqrt{2})$.

उदाहरण-38. एक स्थिर आयतन वाले खुले टैंक का आधार वर्गाकार है। यदि अन्तः पृष्ठ न्यूनतम हो, तब टैंक की गहराई तथा लम्बाई का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि टैंक की गहराई h तथा लम्बाई ℓ है तब

टैंक का आयतन $$V = \ell^2 h \qquad (1)$$

टैंक का अन्तः पृष्ठ का क्षेत्रफल $S = \ell^2 + 4\ell h$

$\Rightarrow$ $S = \ell^2 + 4\ell\left(\frac{V}{\ell^2}\right)$ [समीकरण (1) से]

$\Rightarrow$ $S = \ell^2 + 4\frac{V}{\ell}$

$\Rightarrow$ $\frac{dS}{d\ell} = 2\ell - \frac{4V}{\ell^2}$ तथा $\frac{d^2S}{d\ell^2} = 2 + \frac{2.4V}{\ell^3}$

न्यूनतम पृष्ठ के लिए, $\frac{dS}{d\ell} = 0$

$\Rightarrow$ $2\ell - \frac{4V}{\ell^2} = 0$

$\Rightarrow$ $\ell^3 = 2V$

$\Rightarrow$ $\ell = (2V)^{1/3}$

जब $\ell = (2V)^{1/3}$ तब $\frac{d^2S}{d\ell^2} = 2 + \frac{8V}{(2V)} > 0$

अतः अन्तः पृष्ठ न्यूनतम होगा।

समीकरण (1) से

$$h = \frac{V}{\ell^2} = \frac{1}{2}\frac{2V}{(2V)^{2/3}} = \frac{1}{2}(2V)^{1/3} = \frac{1}{2}.\ell$$

$\Rightarrow$ $\frac{h}{\ell} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ टैंक की गहराई : टैंक की लम्बाई $= 1:2$

उदाहरण-39. एक निर्माता $\left(5 - \frac{x}{100}\right)$ रुपये प्रति इकाई की दर से x इकाइयाँ बेच सकता है। x इकाइयों का उत्पाद मूल्य $\left(\frac{x}{5} + 500\right)$ रुपये है। इकाइयों की वह संख्या ज्ञात कीजिए जो निर्माता को अधिकतम लाभ अर्जित करने के लिए बेचनी चाहिए।

हलः माना x इकाइयों का विक्रय मूल्य S रुपये है तथा इनका उत्पाद मूल्य C है तब $S = \left(5 - \frac{x}{100}\right)x = 5x - \frac{x^2}{100}$

तथा $C = \frac{x}{5} + 500$

माना लाभ फलन p है तब

$$p = S - C$$

$$= 5x - \frac{x^2}{100} - \frac{x}{5} - 500$$

$$= \frac{24}{5}x - \frac{x^2}{100} - 500$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dp}{dx} = \frac{24}{5} - \frac{x}{50} \text{ तथा } \frac{d^2p}{dx^2} = -\frac{1}{50}$$

$$\therefore \qquad \frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{24}{5} - \frac{x}{50} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad x = 240$$

$$\text{तथा} \qquad \left(\frac{d^2p}{dx^2}\right)_{x=240} = -\frac{1}{50} < 0$$

अतः 240 इकाइयाँ बेचने पर, निर्माता अधिकतम लाभ अर्जित कर सकता है।

प्रश्नमाला 8.6

1. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त में बड़े से बड़ा त्रिभुज जो खीचा जा सकता है, वह समबाहु त्रिभुज होगा।
2. किसी वर्ग का परिमाप तथा वृत्त की परिधि का योग दिया हुआ है। सिद्ध किजिए कि उनके क्षेत्रफल का योग न्यूनतम होगा यदि वर्ग की भुजा, वृत्त के व्यास के बराबर है।
3. यदि एक गोले में एक शंकु बनाया जाता है तब सिद्ध कीजिए कि उसका आयतन महत्तम होगा यदि शंकु की ऊँचाई, गोले के व्यास की दो तिहाई हो।
4. किसी नदी में स्टीमर चलाने का प्रति घण्टे का खर्च, उसके वेग के घन का समानुपाती है। यदि जलधारा का वेग x किमी प्रति घण्टा हो तब सिद्ध कीजिए कि स्टीमर की जलधारा के विपरीत दिशा में चलने में उसकी अधिकतम मितव्ययी चाल $2/3\,x$ किमी प्रति घण्टा होगी।
5. यदि एक समकोण त्रिभुज के कर्ण तथा एक भुजा का योग दिया हुआ है। तब सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज का क्षेत्रफल अधिकतम होगा यदि इन भुजाओं के मध्य कोण $\pi/3$ है।
6. यदि किसी समबाहु त्रिभुज के अन्दर a त्रिज्या का वृत्त बनाया गया है तब सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज का न्यूनतम परिमाप $6\sqrt{3}a$ होगा।
7. यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के किसी बिन्दु p पर अभिलम्ब खींचा गया है तब सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त के केन्द्र से अभिलम्ब की अधिकतम दूरी $a-b$ है।

विविध प्रश्नमाला—8

1. यदि बेलन की त्रिज्या r तथा ऊचाँई h है तब त्रिज्या के सापेक्ष पृष्ठीय क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।
2. फलन $y = x^2 + 21$ के लिए x तथा y के मान ज्ञात कीजिए जबकि y में परिवर्तन की दर, x में परिवर्तन की दर का तीन गुना है।
3. सिद्ध कीजिए कि चरघातांकी फलन e^x वर्धमान फलन है।
4. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \log(\sin x)$, अन्तराल $(0, \pi/2)$ में वर्धमान तथा अन्तराल $(\pi/2, \pi)$ में ह्रासमान है।
5. यदि वक्र $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{a}$ के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा OX तथा OY अक्षों को क्रमशः P और Q बिन्दुओं पर काटे, तब सिद्ध कीजिए कि $OP + OQ = a$, जहाँ O मूल बिन्दु है।
6. वक्र $y = \cos(x+y)$, $x \in [-2\pi, 2\pi]$ की स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $x + 2y = 0$ के समान्तर है।
7. एक घनाकर सन्दूक के आयतन की गणना में प्रतिशत त्रुटि ज्ञात कीजिए, जबकि घन की कोर की लम्बाई में त्रुटि 5 प्रतिशत होती है।
8. एक वृत्ताकार धातु की चद्दर का ताप से इस प्रकार विस्तार होता है कि इसकी त्रिज्या में 2 प्रतिशत की वृद्धि होती है। इसके क्षेत्रफल में निकटतम वृद्धि ज्ञात कीजिए जबकि ताप से पूर्व, चद्दर की त्रिज्या 10 सेमी है।
9. सिद्ध कीजिए कि गोले के अन्तर्गत, सबसे बडे शंकु का आयतन, गोले के आयतन का $8/27$ होता है।
10. सिद्ध कीजिए कि दिए हुए पृष्ठ तथा महत्तम आयतन वाले लम्ब वृत्तीय शंकु का अर्धशीर्ष कोण $\sin^{-1}(1/3)$ होता है।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. यदि फलन $f(x)$ अवकलनीय है तब किसी बिन्दु $x=c$ पर चरम मान के लिए आवश्यक है कि $f'(c)=0$
2. बिन्दु c पर फलन $f(x)$ का मान उच्चिष्ठ होगा यदि $f'(c)=0$ तथा $f''(c)<0$
3. बिन्दु $x=c$ पर फलन $f(x)$ का मान निम्नष्ठ होगा यदि $f'(c)=0$ तथा $f''(c)>0$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 8.1

1. 6π सेमी^{2}/सै; 8π सेमी^{2}/सै
2. $(1, 5/3), (-1, 1/3)$
3. –3/10 रेडियन/सैकण्ड
4. 900 सेमी^{3}/सैकण्ड
5. $1/\pi$ सेमी/सैकण्ड
6. $\frac{27}{8}\pi(2x+1)^2$
7. 30.02 (लगभग)
8. 35.2 सेमी^{3}/सैकण्ड, 20π सेमी^{3}/सैकण्ड
9. $\frac{1}{48}\pi$ सेमी/सैकण्ड
10. 126

प्रश्नमाला 8.2

11. $(-\infty, -2)\cup(3, \infty)$ में वर्धमान तथा $(-2, 3)$ में ह्रासमान
12. $(-1, 0)\cup(1, \infty)$ में वर्धमान तथा $(-\infty, -1)\cup(0, 1)$ में ह्रासमान
13. $(-\infty, -1)\cup(0, 1)$ में वर्धमान तथा $(1, 2)$ में ह्रासमान
14. $(-1, 2)$ में वर्धमान तथा $(-\infty, -1)\cup(2, \infty)$ में ह्रासमान
15. –2

प्रश्नमाला 8.3

1. 11
2. –1/64
3. (3, 2)
4. $y-2x+2=0, y-2x+10=0$
5. (i) $(0, 5)$ तथा $(0, -5)$; (ii) $(2, 0)$ तथा $(-2, 0)$
6. $y=0$
7. $24x+12\sqrt{3}y=8\pi+9\sqrt{3}$
8.

	स्पर्श रेखा	अभिलम्ब
(a)	$10x-y-8=0$	$x+10y-223=0$
(b)	$y-x-a=0$	$y+x-3a=0$
(c)	$x+yt^2=2at$	$xt^3-yt=at^4-a$
(d)	$y-mx=\frac{a}{m}$	$my+x=2a+\frac{a}{m^2}$
(e)	$\frac{x}{a}\sec\theta-\frac{y}{b}\tan\theta=1$	$ax\cos\theta+by\cot\theta=a^2+b^2$
(f)	$x-y-3=0$	$x+y+1=0$
(g)	$x-y+a=0$	$x+y-3a=0$
(h)	$2x-2y-\pi=0$	$2x+2y-\pi-4=0$

प्रश्नमाला 8.4

1. 0.2083
2. 0.9999
3. 0.0608
4. 0.2495
5. 1.968
6. 20.025
7. 7.904
8. 2.00187
9. 0.8
10. 1.004343
11. 2.3046
12. 0.6
14. 80π सेमी^{3}

प्रश्नमाला 8.5

1.(a) $x=2$ पर उच्चिष्ठ तथा $x=3$ निम्निष्ठ (b) $x=\frac{6-\sqrt{3}}{3}$ पर उच्चिष्ठ तथा $x=\frac{6+\sqrt{3}}{3}$ निम्निष्ठ

(c) $x=\sin^{-1}1/4, \pi-\sin^{-1}1/4$ पर उच्चिष्ठ तथा $x=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ निम्निष्ठ (d) $x=1$ पर उच्चिष्ठ तथा $x=3$ परनिम्निष्ठ

2.(a) अधिकतम मान $=3$, निम्नतम मान विद्यमान नहीं ; (b) निम्नतम मान$=-1$, अधिकतम मान विद्यमान नहीं ;
(c) अधिकतम मान$=4$, निम्नतम मान$=2$; (d) अधिकतम मान$=6$, निम्नतम मान$=4$

3.(a) $x=2$ पर निम्नतम मान$=75, x=4$ पर अधिकतम मान$=160$

(b) $x=0$ पर निम्नतम मान$=1$, $x=2$ पर अधिकतम मान$=21$

(c) $x=0$ पर निम्नतम मान$=0$, $x=2\pi$ पर अधिकतम मान$=2\pi$

(d) $x=0$ पर निम्नतम मान$=0$, $x=4$ पर अधिकतम मान$=160$

4.(a) उच्चिष्ठ मान $=1, \frac{2}{3\sqrt{6}}$, निम्निष्ठ मान $=-1, \frac{-2}{3\sqrt{6}}$

(b) उच्चिष्ठ मान $=(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$, निम्निष्ठ मान $=-(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$

(c) उच्चिष्ठ मान $=e^{1/e}$

(d) उच्चिष्ठ मान $=1/e$

विविध प्रश्नमाला—8

1. $4\pi r+2\pi h$
2. $x=\pm 1, \; y=22, 2$
6. $2x+4y+3\pi=0$ तथा $2x+4y-\pi=0$
7. 15 प्रतिशत
8. 4π सेमी^{2}

9

समाकलन
(Integration)

9.01 प्रस्तावना (Introduction)

ऐतिहासिक क्रम में समाकलन गणित की खोज अवकलन गणित से पूर्व हुई थी। समाकलन गणित के अध्ययन की शुरूआत समतल क्षेत्रों के क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिऐ ऐसी अनन्त श्रेणी के योग करने में हुई जिसका प्रत्येक पद शून्य की ओर अग्रसर था। संकलन (Summation) प्रक्रिया के कारण ही इस विषय का नाम समाकलन गणित पड़ा।

समतलीय वक्रों के क्षेत्रफल, ठोसों के आयतन, गुरुत्व केन्द्र आदि ज्ञात करने हेतु व्यापक विधियों की आवश्यकता के फलस्वरूप समाकलन गणित का उद्‌विकास हुआ।

अवकलन गणित में हम दिये हुए फलनों के अवकल गुणांक ज्ञात करते है जबकि समाकलन गणित में हम वह फलन ज्ञात करते हैं जिसका अवकल गुणांक दिया होता है। स्पष्टतः समाकलन अवकलन की प्रतिलोम (Inverse) प्रक्रिया है तथा इसीलिये इसे प्रतिअवकलज (Antiderivative) या पूर्वग (Primitive) भी कहते है।

9.02 फलन का समाकलन (Integration of a function)

यदि दिया गया फलन $f(x)$ है और इसका समाकलन $F(x)$ है तो परिभाषानुसार

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x) \tag{1}$$

तो $F(x)$ दिये गये फलन $f(x)$ का x के सापेक्ष समाकलन कहलाता है। जिसे संकेत रूप में निम्न प्रकार प्रकट करते हैं

$$\int f(x)dx = F(x) \tag{2}$$

जहाँ संकेत $\int$ का प्रयोग समाकलन हेतु व dx का तात्पर्य चर x के सापेक्ष समाकलन करना है। यहाँ फलन $f(x)$ जिसका समाकलन करना है को समाकल्य (Integrand) कहते हैं तथा $F(x)$ को समाकल (Integral) कहते हैं।

चूंकि समाकलन व अवकलन परस्पर प्रतिलोम प्रक्रम है अतः समीकरण (2) के दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = \frac{d}{dx}[F(x)]$$

या
$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x) \qquad \text{[समीकरण (1) से]}$$

अतः एक फलन $f(x)$ दिया है तो उसका समाकलन कर प्राप्त फलन का पुनः अवकलन करने पर दिया गया फलन $f(x)$ प्राप्त हो जाता है।

इसी प्रकार दिये गये फलन का अवकलन कर प्राप्त फलन का पुनः समाकलन करने पर भी दिया गया फलन प्राप्त हो जाता है।

उदाहरणार्थः $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ अतः $\int \cos x\,dx = \sin x$

$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$ अतः $\int 2x dx = x^2$

टिप्पणीः अगर $\int f(x)dx = F(x)$ हो तो $f(x)$ को समाकल्य (Integrand), $\int f(x)dx$ को समाकल (Integral) तथा समाकल का मान ज्ञात करने की प्रक्रिया समाकलन (Integration) कहलाती है।

9.03 अनिश्चित समाकल तथा समाकल अचरांक (Indefinite integral and constant of integration)

हम जानते है कि किसी अचर का अवकल गुणांक शून्य होता है अर्थात $\frac{d}{dx}(c)=0,$ जहाँ c कोई अचर है।

माना $$\frac{d}{dx}[F(x)]=f(x)$$

तो $$\frac{d}{dx}[F(x)+c]=\frac{d}{dx}[F(x)]+\frac{d}{dx}(c)$$

$$=f(x)+0$$

अतः $$\frac{d}{dx}[F(x)+c]=f(x)$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष समाकलन करने पर

$$\int\left[\frac{d}{dx}\{F(x)+c\}\right]dx=\int f(x)dx$$

या $$\int f(x)dx=F(x)+c, \qquad \text{(परिभाषानुसार)}$$

जहाँ c एक स्वेच्छ अचर (arbitrary constant) है जिसे समाकलन का अचरांक कहते हैं। यह चर t से स्वतंत्र होता है। किसी सतत फलन $f(x)$ का समाकल (प्रतिअवकलज) का मान अद्वितीय (unique) नहीं होता है बल्कि अनन्त होते हैं। यदि उनमें से एक समाकल $F(x)$ है तो अन्य $F(x)+c$ होंगे, जहाँ c के भिन्न–2 मान देने पर फलन के भिन्न–2 समाकल प्राप्त होते हैं जिनमें केवल अचर पद का ही अन्तर होता है।

उदाहरणार्थः $$\frac{d}{dx}(x^2+1)=2x\Rightarrow\int 2xdx=x^2+1$$

$$\frac{d}{dx}(x^2+4)=2x\Rightarrow\int 2xdx=x^2+4$$

किन्तु (x^2+1) व (x^2+4) समान नहीं है इनमें एक अचर पद का अंतर है।

टिप्पणीः अनिश्चित समाकलन की प्रत्येक समस्या में समाकलन का अचरांक, समाकलन की प्रक्रिया के पूर्ण होने पर जोड़ना चाहिये।

9.04 समाकलन के प्रमेय (Theorems on Integration)

प्रमेय 1: किसी अचर k हेतु, $$\int \kappa f(x)\,dx=\kappa\int f(x)dx$$

अर्थात् ''एक अचर व एक चर फलन के गुणनफल का समाकलन उस अचर व चर फलन के समाकल के गुणनफल के बराबर होता है।''

प्रमाणः अवकलन के प्रमेय से हम जानते हैं कि

$$\frac{d}{dx}\left[k\int f(x)dx\right]=k\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=k\,f(x) \qquad \text{[परिभाषा से]}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$$\int\frac{d}{dx}\left[k\int f(x)dx\right]dx=\int k\,f(x)dx$$

या $$\int k\,f(x)dx=k\int f(x)\,dx$$

प्रमेय 2: $$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\, dx = \int f_1(x)\, dx \pm \int f_2(x) dx$$

अर्थात् "दो चर फलनों के योग या अन्तर का समाकल उनके समाकलों के योग या अन्तर के बराबर होता है।"

प्रमाण: माना $$\int f_1(x) dx = F_1(x) \quad \text{तथा} \quad \int f_2(x) dx = F_2(x)$$

$$\frac{d}{dx}[F_1(x)] = f_1(x) \quad \text{तथा} \quad \frac{d}{dx}[F_2(x)] = f_2(x)$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}[F_1(x) \pm F_2(x)] = \frac{d}{dx}[F_1(x)] \pm \frac{d}{dx}[F_2(x)]$$

$$= f_1(x) \pm f_2(x)$$

दोनो पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int \frac{d}{dx}[F_1(x) \pm F_2(x)] dx = \int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx$$

या $$\int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = F_1(x) \pm F_2(x)$$

$$= \int f_1(x)\, dx \pm \int f_2(x)\, dx$$

यह नियम दो से अधिक पदों के योग पर भी लागू हो सकता है परन्तु अनन्त पदों के योग पर लागू होना आवश्यक नहीं है।

व्यापकीकरण (Generalization)

$$\int [k_1 f_1(x) \pm k_2 f_2(x)]\, dx = \int k_1 f_1(x) dx \pm \int k_2 f_2(x) dx$$

$$= k_1 \int f_1(x) dx \pm k_2 \int f_2(x) dx$$

9.05 समाकलन के मानक सूत्र (Standard formula of integration)

हम बहुत से मानक फलनों के अवकलज जानते हैं जिनसे हम उनके संगत समाकल सूत्र लिख सकते है जो विभिन्न फलनों के समाकलन में मानक सूत्रों के रूप में प्रयोग किये जाते है।

उदाहरणार्थ: $$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} (n \neq o)$$

$$\Rightarrow \quad \int nx^{n-1} dx = x^n + c$$

n को $(n+1)$ से प्रतिस्थापित करने पर

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c (n \neq -1)$$

इसी प्रकार निम्न सूत्र स्थापित किये जा सकते हैं

	अवकलन के सूत्र		**संगत समाकल सूत्र**
1.	$\frac{d}{dx}(c) = 0$	$\Rightarrow$	$\int 0 \cdot dx = c$
2.	$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}, \quad n \neq 0$	$\Rightarrow$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$
3.	$\frac{d}{dx}(\log\|x\|) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$	$\Rightarrow$	$\int \frac{1}{x} dx = \log\|x\| + c, \quad x \neq 0$

4. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \quad \Rightarrow \quad \int e^x dx = e^x + c$

5. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log_e a \quad \Rightarrow \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c$

6. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad \int \cos x dx = \sin x + c$

7. $\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad \int \sin x dx = -\cos x + c$

8. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \quad \Rightarrow \quad \int \sec^2 x dx = \tan x + c$

9. $\frac{d}{dx}(-\cot x) = \operatorname{cosec}^2 x \quad \Rightarrow \quad \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + c$

10. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x \quad \Rightarrow \quad \int \sec x \tan x dx = \sec x + c$

11. $\frac{d}{dx}(-\operatorname{cosec} x) = \operatorname{cosec} x \cot x \quad \Rightarrow \quad \int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x + c$

12. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (|x|<1) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$

13. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, (|x|<1) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \cos^{-1} x + c$

14. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$

15. $\frac{d}{dx}(-\cot^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = -\cot^{-1} x + c$

16. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$

17. $\frac{d}{dx}(-\operatorname{cosec}^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = -\operatorname{cosec}^{-1} x + c$

18. $\frac{d}{dx}|x| = \frac{|x|}{x}, (x \neq 0) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{|x|}{x} dx = |x| + c, \quad x \neq 0$

विशेषतः $\frac{d}{dx}(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \int 1.dx = x + c$

टिप्पणी: (a) $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$ (b) $\int \frac{d}{dx} f(x)dx = f(x) + c$

अर्थात् किसी फलन के समाकल के अवकलज तथा अवकलज के समाकल में समाकल अचरांक का अन्तर होता है।

टिप्पणी:

(1) सूत्र 12 व 13 से यह निष्कर्ष नहीं निकालना चाहिये कि $\sin^{-1} x = -\cos^{-1} x$ बल्कि ये केवल अचर पद से भिन्न होते है क्योंकि हम जानते हैं कि $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2$

(2) सामान्यतः समाकलन करते समय जिस अन्तराल में फलन परिभाषित है उस अन्तराल को नहीं लिखते है। विशेष प्रश्न के संदर्भ में हल करते समय अन्तराल का ध्यान रखा जाना चाहिये।

9.06 अवकलन व समाकलन की तुलना (Between differentiation and integration)

(1) दोनों संक्रियाएं फलनों पर होती है तथा प्रत्येक का परिणाम एक फलन होता है।

(2) दोनों संक्रियाएं रैखिक हैं।

(3) प्रत्येक फलन अवकलनीय या समाकलनीय होना आवश्यक नहीं है।

(4) प्रत्येक फलन का अवकलज (यदि इसका अस्तित्व हो) अद्वितीय होता है परन्तु किसी फलन का समाकल (यदि इसका अस्तित्व है) अद्वितीय नहीं होता है।

(5) किसी फलन के अवकलज का मान एक बिन्दु पर होता है जबकि फलन के समाकल का मान परिभाषित अन्तराल पर होता है।

(6) किसी फलन के अवकलज का ज्यामितीय अर्थ यह है कि यह वक्र के किसी बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा की प्रवणता होती है जबकि किसी फलन के समाकलन का ज्यामितीय अर्थ यह है कि यह किसी क्षेत्र के क्षेत्रफल (area of some region) के बराबर होता है।

(7) अवकलज का उपयोग कण के वेग, त्वरण आदि भौतिक राशियों को ज्ञात करने में जबकि समाकल का उपयोग द्रव्यमान केन्द्र, संवेग जैसी भौतिक राशियाँ ज्ञात करने मे किया जाता है।

(8) अवकलज व समाकलन एक दूसरे की व्युत्क्रम प्रक्रियाएं है।

9.07 समाकलन की विधियाँ

समाकलन ज्ञात करने के लिए मुख्यतः निम्न विधियाँ प्रयोग में लायी जाती है।

(I) मानक सूत्रों के प्रयोग द्वारा

(II) प्रतिस्थापन द्वारा

(III) आंशिक भिन्नों में वियोजन द्वारा

(IV) खण्डशः विधि द्वारा

I मानक सूत्रों के प्रयोग द्वारा समाकल (Integration by the use of standard formula): यहाँ उपर्युक्त दिये गये मानक सूत्रों का या फिर अन्य सूत्रों, त्रिकोणमितीय सूत्रों, इत्यादि का प्रयोग कर समाकल्य को मानक रूप में लाने के पश्चात् समाकलन किया जाता है जिन्हें निम्न उदाहरणों द्वारा समझा जा सकता है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. निम्नलिखित फलनों के x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

(i) x^6 (ii) $\sqrt{x}$ (iii) $\dfrac{x^2+1}{x^4}$ (iv) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

हल: हम जानते हैं कि $\int x^n dx = \dfrac{x^n+1}{n+1} + c, n \neq -1$

(i) माना $$I = \int x^6 dx = \frac{x^{6+1}}{6+1} + c = \frac{x^7}{7} + c$$

(ii) माना $$I = \int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{1/2+1}}{(1/2)+1} + c = \frac{x^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{3} x^{3/2} + c$$

(iii) माना $$I = \int \frac{x^2+1}{x^4} dx = \int \left(\frac{x^2}{x^4} + \frac{1}{x^4} \right) dx = \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x^4} dx$$

$$= \int x^{-2} dx + \int x^{-4} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + c$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-3}}{-3} + c = -\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + c$$

(iv) माना $$I = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-1/2} dx = \left[\frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1}\right] + c$$

$$= \frac{x^{1/2}}{(1/2)} + c = 2\sqrt{x} + c$$

उदाहरण-2. $\int \frac{ax^2 + bx + c}{x} dx$ ज्ञात कीजिए।

हल: $$\int \frac{ax^2 + bx + c}{x} dx = \int \left[\frac{ax^2}{x} + \frac{bx}{x} + \frac{c}{x}\right] dx$$

$$= \int \left(ax + b + \frac{c}{x}\right) dx$$

$$= \int ax\, dx + \int b\, dx + \int \frac{c}{x}\, dx$$

$$= a\int x\, dx + b\int dx + c\int \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \frac{ax^2}{2} + bx + c\log|x| + k$$

उदाहरण-3. $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: $$\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} dx$$

$$= \int \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)} dx$$

$$= \int (1-\cos x)\, dx = \int 1.dx - \int \cos x\, dx$$

$$= x - \sin x + c$$

उदाहरण-4. $\int \frac{x^2}{x+1} dx$ ज्ञात कीजिए

हल: $$\int \frac{x^2}{x+1} dx = \int \frac{(x^2-1)+1}{(x+1)} dx$$

$$= \int \left[\frac{x^2 - 1}{x + 1} + \frac{1}{x + 1} \right] dx$$

$$= \int \left[(x-1) + \frac{1}{(x+1)} \right] dx = \int \left(x - 1 + \frac{1}{1+x} \right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + \log|x+1| + c, (x \neq -1)$$

उदाहरण-5. $\int \sqrt{1 + \sin 2x}\, dx$ ज्ञात कीजिए।

हल: $\int \sqrt{1 + \sin 2x}\, dx = \int \sqrt{[(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2 \sin x \cos x]}\, dx$

$$= \int \sqrt{(\sin x + \cos x)^2}\, dx$$

$$= \int (\sin x + \cos x)\, dx$$

$$= -\cos x + \sin x + c$$

उदाहरण-6. $\int \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx$ ज्ञात कीजिए।

हल: $\int \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx = \int \frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x} dx$ $\quad [\because \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1]$

$$= \int \tan^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \tan x - x + c$$

उदाहरण-7. $\int \frac{1}{1 + \sin x} dx$ ज्ञात कीजिए।

हल: $\int \frac{1}{1 + \sin x} dx = \int \frac{1}{1 + \sin x} \times \frac{1 - \sin x}{1 - \sin x} dx$

$$= \int \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x} \right] dx$$

$$= \int (\sec^2 x - \sec x \tan x) dx$$

$$= \tan x - \sec x + c$$

उदाहरण-8. एक वक्र की प्रवणता $\frac{dy}{dx} = 2x - \frac{3}{x^2}$ द्वारा दी जाती है। यह वक्र बिन्दु (1, 1) से गुजरता है। वक्र की समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल: $\because \frac{dy}{dx} = 2x - \frac{3}{x^2}$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष समाकलन करने पर–

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int \left(2x - 3x^{-2}\right) dx$$

$$\Rightarrow \qquad \int dy = 2\int x dx - 3\int x^{-2} dx$$

$$\Rightarrow \qquad y = \frac{2x^2}{2} - 3\frac{x^{-1}}{-1} + c$$

$$\Rightarrow \qquad y = x^2 + \frac{3}{x} + c$$

$\because$ यह (1, 1) से गुजरता है अतः $\quad 1 = (1)^2 + \frac{3}{(1)} + c \Rightarrow c = -3$

$\therefore$ वक्र का अभीष्ट समीकरण $\quad y = x^2 + \frac{3}{x} - 3$

प्रश्नमाला 9.1

1. निम्न फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

(i) $3\sqrt{x^2}$ (ii) e^{3x} (iii) $(1/2)^x$ (iv) $a^{2\log_a x}$

निम्न समाकलों के मान ज्ञात कीजिए

2. $\int \left(5\cos x - 3\sin x + \frac{2}{\cos^2 x}\right) dx$
3. $\int \frac{x^3 - 1}{x^2} dx$
4. $\int \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x \, dx$
5. $\int (1+x)\sqrt{x}\, dx$
6. $\int a^x da$
7. $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$
8. $\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} dx$
9. $\int \sec x(\sec x + \tan x)\, dx$
10. $\int (\sin^{-1} x + \cos^{-1} x)\, dx$
11. $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$
12. $\int \tan^2 x \, dx$
13. $\int \cot^2 x \, dx$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}}$
15. $\int (\tan^2 x - \cot^2 x) dx$
16. $\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$
17. $\int \frac{1}{1-\cos x} dx$
18. $\int \left[1 + \frac{1}{1+x^2} + \frac{3}{x\sqrt{x^2-1}} + 2^x\right] dx$
19. $\int \cot x(\tan x - \operatorname{cosec} x) dx$
20. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$
21. $\int \log_x x \, dx$
22. $\int \sqrt{1+\cos 2x}\, dx$
23. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$
24. $\int \frac{3\cos x + 4}{\sin^2 x} dx$

II प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन (Integration by substitution)

(a) चरों के प्रतिस्थापन द्वारा: "दिये चर को उचित प्रतिस्थापन द्वारा स्वतंत्र चर में परिवर्तन कर समाकल्य को मानक रूप में बदल कर समाकलन करना, प्रतिस्थापन से समाकलन करना कहलाता है।"

प्रमेय: यदि $\int f(x)\,dx$ में चर x को नये चर t में $x=\phi(t)$ द्वारा प्रतिस्थापित किया जाये तो

$$\int f(x)\,dx=\int f\phi\{t\}\phi'(t)dt,\ \text{जहाँ}\ \phi'(t)=\frac{d\phi}{dt}$$

प्रमाण: माना $\int f(x)\,dx=F(x)$ तब $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=\frac{d}{dx}F(x)$ (अवकलन से) (1)

अब यदि $x=\phi(t)$ हो तो $\frac{dx}{dt}=\phi'(t)$ हो तो (2)

पुन: $\frac{d}{dt}F(x)=\frac{d}{dx}F(x)\,.\,\frac{dx}{dt}$ (श्रृंखला नियम से)

$=f(x)\,.\,\phi'(t)$ [(1) व (2) से]

$=f\{\phi(t)\}\phi'(t)$

अत: समाकलन की परिभाषा से–

$$\int\frac{d}{dx}F(x)dt=\int f\{\phi(t)\}.\phi'(t)\,dt$$

या
$$F(x)=\int f\{\phi(t)\}.\phi'(t)\,dt$$

या
$$\int f(x)dx=\int f\{\phi(t)\}.\phi'(t)\,dt$$

प्रतिस्थापन योग्य कुछ समाकल्य (Some integrands for substitution)

(a) $$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+c$$ (माना $f(x)=t$ आदि)

(b) $$\int[f(x)]^n f'(x)dx=\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+c$$ (माना $f(x)=t$ आदि)

(c) रैखिक फलन $f(ax+b)$ हेतु

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{f(ax+b)}{a}+c$$ (जहाँ a व b अचर हैं)

जबकि
$$\int f(x)\,dx=F(x)+c$$

रैखिक फलनों हेतु स्मरणीय सूत्र

यदि $a\neq o$ तो

(i) $$\int(ax+b)^n\,dx=\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+c,\quad n\neq-1$$

(ii) $$\int\frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}\log|ax+b|+c,\ a>0$$

(iii) $$\int e^{ax+b}dx=\frac{e^{ax+b}}{a}+c$$

(iv) $$\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{\cos(ax+b)}{a}+c$$

(v) $$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{\sin(ax+b)}{a}+c$$

टिप्पणी: सामान्यतः प्रतिस्थापन करने का कोई व्यापक नियम नहीं है यह समाकल्य की प्रकृति पर निर्भर करता है। 'प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन' विधि की सफलता इस बात पर निर्भर है कि हम किसी प्रकार समाकल्य को दो ऐसे फलनों के गुणा के रूप में प्रकट कर सकें, जिनमें एक फलन व दूसरा उस फलन का अवकलज हो।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-9. निम्नलिखित फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

(i) $\dfrac{\cos[\log(x)]}{x}$ (ii) $\dfrac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}$ (iii) $\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ (iv) $\dfrac{1}{\cos^2(5x+2)}$

हल: (i) माना $\log x = t$ तब $\frac{1}{x}dx = dt$

$$\therefore \quad I = \int \frac{\cos(\log x)}{x}dx = \int \cos t\,dt = \sin t + c = \sin(\log x)+c$$

(ii) माना $$I = \int \frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

माना $$\sin^{-1}x = t \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = dt$$

$$\therefore \quad I = \int e^t dt = e^t + c = e^{\sin^{-1}x}+c$$

(iii) $$I = \int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

माना $$\sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2dt$$

$$\therefore \quad I = \int \sin t \times 2dt = 2\int \sin t\,dt$$

$$= 2\times(-\cos t)+c = -2\cos\sqrt{x}+c$$

(iv) $$I = \int \frac{1}{\cos^2(5x+2)}dx$$

$$= \int \sec^2(5x+2)dx$$

माना $$5x+2 = t \Rightarrow 5dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{5}dt$$

$$\therefore \quad I = \int \sec^2 t \times \frac{1}{5}dt$$

$$= \frac{1}{5}\int \sec^2 t\,dt = \frac{1}{5}\tan t + c = \frac{1}{5}\tan(5x+2)+c$$

उदाहरण-10. निम्नलिखित फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

(i) $\dfrac{\log[x+\sqrt{1+x^2}]}{\sqrt{1+x^2}}$ (ii) $\sec x \log(\sec x + \tan x)$ (iii) $\dfrac{1}{1+\tan x}$

हल: (i) $$I = \int \frac{\log[x+\sqrt{1+x^2}]}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

माना $$\log[x+\sqrt{1+x^2}] = t$$

$\therefore$ $$\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \times \left[1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right]dx = dt$$

$\Rightarrow$ $$\frac{1}{[x+\sqrt{1+x^2}]} \times \frac{[\sqrt{1+x^2}+x]}{\sqrt{1+x^2}}dx = dt$$

$\Rightarrow$ $$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = dt$$

$\therefore$ $$I = \int t\,dt$$

$$= \frac{t^2}{2} + c$$

$$= \frac{1}{2}[\log\{x+\sqrt{1+x^2}\}]^2 + c$$

(ii) $$I = \int \sec x \,.\, \log(\sec x + \tan x)dx$$

माना $$\log(\sec x + \tan x) = t$$

$\therefore$ $$\frac{1}{(\sec x + \tan x)} \times (\sec x \tan x + \sec^2 x)dx = dt$$

$$\sec x\, dx = dt$$

$\therefore$ $$I = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{1}{2}[\log(\sec x + \tan x)]^2 + c$$

(iii) $$I = \int \frac{1}{1+\tan x}dx = \int \frac{1}{1+\dfrac{\sin x}{\cos x}}dx = \int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2\cos x}{\cos x + \sin x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(\cos x + \sin x) + (\cos x - \sin x)}{\cos x + \sin x}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}dx$$

द्वितीय समाकल में, माना $\cos x + \sin x = t$

$\therefore$ $(-\sin x + \cos x)dx = dt$

$\therefore$
$$I = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\log|t| + c$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\log|\cos x + \sin x| + c$$

(b) त्रिकोणमितीय फलनों $\tan x, \cot x, \sec x$ तथा $\operatorname{cosec} x$ के समाकलन

(i) माना
$$I = \int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

माना $\cos x = t \Rightarrow -\sin x\, dx = dt \Rightarrow \sin x dx = -dt$

$\therefore$
$$I = \int \frac{-dt}{t} = -\log|t| + c = -\log|\cos x| + c$$
$$= \log|\sec x| + c$$

$\therefore$
$$\int \tan x\, dx = \log|\sec x| + c = -\log|\cos x| + c$$

(ii) माना
$$I = \int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

माना $\sin x = t \Rightarrow \cos x\, dx = dt$

$\therefore$
$$I = \int \frac{dt}{t} = \log|t| = \log|\sin x| + c$$

$\therefore$
$$\int \cot t\, dx = \log|\sin x| + c$$

(iii) माना
$$I = \int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)} dx$$

माना $\sec x + \tan x = t$

$\therefore$ $(\sec x \tan x + \sec^2 x)dx = dt \Rightarrow \sec x(\sec x + \tan x)dx = dt$

$\therefore$
$$I = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + c = \log|\sec x + \tan x| + c \qquad \ldots (1)$$
$$= \log\left|\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}\right| + c$$
$$= \log\left|\frac{1 + \sin x}{\cos x}\right| + c$$
$$= \log\left|\frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} + 2\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}\right| + c$$

$$= \log\left|\frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}\right|+c$$

$$= \log\left|\frac{1+\tan x/2}{1-\tan x/2}\right|+c$$

$$= \log\tan\left|\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right|+c$$

$\therefore$ $$\int \sec x\,dx = \log\left|\sec x+\tan x\right|+c = \log\tan\left|\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right|+c$$

(iv) माना $$I = \int \operatorname{cosec} x\,dx = \int \frac{\operatorname{cosec} x\left(\operatorname{cosec} x-\cot x\right)}{\left(\operatorname{cosec} x-\cot x\right)}dx$$

माना $$\operatorname{cosec} x-\cot x = t \Rightarrow \left(-\operatorname{cosec} x\cot x+\operatorname{cosec}^2 x\right)dx = dt$$

$\therefore$ $$\operatorname{cosec} x\left(\operatorname{cosec} x-\cot x\right)dx = dt$$

$\therefore$ $$I = \int \frac{dt}{t} = \log|t|+c = \log\left|\operatorname{cosec} x-\cot x\right|+c$$

$$= \log\left|\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right|+c = \log\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right|+c$$

$$= \log\left|\frac{1-1+2\sin^2(x/2)}{2\sin(x/2)\cos(x/2)}\right|+c = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+c$$

$\therefore$ $$\int \operatorname{cosec} x\,dx = \log\left|\operatorname{cosec} x-\cot x\right|+c = \log\left|\tan x/2\right|+c$$

$$\left(\because \operatorname{cosec} x-\cot x = \tan x/2\right)$$

उदाहरण-11. समाकलन कीजिए–

$$\frac{1}{\sqrt{1+\cos 2x}}$$

हल: माना $$I = \int \frac{1}{\sqrt{1+\cos 2x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{2\cos^2 x}}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\cos x}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \sec x\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log|\sec x+\tan x|+c$$

उदाहरण-12. $\sqrt{\sec x+1}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

हल: माना
$$I=\int\sqrt{\sec x+1}dx=\int\sqrt{\left(\frac{1}{\cos x}+1\right)}dx$$
$$=\int\sqrt{\frac{1+\cos x}{\cos x}}dx=\int\sqrt{\frac{2\cos^2 x/2}{1-2\sin^2 x/2}}dx=\int\frac{\sqrt{2}\cos x/2}{\sqrt{1-\{\sqrt{2}\sin(x/2)\}^2}}dx$$

माना $\sqrt{2}\sin(x/2)=t \Rightarrow \sqrt{2}\cos(x/2)\times 1/2dx=dt$

$\Rightarrow$ $\sqrt{2}\cos(x/2)dx=2dt$

$\therefore$
$$I=\int\frac{2dt}{\sqrt{1-t^2}}=2\sin^{-1}t+=2\sin^{-1}(\sqrt{2}\sin x/2)+c$$

(c) रूपान्तरण द्वारा त्रिकोणमितीय सर्व-समिकाओं के उपयोग द्वारा समाकलन

कई बार समाकल्य में ऐसे त्रिकोणमितीय फलन विद्यमान होते है जिन्हें त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं का उपयोग कर समाकलन योग्य बना लिया जाता है, फिर आवश्यकता अनुसार प्रतिस्थापन का प्रयोग कर समाकल ज्ञात किया जाता है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-13. निम्न समाकलो को हल ज्ञात कीजिए–

(i) $I=\int\cos 3x\cos 4x\,dx$ (ii) $\int\sin^2 x\,dx$ (iii) $\int\cos^3 x\,dx$ (iv) $\int\sin^4 x\,dx$

हल: (i)
$$I=\int\cos 3x\cos 4x\,dx=\frac{1}{2}\int 2\cos 4x\cos 3x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int(\cos 7x+\cos x)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 7x}{7}+\sin x\right]+c$$

(ii)
$$I=\int\sin^2 x\,dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}+c\right]$$

(iii)
$$I=\int\cos^3 x\,dx=\frac{1}{4}\int(\cos 3x+3\cos x)\,dx$$
$$\left(\because \cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x\Rightarrow\cos^3 x=1/4(\cos 3x+3\cos x)\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left[\frac{\sin 3x}{3}+3\sin x\right]+c$$

(iv)
$$I=\int\sin^4 x\,dx=\int(\sin^2 x)^2dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2dx$$
$$=\frac{1}{4}\int(1+\cos^2 2x-2\cos 2x)\,dx$$
$$=\frac{1}{4}\int\left[1+\frac{1+\cos 4x}{2}-2\cos 2x\right]dx=\frac{1}{8}\int(3+\cos 4x-4\cos 2x)\,dx$$
$$=\frac{1}{8}\left[3x+\frac{\sin 4x}{4}-2\sin 2x\right]+c$$

प्रश्नमाला 9.2

निम्न फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

1. (i) $x\sin x^2$ (ii) $x\sqrt{x^2+1}$

2. (i) $\dfrac{e^x-\sin x}{e^x+\cos x}$ (ii) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$

3. (i) $\sqrt{e^x+1}$ (ii) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}\cos e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

4. (i) $\dfrac{1}{x(1+\log x)}$ (ii) $\dfrac{(1+\log x)^3}{x}$

5. (i) $\dfrac{e^{m\tan^{-1}x}}{1+x^2}$ (ii) $\dfrac{\sin^p x}{\cos^{p+2} x}$

6. (i) $\dfrac{1}{\sqrt{1+\cos 2x}}$ (ii) $\dfrac{1+\cos x}{\sin x\cos x}$

7. (i) $\sin 3x\sin 2x$ (ii) $\sqrt{1-\sin x}$

8. (i) $\cos^4 x$ (ii) $\sin^3 x$

9. (i) $\dfrac{1}{\sin x\cos^3 x}$ (ii) $\dfrac{(1+x)e^x}{\cos^2(xe^x)}$

10. (i) $\dfrac{1}{1-\tan x}$ (ii) $\dfrac{1}{1+\cot x}$

11. (i) $\dfrac{\sec^4 x}{\sqrt{\tan x}}$ (ii) $\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$

12. (i) $\dfrac{\sin(x+a)}{\sin(x-a)}$ (ii) $\dfrac{\sin x}{\sin(x-a)}$

13. (i) $\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x\sin 3x}$ (ii) $\dfrac{\sin 2x}{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$

   $[\text{संकेत} = \sin 2x = \sin(5x-3x)]$ $[\text{संकेत} = 2x = (x-\pi/6)+(x+\pi/6)]$

14. (i) $\dfrac{1}{3\sin x+4\cos x}$ $[\text{संकेत}\ 3 = r\cos\theta, 4 = r\sin\theta]$ (ii) $\dfrac{1}{\sin(x-a)\sin(x-b)}$

15. (i) $\dfrac{\sin x\cos x}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}$ (ii) $\dfrac{\sec x}{\sqrt{\sin(2x+\alpha)+\sin\alpha}}$

16. (i) $\dfrac{1}{\sqrt{\cos^3 x\sin(x+a)}}$ (ii) $\dfrac{\cos 2x-\cos 2\alpha}{\cos x-\cos\alpha}$

(d) चरों का त्रिकोणमितीय फलनों द्वारा प्रतिस्थापन विधि से समाकलन

(i) $\dfrac{1}{a^2+x^2}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (iii) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ (iv) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$

(i) माना, $$I=\int\frac{1}{a^2+x^2}dx$$

अगर, $x=a\tan\theta$ तो $dx=a\sec^2\theta d\theta$

तब $$I=\int\frac{a\sec^2\theta d\theta}{a^2+a^2\tan^2\theta}=\frac{1}{a}\int\frac{\sec^2\theta}{1+\tan^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta=\frac{1}{a}\int d\theta=\frac{1}{a}(\theta)+c=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c$$

$$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c$$

(ii) माना $$I=\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

अगर $x=a\sin\theta$ हों, तो $dx=a\cos\theta d\theta$

$$\therefore\quad I=\int\frac{a\cos\theta d\theta}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}}=\int\frac{a\cos\theta d\theta}{a\cos\theta}=\int d\theta=\theta+c=\sin^{-1}\frac{x}{a}+c$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\sin^{-1}\frac{x}{a}+c$$

(iii) माना $$I=\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

माना $x=a\tan\theta \Rightarrow dx=a\sec^2\theta d\theta$

$$\therefore\quad I=\int\frac{a\sec^2\theta d\theta}{\sqrt{a^2\tan^2\theta+a^2}}=\int\frac{a\sec^2\theta}{a\sec\theta}d\theta$$

$$=\int\sec\theta d\theta=\log|\sec\theta+\tan\theta|+c_1$$

$$=\log\left|\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}+\frac{x}{a}\right|+c_1$$

$$=\log\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{a}\right|+c_1=\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|-\log a+c_1$$

$$=\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c,\ \text{जहाँ } c=c_1-\log a$$

$$\therefore\quad\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\log|x+\sqrt{x^2+a^2}|+c$$

(iv) माना $$I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx$$

मानलो, $x = a\sec\theta \Rightarrow dx = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

$\therefore$ $$I = \int \frac{1}{\sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2}} \times a\sec\theta\tan\theta\, d\theta = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{a\tan\theta}$$

$$= \int \sec\theta\, d\theta = \log|\sec\theta + \tan\theta| + c_1$$

$$= \log\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right| + c_1 = \log\left|\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right| + c_1$$

$$= \log|x + \sqrt{x^2 - a^2}| - \log a + c_1 = \log|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c$$ (जहाँ $c = c_1 - \log a$)

$\therefore$ $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \log|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c$$

कुछ उचित त्रिकोणमितीय प्रतिस्थापनः अनुभव के आधार पर कुछ उचित त्रिकोणमितीय प्रतिस्थापन निम्नानुसार सुझाये गये है :

	समाकल्य	**प्रतिस्थापन**
(i)	$\sqrt{x^2 + a^2}$ या $\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$	$x = a\tan\theta$
(ii)	$\sqrt{a^2 - x^2}$ या $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$x = a\sin\theta$ या $x = a\cos\theta$
(iii)	$\sqrt{x^2 - a^2}$ या $\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	$x = a\sec\theta$
(iv)	$\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ या $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$	$x = a\cos 2\theta$ या $x = a\cos\theta$
(v)	$\sqrt{x+a}$	$x = a\cos 2\theta$ या $x = a\cos\theta$
(vi)	$\sqrt{2ax - x^2}$	$x = 2a\sin^2\theta$ या $x = a(1 - \cos 2\theta)$
(vii)	$\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$	$x^2 = a^2\cos 2\theta$
(viii)	$\sqrt{\frac{x+a}{x}}$ या $\sqrt{\frac{x}{x+a}}$	$x = a\tan^2\theta$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-14. निम्नलिखित का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

(i) $\dfrac{x}{1+x^4}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{9-25x^2}}$

हल: (i) माना $I = \int \dfrac{x}{1+x^4}dx$

माना $x^2 = t \Rightarrow xdx = \dfrac{dt}{2}$

$\therefore$ $I = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{dt}{1+t^2} = \dfrac{1}{2}\tan^{-1}(t)+c = \dfrac{1}{2}\tan^{-1}(x^2)+c$

(ii) माना $I = \int \dfrac{1}{\sqrt{9-25x^2}}dx = \dfrac{1}{5}\int \dfrac{1}{\sqrt{(3/5)^2-x^2}}dx$

$$= \frac{1}{5}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3/5}\right)+c = \frac{1}{5}\sin^{-1}\frac{5x}{3}+c$$

उदाहरण-15. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

हल: माना $I = \int \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx = \int \dfrac{1}{\sqrt{(x-2)^2+1}}dx$

$$= \log|(x-2)+\sqrt{(x-2)^2+1}|+c$$

$$= \log|(x-2)+\sqrt{x^2-4x+5}|+c$$

उदाहरण-16. $\int \dfrac{1}{x^2+2x+5}dx$ ज्ञात कीजिए–

हल: माना $I = \int \dfrac{1}{x^2+2x+5}dx = \int \dfrac{1}{(x+1)^2+(2)^2}dx$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+c$$

उदाहरण-17. $\dfrac{1}{\sqrt{5x-6-x^2}}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

हल: माना $I = \int \dfrac{1}{\sqrt{5x-6-x^2}}dx = \int \dfrac{1}{\sqrt{-6-(x^2-5x)}}dx$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{(25/4-6)-(x^2-5x+25/4)}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(1/2)^2-(x-5/2)^2}}dx$$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{x-5/2}{1/2}\right]+c = \sin^{-1}\left(\frac{2x-5}{1}\right)+c$$

उदाहरण-18. $\dfrac{(1+x)^2}{x+x^3}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

हल: माना
$$I=\int\frac{(1+x)^2}{x+x^3}dx=\int\frac{1+x^2+2x}{x(1+x^2)}dx$$
$$=\int\left[\frac{(1+x^2)}{x(1+x^2)}+\frac{2x}{x(1+x^2)}\right]dx=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{2}{1+x^2}dx$$
$$=\log|x|+2\tan^{-1}x+c$$

उदाहरण-19. $\dfrac{\sin 2x\cos 2x}{\sqrt{9-\cos^4 2x}}dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

हल: माना
$$I=\int\frac{\sin 2x\cos 2x}{\sqrt{9-\cos^4 2x}}dx$$

माना
$$\cos^2 2x=t\Rightarrow 2\cos 2x.(-\sin 2x)2.dx=dt$$

$\Rightarrow$
$$\sin 2x\cos 2x\,dx=-\frac{dt}{4}$$

$\therefore$
$$I=-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\sqrt{9-t^2}}=-\frac{1}{4}\sin^{-1}\left(\frac{t}{3}\right)+c$$
$$=-\frac{1}{4}\sin^{-1}\left(\frac{\cos^2 2x}{3}\right)+c$$

उदाहरण-20. यदि $\displaystyle\int\frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx=k\sin^{-1}2^x+c$ तो k का मान ज्ञात कीजिए–

हल: माना
$$I=\int\frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx=\int\frac{2^x}{\sqrt{1-(2^x)^2}}dx$$

माना
$$2^x=t\Rightarrow 2^x\log_e 2dx=dt\Rightarrow 2^x dx=\frac{dt}{\log_e 2}$$

$\therefore$
$$I=\frac{1}{\log_e 2}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{\log_e 2}\sin^{-1}(t)+c=\log_2 e.(\sin^{-1}2^x)+c$$

$\therefore$
$$\int\frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx=\log_2 e.(\sin^{-1}2^x)+c$$

परन्तु दिया है,
$$\int\frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx=k(\sin^{-1}2^x)+c$$

$\therefore$ तुलना से,
$$k=\log_2 e$$

प्रश्नमाला 9.3

निम्न फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

1. (i) $\dfrac{1}{50+2x^2}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{32-2x^2}}$

2. (i) $\dfrac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$

3. (i) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{(2-x)^2+1}}$

4. (i) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^6+4}}$ (ii) $\dfrac{x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}$

5. (i) $\dfrac{1}{x^2+6x+8}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-x+2}}$

6. (i) $\dfrac{e^x}{e^{2x}+2e^x\cos\propto+1}$ (ii) $\dfrac{1+\tan^2 x}{\sqrt{\tan^2 x+3}}$

7. (i) $\dfrac{1}{\sqrt{3x-2-x^2}}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{4+8x-5x^2}}$

8. (i) $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2ax+b^2}}$

9. (i) $\sqrt{\dfrac{a-x}{x}}$ (ii) $\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$

10. (i) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3-x^3}}$ (ii) $\dfrac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}$

11. (i) $\dfrac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$ (ii) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

12. (i) $\dfrac{1}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

13. (i) $\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}$ (ii) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}$

III आंशिक भिन्नों में वियोजन द्वारा समाकलन (Integration by resolving into partial fractions)

(a) परिमेय बीजीय फलन (Rational algebraic function)

परिभाषा: यदि $f(x)$ व $g(x)$ दोनों x के बहुपद हो तो भिन्न $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ को x का परिमेय बीजीय फलन या परिमेय बीजीय भिन्न कहते है।

उदाहरणार्थ, $\dfrac{x^2-x-6}{x^3+x^2-3x+4}, \dfrac{2x+1}{2x^2+x+1}, \dfrac{x^2}{x^2+1}, \dfrac{2x^3}{(x-1)(x^2+1)}, \dfrac{x^4}{x^3+2x-4}$

उचित परिमेय भिन्न (Proper rational fraction): यदि किसी परिमेय बीजीय भिन्न में अंश की घात हर से कम हो तो ऐसी भिन्न उचित परिमेय भिन्न कहलाती है।

विषम परिमेय भिन्न (Improper rational fraction): यदि किसी परिमेय बीजीय भिन्न में अंश की घात हर से अधिक या बराबर हो तो ऐसी भिन्न को विषम परिमेय भिन्न कहते है।

उदाहरणार्थ, $\dfrac{2x+3}{3x^2+x+4}$, एक उचित परिमेय भिन्न है–

उदाहरणार्थ, $\dfrac{3x^3+x^2+5x-4}{x^2+x+2}$ व $\dfrac{3x^2+x+2}{(x+1)(x+3)}$ विषम परिमेय भिन्न है।

टिप्पणी: एक विषम परिमेय भिन्न को भाग द्वारा (जब तक शेष (remainder) की घात हर की घात से कम न हो जाये) बहुपद तथा उचित परिमेय भिन्न के योग के रूप में प्रकट किया जा सकता है, जैसे

$$\frac{3x^3+2x+7}{x^2+5x+9}=3(x-5)+\frac{50x+142}{x^2+5x+9}$$

उक्त प्रकार के परिमेय बीजीय फलनों $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ का x के सापेक्ष समाकलन करने हेतु हम इसे आंशिक भिन्नों (Partial fraction) में वियोजित कर प्रत्येक भिन्न का समाकलन करते हैं।

आंशिक भिन्न (Partial fraction): दो या दो से अधिक परिमेय बीजीय भिन्नों के योग की विपरीत प्रक्रिया वियोजन (decomposition) द्वारा एक परिमेय बीजीय भिन्न को कई बीजीय भिन्नों के योग के रूप में व्यक्त करना, आंशिक भिन्नों में बाँटना (वियोजन) कहलाता है जैसे–

$$\frac{2x-5}{x^2-5x+6}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$$

परिमेय भिन्न को आंशिक भिन्न में बाँटने (वियोजित करने) के नियम
(Rules of resolving a rational fraction into partial fraction)

[A]. सर्वप्रथम यदि भिन्न एक उचित परिमेय भिन्न नही है तो अंश में हर का भाग देकर उसे उचित परिमेय भिन्न में बदल लेना चाहिए। इस प्रकार दी गई विषम भिन्न एक बहुपद व उचित भिन्न में विघटित हो जायेगी। बहुपद को यथावत रहने दें व वास्तविक भिन्न को आंशिक भिन्नों में खंडित करना चाहिये।

[B]. यदि उचित भिन्न का हर गुणनखण्डों के रूप में नहीं है तो इसके गुणनखण्ड करें।

[C]. अब हर की घात के बराबर अचर राशियाँ A, B, C आदि मानते हैं। अलग–2 स्थितियों में वास्तविक भिन्न की संगत आंशिक भिन्नें निम्न रूप में होगी–

(a) यदि हर में बिना पुनरावर्ती के रैखिक गुणनखण्ड हो तो आशिंक भिन्नों का रूप निम्न उदाहरण के अनुरूप होगा–

$$\frac{x}{(x-1)(x+2)(x-3)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+2)}+\frac{C}{(x-3)}$$

(b) यदि हर में पुनरावर्ती वाले रैखिक गुणनखण्ड हो तो आंशिक भिन्नों का रूप निम्न उदाहरण के अनुरूप होगा–

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+3)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x+3)}$$

(c) अगर हर में द्विघात खण्ड हो तो आंशिक भिन्नों का रूप निम्न उदाहरण के अनुरूप होगा–

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+2)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{Bx+C}{(x^2+2)}$$

टिप्पणी: यदि किसी भिन्न के अंश व हर दोनों में x का पद केवल द्विघात है अर्थात् x^2 हो तो x^2 को एकघाती मानकर स्थिति (a) के अनुसार आंशिक भिन्नों के रूप में लिखते हैं, जैसे–

$$\frac{x^2+2}{(x^2+1)(x^2+3)}=\frac{A}{x^2+1}+\frac{B}{x^2+3}$$

[D]. अचर A, B, C आदि का गणना

(a) उपरोक्त पद [C] द्वारा दाहिनी पक्ष में मानी गई आंशिक भिन्नों के हर का लघुत्तम लेकर योग करते हैं।

(b) चुंकि दोनों पक्षों की भिन्नें समान हैं। तथा अब उनके हर भी समान है अतः दोनों पक्षों में अंश भी समान होने चाहिये। इस प्रकार दोनों पक्षों में x की सभी घातों के गुणांकों तथा अचर पदों की तुलना कर समीकरण ज्ञात करें। ऐसे समीकरणों की संख्या माने गये अचरों की संख्या के बराबर होनी चाहिये। समीकरणों से अचर पदों के मान ज्ञात कर अभीष्ट आंशिक भिन्न लिखिये। प्रक्रिया अग्र उदाहरण द्वारा स्पष्ट की गई है–

माना
$$\frac{2x+3}{(x+2)(x+1)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x+1)}$$

या
$$\frac{2x+3}{(x+2)(x+1)}=\frac{A(x+1)+B(x+2)}{(x+2)(x+1)}$$

या
$$2x+3=A(x+1)+B(x+2) \qquad (1)$$

या
$$2x+3=(A+B)x+(A+2B)$$

समान पदों के गुणांकों की तुलना से–

$$\left.\begin{array}{l} A+B=2 \\ A+2B=3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{हल करने पर} \\ A=1, B=1 \end{array}$$

अतः
$$\frac{2x+3}{(x+2)(x+1)}=\frac{1}{(x+2)}+\frac{1}{(x+1)}$$

वैकल्पिक विधियाँ:

(i) लघु विधि (Short method): उपरोक्त उदाहरण में समीकरण (1) के दोनों पक्षों में गुणनखण्डों $(x+1)$ व $(x+2)$ के संगत x के मानों $x=-1$ व $x=-2$ रखकर अचरों A व B के मान ज्ञात किये जा सकते हैं।

(ii) विभाजन विधि (Division Method): हर के पुनरावृत्ति वाले खण्डों हेतु विभाजन विधि अधिक सुविधाजनक रहती है इसमें पुनरावृत्ति वाले खण्ड को y मानते है व इस खण्ड के अलावा हर में मौजूद अन्य खण्डों का अंश मे भाग लगाते हैं। अन्त में हमें समाकलन योग्य पद प्राप्त हो जाते हैं।

उदाहरणार्थ $\dfrac{x^2}{(x+1)^3(x+2)}$ में माना $(x+1)=y$ तब

$$\frac{x^2}{(x+1)^3(x+2)}=\frac{(y-1)^2}{y^3(y+1)}=\frac{(1-2y+y^2)}{y^3(1+y)}$$

(भाजक व भाज्य को बढ़ती घातों में लिखा जाता है)

$$=\frac{1}{y^3}\left[1-3y+4y^2-\frac{4y^3}{1+y}\right]$$

$$=\frac{1}{y^3}-\frac{3}{y^2}+\frac{4}{y}-\frac{4}{1+y}$$

$$=\frac{1}{(x+1)^3}-\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{4}{(x+1)}-\frac{4}{(x+2)}$$

जो समाकलन योग्य है।

(iii) निरीक्षण विधि (By inspection): अगर किसी वास्तविक भिन्न के अंश में 1 हो तथा खण्डों का अन्तर अचर राशि हो तो इस विधि का प्रयोग हो सकता है। इस हेतु खण्डों के अन्तर का भाग देकर कोष्ठक में छोटे खण्ड के व्युत्क्रम में से बड़े खण्ड का व्युत्क्रम घटा देते हैं।

उदाहरणार्थ, $\frac{1}{(x+2)(x-3)}=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2}\right]$ यहाँ खण्डों का अन्तर $=(x+2)-(x-3)=5$

कुछ मानक समाकल (Some standard integrals)

(i) $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c \qquad (x>a)$

(ii) $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c \qquad (x<a)$

प्रमाण:

(i) $$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right] \qquad \text{(निरीक्षण विधि से)}$$

$$\therefore \int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\int\left[\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right]dx\frac{1}{2a}\int\left[\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2a}\int\frac{1}{x-a}dx-\frac{1}{2a}\int\frac{1}{x+a}dx$$

$$=\frac{1}{2a}\log|x-a|-\frac{1}{2a}\log|x-a|+c$$

$$=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$$

इसी प्रकार,

(ii) $$\frac{1}{a^2-x^2}=\frac{1}{(a+x)(a-x)}=\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right]$$

$$\therefore \int\frac{1}{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2a}\int\left[\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\log|a+x|+\frac{\log|a-x|}{-1}\right]+c$$

$$=\frac{1}{2a}[\log|a+x|-\log|a-x|]+c$$

$$=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$$

टिप्पणी: कई स्थितियों में प्रतिस्थापन द्वारा कार्य सरल हो जाता है। यह विशेषतः तब होता है, जब x की कोई घात, माना x^{n-1}, अंश का कोई खण्ड हो, तथा शेष भिन्न x^n का परिमेय फलन हो तो प्रतिस्थापन $x^n=t$ करते है और तब आंशिक भिन्न में वियोजित करते हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-21. निम्न फलनों का c के सापेक्ष समाकलों के मान ज्ञात कीजिए–

(i) $\frac{1}{16x^2-9}dx$ (ii) $\frac{1}{9-4x^2}dx$

हल: (i) माना $$I=\int\frac{1}{16x^2-9}dx=\int\frac{1}{(4x)^2-(3)^2}dx$$

माना $$4x=t\Rightarrow 4dx=dt \text{ या } dx=\frac{1}{4}dt$$

$\therefore$ $$I=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2-3^2}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2\times3}\log\left|\frac{t-3}{t+3}\right|+c$$

$$=\frac{1}{24}\log\left|\frac{4x-3}{4x+3}\right|+c$$

हल: (ii) माना $$I=\int\frac{1}{9-4x^2}dx=\int\frac{1}{(3)^2-(2x)^2}dx$$

माना $$2x=t\Rightarrow dx=\frac{dt}{2}$$

$\therefore$ $$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{3^2-t^2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2\times3}\log\left|\frac{3+t}{3-t}\right|+c$$

$$=\frac{1}{12}\log\left|\frac{3+2x}{3-2x}\right|+c$$

उदाहरण-22. $\frac{1}{x^2-x-2}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

हल: $$\frac{1}{x^2-x-2}=\frac{1}{(x-2)(x+1)}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right]$$ (निरीक्षण विधि से)

$\therefore$ $$\int\frac{1}{x^2-x-2}dx=\frac{1}{3}\int\left[\frac{1}{(x-2)}-\frac{1}{(x+1)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\log|(x-2)|-\log|x+1|\right]+c$$

$$=\frac{1}{3}\log\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+c$$

उदाहरण-23. $\int\frac{x^2+x+2}{(x-1)(x-2)}dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

हल: $$\frac{x^2+x+2}{(x-1)(x-2)}=1+\frac{4x}{(x-1)(x-2)}$$ (भाग देने पर)

माना $$\frac{4x}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-2)}$$

या $$4x=A(x-2)+B(x-1) \qquad (1)$$

(1) के दोनों पक्षों में,

x=2 रखने पर, $8=B(2-1)$ या $B=8$

x=1 रखने पर, $4=-A$ या $A=-4$

$$\therefore \quad \frac{4x}{(x-1)(x-2)}=\frac{-4}{x-1}+\frac{8}{x-2}$$

$$\therefore \quad \frac{x^2+x+2}{(x-1)(x-2)}=1+\left[\frac{-4}{x-1}+\frac{8}{x-2}\right]$$

या $$\int\frac{x^2+x+2}{(x-1)(x-2)}dx=\int\left[1-\frac{4}{x-1}+\frac{8}{x-2}\right]dx$$

$$=x-4\log|x-1|+8\log|x-2|+c$$

$$=x+4\left[2\log|x-2|-\log|x-1|\right]+c$$

$$=x+4\log\frac{(x-2)^2}{|x-1|}+c$$

उदाहरण-24. $\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

हल: माना $$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow \quad 1=A(x+1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)^2$$

$$\Rightarrow \quad 1=A(x^3+x^2+x+1)+B(x^2+1)+(Cx^3+2Cx^2+Dx^2+2Dx+Cx+D)$$

$$\Rightarrow \quad 1=x^3(A+C)+x^2(A+B+2C+D)+x(A+C+2D)+(A+B+D)$$

तुलना से,

$A+C=0$ (1) $\qquad$ $A+B+2C+D=0$ (2)

$A+C+2D=0$ (3) $\qquad$ $A+B+D=0$ (4)

(1) व (3) से, $2D=O\Rightarrow D=0$

(1) व (2) से, $B+C+D=0$ सरल करने पर, $2C=-1\Rightarrow C=-1/2 \therefore A=1/2$

(1) व (4) से, $B-C+D=1$

(4) से, $1/2+B+0=1\Rightarrow B=1/2$

$$\therefore \quad \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{(x^2+1)}$$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx = \frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+1)}dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+1)^2}dx - \frac{1}{4}\int\frac{2x}{(x^2+1)}dx$$

$$= \frac{1}{2}\log|x+1| - \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{4}\log(x^2+1) + c$$

[यहाँ $x^2+1 = t \Rightarrow 2xdx = dt$]

$$= \frac{1}{2}\log|x+1| - \frac{1}{4}\log(x^2+1) - \frac{1}{2(x+1)} + c$$

उदाहरण-25. $\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^3}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

हल: माना $(x-1) = y \therefore \dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^3} = \dfrac{(y+1)^2+(y+1)+1}{y^3}$

$$= \frac{y^2+3y+3}{y^3} = \frac{1}{y} + \frac{3}{y^2} + \frac{3}{y^3}$$

$$= \frac{1}{(x-1)} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3}$$

$$\therefore \quad \int\frac{x^2+x+1}{(x-1)^3}dx = \int\frac{1}{(x-1)}dx + \int\frac{3}{(x-1)^2}dx + \int\frac{3}{(x-1)^3}dx$$

$$= \log|x-1| - \frac{3}{(x-1)} - \frac{3}{2(x-1)^2} + c$$

उदाहरण-26. $\dfrac{1}{\sin x + \sin 2x}dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: माना $I = \displaystyle\int \frac{1}{\sin x + \sin 2x}dx$

$$= \int\frac{1}{\sin x(1+2\cos x)}dx = \int\frac{\sin x}{\sin^2 x(1+2\cos x)}dx$$

$$= \int\frac{\sin x}{(1-\cos^2 x)(1+2\cos x)}dx$$

$$= \int\frac{-dt}{(1-t^2)(1+2t)}$$ [जहाँ $\cos x = t \Rightarrow -\sin x\,dx = dt$]

$$= -\int\frac{dt}{(1-t)(1+t)(1+2t)}$$

पुनः माना $$\frac{1}{(1-t)(1+t)(1+2t)}=\frac{A}{(1-t)}+\frac{B}{(1+t)}+\frac{C}{(1+2t)}$$

या $$1=A(1+t)(1+2t)+B(1-t)(1+2t)+C(1-t)(1+t)$$

दोनों पक्षों में,

$$\left.\begin{array}{lll} t=1 \text{ रखने पर}, & 1=A(2)(3) & \Rightarrow A=1/6 \\ t=-1 \text{ रखने पर}, & 1=B(1+1)(1-2) & \Rightarrow B=-1/2 \\ t=-1/2 \text{ रखने पर}, & 1=C(1+1/2)(1-1/2) & \Rightarrow C=4/3 \end{array}\right]$$

$$\therefore \quad \frac{1}{(1-t)(1+t)(1+2t)}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(1-t)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+t)}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(1+2t)}$$

$$\therefore \quad I=-\int\left[\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(1-t)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+t)}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(1+2t)}\right]dt$$

$$=-\frac{1}{6}\frac{\log|1-t|}{(-1)}+\frac{1}{2}\log|1+t|-\frac{4}{3}\frac{\log|1+2t|}{2}+c$$

$$=\frac{1}{6}\log|1-\cos x|+\frac{1}{2}\log|1+\cos x|-\frac{2}{3}\log|1+2\cos x|+c$$

उदाहरण-27. $\frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}dx$ का x के सापेक्ष का समाकलन कीजिए–

हल: माना, $$I=\int\frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}dx$$

$$=\int\frac{dt}{(t+1)(t+3)} \qquad [\text{जहाँ } x^2=t\Rightarrow 2xdx=dt\,]$$

$$=\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+3}\right]dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\log|t+1|-\log|t+3|\right]+c$$

$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{t+1}{t+3}\right|+c=\frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)+c$$

उदाहरण-28. $\frac{1}{x(x^n-1)}dx$ का x के सापेक्ष का समाकलन कीजिए–

हल: माना $$I=\int\frac{1}{x(x^n-1)}dx$$

$$=\int\frac{x^{n-1}}{x^n(x^n-1)} \qquad (x^{n-1} \text{ का अशं व हर से गुणा करने पर})$$

पुनः माना $$x^n = t \Rightarrow nx^{n-1}dx = dt \Rightarrow x^{n-1}dx = \frac{dt}{n}$$

$$I = \frac{1}{n}\int \frac{dt}{t(t-1)} = \frac{1}{n}\int\left[\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right]dt = \frac{1}{n}[\log|t-1| - \log|t|] + c$$

$$= \frac{1}{n}\log\left|\frac{t-1}{t}\right| + c = \frac{1}{n}\log\left|\frac{x^n-1}{x^n}\right| + c$$

प्रश्नमाला 9.4

निम्नलिखित फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

(1) $\frac{1}{16-9x^2}$ (2) $\frac{1}{x^2-36}$ (3) $\frac{3x}{(x+1)(x-2)}$ (4) $\frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)}$

(5) $\frac{x^2}{(x+1)(x-2)(x-3)}$ (6) $\frac{x^2}{x^4-x^2-12}$ (7) $\frac{1}{x^3-x^2-x+1}$ (8) $\frac{x^2}{(x+1)(x-2)}$

(9) $\frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ (10) $\frac{x+1}{x^3+x^2-6x}$ (11) $\frac{x^2+8x+4}{x^3-4x}$ (12) $\frac{1}{(x-1)^2(x+2)}$

(13) $\frac{1-3x}{1+x+x^2+x^3}$ (14) $\frac{1+x^2}{x^5-x}$ (15) $\frac{x^2+5x+3}{x^2+3x+2}$ (16) $\frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)}$

(17) $\frac{1}{(1+e^x)(1-e^{-x})}$ (18) $\frac{1}{(e^x-1)^2}$ (19) $\frac{e^x}{e^{2x}+5e^x+6}$ (20) $\frac{\sec^2 x}{(2+\tan x)(3+\tan x)}$

(21) $\frac{1}{x(x^5+1)}$ (22) $\frac{1}{x(a+bx^n)}$ (23) $\frac{8}{(x+2)(x^2+4)}$ (24) $\frac{(1-\cos x)}{\cos x(1+\cos x)}$

(b) विशेष रूप के परिमेय फलनों का समाकलन (Integration of special forms of rational functions)

(i) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ (ii) $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx$

जहाँ a, b, c, p व q अचर हैं।

प्रमाण: (i) $$ax^2+bx+c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]$$

स्थिति (1): जब $b^2-4ac > o$

तब, $$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2-\lambda^2} \quad \left(\text{जहाँ } x+\frac{b}{2a} = t \text{ तथा } \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \lambda \text{ आदि}\right)$$

$$= \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2\lambda}\log\left|\frac{t-\lambda}{t+\lambda}\right| + c$$

स्थिति (2): जब $b^2-4ac<o$

तब, $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+\lambda^2}$$

$$=\frac{1}{a\lambda}\tan^{-1}\left(\frac{t}{\lambda}\right)+c$$

t तथा λ का मान पुनः प्रतिस्थापित कर अभीष्ट समाकलन का मान प्राप्त कर लेते हैं।

(ii) माना अंश $px+q=\lambda$ (हर का अवकल गुणांक) $+\mu$

या $$px+q=\lambda(2ax+b)+\mu$$

समान पदों के गुणांको की तुलना से–

$$2a\lambda=p\Rightarrow\lambda=\frac{p}{2a}$$

$$b\lambda+\mu=q\Rightarrow\mu=q-\frac{bp}{2a}$$

अतः दिया हुआ समाकल $$\int\frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx=\frac{p}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+\left(q-\frac{bp}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$=\frac{p}{2a}\log|ax^2+bx+c|+\left(q-\frac{bp}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

जहाँ द्वितीय समाकल का मान उपरोक्त (i) की विधि से ज्ञात कर लेते हैं।

(C) अपरिमेय बीजीय फलनों का समाकलन (Integration of irrational algebraic function)

अपरिमेय फलन (Irrational function): वह फलन जिसमें चर की घात भिन्नात्मक आती हो, एक अपरिमेय फलन कहलाता है।

उदारहणार्थ: $f(x)=x^{3/2}+x+1,\ g(x)=2\sqrt{x}+3,\ h(x)=\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{1-x^{1/3}}$ आदि

मानक अपरिमेय फलनों का समाकलन (Integration of standard irrational functions)

(i) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ (ii) $\displaystyle\int\frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

प्रथम विधि (i) पद $I=\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ के समाकलन की दो स्थितियाँ है–

(a) जब a > o तो

$$I=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)}}$$

इसकी तीन अवस्थाएं है

(i) जब $b^2-4ac>o$ तो

$$I=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-\lambda^2}},\ \text{जहाँ}\ t=x+\frac{b}{2a},\lambda=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\log\left|t+\sqrt{t^2-\lambda^2}\right|+c$$

(ii) जब $b^2 - 4ac < o$ तो

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \lambda^2}}, \text{ जहाँ } t = x + \frac{b}{2a}, \ \lambda = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} . \log |t + \sqrt{t^2 + \lambda^2}| + c$$

(iii) जब $b^2 - 4ac = o$

तब, $$I = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{x + \frac{b}{2a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log \left| x + \frac{b}{2a} \right| + c$$

(b) जब $a < o$ माना $a = -\propto$

तब, $$I = \int \frac{dx}{\sqrt{-\propto x^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{\propto}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{b^2 + 4c\propto}{4\alpha^2}\right) - \left(x - \frac{b}{2\propto}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\propto}} \int \frac{dt}{\sqrt{\lambda^2 - t^2}}, \text{ जहाँ } t = x - \frac{b}{2\propto}, \lambda^2 = \frac{b^2 + 4c\propto}{4\alpha^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\propto}} \sin^{-1}\left(\frac{t}{\lambda}\right) + c$$

द्वितीय विधि: $$I = \int \frac{px + q}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

माना $$px + q = A \frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) + B$$

या $$px + q = A(2ax + b) + B$$

तुलना कर हल करने पर $$A = \frac{p}{2a}, B = q - \frac{bp}{2a}$$

तब, $$I = \frac{p}{2a} \int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx + \left(q - \frac{bp}{2a}\right) \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

जहाँ प्रथम समाकल में $ax^2 + bx + c = t$ मानकर व द्वितीय समाकल को पूर्व स्थिति (I) के द्वारा हल कर सकते है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-29. $\dfrac{1}{x^2+4x+1}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

हल: माना
$$I=\int\frac{1}{x^2+4x+1}dx=\int\frac{1}{(x+2)^2-3}dx$$
$$=\int\frac{1}{(x+2)^2-(\sqrt{3})^2}dx=\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\left|\frac{x+2-\sqrt{3}}{x+2+\sqrt{3}}\right|+c$$

उदाहरण-30. $\dfrac{1}{1-6x-9x^2}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

हल: यहाँ
$$1-6x-9x^2=9\left[\frac{1}{9}-\frac{6x}{9}-x^2\right]$$
$$=9\left[\frac{2}{9}-\left(x^2+\frac{2x}{3}+\frac{1}{9}\right)\right]$$
$$=9\left[2/9-(x+1/3)^2\right]$$

$\therefore$
$$I=\int\frac{1}{1-6x-9x^2}dx$$
$$=\frac{1}{9}\int\frac{1}{2/9-(x+1/3)^2}dx=\frac{1}{9}\int\frac{1}{(\sqrt{2}/3)^2-(x+1/3)^2}dx$$
$$=\frac{1}{9\times2\times\frac{\sqrt{2}}{3}}\log\left|\frac{\sqrt{2}/3+x+1/3}{\sqrt{2}/3-x-1/3}\right|+c$$
$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{2}+1+3x}{\sqrt{2}-1-3x}\right|+c$$

उदाहरण-31. $\dfrac{5x-2}{3x^2+2x+1}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

हल: माना,
$$5x-2=A\frac{d}{dx}(3x^2+2x+1)+B$$

या
$$5x-2=A(6x+2)+B$$

तुलना से, $6A=5\ \therefore A=\dfrac{5}{6}$ तथा $B=-2-2A=-2-5/3=-11/3$

$\therefore$
$$5x-2=\frac{5}{6}(6x+2)-\frac{11}{3}$$

$\therefore$
$$I=\int\frac{5x-2}{3x^2+2x+1}dx$$
$$=\int\frac{5/6(6x+2)-11/3}{3x^2+2x+1}dx=\frac{5}{6}\int\frac{6x+2}{3x^2+2x+1}dx-\frac{11}{3}\int\frac{1}{3x^2+2x+1}dx$$
$$=\frac{5}{6}\log|3x^2+2x+1|-\frac{11}{3\times3}\int\frac{1}{x^2+2x/3+1/3}dx$$
$$=\frac{5}{6}\log|3x^2+2x+1|-\frac{11}{9}\int\frac{1}{(x+1/3)^2+(\sqrt{2}/3)^2}dx$$
$$=\frac{5}{6}\log|3x^2+2x+1|-\frac{11}{9}\times\frac{1}{\sqrt{2}/3}\tan^{-1}\left(\frac{x+1/3}{\sqrt{2}/3}\right)+c$$
$$=\frac{5}{6}\log|3x^2+2x+1|-\frac{11}{3\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{3x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$$

उदाहरण-32. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-8x+15}}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

हलः यहाँ,
$$I=\int\frac{1}{\sqrt{x^2-8x+15}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{(x-4)^2-1}}dx$$
$$=\log|(x-4)+\sqrt{x^2-8x+15}|+c$$

उदाहरण-33. $\dfrac{1}{\sqrt{1+3x-4x^2}}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

हलः माना,
$$I=\int\frac{1}{\sqrt{1+3x-4x^2}}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1/4+3x/4-x^2}}$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{25/64-(x^2-3x/4+9/64)}}$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2-\left(x-\frac{3}{8}\right)^2}}$$
$$=\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-3/8}{5/8}\right)+c=\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{8x-3}{5}\right)+c$$

उदाहरण-34. $\dfrac{2x+5}{\sqrt{x^2+3x+1}}dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

हल: यहाँ $$2x+5=(2x+3)+2$$

(अंश को सीधे निरीक्षण द्वारा (x^2+3x+1) के अवकल गुणांक में बदलने पर)

$$\therefore \quad =\int\frac{2x+5}{\sqrt{x^2+3x+1}}dx=\int\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+1}}dx+\int\frac{2}{\sqrt{x^2+3x+1}}dx$$

$$=\int\frac{dt}{\sqrt{t}}+\int\frac{2}{\sqrt{(x+3/2)^2+(\sqrt{5}/2)^2}}, \text{ जहाँ } x^2+3x+1=t$$

$$=2\sqrt{t}+2\log\left|(x+3/2)+\sqrt{x^2+3x+1}\right|+c$$

$$=2\sqrt{x^2+3x+1}+2\log\left|(x+3/2)+\sqrt{x^2+3x+1}\right|+c$$

प्रश्नमाला 9.5

निम्न फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

(1) $\dfrac{1}{x^2+2x+10}$ (2) $\dfrac{1}{2x^2+x-1}$ (3) $\dfrac{1}{9x^2-12x+8}$ (4) $\dfrac{1}{3+2x-x^2}$

(5) $\dfrac{x}{x^4+x^2+1}$ (6) $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x+4\sin x+5}$ (7) $\dfrac{x-3}{x^2+2x-4}$ (8) $\dfrac{3x+1}{2x^2-2x+3}$

(9) $\dfrac{x+1}{x^2+4x+5}$ (10) $\dfrac{(3\sin x-2)\cos x}{5-\cos^2 x-4\sin x}$ (11) $\dfrac{1}{2e^{2x}+3e^x+1}$ (12) $\dfrac{1}{\sqrt{4x^2-5x+1}}$

(13) $\dfrac{1}{\sqrt{5x-6-x^2}}$ (14) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x-x^2}}$ (15) $\dfrac{1}{\sqrt{4+3x-2x^2}}$ (16) $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-2x+4}}$

(17) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$ (18) $\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ (19) $\sqrt{\sec x-1}$ (20) $\sqrt{\dfrac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x+\alpha)}}$

(21) $\dfrac{x^3}{x^2+x+1}$ (22) $\dfrac{e^x}{e^{2x}+6e^x+5}$

IV खण्डशः समाकलन (Integration of parts):

अब तक हमने त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं, प्रतिस्थापन विधियों तथा बीजीय फलनों के समाकल ज्ञात करने की विधियों का अध्ययन किया है। परन्तु कुछ फलनों का समाकल उपर्युक्त विधियों से ज्ञात करना या तो कठिन होता है या फिर संभव नहीं होता है ऐसे में हम दिये फलनों को खण्डों में व्यक्त कर कुछ साधारण नियमों के अनुसार इनका समाकल ज्ञात करते है।

इनमें अबीजीय फलन यथा चर घांताकी, लघुगणकीय तथा प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों का समाकल ज्ञात करना प्रमुख है।

खण्डशः समाकलन का नियम या फलनो के गुणनफल का समाकलन (Rule of integration by parts or integration of product of functions):

प्रमेय: यदि u तथा v, x के दो फलन हों तो

$$\int u.v\,dx=u\left(\int v\,dx\right)=\int\left[\frac{du}{dx}.\int v\,dx\right]dx$$

प्रमाणः किन्ही दो फलनों $f(x)$ व $g(x)$ हेतु

$$\frac{d}{dx}\{f(x).g(x)\} = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

दोनो पक्षों का x के सापेक्ष समाकलन करने पर–

$$f(x).g(x) = \int\left[f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)\right]dx$$

या $$\int\left[f(x)\frac{d}{dx}g(x)\right]dx = f(x)g(x) - \int\left[g(x)\frac{d}{dx}f(x)\right]dx \qquad (1)$$

अब माना $$f(x) = u, \frac{d}{dx}[g(x)] = v \Rightarrow g(x) = \int v\,dx$$

उपरोक्त मान (1) में रखने पर

$$\therefore \qquad \int u.v\,dx = u\int v\,dx - \int\left[\frac{du}{dx}\int v\,dx\right]dx$$

अब यदि u को प्रथम फलन व v को द्वितीय फलन कहे तो खण्डशः समाकलन नियम को शब्दो में निम्न प्रकार लिख सकते है

दो फलनों के गुणा का समाकलन =प्रथम फलन $\times$ $\int$ द्वितीय फलन – $\int$ {प्रथम फलन का अवकलन $\times$ $\int$ द्वितीय फलन}

टिप्पणीः खण्डशः समाकलन विधि की सफलता प्रथम व द्वितीय फलन के सही चयन पर निर्भर करती है। फलनों का चयन इस प्रकार करना चाहिये कि द्वितीय फलन का आसानी से समाकलन ज्ञात किया जा सके। यद्यपि फलनों के चयन का कोई व्यापक नियम नहीं है फिर भी निम्न बिन्दु ध्यान में रखने चाहिए।

(i) यदि समाकल्य चर x की घात तथा चरघातांकी या त्रिकोणमितीय फलनों का गुणनफल हो तो चरघातांकी या त्रिकोणमितीय फलन को द्वितीय फलन लेना चाहिये।

(ii) अकेले प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन या लघुगणकीय फलनों के समाकलन हेतु इकाई 1 को द्वितीय फलन लेकर समाकलन करना चाहिये।

(iii) खण्डशः समाकलन करते समय दायी ओर समाकल मूल रूप में लौट कर आ जाता है ऐसी स्थिति में पक्षान्तरण कर समाकलन करना चाहिये।

(iv) आवश्यकतानुसार खण्डशः समाकलन का सूत्र एक से अधिक बार प्रयोग में लिया जा सकता है।

विशेषः हम, शब्द 'ILATE' में पहले आने वाले फलन को प्रथम फलन व बाद में आने वाले फलन को द्वितीय फलन चुन सकते है

जहाँ, I – (Inverse trigonometric functions) प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों जैसे– $\sin^{-1}x, \cos^{-1}x, \tan^{-1}x$ आदि के लिये है।

L – (Logarithmic functions) लघुगणकीय फलनों $\log x, \log(x^2+a^2)$ आदि के लिए है।

A – (Algebraic functions) बीजीय फलनों $x, x+1, 2x, \sqrt{x}$ आदि के लिए है।

T – (Trigonometric functions) त्रिकोणमितीय फलनों $\sin x, \cos x, \tan x$ आदि के लिए है।

E – (Exponential function) चरघातांकी फलनों $a^x, e^x, 2^x, 3^{-x}$ आदि के लिए है।

खण्डशः समाकलन विधि का प्रयोगः

$\int e^x[f(x)+f'(x)]dx$ तथा $\int[x f'(x)+f(x)]dx$ प्रकार के समाकलनों में

(i) माना $$I = \int e^x[f(x)+f'(x)]dx, \text{ जहाँ } f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$$

$$= \int \underset{\text{II}}{e^x}\, \underset{\text{I}}{f(x)}dx + \int e^x f'(x)dx \quad \text{(प्रथम समाकल में } e^x \text{ को IIफलन लेने पर)}$$

$$= f(x).e^x - \int f'(x)e^x dx + \int e^x f'(x)dx + c$$

(प्रथम समाकल का खण्डशः समाकलन से)

$$= e^x f(x)$$

इस प्रकार, $\int e^x[f(x)+f'(x)]dx = e^x f(x)+c$

(ii) माना $I = \int [x f'(x)+f(x)]dx$

$$= \int \underset{\text{I}}{x} \underset{\text{II}}{f'(x)}dx + \int f(x)dx$$

(प्रथम समाकल मे $f'(x)$ को द्वितीय फलन लेकर खण्डशः समाकलन करने पर)

$$= x f(x) - \int 1\times f(x)dx + \int f(x)dx$$

$$= x f(x) + c$$

$\therefore$ $\int [x f'(x)+f(x)]dx = x f(x)+c$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-35. फलन x^2e^x का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हलः माना, $I = \int \underset{\text{I}}{x^2} \underset{\text{II}}{e^x} dx$

e^x को द्वितीय फलन लेकर खण्डशः समाकलन करने पर

$$= x^2e^x - \int \underset{\text{I}}{2x} \underset{\text{II}}{e^x} dx$$

$$= x^2e^x - 2[xe^x - \int 1\times e^x dx]$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$$

$$= e^x(x^2-2x+2)+c$$

उदाहरण-36. $x\log x\,dx$ का का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

माना, $I = \int \underset{\text{II}}{x} \underset{\text{I}}{\log x}\, dx$

$\log x$ को प्रथम व x को द्वितीय फलन लेकर खण्डशः समाकलन करने पर–

$$I = (\log x)\frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x}\times\frac{x^2}{2}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}(\log x) - \frac{1}{2}\int xdx + c$$

$$= \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + c$$

उदाहरण-37. $x^2\sin 2x$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

$$I = \int \underset{\text{I}}{x^2} \underset{\text{II}}{\sin 2x}\,dx$$

x^2 प्रथम व $\sin 2x$ को द्वितीय फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर

$$I = x^2\left(\frac{-\cos 2x}{2}\right) - \int 2x\times\frac{-\cos 2x}{2}dx$$

$$= \frac{-x^2}{2}\cos 2x + \int \underset{\text{I}}{x}\cdot \underset{\text{II}}{\cos 2x}\,dx$$

x को प्रथम व $\cos 2x$ को द्वितीय फलन मानकर पुनः खण्डशः समाकलन करने पर

$$= \frac{-x^2}{2}\cos 2x + x\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) - \int 1 \times \frac{\sin 2x}{2}dx$$

$$= \frac{-x^2}{2}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{\cos 2x}{4} + c$$

उदाहरण-38. $\log x$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए–

$$I = \int \underset{\text{II}}{1} \cdot \underset{\text{I}}{\log x}\, dx$$

हल: इकाई को द्वितीय फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर

$$= (\log x)(x) - \int \frac{1}{x} \times x\, dx$$

$$= x\log x - x + c$$

$$= x(\log x - 1) + c$$

$$= x[\log x - \log e] + c = x\log(x/e) + c$$

उदाहरण-39. $\tan^{-1} x$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: माना, $I = \int \tan^{-1} x\, dx$

$$I = \int \underset{\text{II}}{1} \cdot \underset{\text{I}}{\tan^{-1} x}\, dx$$

$\tan^{-1} x$ को प्रथम व इकाई को द्वितीय फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर

$$= \left(\tan^{-1} x\right)(x) - \int \frac{1}{1+x^2} \times x\, dx$$

$$= x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$= x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right) + c$$ (जहाँ $1+x^2 = t$ मानने पर)

उदाहरण-40. $\cos^{-1}\sqrt{\frac{x}{a+x}}dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: माना, $I = \int \cos^{-1}\sqrt{\frac{x}{a+x}}dx$

माना $x = a\tan^2\theta \Rightarrow dx = 2a\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta$

$\therefore$ $I = \int \cos^{-1}\sqrt{\left(\frac{a\tan^2\theta}{a + a\tan^2\theta}\right)} \times 2a\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta$

$$= \int \cos^{-1}\left(\frac{\tan\theta}{\sec\theta}\right) \times 2a\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= 2a\int \cos^{-1}(\sin\theta).\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= 2a\int \cos^{-1}[\cos(\pi/2-\theta)].\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= 2a\int (\pi/2-\theta).\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta$$

$(\pi/2-\theta)$ को प्रथम व $\tan\theta\sec^2\theta$ को द्वितीय फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर–

$$I = 2a\left[\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\frac{\tan^2\theta}{2} - \int -1\times\frac{\tan^2\theta}{2}d\theta\right]$$

$$\left[\because \int \tan\theta\sec^2\theta\, d\theta = \frac{\tan^2\theta}{2}\right]$$

$$= a(\pi/2-\theta)\tan^2\theta + \text{a}\int(\sec^2\theta-1)d\theta$$

$$= a(\pi/2-\theta)\tan^2\theta + a[\tan\theta-\theta]+c$$

$$= a\left[\pi/2-\tan^{-1}\sqrt{x/a}\right](x/a)+a\left[\sqrt{x/a}-\tan^{-1}\sqrt{x/a}\right]+c$$

$$= x\cdot\frac{\pi}{2} - x\tan^{-1}\sqrt{x/a}+\sqrt{ax}-a\tan^{-1}\sqrt{x/a}+c$$

या
$$I = x\cdot\frac{\pi}{2}-(a+x)\tan^{-1}\sqrt{x/a}+\sqrt{ax}+c$$

उदाहरण-41. $\int \log[x+\sqrt{x^2+a^2}\,]\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ
$$I = \int \underset{\text{II}}{1}\cdot\underset{\text{I}}{\log(x+\sqrt{x^2+a^2})}\,dx$$

इकाई को द्वितीय फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर–

$$I = \log[x+\sqrt{x^2+a^2}\,].x - \int\frac{1}{[x+\sqrt{x^2+a^2}\,]}\times\left[1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}\right]x\,dx$$

$$= x\log[x+\sqrt{x^2+a^2}\,] - \int\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+a^2}\,)}\times\frac{(\sqrt{x^2+a^2}+x)}{\sqrt{x^2+a^2}}\times x\,dx$$

$$= x\log[x+\sqrt{x^2+a^2}\,] - \int\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

(समाकलन में $x^2+a^2=t$ मानकर सरल करने पर)

$$= x\log[x+\sqrt{x^2+a^2}\,] - \frac{1}{2}\times 2\sqrt{x^2+a^2}+c$$

$$= x\log[x+\sqrt{x^2+a^2}\,] - \sqrt{x^2+a^2}+c$$

उदाहरण-42. $\dfrac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: माना
$$I=\int\frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}dx$$
$$=\int\frac{x}{\cos x}\cdot\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}dx \qquad \left(\text{अंश में } x^2=\frac{x}{\cos x}\times x\cos x \text{ लिखने पर}\right)$$

$\dfrac{x}{\cos x}$ को प्रथम फलन व शेष को द्वितीय फलन मानकर खण्डश: समाकलन करने पर–
$$I=\frac{x}{\cos x}\times\int\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}dx-\int\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\cos x}\right)\times\int\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}dx\right]dx$$

माना $x\sin x+\cos x=t\Rightarrow x\cos x\,dx=dt$
$$=\frac{x}{\cos x}\times\left[\frac{-1}{x\sin x+\cos x}\right]+\int\frac{\left[\cos x+(\sin x)x\right]}{\cos^2 x}\times\frac{1}{(x\sin x+\cos x)}dx$$
$$=\frac{-x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\int\sec^2 x\,dx$$
$$=\frac{-x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\tan x+c$$
$$=\frac{-x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\frac{\sin x}{\cos x}+c$$
$$=\frac{-x+\sin x(x\sin x+\cos x)}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+c$$
$$=\frac{-x+x\sin^2 x+\sin x\cos x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+c$$
$$=\frac{-x(1-\sin^2 x)+\sin x\cos x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+c$$
$$=\frac{-x\cos^2 x+\sin x\cos x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+c$$
$$=\frac{\sin x-x\cos x}{x\sin x+\cos x}+c$$

उदाहरण-43. $\dfrac{x+\sin x}{1+\cos x}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: माना
$$I=\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{x+2\sin x/2\cos x/2}{2\cos^2 x/2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int \underset{\text{I}}{x}\,\underset{\text{II}}{\sec^2 x/2}\,dx+\int\tan x/2\,dx$$

प्रथम समाकल में x को प्रथम फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर

$$= \frac{1}{2}\left[2x\tan x/2 - \int 1\times 2\tan x/2\,dx\right] + \int \tan x/2\,dx$$

$$= x\tan x/2 - \int \tan x/2\,dx + \int \tan x/2\,dx$$

$$= x\tan x/2 + c$$

उदाहरण-44. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$ का मान ज्ञात कीजिए–

माना $$I = \int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = \int \frac{\left(\overline{x+1}-1\right)e^x}{(x+1)^2}dx$$

$$= \int\left[\frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2}\right]e^x dx$$

$$= \int \frac{e^x}{(x+1)}dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2}dx$$

(प्रथम समाकल में $\frac{1}{x+1}$ को प्रथम फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर)

$$= \left[\frac{1}{(x+1)}\times e^x - \int -\frac{1}{(x+1)^2}e^x dx\right] - \int \frac{e^x}{(x+1)^2}dx$$

$$= \frac{e^x}{x+1} + \int \frac{e^x}{(x+1)^2}dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2}dx = \frac{e^x}{x+1} + c$$

प्रश्नमाला 9.6

निम्न फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

1. (i) $x\cos x$ (ii) $x\sec^2 x$
2. (i) $x^3 e^{-x}$ (ii) $x^3 \sin x$
3. (i) $x^3(\log x)^2$ (ii) $x^3 e^{x^2}$
4. (i) $e^{2x} e^{e^x}$ (ii) $(\log x)^2$
5. (i) $\cos^{-1} x$ (ii) $\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{\frac{x+a}{x}}$
6. (i) $\sin^{-1}\left(3x-4x^3\right)$ (ii) $\frac{x}{1+\cos x}$
7. (i) $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ (संकेत : $x=\cos\theta$) (ii) $\cos\sqrt{x}$
8. (i) $\frac{x}{1+\sin x}$ (ii) $x^2\tan^{-1}x$
9. $\frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $\frac{x\tan^{-1}x}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$
11. $e^x\left(\cot x + \log\sin x\right)$
12. $\frac{2x+\sin 2x}{1+\cos 2x}$
13. $e^x\left(\frac{1-\sin x}{1-\cos x}\right)$
14. $e^x\left[\log x + \frac{1}{x^2}\right]$
15. $e^x[\log(\sec x+\tan x)+\sec x]$

16. $e^x(\sin x+\cos x)\sec^2 x$

17. $e^x\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)$

18. $e^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2$ $\left(\text{संकेत} = \left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 = \frac{1}{(1+x^2)}-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)$

19. $\cos 2\theta.\log\left(\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\right)$

20. $\frac{x^2}{(x\cos x-\sin x)^2}$

21. $\cos^{-1}(1/x)$

22. $(\sin^{-1}x)^2$

9.08 कुछ विशिष्ट प्रकार के समाकल (Some special type of Integral)

कई बार दो फलनों के गुणनफल का खण्डशः समाकलन विधि से समाकलन करते समय समाकल का अन्त नहीं होता, चाहे किसी भी फलन को प्रथम या द्वितीय चुनें। ऐसा चरघातांकी व त्रिकोणमितीय फलनों के गुणनफल में होता है। फलतः फलन का समाकलन करने के दो चरणों के बाद पुनः मूल समाकल आ जाता है तब पक्षों का पक्षान्तरण कर समाकल का मान ज्ञात किया जाता है।

उदाहरणार्थः

$e^{ax}\sin bx$ तथा $e^{ax}\cos bx$ का समाकलनः

माना, $$I=\int \underset{\text{II}}{e^{ax}}\,\underset{\text{I}}{\sin bx}\,dx$$

$\sin bx$ को प्रथम व e^{ax} को द्वितीय फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर

$$I=\sin bx\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)-\int b\cos bx\times\frac{e^{ax}}{a}dx$$

या $$I=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int \underset{\text{II}}{e^{ax}}\,\underset{\text{I}}{\cos bx}\,dx$$

$\cos bx$ को प्रथम e^{ax} को द्वितीय फलन मानकर पुनः खण्डशः समाकलन करने पर–

$$I=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\left[\cos bx.\frac{e^{ax}}{a}-\int -b\sin bx\times\frac{e^{ax}}{a}dx\right]$$

या $$I=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx\,dx$$

या $$I=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx-\frac{b^2}{a^2}I$$

या $$I\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)=\frac{e^{ax}}{a^2}(a\sin bx-b\cos bx)$$ [अंतिम पद का पक्षान्तरण करने पर]

या $$I=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+c$$

या $$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx-b\cos bx]+c$$

इसी प्रकार, $$\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx+b\sin bx]+c$$

9.09 तीन महत्वपूर्ण समाकल (Three important integrals)

(i) $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$ (ii) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$ (iii) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

(i) माना
$$I = \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \int \underset{\text{I}}{\sqrt{x^2+a^2}} \cdot \underset{\text{II}}{1}\,dx$$

यहाँ हम $\sqrt{a^2+x^2}$ को प्रथम व इकाई को द्वितीय फलन मानकर खण्डशः समाकलन करेंगे–

$$I = \sqrt{x^2+a^2} \times x - \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}} \times x\,dx$$

या
$$I = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$$

या
$$I = x\sqrt{x^2+a^2} - I + a^2 \log|x+\sqrt{x^2+a^2}| + c_1$$

या
$$2I = x\sqrt{x^2+a^2} + a^2 \log|x+\sqrt{x^2+a^2}| + c_1$$

या
$$I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log|x+\sqrt{x^2+a^2}| + \frac{c_1}{2}$$

या
$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log|x+\sqrt{x^2+a^2}| + c \qquad (\text{जहाँ } c_1/2 = c)$$

इसी प्रकार

(ii)
$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log|x+\sqrt{x^2-a^2}| + c$$

(iii)
$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-45. $e^{3x}\sin 4x$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: माना
$$I = \int \underset{\text{II}}{e^{3x}} \underset{\text{I}}{\sin 4x}\,dx$$

$\sin 4x$ को प्रथम व e^{3x} को द्वितीय फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर–

$$I = \sin 4x . \frac{e^{3x}}{3} - \int 4\cos 4x \times \frac{e^{3x}}{3}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{3}\int \underset{\text{II}}{e^{3x}} \underset{\text{I}}{\cos 4x}\,dx$$

$\cos 4x$ को प्रथम फलन मानकर पुनः खण्डशः समाकलन करने पर–

$$I = \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{3}\left[\cos 4x.\frac{e^{3x}}{3} - \int -4\sin 4x \times \frac{e^{3x}}{3}dx\right]$$

या $$I = \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{9}e^{3x}\cos 4x - \frac{16}{9}\int e^{3x}\sin 4x\,dx$$

या $$I = \frac{e^{3x}}{9}[3\sin 4x - 4\cos 4x] - \frac{16}{9}I + c_1$$

या $$\frac{25}{9}I = \frac{1}{9}e^{3x}(3\sin 4x - 4\cos 4x) + c_1$$

या $$I = \frac{e^{3x}}{25}[3\sin 4x - 4\cos 4x] + c$$

उदाहरण-46. $\int \frac{\sin(\log x)}{x^3}dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: माना $$I = \int \frac{\sin(\log x)}{x^3}dx$$

माना $$\log x = t \Rightarrow x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt$$

$$= \int \frac{(\sin t)e^t dt}{(e^t)^3} = \int e^{-2t}\sin t\,dt$$

$$= \frac{e^{-2t}}{(-2)^2 + (1)^2}[-2\sin t - \cos t] + c$$

$$\left[\because \int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx]\right]$$

$$= \frac{x^{-2}}{5}\left[-2\sin(\log x) - \cos(\log x)\right] + c$$

$$I = -\frac{1}{5x^2}\left[2\sin(\log x) + \cos(\log x)\right] + c$$

उदाहरण-47. $\frac{xe^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

माना $$I = \int \frac{xe^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

माना $$\sin^{-1}x = t \Rightarrow x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t\,dt$$

$$= \int \frac{\sin t.e^t}{\cos t} \times \cos t\,dt = \int e^t \sin t\,dt$$

$$= \frac{e^t}{2}[\sin t - \cos t] + c = \frac{e^{\sin^{-1}x}}{2}\left[x - \sqrt{1-x^2}\right] + c$$

उदाहरण-48. $e^{3x}\cos(4x+5)dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: माना, $$I=\int \underset{\text{II}}{e^{3x}}\underset{\text{I}}{\cos(4x+5)}dx$$

खण्डशः समाकलन करने पर

$$I=\cos(4x+5).\frac{e^{3x}}{3}-\int -4\sin(4x+5)\times\frac{e^{3x}}{3}dx$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}\cos(4x+5)+\frac{4}{3}\int \underset{\text{II}}{e^{3x}}\underset{\text{I}}{\sin(4x+5)}dx$$

पुनः खण्डशः समाकलन करने पर

$$I=\frac{1}{3}e^{3x}\cos(4x+5)+\frac{4}{3}\left[\sin(4x+5)\times\frac{e^{3x}}{3}-\int 4\cos(4x+5)\times\frac{e^{3x}}{3}dx\right]$$

या $$I=\frac{1}{3}e^{3x}\cos(4x+5)+\frac{4}{9}e^{3x}\sin(4x+5)-\frac{16}{9}\int e^{3x}\cos(4x+5)dx$$

या $$I=\frac{1}{9}e^{3x}\left[3\cos(4x+5)+4\sin(4x+5)\right]-\frac{16}{9}I+c_1$$

या $$\frac{25}{9}I=\frac{1}{9}e^{3x}\left[3\cos(4x+5)+4\sin(4x+5)\right]+c_1$$

या $$I=\frac{e^{3x}}{25}\left[3\cos(4x+5)+4\sin(4x+5)\right]+c$$

उदाहरण-49. निम्नलिखित फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

(i) $\sqrt{x^2+2x+5}$ (ii) $\sqrt{3-2x-x^2}$ (iii) $\sqrt{x^2+8x-6}$

हल: (i) $$I=\int\sqrt{x^2+2x+5}\,dx=\int\sqrt{(x+1)^2+(2)^2}dx$$

$$=\frac{(x+1)}{2}\sqrt{(x+1)^2+(2)^2}+\frac{(2)^2}{2}\log\left|(x+1)+\sqrt{(x+1)^2+2^2}\right|+c$$

$$=\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+5}+2\log\left|(x+1)+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+c$$

(ii) $$I=\int\sqrt{3-2x-x^2}dx=\int\sqrt{4-(x^2+2x+1)}dx$$

$$=\int\sqrt{(2)^2-(x+1)^2}dx$$

$$=\frac{(x+1)}{2}\sqrt{(2)^2-(x+1)^2}+\frac{(2)^2}{2}\sin^{-1}\frac{(x+1)}{2}+c$$

$$=\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+2\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+c$$

(iii) माना,
$$I = \int \sqrt{x^2 + 8x - 6}\, dx$$
$$= \int \sqrt{(x+4)^2 - 22}\, dx$$
$$= \frac{x+4}{2}\sqrt{(x+4)^2 - 22} - \frac{22}{2}\log\left|(x+4) + \sqrt{(x+4)^2 - 22}\right| + c$$
$$= \frac{(x+4)}{2}\sqrt{x^2 + 8x - 6} - 11\log\left|(x+4) + \sqrt{x^2 + 8x - 6}\right| + c$$

उदाहरण-50. $\sec^3 x\, dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: माना
$$I = \int \sec x . \sec^2 x\, dx$$
$$= \int \sqrt{1 + \tan^2 x} . \sec^2 x dx$$

माना
$$\tan x = t \qquad \therefore \sec^2 x\, dx = dt$$
$$I = \int \sqrt{1 + t^2} . dt$$
$$= \frac{t}{2}\sqrt{1 + t^2} + \frac{1}{2}\log\left|t + \sqrt{1 + t^2}\right| + c$$
$$= \frac{\tan x}{2}\sqrt{1 + \tan^2 x} + \frac{1}{2}\log\left|\tan x + \sqrt{1 + \tan^2 x}\right| + c$$
$$= \frac{1}{2}\tan x \sec x + \frac{1}{2}\log\left|\tan x + \sec x\right| + c$$

उदाहरण-51. $e^{\sin x}\cos x\sqrt{4 - e^{2\sin x}}dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: माना
$$I = \int e^{\sin x}\cos x\sqrt{4 - e^{2\sin x}}dx$$

माना
$$e^{\sin x} = t \Rightarrow \cos x . e^{\sin x} dx = dt$$

$\therefore$
$$I = \int \sqrt{4 - t^2} dt$$
$$= \frac{t}{2}\sqrt{4 - t^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{t}{2} + c$$
$$= \frac{1}{2}e^{\sin x}\sqrt{4 - e^{2\sin x}} + 2\sin^{-1}\left(\frac{e^{\sin x}}{2}\right) + c$$

प्रश्नमाला 9.7

निम्नफलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

1. $e^{2x}\cos x$	2. $\sin(\log x)$	3. $\dfrac{e^{a\tan^{-1}x}}{(1+x^2)^{3/2}}$	4. $e^{x/\sqrt{2}}\cos(x+\propto)$
5. $e^x \sin^2 x$	6. $e^{a\sin^{-1}x}$	7. $\cos(b\log x/a)$	8. $e^{4x}\cos 4x\cos 2x$
9. $\sqrt{2x - x^2}$	10. $\sqrt{x^2 + 4x + 6}$	11. $\sqrt{x^2 + 6x - 4}$	12. $\sqrt{2x^2 + 3x + 4}$
13. $x^2\sqrt{a^6 - x^6}$	14. $(x+1)\sqrt{x^2 + 1}$	15. $\sqrt{1 - 4x - x^2}$	16. $\sqrt{4 - 3x - 2x^2}$

विविध उदाहरण

उदाहरण-52. $\dfrac{1}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: माना,
$$I=\int\frac{1}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}dx$$

$\cos^2 x$ का अंश व हल में भाग देने पर

$$I=\int\frac{\sec^2 x dx}{a^2+b^2\tan^2 x}$$

माना $\tan x=t$ तब $\sec^2 x\,dx=dt$

$$\therefore\quad I=\int\frac{dt}{a^2+b^2t^2}=\frac{1}{b^2}\int\frac{dt}{t^2+(a/b)^2}$$

$$=\frac{1}{b^2}\times\frac{1}{(a/b)}\tan^{-1}\left(\frac{t}{a/b}\right)+c$$

$$=\frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{bt}{a}\right)+c$$

$$=\frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\tan x\right)+c$$

उदाहरण-53. $\dfrac{1}{x^{1/2}+x^{1/3}}dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: यहाँ
$$I=\int\frac{1}{x^{1/2}+x^{1/3}}dx$$

माना $x=t^6\Rightarrow dx=6t^5\,dt$

$$\therefore\quad I=\int\frac{6t^5}{t^3+t^2}dt$$

$$=\int\frac{6t^3}{t+1}dt=6\int\left[t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right]dt$$

$$=6\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\log|t+1|\right]+c$$

$$=6\left[\frac{\sqrt{x}}{3}-\frac{x^{1/3}}{2}+x^{1/6}-\log(x^{1/6}+1)\right]+c$$

उदाहरण-54. $\cos\sqrt{x}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: $$I=\int\cos\sqrt{x}\,dx$$

माना $$\sqrt{x}=t\Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt\Rightarrow dx=2t\,dt$$

$\therefore$ $$I=\int\cos t\times 2t\,dt$$

$$=2\int\underset{\text{I}}{t}\,\underset{\text{II}}{\cos t}\,dt$$

$$=2\left[t\sin t-\int 1\times\sin t\,dt\right]$$

$$=2[t\sin t+\cos t]+c$$

$$=2\left[\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}\right]+c$$

उदाहरण-55. $\dfrac{\sqrt{\tan x}}{\sin x\cos x}dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: माना $$I=\int\frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x\cos x}dx=\int\frac{\sqrt{\tan x}}{\tan x\cos^2 x}dx$$

हर में $\cos x$ का गुणा व भाग करने पर

$$=\int\frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan x}}dx$$ माना $\tan x=t$ $\quad\therefore\sec^2 x dx=dt$

$$=\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}+c=2\sqrt{\tan x}+c$$

उदाहरण-56. $\left(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}\right)dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: माना $$I=\int\left(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}\right)dx=\int\left[\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}}+\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}}\right]dx$$

$$=\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin x\cos x}}dx=\sqrt{2}\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2\sin x\cos x}}dx$$

$$=\sqrt{2}\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1-(1-2\sin x\cos x)}}dx=\sqrt{2}\int\frac{(\sin x+\cos x)}{\sqrt{1-(\sin x-\cos x)^2}}dx$$

माना $$\sin x-\cos x=t\Rightarrow(\cos x+\sin x)dx=dt$$

$\therefore$ $$I=\sqrt{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\sqrt{2}\sin^{-1}t+c$$

$$=\sqrt{2}\sin^{-1}(\sin x-\cos x)+c$$

उदाहरण-57. $\dfrac{[x^5-x]^{1/5}}{x^6}dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल:
$$I=\int\frac{[x^5-x]^{1/5}}{x^6}dx=\int\frac{x(1-1/x^4)^{1/5}}{x^6}dx$$
$$=\int\frac{(1-1/x^4)^{1/5}}{x^5}dx$$

माना $\left(1-\dfrac{1}{x^4}\right)=t\Rightarrow\dfrac{4}{x^5}dx=dt\Rightarrow\dfrac{1}{x^5}dx=\dfrac{dt}{4}$

$\therefore$
$$I=\frac{1}{4}\int t^{1/5}dt=\frac{1}{4}\frac{t^{1/5+1}}{(1/5+1)}+c$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{5}{6}t^{6/5}+c=\frac{5}{24}\left(1-\frac{1}{x^4}\right)^{6/5}+c$$

विविध प्रश्नमाला—9

निम्न फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

1. $1+2\tan x(\tan x+\sec x)$
2. $e^x\sin^3 x\,dx$
3. $x^2\log(1-x^2)dx$
4. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{(x+a)}}$ संकेत $x=a\tan^2\theta$
5. $\dfrac{\sin^8 x-\cos^8 x}{1-2\sin^2 x\cos^2 x}$
6. $\dfrac{x}{1+\sin x}$
7. $\dfrac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$
8. $\dfrac{2x-1}{(1+x)^2}$
9. $\dfrac{1}{\cos 2x+\cos 2\propto}$
10. $\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$
11. $\dfrac{\sin x-\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$
12. $\dfrac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ [संकेत: $\cos^4 x$ का भाग दे]
13. $\dfrac{1+x}{(2+x)^2}$
14. $\dfrac{\sin^6 x+\cos^6 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$
15. $\dfrac{\tan^{-1}x}{x^2}$
16. $\dfrac{1}{\sin^2 x+\sin 2x}$
17. $\dfrac{1}{4x^2-4x+3}$
18. $\dfrac{1}{x[6(\log x)^2+7(\log x)+2]}$
19. $\dfrac{\sin 2x\cos 2x}{\sqrt{4-\sin^4 2x}}$
20. $\dfrac{\sin x+\cos x}{9+16\sin 2x}$
21. $\dfrac{3x-1}{(x-2)^2}$
22. $\displaystyle\int\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}dx$ बराबर है–

    (क) $\tan x+x+c$ (ख) $\cot x+x+c$ (ग) $\tan x-x+c$ (घ) $\cot x-x+c$
23. $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{32-2x^2}}dx$ बराबर है–

    (क) $\sin^{-1}(x/4)+c$ (ख) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}(x/4)+c$ (ग) $\sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}x}{4}\right)+c$ (घ) $\cos^{-1}(x/4)+c$

24. $\int \log x \, dx$ बराबर है–

(क) $x\log(xe)+c$ (ख) $x\log x+c$ (ग) $x\log(x/e)+c$ (घ) $\log x/e$

25. $\int \frac{dx}{x(x+1)}$ बराबर है–

(क) $\log\left(\frac{x}{x+1}\right)+c$ (ख) $\log\left(\frac{x+1}{x}\right)+c$ (ग) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{x}{x+1}\right)+c$ (घ) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{x}\right)+c$

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. यदि दिया गया फलन $f(x)$ तथा उसका समाकलन $F(x)$ है तो समाकलन की परिभाषा से, $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$.
2. समाकलन को प्रतिअवकलज या पूर्वग भी कहते है यह अवकलन की प्रतिलोम प्रक्रिया है।
3. किसी अचर k हेतु $\int k\, f(x)dx = k\int f(x)dx$
4. $\int\left[f_1(x)\pm f_2(x)\right]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$
5. समाकलन के कुछ मानक सूत्र–

(i) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c, \quad n\neq -1$ (ii) $\int \frac{1}{x}dx = \log|x|+c$

(iii) $\int e^x dx = e^x + c$ (iv) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}+c$

(v) $\int \sin x dx = -\cos x + c$ (vi) $\int \cos x dx = \sin x + c$

(vii) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$ (viii) $\int \cos ec^2 x\, dx = -\cot x + c$

(ix) $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$ (x) $\int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x + c$

(xi) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1}x + c = -\cos^{-1}x + c$ (xii) $\int \frac{1}{1+x^2} = \tan^{-1}x + c = -\cot^{-1}x + c$

(xiii) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}x + c = -\operatorname{cosec}^{-1}x + c$ (xiv) $\int \frac{|x|}{x}dx = |x| + c, \quad x\neq o$

(xv) $\int dx = x + c$ (xvi) $\int o\, dx = c$

6. प्रतिस्थापन योग्य समाकल्य

(i) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)|+c$ (ii) $\int [f(x)]^n f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+c$

(iii) $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+c$ (iv) $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\log|ax+b|+c$

(v) $\int e^{ax+b}dx = \frac{e^{ax+b}}{a}+c$ (vi) $\int \sin(ax+b)dx = \frac{-\cos(ax+b)}{a}+c$

(vii) $\int \cos(ax+b)dx = \frac{\sin(ax+b)}{a}+c$

7. मानक सूत्रों में प्रतिस्थापन विधि का प्रयोग–

(i) $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c$ (ii) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \sin^{-1}x/a+c$

(iii) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \log|x+\sqrt{x^2+a^2}|+c$ (iv) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \log|x+\sqrt{x^2-a^2}|+c$

8. मानक समाकल

(i) $\int \frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$ (ii) $\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$

(iii) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+c$

(iv) $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\log|x+\sqrt{a^2+x^2}|+c$

(v) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\log|x+\sqrt{x^2-a^2}|+c$

(vi) $\int \tan x dx = \log|\sec x|+c$ (vii) $\int \cot x dx = \log|\sin x|+c$

(viii) $\int \sec x\,dx = \log|\sec x+\tan x|+\text{c} = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+c$

(ix) $\int \operatorname{cosec} x dx = \log|\operatorname{cosec} x-\cot x|+c = \log|\tan x/2|+c$

9. खण्डशः समाकलन

(i) दो फलनों के गुणनफल का समाकलन

=(प्रथम फलन)× ∫ द्वितीय फलन का समाकलन– ∫ प्रथम फलन का अवकलन× ∫ द्वितीय फलन का समाकलन)का समाकलन

अर्थात, $\int \underset{\text{I}}{u}\,\underset{\text{II}}{v}\,dx = u\int v dx - \int\left[\frac{du}{dx}\times\int v dx\right]dx$

(ii) $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx]+c = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\sin[bx-\tan^{-1}b/a]+c$

(iii) $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx]+c = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\cos\left[bx-\tan^{-1}b/a\right]+c$

(iv) $\int e^x[f(x)+f'(x)]dx = e^x f(x)+c$

(v) $\int [x f'(x)+f(x)]dx = x f(x)+c$

(vi) $\int [f(\log x)+f'(\log x)]dx = xf(\log x)+c$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 9.1

1. (i) $\frac{3}{5}\cdot x^{5/3}+c$ (ii) $\frac{e^{3x}}{3}+c$ (iii) $\frac{(1/2)^x}{(\log 1/2)}+c$ (iv) $\frac{x^3}{3}+c$
2. $5\sin x+3\cos x+2\tan x+c$
3. $x^2/2+1/x+c$
4. $\tan x-\cot x+c$
5. $2/3\cdot x^{3/2}+2/5\cdot x^{5/2}+c$
6. $\frac{a^{x+1}}{x+1}+c$
7. $x-\tan^{-1}x+c$
8. $x+\cos x+c$
9. $\tan x+\sec x+c$
10. $(\pi/2)x+c$
11. $x-2\tan^{-1}x+c$
12. $\tan x-x+c$
13. $-\cot x-x+c$
14. $\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}+\frac{2}{3}x^{3/2}+c$
15. $\tan x+\cot x+c$
16. $x-\tan x+\sec x+c$
17. $-\cot x-\cot x\,\mathrm{cosec}\,x+c$
18. $x+\tan^{-1}x+3sec^{-1}x+\frac{2^x}{\log 2}+c$
19. $x+\mathrm{cosec}\,x+c$
20. $x^2/2+\log|x|+2x+c$
21. $x+c$
22. $\sqrt{2}\sin x+c$
23. $-\cot x-\tan x+c$
24. $-3\,\mathrm{cosec}\,x-4\cot x+c$

प्रश्नमाला 9.2

1. (i) $(-1/2)\cos x^2+c$ (ii) $\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}+c$
2. (i) $\log|e^x+\cos x|+c$ (ii) $2\sqrt{1+e^x}+c$
3. (i) $2\sqrt{e^x+1}+\log\left|\frac{e^x}{e^x+2}\right|+c$ (ii) $2\sin(e^{\sqrt{x}})+c$
4. (i) $\log|1+\log x|+c$ (ii) $\frac{1}{4}(1+\log x)^4+c$
5. (i) $\frac{e^{m\tan^{-1}x}}{m}+c$ (ii) $\frac{(\tan x)^{p+1}}{p+1}+c$
6. (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}\log|\sec x+\tan x|+c$; (ii) $\log|\mathrm{cosec}2x-\cot 2x|+\log|\mathrm{cosec}x-\cot x|+c$
7. (i) $\frac{1}{2}\left[\sin x-\frac{1}{5}\sin 5x\right]+c$ (ii) $\pm 2(\sin x/2+\cos x/2)+c$
8. (i) $\frac{1}{8}\left[3x+2\sin 2x+\frac{1}{2}\sin 4x\right]+c$; (ii) $\frac{-3}{4}\cos x-\frac{1}{12}\cos 3x+c$
9. (i) $\log|\tan x|+\frac{1}{2}\tan^2 x+c$; (ii) $\tan(xe^x)+c$
10. (i) $\frac{1}{2}[x+\log|\sin x-\cos x|]+c$; (ii) $\frac{1}{2}[x+\log|\sin x+\cos x|]+c$
11. (i) $2\sqrt{\tan x}+\frac{2}{3}\tan^{5/2}x+c$ (ii) $\log|\sin x+\cos x|+c$
12. (i) $x\cos 2a+\sin 2a.\log|\sin(x-a)|+c$; (ii) $x\cos a+\sin a.\log|\sin(x-a)|+c$

13. (i) $\frac{1}{3}\log|\sin 3x| - \frac{1}{5}\log|\sin 5x| + c$; (ii) $\log|\sin(x+\pi/6)\sin(x-\pi/6)| + c$

14. (i) $\frac{1}{5}\log\left|\tan\left(\frac{x+\tan^{-1}(4/3)}{2}\right)\right| + c$; (ii) $\operatorname{cosec}(a-b)\log\left|\frac{\sin(x-a)}{\sin(x-b)}\right| + c$

15. (i) $\frac{1}{2(b-a)}\log(a\cos^2 x + b\sin^2 x) + c$; (ii) $\sqrt{2}\sec\propto\sqrt{\tan x\cos\propto + \sin\propto} + c$

16. (i) $\frac{2}{\cos a}\sqrt{\tan x\cos a + \sin a} + c$; (ii) $2[\sin x + x\cos\propto] + c$

प्रश्नमाला 9.3

1. (i) $\frac{1}{10}\tan^{-1}\frac{x}{5} + c$; (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\frac{x}{4} + c$

2. (i) $\log|1-\sqrt{1-e^{2x}}| + c$; (ii) $\frac{1}{2}\log\left[2x+\sqrt{4x^2+1}\right] + c$

3. (i) $\frac{1}{b}\sin^{-1}\left(\frac{bx}{a}\right) + c$; (ii) $-\log|(2-x)+\sqrt{x^2-4x+5}| + c$

4. (i) $\frac{1}{3}\log|x^3+\sqrt{x^6+4}| + c$; (ii) $\frac{1}{5}\sin^{-1}(x^5) + c$

5. (i) $\tan^{-1}(x+3) + c$; (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|(x-1/4)+\sqrt{x^2-1/2x+1}\right| + c$

6. (i) $\frac{1}{\sin\propto}\tan^{-1}\left(\frac{e^x+\cos\propto}{\sin\propto}\right) + c$; (ii) $\log|\tan x + \sqrt{\tan^2 x + 3}| + c$

7. (i) $\sin^{-1}(2x-3) + c$; (ii) $\frac{1}{\sqrt{5}}\sin^{-1}\left(\frac{5x-4}{6}\right) + c$

8. (i) $\sin^{-1}(\sin x - \cos x) + c$; (ii) $\log|(x+a)+\sqrt{x^2+2xa+b^2}| + c$

9. (i) $a\sin^{-1}\sqrt{x/a} + \sqrt{x}\sqrt{a-x} + c$; (ii) $-a\cos^{-1}x/a - \sqrt{a^2-x^2} + c$

10. (i) $\frac{2}{3}\sin^{-1}(x/a)^{3/2} + c$; (ii) $\frac{1}{a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + c$

11. (i) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + c$; (ii) $\sqrt{x^2+1} + \log(x+\sqrt{x^2+1}) + c$

12. (i) $2\sin^{-1}\left(\frac{x-\propto}{\beta-x}\right) + c$; (ii) $\sin^{-1}(x-1) + c$

13. (i) $\log\left|(x-3/2)+\sqrt{x^2-3x+2}\right| + c$; (ii) $\sin^{-1}\left(\frac{\sin x}{2}\right) + c$

प्रश्नमाला 9.4

1. $\frac{1}{24}\log\left|\frac{4x-3}{4x+3}\right| + c$

2. $\frac{1}{12}\log\left|\frac{x-6}{x+6}\right| + c$

3. $\log|x+1| + 2\log|x-2| + c$

4. $\frac{11}{4}\log\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + \frac{5}{2}\log\left|\frac{1}{x+1}\right| + c$

5. $-\frac{1}{6}\log|x+1| + \frac{4}{5}\log|x-2| + \frac{9}{10}\log|x+3| + c$

6. $\frac{1}{7}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+\frac{\sqrt{3}}{7}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+c$

7. $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{1}{2(x-1)}+c$

8. $x+\frac{1}{3}\log\frac{(x-2)^4}{|x+1|}+c$

9. $\frac{1}{a^2-b^2}[a\tan^{-1}x/a-b\tan^{-1}x/b]+c$

10. $-\frac{1}{6}\log|x|+\frac{3}{10}\log|x-2|-\frac{2}{15}\log|x+3|+c$

11. $-\log|x|+3\log|x-2|-\log|x+2|+c$

12. $\frac{1}{9}\log\left|\frac{x+2}{x-1}\right|-\frac{1}{3(x-1)}+c$

13. $\log\frac{(1+x)^2}{1+x^2}-\tan^{-1}x+c$

14. $\log|x|-\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+c$

15. $x+3\log|x+2|-\log|x+1|+c$

16. $\log\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|}+c$

17. $\frac{1}{2}\log\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+c$

18. $\log\left|\frac{e^x}{e^x-1}\right|-\frac{1}{e^x-1}+c$

19. $\log\left|\frac{2+e^x}{3+e^x}\right|+c$

20. $\log\left|\left(\frac{2+\tan x}{3+\tan x}\right)\right|+c$

21. $\log|x|-\frac{1}{5}\log|x^5+1|+c$

22. $\frac{1}{a^n}\log\left(\frac{x^n}{a+bx^n}\right)+c$

23. $\log|x+2|-\frac{1}{2}\log(x^2+4)+\tan^{-1}(x/2)+c$

24. $\log|\sec x+\tan x|-2\tan(x/2)+c$

प्रश्नमाला 9.5

1. $\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x^2+1}{2}\right)+c$

2. $\frac{1}{3}\log\left|\frac{2x-1}{2x+2}\right|+c$

3. $\frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{3x-2}{2}\right)+c$

4. $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x+1}{3-x}\right|+c$

5. $\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}\right)+c$

6. $\tan^{-1}[\sin(x+2)]+c$

7. $\frac{1}{2}\log|x^2+2x-4|-\frac{2}{\sqrt{5}}\log\left|\frac{x+1-\sqrt{5}}{x+1+\sqrt{5}}\right|+c$

8. $\frac{3}{4}\log|2x^2-2x+3|+\frac{\sqrt{5}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)+c$

9. $\frac{1}{2}\log|x^2+4x+5|-\tan^{-1}(x+2)+c$

10. $3\log|2-\sin x|+\frac{4}{2-\sin x}+c$

11. $-\frac{1}{2}|e^{-2x}+3e^{-x}+2|+\frac{3}{2}\log\left|\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}+2}\right|+c$

12. $\frac{1}{2}\log\left|\left(x-5/8\right)+\sqrt{x^2-5x/4+1/4}\right|+c$

13. $\sin^{-1}(2x-5)+c$

14. $\sin^{-1}\left|\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right|+c$

15. $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{4x-3}{\sqrt{41}}\right)+c$

16. $\sqrt{x^2-2x+4}+3\log|(x-1)+\sqrt{x^2-2x+4}|+c$

17. $\sqrt{x^2-x+1}+\frac{3}{2}\log|(x-1/2)+\sqrt{x^2-x+1}|+c$

18. $\sqrt{x^2+2x+2}+2\log|(x+1)+\sqrt{x^2+2x+2}|+c$

19. $-\log|(\cos x+1/2)+\sqrt{\cos^2 x+\cos x}|+c$

20. $-\cos\propto\sin^{-1}\left(\dfrac{\cos x}{\cos\propto}\right)-\sin\propto.\log|\sin x+\sqrt{\sin^2 x-\sin^2\propto}|+c$

21. $\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c$

22. $\dfrac{1}{4}\log\left|\dfrac{e^x+1}{e^x+5}\right|+c$

प्रश्नमाला 9.6

1. (i) $x\sin x+\cos x+c$; (ii) $x\tan x-\log\sec x+c$

2. (i) $-e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6)+c$; (ii) $-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x+c$

3. (i) $\dfrac{x^4}{4}\left[(\log x)^2-\dfrac{1}{2}\log x+\dfrac{1}{8}\right]+c$; (ii) $\dfrac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1)+c$

4. (i) $(e^x-1)e^{e^x}+c$; (ii) $x(\log x)^2-2x\log x+2x+c$

5. (i) $x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}+c$; (ii) $(x+a)\tan^{-1}\sqrt{x/a}-\sqrt{ax}+c$

6. (i) $3x\sin^{-1}x+3\sqrt{1-x^2}+c$; (ii) $x\tan x/2-2\log|\sec x/2|+c$

7. (i) $\dfrac{1}{2}\left[x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}\right]+c$; (ii) $2\left[\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}\right]+c$

8. (i) $\dfrac{-x(1-\sin x)}{\cos x}+\log(1+\sin x)+c$; (ii) $\dfrac{x^3}{3}\tan^{-1}x-\dfrac{x^6}{6}+\dfrac{1}{6}\log(1+x^2)+c$

9. (i) $-\sin^{-1}x.\cos(\sin^{-1}x)+x+c$

10. $\dfrac{-\tan^{-1}x}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+c$

11. $e^x\log\sin x+c$

12. $x\tan x+c$

13. $-e^x\cot x/2+c$

14. $e^x(\log x-1/x)+c$

15. $e^x\log|\sec x+\tan x|+c$

16. $e^x\sec x+$ c

17. $\dfrac{e^x}{x^2}+c$

18. $\dfrac{e^x}{1+x^2}+c$

19. $\dfrac{1}{2}\sin 2\theta\log\left|\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\right|+\dfrac{1}{2}\log(\cos 2\theta)+c$

20. $\dfrac{x\sin x+\cos x}{x\cos x-\sin x}+c$

21. $x\sec^{-1}x-\log[x+\sqrt{x^2-1}]+c$

22. $x(\sin^{-1}x)^2+2\sqrt{1-x^2}(\sin^{-1}x)-2x+c$

प्रश्नमाला 9.7

1. $\dfrac{e^{2x}}{5}[2\cos x+\sin x]+c$

2. $\dfrac{1}{2}x[\sin(\log x)-\cos(\log x)]+c$

3. $\dfrac{e^{\tan^{-1}x}}{1+a^2}\left[\dfrac{a+x}{\sqrt{1+x^2}}\right]+c$

4. $\dfrac{2}{3}e^{x/\sqrt{2}}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(x+\propto)+\sin(x+\propto)\right]+c$

5. $\dfrac{e^x}{2}-\dfrac{e^x}{10}[\cos 2x+2\sin 2x]+c$

6. $\dfrac{e^{a\sin^{-1}x}}{1+a^2}[x+a\sqrt{1-x^2}]+c$

7. $\dfrac{x}{1+b^2}[\cos(b\log x/a)+b\sin(b\log x/a)]+c$

8. $\frac{e^{4x}}{8}\left[\frac{1}{13}(4\cos 6x+6\sin 6x)+\frac{1}{5}(4\cos 2x+2\sin 2x)\right]+c$

9. $\frac{x-1}{2}\sqrt{2x-x^2}+\frac{1}{2}\sin^{-1}(x-1)+c$

10. $\frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x+6}+\log|(x+2)+\sqrt{x^2+4x+6}|+c$

11. $\frac{(x+3)\sqrt{x^2+6x-4}}{2}+\frac{13}{2}\log|(x-2)+\sqrt{x^2+6x-4}|+c$

12. $\frac{4x+3}{8}\sqrt{2x^2+3x+4}+\frac{23}{16\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{4x+3}{\sqrt{23}}\right)+c$

13. $\frac{1}{3}x^3\sqrt{a^2-x^6}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x^3}{a}\right)+c$

14. $\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\log|x+\sqrt{x^2+1}|+c$

15. $\frac{5}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)+\frac{x+2}{2}\sqrt{1-4x-x^2}+c$

16. $\frac{(4x+3)}{8}\sqrt{4-3x-2x^2}+\frac{41\sqrt{2}}{32}\sin^{-1}\left(\frac{4x+3}{\sqrt{41}}\right)+c$

विविध प्रश्नमाला—9

1. $2(\tan x+\sec x)-x+c$

2. $\frac{e^x}{30}[\sin 3x-3\cos 3x+20\sin x-20\cos x]+c$

3. $\frac{x^3}{3}\log|1-x^2|-\frac{2}{3}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)+\frac{1}{3}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+c$

4. $\sqrt{x^2+ax}-2\sqrt{ax+a^2}+a\log\left(\sqrt{a+x}-\sqrt{x}\right)+c$

5. $\frac{-\sin 2x}{2}+c$

6. $x(\tan x-\sec x)-\log|\sec x|+\log|\sec x+\tan x|+c$

7. $\sin^{-1}(x/a)+\log|x+\sqrt{a^2-x^2}|+c$

8. $2\log|(1+x)|+\frac{2}{1+x}+c$

9. $\frac{1}{2}\operatorname{cosec}2\propto\cdot\log\left|\frac{x-\propto}{x+\propto}\right|+c$

10. $2x\tan^{-1}x-\log(1+x^2)+c$

11. $-\log|(\sin x+\cos x)+\sqrt{\sin 2x}|+c$

12. $\tan^{-1}(\tan^2 x)+c$

13. $\log|x+2|+\frac{2}{2+x}+c$

14. $\tan x-\cot x-3x+c$

15. $\frac{-\tan^{-1}x}{x}-\frac{(\tan^{-1}x)^2}{2}+\log\left(\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}\right)+c$

16. $\log\left|\frac{\tan x}{\tan x+2}\right|+c$

17. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right)+c$

18. $\log\left|\frac{2\log x+1}{3\log x+2}\right|+c$

19. $\frac{1}{4}\sin^{-1}\left[\frac{\sin^2 2x}{2}\right]+c$

20. $\frac{1}{40}\log\left|\frac{5+4(\sin x-\cos x)}{5-4(\sin x-\cos x)}\right|+c$

21. $3\log|x-2|-\frac{5}{x-2}+c$

22 (ग)

23. (ख)

24. (ग)

25. (क)

10

निश्चित समाकल
(Definite Integral)

10.01 निश्चित समाकल (Definite Integral)

पूर्व अध्यायों में हमने अनिश्चित समाकलों के विभिन्न विधियों से मान ज्ञात किए तथा इसे अवकलन की प्रतिलोम प्रक्रिया के रूप में पढ़ा। वास्तव में समाकल गणित की खोज समतल क्षेत्रों के क्षेत्रफल ज्ञात करने तथा अनन्त श्रेणी का योग ज्ञात करने के लिए हुई। निश्चित समाकल का मान अद्वितीय होता है। अन्तराल $[a, b]$ में फलन $f(x)$ के निश्चित समाकलन को $\int_a^b f(x)dx$ द्वारा प्रकट किया जाता है, जहाँ a व b निश्चित समाकल की क्रमशः निम्न व उच्च सीमाएँ हैं।

निश्चित समाकन का मान या तो श्रेणी के योगफल की सीमा के रूप में ज्ञात किया जाता है अथवा अन्तराल $[a, b]$ में इसका समाकल (प्रतिअवकलज) F होने पर अंतिम बिन्दुओं पर F के मानों के अन्तर $F(b)-F(a)$ के बराबर होता है। इस अध्याय मे हम निम्न बिन्दुओं पर विचार करेंगे–

(i) योगफल की सीमा के रूप में निश्चित समाकलन,
(ii) कलन का आधारभूत प्रमेय,
(iii) साधारण निश्चित समाकलों के मान ज्ञात करना,
(iv) निश्चित समाकलों के मूल गुणधर्म।

10.02 योगफल की सीमा के रूप में निश्चित समाकल (Definite integral as a limit of sum)

अगर किसी श्रेणी में पदों की संख्या अनन्त की ओर व प्रत्येक पद शून्य की ओर अग्रसर हो, तो निश्चित समाकल एक श्रेणी के योगफल की सीमा के रूप में परिभाषित किया जाता है।

परिभाषा: यदि अन्तराल $[a, b]$ में परिभाषित कोई वास्तविक मानों का संतत फलन $f(x)$ और अन्तराल $[a, b]$ को n बराबर भागों में बिन्दुओं $a+h, a+2h, a+3h, \ldots, a+(n-1)h$ द्वारा (जहाँ h प्रत्येक भाग की लम्बाई है) विभाजित किया जाता तो

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0}\left[h\{f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+\overline{n-1}h)\}\right] \quad (\text{जहाँ } n\to\infty \text{ तथा } nh=b-a)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[h\{f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(a+nh)\}\right]$$

इस परिभाषा के प्रयोग से निश्चित समाकल के मान ज्ञात करने की विधि को प्रथम सिद्धान्त (ab-initio method) से समाकलन ज्ञात करना कहते है। यह व्यंजक योगफल की सीमा के रूप में निश्चित समाकल की परिभाषा कहलाता है।

उपपत्तिः माना $f(x)$ चित्रानुसार अन्तराल $[a, b]$ में परिभाषित एक वास्तविक व संतत फलन है।

अन्तराल $[a, b]$ को h चौड़ाई के n अन्तरालो में विभाजित करने पर $AA_n = OA_n - OA$

या $\quad AA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n = b-a$

या $\quad \underbrace{h+h+h+\ldots+h}_{n \text{ बार}} = b-a$

या $\quad nh = b-a \qquad \Rightarrow h = \dfrac{b-a}{n}$

माना $y=f(x)$ जब $x=a, y=f(a)$

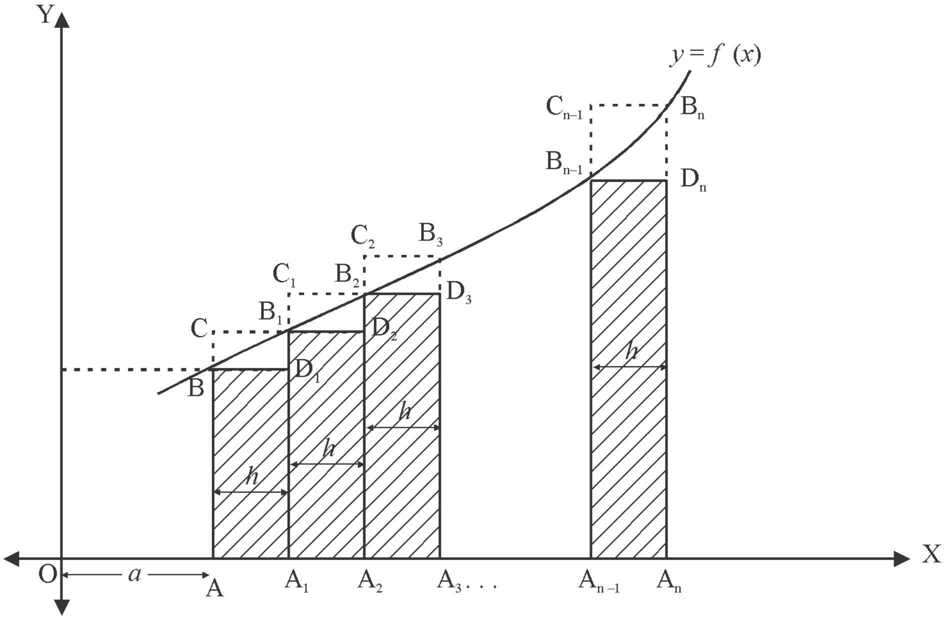
अतः B के निर्देशांक $(a, f(a))$ होंगे

अर्थात् $AB = f(a)$

इसी प्रकार

$$A_1B_1 = f(a+h),\ A_2B_2 = f(a+2h), \ldots,\ A_nB_n = f(a+nh)$$

चित्रानुसार, छायांकित आयताकार पट्टिकाओं, जो कि वक्र के नीचे है, के क्षेत्रफलों का योगफल Δ_1 हो तो–



$$\Delta_1 = \text{आयत } AA_1D_1B + \text{आयत } A_1A_2D_2B_1 + \ldots + \text{आयत } A_{n-1}A_nD_nB_{n-1}$$
$$= AB \times AA_1 + A_1B_1 \times A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}B_{n-1} \times A_{n-1}A_n$$
$$= f(a) \times h + f(a+h) \times h + f(a+2h) \times h + \ldots + f(a+\overline{n-1}h) \times h$$
$$= h\left[f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+\overline{n-1}h) \right]$$

वक्र $y = f(x)$, x- अक्ष तथा दो कोटियों $x = a, x = b$ से परिबद्ध क्षेत्रफल AA_nB_nBA को Δ से प्रकट करें तो Δ_1 का मान Δ से कम होगा। पुनः माना

$$\Delta_2 = \text{आयत } AA_1B_1C + \text{आयत } A_1A_2B_2C_1 + \ldots + \text{आयत } A_{n-1}A_nB_nC_{n-1}$$
$$= A_1B_1 \times AA_1 + A_2B_2 \times A_1A_2 + \ldots + A_nB_n \times A_{n-1}A_n$$
$$= f(a+h) \times h + f(a+2h) \times h + \ldots + f(a+nh) \times h$$
$$= h\left[f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+nh) \right]$$

यह क्षेत्रफल Δ से अधिक होगा, इस प्रकार Δ का मान Δ_1 से अधिक व Δ_2 से कम होगा, अर्थात्

$$\Delta_1 < \Delta < \Delta_2$$

पुनः
$$\Delta_2 - \Delta_1 = h\,f(a+nh) - h\,f(a)$$
$$= h\left[f(b) - f(a) \right] \qquad (\because a + nh = b)$$

स्पष्टतः जब आयताकार पट्टिकाओं की चौड़ाई h अत्यल्प होगी अर्थात् $h \to 0$ तो Δ_1 और Δ_2 का मान Δ के अत्यधिक निकट होगा।

अर्थात् $$\lim_{h\to 0}\Delta_1 = \lim_{h\to 0}\Delta_2 = \Delta$$

अतः $$\Delta = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} h\left[f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+\overline{n-1}h)\right]$$

एवं $$\Delta = \int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\left[f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(a+nh)\right]$$

निष्कर्षतः निश्चित समाकल को योगफल की सीमा के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

टिप्पणीः उपर्युक्त सूत्रों को निम्न प्रकार से भी व्यक्त कर सकते हैः

(i) $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} h\left[f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+\overline{n-1}h)\right],$$

जहाँ $h=\dfrac{b-a}{n}$ (स्पष्टतः $n\to\infty$ तो $h\to 0$)

(ii) $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\left[f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(a+nh)\right],$$ जहाँ $h=\dfrac{b-a}{n}$

प्रथम सिद्धान्त से समाकलन का मान ज्ञात करन के लिए उपर्युक्त में से किसी भी सूत्र का प्रयोग कर सकते हैं।

कुछ महत्वपूर्ण परिणाम (Some important results)

(i) $\sum r = 1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(ii) $\sum r^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(iii) $\sum r^3 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

(v) $\sum (2r-1) = 1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$

(vi) $a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+(a+\overline{n-1}\,d) = \dfrac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

(vii) $a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1} = \dfrac{a(r^n-1)}{(r-1)}, r\neq 1$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. योगफल की सीमा के रूप में $\int_0^2 (2x+1)\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः परिभाषानुसार, $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\left[f(a+h)+f(a+2h)+f(a+3h)+\ldots+f(a+nh)\right],$$

जहाँ $nh=b-a$

यहाँ $a=0,\ b=2,\ f(x)=2x+1,\ nh=2-0=2$

अतः $$\int_0^2 (2x+1)dx = \lim_{h\to 0} h\left[f(0+h)+f(0+2h)+f(0+3h)+\ldots+f(0+nh)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[f(h)+f(2h)+f(3h)+\ldots+f(nh)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[(2h+1)+(4h+1)+(6h+1)+...+(2nh+1)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[(2h+4h+6h+...+2nh)+(1+1+1+...+n \text{ बार})\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[2h(1+2+3+...+n)+n\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[2h\frac{n(n+1)}{2}+n\right] = \lim_{h\to 0}\left[h^2 n(n+1)+nh\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[nh(nh+h)+nh\right] = \lim_{h\to 0}\left[2(2+h)+2\right] \qquad (\because nh = 2)$$

$$= \left[2(2+0)+2\right] = 4+2 = 6.$$

उदाहरण-2. योगफल की सीमा के रूप में $\int_{-1}^{1} e^x\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $f(x) = e^x,\ a = -1,\ b = 1 \qquad (\therefore nh = 1+1 = 2)$

$$\int_{-1}^{1} e^x dx = \lim_{h\to 0} h\left[f(-1+h)+f(-1+2h)+f(-1+3h)+...+f(-1+nh)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[e^{-1+h}+e^{-1+2h}+e^{-1+3h}+...+e^{-1+nh}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[e^{-1}.e^{h}+e^{-1}.e^{2h}+e^{-1}.e^{3h}+...+e^{-1}.e^{nh}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} he^{-1}\left[e^{h}+e^{2h}+e^{3h}+...+e^{nh}\right]$$

$$= \frac{1}{e}\lim_{h\to 0} h.e^h.\frac{(e^h)^n-1}{e^n-1}$$

$$= \frac{1}{e}\lim_{h\to 0} e^h.h\frac{e^{nh}-1}{e^h-1} = \frac{1}{e}\lim_{h\to 0} he^h\frac{e^2-1}{e^h-1} \qquad [\because nh = 2]$$

$$= \frac{e^2-1}{e}\lim_{h\to 0} e^h.\lim_{h\to 0}\frac{h}{e^h-1} = (e-1/e)e^{\circ}.\lim_{h\to 0}\frac{1}{\left((e^h-1)/h\right)}$$

$$= \left(e-\frac{1}{e}\right)\times 1\times\frac{1}{1} = e-\frac{1}{e}.$$

उदाहरण-3. योगफल की सीमा के रूप में $\int_{0}^{1} x^2\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $f(x) = x^2,\ a = 0,\ b = 1 \qquad \therefore\ nh = b-a = 1-0 = 1$

$$\therefore \int_0^1 x^2\, dx = \lim_{h\to 0} h\left[f(0+h)+f(0+2h)+f(0+3h)+...+f(0+nh)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[f(h)+f(2h)+f(3h)+...+f(nh)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h[h^2+4h^2+9h^2+...+n^2h^2]$$

$$= \lim_{h\to 0} h.h^2[1^2+2^2+3^2+...+n^2]$$

$$= \lim_{h \to 0} h^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{nh(nh+h)(2nh+h)}{6}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1(1+h)(2\times1+h)}{6}$$

$$= \frac{(1+0)(2+0)}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

प्रश्नमाला 10.1

योगफल की सीमा के रूप में (प्रथम सिद्धान्त से) निम्न निश्चित समाकलों के मान ज्ञात कीजिए।

1. $\int_3^5 (x-2)\,dx$
2. $\int_a^b x^2\,dx$
3. $\int_1^3 (x^2+5x)\,dx$
4. $\int_a^b e^{-x}dx$
5. $\int_0^2 (x+4)\,dx$
6. $\int_1^3 (2x^2+5)\,dx$

10.03 समाकलन गणित का आधारभूत प्रमेय (Fundamental theorem of integral calculus)

कथन: यदि $f(x)$ अन्तराल $[a, b]$ में परिभाषित एक वास्तविक मानों का सतत फलन हो तथा

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x), \text{ अर्थात् } f(x) \text{ का प्रतिअवकलज } F(x) \text{ हो}$$

तो
$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$= \lim_{h \to 0} h[f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+nh)], \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

जहाँ $F(b) - F(a)$, निश्चित समाकल का मान कहलाता है और यह अद्वितीय होता है।

10.04 निश्चित समाकल परिभाषा (Definition)

यदि $f(x)$ अन्तराल $[a, b]$ में परिभाषित एक वास्तविक मानों का संतत फलन हो तथा $f(x)$ का प्रतिअवकलज $F(x)$ हो तो

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

जहाँ a व b निश्चित समाकल की क्रमशः निम्न व उच्च सीमाएँ हैं तथा अन्तराल $[a, b]$ को समाकलन का परिसर कहते हैं। इस निश्चित समाकल को "$f(x)$ का a से b तक समाकल" पढ़ते हैं। निश्चित समाकल का मान निश्चित होने के कारण समाकलन करने के बाद अचर c इसमें नहीं आयेगा।

10.05 साधारण निश्चित समाकलनों का मान ज्ञात करना (To find the value of the common definite integrals)

किसी फलन के निश्चित समाकल का मान ज्ञात करने के लिए पहले उस फलन का ज्ञात विधियों से अनिश्चित समाकलन निकाला जाता है फिर परिणाम में चर के स्थान पर उच्च सीमा ओर निम्न सीमा रखकर उसका मान निकाल लिया जाता है। इन दोनों मानों के अन्तर को ही निश्चित समाकल का मान कहते हैं। निम्न उदाहरणों से प्रक्रिया स्पष्ट हो जायेगी–

(i)
$$\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

(ii)
$$\int_1^2 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

(iii)
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\sin^{-1} x\right]_0^1 = \sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

अनिश्चित समाकल में प्रयुक्त मानक विधियों का प्रयोग करते हुए हम निश्चित समाकल का मान ज्ञात कर सकते हैं। समाकलन हेतु सामान्यतः

(i) मानक सूत्रों तथा उनमें रूपान्तरण

(ii) प्रतिस्थापन

(iii) आंशिक भिन्न

(iv) खण्डशः समाकलन

विधियों का प्रयोग करते हैं।

11.06 प्रतिस्थापन विधि से निश्चित समाकल का मान ज्ञात करना

प्रतिस्थापन विधि से निश्चित समाकल का मान ज्ञात करने में निम्न बिन्दुओं को ध्यान में रखना चाहिए।

(i) माने हुए प्रतिस्थापन द्वारा स्वतंत्र चर (माना x) को नये चर (माना t) में परिवर्तित किया जाता है।

(ii) दी हुए सीमाओं को नई प्रतिस्थापित चर राशि t के अनुसार बदला जाता है।

(iii) पुराने चर x के अवकलन चिह्न (dx) को नये चर (माना t) के अवकलन चिह्न (dt) में भी उसी प्रतिस्थापन से बदला जाता है।

इस विधि से समाकल मानक रूप में परिवर्तित हो जाता है और उसका मान सरलता से निकल जाता है। कभी-कभी प्रतिस्थापित चर राशि की सीमाएं निकालना कठिन हो जाता है तो ऐसी अवस्था में समाकलन करने के पश्चात् परिणाम को दिए हुए चर में परिवर्तित करके उसी की दी हुई सीमाओं से समाकलन का मान निकाल लेते है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-4. निम्नलिखित समाकलों के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\int_{-1}^{2}\frac{dx}{3x-2}$ (ii) $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{dx}{1-\cos 2x}$ (iii) $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(\tan^{-1}x)}{1+x^2}dx$ (iv) $\int_{0}^{1}\frac{2x}{1+x^4}dx.$

हल: (i) माना
$$I=\int_{-1}^{2}\frac{dx}{(3x-2)}=\frac{1}{3}[\log|3x-2|]_{-1}^{2}=\frac{1}{3}[\log 4-\log|-5|]$$
$$=\frac{1}{3}[\log 4-\log 5]=\frac{1}{3}\log\frac{4}{5}.$$

(ii) माना
$$I=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{dx}{1-\cos 2x}=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{dx}{2\sin^2 x}=\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\operatorname{cosec}^2 x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}[-\cot x]_{\pi/4}^{\pi/2}=\frac{1}{2}[-\cot\pi/2+\cot\pi/4]=\frac{1}{2}[0+1]=\frac{1}{2}$$

(iii) माना
$$I=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\left(\tan^{-1}x\right)}{1+x^2}dx$$

माना $\tan^{-1}x=t\Rightarrow\frac{1}{1+x^2}dx=dt$ जब $x=0$ तो $t=0$; $x=\infty$ तो $t=\pi/2$

$\therefore$
$$I=\int_{0}^{\pi/2}\sin t\,dt=[-\cos t]_{0}^{\pi/2}=-\cos\pi/2+\cos 0=0+1=1.$$

(iv) माना
$$I=\int_{0}^{1}\frac{2x}{1+x^4}dx,\ \text{माना}\ x^2=t\Rightarrow 2x\,dx=dt$$

जब $x=0$ तो $t=0$; $x=1$ तो $t=1$

$\therefore$
$$I=\int_{0}^{1}\frac{dt}{1+t^2}=[\tan^{-1}t]_{0}^{1}=\tan^{-1}(1)-\tan^{-1}(0)=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}.$$

उदाहरण-5. निम्न समाकलों के मान ज्ञात कीजिए

(i) $\int_0^{\pi/4}(2\sec^2 x + x^3 + 1)dx$ (ii) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$ (iii) $\int_0^1 x\, e^x dx$

हल: (i) माना $I = \int_0^{\pi/4}(2\sec^2 x + x^3 + 1)\, dx$

$$= \left[2\tan x + \frac{x^4}{4} + x\right]_0^{\pi/4} = \left[2\tan\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 + \frac{\pi}{4}\right] - (0+0+0)$$

$$= 2\times 1 + \frac{1}{4}\times\frac{\pi^4}{256} + \frac{\pi}{4} = 2 + \frac{\pi^4}{1024} + \frac{\pi}{4}.$$

(ii) माना $I = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$ माना $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$

जब $x = 0$ तो $t = e^0 = 1$

जब $x = 1$ तो $t = e^1 = e$

$\therefore$ $$I = \int_1^e \frac{dt}{1+t^2} = [\tan^{-1} t]_1^e = \tan^{-1} e - \tan^{-1}(1) = \tan^{-1} e - \frac{\pi}{4}$$

(iii) माना $I = \int_0^1 \underset{\text{I}}{x}\,\underset{\text{II}}{e^x}\, dx$ (e^x को द्वितीय फलन मान खण्डशः समाकलन से)

$$= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1\times e^x dx = [1.e^1 - 0] - [e^x]_0^1$$

$$= e - [e^1 - e^0] = e - e + e^0 = e^0 = 1$$

उदाहरण-6. निम्न समाकलों के मान ज्ञात कीजिए

(i) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{(1+\sin x)(2+\sin x)}$ (ii) $\int_1^e e^x\left(\frac{1+x\log x}{x}\right)dx$

हल: (i) माना $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{(1+\sin x)(2+\sin x)}$ माना $\sin x = t$ $\therefore \cos x\, dx = dt$

जब $x = 0, t = 0$ तथा जब $x = \pi/2$ तो $t = 1$

$\therefore$ $$I = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)(2+t)} = \int_0^1\left[\frac{1}{1+t} - \frac{1}{2+t}\right]dt$$

$$= [\log|(1+t)| - \log|2+t|]_0^1$$

$$= \left[\log\left|\frac{1+t}{2+t}\right|\right]_0^1 = \log\frac{2}{3} - \log\frac{1}{2} = \log\left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{1}\right) = \log\frac{4}{3}.$$

(ii) माना $I = \int_1^e e^x\left(\frac{1+x\log x}{x}\right)dx$

$$= \int_1^e e^x\left[\frac{1}{x} + \log x\right]dx$$

$$= \left[e^x \log x\right]_1^e \qquad \left[\because \int e^x[f(x) + f'(x)]dx = e^x f(x)\right]$$

$$= e^e \log e - e^1 \log 1 = e^e\times 1 - e\times 0 = e^e$$

उदाहरण-7. निम्न समाकलों के मान ज्ञात कीजिए–

(i) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$ (ii) $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$

हल: (i)
$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$$
$$= \int_0^{\pi/4} \frac{2\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

अंश व हर में $\cos^4 x$ का भाग देने पर–
$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{2\tan x \sec^2 x}{1+\tan^4 x} dx$$

माना $\tan^2 x = t \Rightarrow 2\tan x \sec^2 x\, dx = dt$

जब $x = 0$ तो $t = 0$ तथा जब $x = \pi/4$ तो $t = 1$

$\therefore$
$$I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\tan^{-1} t]_0^1 = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

(ii)
$$I = \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$$

माना $x = a\tan\theta \Rightarrow dx = a\sec^2\theta d\theta$

जब $x = a$ तो $\theta = \pi/4$ तथा $x = \infty$ तो $\theta = \pi/2$

$\therefore$
$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{a\sec^2\theta d\theta}{a^4\tan^4\theta\sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta}}$$
$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{a\sec^2\theta d\theta}{a^4\tan^4\theta \times a\sec\theta}$$
$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sec\theta d\theta}{a^4\tan^4\theta} = \frac{1}{a^4}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1/\cos\theta}{\sin^4\theta/\cos^4\theta} d\theta$$
$$= \frac{1}{a^4}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^3\theta}{\sin^4\theta} d\theta = \frac{1}{a^4}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{(1-\sin^2\theta)\cos\theta d\theta}{\sin^4\theta} d\theta$$

माना $\sin\theta = t \Rightarrow \cos\theta d\theta = dt$

जब $\theta = \pi/4$ तो $t = 1/\sqrt{2}$ तथा $\theta = \pi/2$ तो $t = 1$

$\therefore$
$$I = \frac{1}{a^4}\int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{(1-t^2)dt}{t^4} = \frac{1}{a^4}\int_{1/\sqrt{2}}^1 \left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2}\right) dt$$
$$= \frac{1}{a^4}\left[-\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t}\right]_{1/\sqrt{2}}^1 = \frac{1}{a^4}\left[\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{1}\right) - \left(-\frac{1}{3\times 1/2\sqrt{2}} + \frac{1}{1/\sqrt{2}}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{a^4}\left[\frac{2}{3} - \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2}\right)\right] = \frac{1}{a^4}\left[\frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} - \sqrt{2}\right]$$
$$= \frac{1}{a^4}\left[\frac{2+2\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{3}\right] = \frac{1}{a^4}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{3a^4}$$

उदाहरण-8. समाकल $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: माना $$I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$

अंश व हर में $\cos^2 x$ का भाग देने पर

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x\, dx}{a^2 + b^2\tan^2 x}$$

माना $b\tan x = t \Rightarrow b\sec^2 x\, dx = dt$ जब $x = 0$ तो $t = 0$, $x = \pi/2$ तो $t = \infty$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{b}\int_0^{\infty} \frac{dt}{a^2 + t^2} = \frac{1}{b}\times\frac{1}{a}\left[\tan^{-1}\left(\frac{t}{a}\right)\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{ab}[\tan^{-1}\infty - \tan^{-1}0] = \frac{1}{ab}[\pi/2 - 0] = \frac{\pi}{2ab}.$$

उदाहरण-9. समाकल $\int_0^{\pi/2} (\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x})dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: माना $$I = \int_0^{\pi/2} (\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x})\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}} + \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}}\right]dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x\cos x}}dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x + \cos x)dx}{\sqrt{2\sin x\cos x}}$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x + \cos x)dx}{\sqrt{1-(1-2\sin x\cos x)}} = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + \cos x)dx}{\sqrt{1-(\sin x - \cos x)^2}}$$

माना $\sin x - \cos x = t \Rightarrow (\cos x + \sin x)dx = dt$, जब $x = 0$ तो $t = -1$, $x = \pi/2$ तो $t = 1$

$$\therefore \quad I = \sqrt{2}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sqrt{2}\left[\sin^{-1} t\right]_{-1}^{1}$$

$$= \sqrt{2}\left[\sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(-1)\right] = \sqrt{2}\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{-\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \pi\sqrt{2}$$

प्रश्नमाला 10.2

निम्न समाकलों के मान ज्ञात कीजिए–

1. $\int_1^3 (2x+1)^3 dx$
2. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$
3. $\int_1^3 \frac{\cos(\log x)}{x} dx$
4. $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
5. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\sin x}$
6. $\int_o^c \frac{y}{\sqrt{y+c}} dy$
7. $\int_o^\infty \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2} dx$
8. $\int_1^2 \frac{(1+\log x)^2}{x} dx$
9. $\int_\propto^\beta \frac{dx}{(x-\propto)(\beta - x)}, \beta > \propto$
10. $\int_0^{\pi/4} \frac{(\sin x + \cos x)}{9+16\sin 2x}$
11. $\int_{1/e}^e \frac{dx}{x(\log x)^{1/3}}$
12. $\int_0^{\pi/4} \sin 2x \cos 3x dx$
13. $\int_e^{e^2} \left[\frac{1}{\log x} - \frac{1}{(\log x)^2}\right] dx$
14. $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$
15. $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1-\sin x}{1-\cos x} dx$
16. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{4\sin^2 x + 5\cos^2 x}$
17. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$
18. $\int_{-1}^1 x \tan^{-1} x dx$
19. $\int_0^1 \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$
20. $\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx$
21. $\int_1^2 \log x \, dx$
22. $\int_{4/\pi}^{2/\pi} \left(-\frac{1}{x^3}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$
23. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x \, dx}{\cos^2 x + 3\cos x + 2}$
24. $\int_0^3 \sqrt{\frac{x}{3-x}} dx$
25. $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$
26. $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$

10.07 निश्चित समाकलों के मूल गुणधर्म (Basic properties of definite integral)

गुणधर्म–I "अगर सीमाओं में परिवर्तन न किया जाए तो निश्चित समाकल में चर राशि बदलने से समाकल का मान नहीं बदलता है।"

अर्थात् $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

प्रमाण: माना $\int f(x)dx = F(x)$ $\qquad \therefore \int f(t)dt = F(t)$

$\therefore$ $$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

तथा $$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

$\therefore$ $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

गुणधर्म–II "निश्चित समाकल की सीमाओं को परस्पर बदलने से समाकल का मान तो नहीं बदलता परन्तु चिह्न बदल जाता है।

अर्थात् $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

प्रमाण: माना $$\int f(x)dx = F(x)$$

$\therefore$ $$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

तथा $$\int_b^a f(x)dx = [F(x)]_b^a = F(a) - F(b) = -[F(b) - F(a)] = -\int_b^a f(x)dx$$

इस प्रकार, $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

गुणधर्म–III अगर $a < c < b$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

प्रमाण: माना $$\int f(x)dx = F(x)$$

$\therefore$ $$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad (1)$$

पुन: $$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = [F(x)]_a^c + [F(x)]_c^b$$
$$= F(c) - F(a) + F(b) - F(c)$$
$$= F(b) - F(a) \quad (2)$$

(1) व (2) से, $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

व्यापकीकरण (Generalization)

यदि $a < c_1 < c_2 < .... < c_n < b$,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + ... + \int_{c_n}^b f(x)dx$$

नोट: इस गुणधर्म का प्रयोग प्राय: तब करते है जब समाकल्य दिए गए समाकलन अन्तराल अर्थात् $[a, b]$ में एक से अधिक नियमों से प्राप्त होता है।

गुणधर्म–IV $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

प्रमाण: दायां पक्ष $= \int_a^b f(a+b-x)dx$

माना $$a + b - x = y \Rightarrow -dx = dy$$

सीमाएं: जब $x = a$ तब $y = b$ तथा जब $x = b$ तब $y = a$

$\therefore$ दायां पक्ष $= \int_b^a f(y)\cdot(-dy) = \int_a^b f(y)dy$ (गुणधर्म-II से)

$= \int_a^b f(x)dx =$ बायां पक्ष (गुणधर्म-I से)

अर्थात् $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

विशेष स्थिति: यदि $a = 0$ हो तो

$$\int_0^b f(x)\cdot dx = \int_0^b f(b-x)dx$$

गुणधर्म–IV के इस महत्वपूर्ण रूप में प्रयोग ऐसे समाकलों का मान ज्ञात करने में करते हैं जिनके समाकल्य अर्थात् $f(x)$ के हर में x के स्थान पर $(b-x)$ रखने पर प्रायः परिवर्तन नहीं आता है। इस गुणधर्म के प्रयोग के लिए निम्न सीमा का शून्य होना आवश्यक है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-10. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sqrt{\cot x}}dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः माना $$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sqrt{\cot x}}dx$$

या $$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx \quad (1)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin(\pi/2-x)}}{\sqrt{\sin(\pi/2-x)}+\sqrt{\cos(\pi/2-x)}}dx$$

या $$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx \quad (2)$$

(1) व (2) को जोड़ने पर

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx$$

या $$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx = \int_0^{\pi/2} dx = [x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore$ $$I = \frac{\pi}{4}$$ अर्थात् $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sqrt{\cot x}}dx = \frac{\pi}{4}$

टिप्पणीः इसी प्रकार गुणधर्म IV के प्रयोग से निम्न व्यापक समाकलों के मान भी $\pi/4$ ही प्राप्त होते हैं।

(i) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx$ (ii) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx$ (iii) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\tan^n x}dx$

(iv) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cot^n x}$ (v) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sec^n x}{\sec^n x+\operatorname{cosec}^n x}dx$ (vi) $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{cosec}^n x}{\sec^n x+\operatorname{cosec}^n x}dx$

जहाँ n का मान कोई भी वास्तविक संख्या हो सकती है।

उदाहरण-11. सिद्ध कीजिए कि $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{a} f(-x)\,dx$.

हलः माना $$I = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

गुणधर्म-IV के प्रयोग से

$$I = \int_{-a}^{a} f(-a+a-x)dx = \int_{-a}^{a} f(-x)\,dx$$

उदाहरण-12. $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः माना
$$I = \int_1^4 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x}} \quad (1)$$

या
$$I = \int_1^4 \frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{5-(5-x)}+\sqrt{5-x}}dx$$

या
$$I = \int_1^4 \frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{5-x}}dx \quad (2)$$

(1) व (2) को जोड़ने पर
$$2I = \int_1^4 \frac{\sqrt{x}+\sqrt{5-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{5-x}}dx$$
$$= \int_1^4 dx = [x]_1^4 = 4-1 = 3$$

$\therefore$ $$I = 3/2.$$

गुणधर्म–V: $\int_o^{na} f(x)dx = n\int_o^a f(x)dx$, यदि फलन $f(x)$, a आवर्तनांक का आवर्त्ती फलन है, अर्थात् $f(a+x) = f(x)$

प्रमाणः गुणधर्म III के अनुसार
$$\int_o^{na} f(x)dx = \int_o^a f(x)dx + \int_a^{2a} f(x)dx + \int_{2a}^{3a} f(x)dx + \ldots + \int_{(n-1)a}^{na} f(x)dx$$

अब समाकल $\int_o^{2a} f(x)dx$ में $x = a+t$ रखने पर $dx = dt$ जब $x = a$, $t = o$ तथा $x = 2a$, $t = a$

$$\therefore \quad \int_a^{2a} f(x)dx = \int_o^a f(a+t)dt = \int_o^a f(a+x)dx = \int_o^a f(x)dx \qquad [\because f(a+x) = f(x)]$$

इसी प्रकार, दायें पक्ष के प्रत्येक समाकल में $x = y +$ (निम्न सीमा) प्रतिस्थापित कर प्रत्येक का मान $\int_o^a f(x)dx$ के बराबर सिद्ध कर सकते हैं। चूंकि $f(x)$, a आवर्तनांक का आवर्त्ती फलन है अतः
$$f(x) = f(x+a) = f(x+2a) = \ldots.. = f(x+na)$$

अतः
$$\int_o^{na} f(x)dx = \underbrace{\int_o^a f(x)dx + \int_o^a f(x)dx + \ldots + \int_o^a f(x)dx}_{n \text{ बार}} = n\int_o^a f(x)dx$$

गुणधर्म–VI
$$\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & ; \text{ यदि } f(x) \text{ सम फलन हो अर्थात् } f(-x) = f(x) \\ 0 & ; \text{ यदि } f(x) \text{ विषम फलन हो अर्थात् } f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

प्रमाणः गुणधर्म III से
$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^o f(x)dx + \int_o^a f(x)dx \qquad (\because -a < o < a)$$
$$= I_1 + \int_o^a f(x)dx \quad (1)$$

जहाँ $$I_1 = \int_{-a}^{o} f(x)dx$$

माना $$x = -y \Rightarrow dx = -dy$$

सीमाएं: जब $x = -a$ तो $y = a$ $x = o$ तो $y = o$

$$\therefore \quad I_1 = \int_{a}^{o} -f(-y)dy = \int_{o}^{a} f(-y)dy \qquad \text{(गुणधर्म II से)}$$

$$= \int_{o}^{a} f(-x)dx \qquad \text{(गुणधर्म I से)}$$

अतः समीकरण (1) से–

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{o}^{a} f(-x)dx + \int_{o}^{a} f(x)dx \qquad (2)$$

स्थिति (i): जब $f(x)$ सम फलन हो अर्थात् $f(-x) = f(x)$

तो $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{o}^{a} f(x)dx + \int_{o}^{a} f(x)dx = 2\int_{o}^{a} f(x)dx$$

स्थिति (ii): जब $f(x)$ विषम फलन हो अर्थात् $f(-x) = -f(x)$

तो $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{o}^{a} f(x)dx + \int_{o}^{a} f(x)dx = 0$$

अतः $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)dx & ; \text{ यदि } f(x) \text{ सम फलन हो अर्थात् } f(-x) = f(x) \\ 0 & ; \text{ यदि } f(x) \text{ विषम फलन हो अर्थात् } f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

गुणधर्म–VII: $$\int_{0}^{2a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)dx & ; \text{ यदि } f(2a-x) = f(x) \\ 0 & ; \text{ यदि } f(2a-x) = -f(x) \end{cases}$$

प्रमाण: $$\int_{o}^{2a} f(x)dx = \int_{o}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{2a} f(x)dx \qquad \text{(गुणधर्म III से, } \therefore o < a < 2a)$$

$$= \int_{o}^{a} f(x)dx + I_1 \qquad (1)$$

यहाँ $$I_1 = \int_{a}^{2a} f(x)dx$$

माना $x = 2a - y \Rightarrow dx = -dy$ जब $x = a$ तो $y = a$ व $x = 2a$ तो $y = o$

$$\therefore \quad I_1 = \int_{a}^{o} -f(2a-y)dy = \int_{o}^{a} f(2a-y)dy \qquad \text{(गुणधर्म II से)}$$

$$= \int_{o}^{a} f(2a-x)dx \qquad \text{(गुणधर्म I से)}$$

समीकरण (1) में I_1 का यह मान रखने पर

$$\int_{o}^{2a} f(x)dx = \int_{o}^{a} f(x)dx + \int_{o}^{a} f(2a-x)dx$$

स्थिति (i): जब $$f(2a-x) = f(x)$$

तो $$\int_{o}^{2a} f(x)dx = \int_{o}^{a} f(x)dx + \int_{o}^{a} f(x)dx = 2\int_{o}^{a} f(x)dx$$

स्थिति (ii): जब $$f(2a-x)=-f(x)$$

तो $$\int_o^{2a} f(x)dx=\int_o^a f(x)dx-\int_o^a f(x)dx=0$$

अतः $$\int_0^{2a} f(x)dx=\begin{cases}2\int_0^a f(x)dx & ; \text{ यदि } f(2a-x)=f(x)\\ 0 & ; \text{ यदि } f(2a-x)=-f(x)\end{cases}$$

टिप्पणी: (i) जब $f(2a-x)=f(x)$ हो तो $f(x)$ को सम फलन नहीं मानना चाहिए तथा इसे सम फलन की परिभाषा से जोड़कर नहीं देखना चाहिये। $f(x)$ सम फलन तब कहलाता है जब $f(-x)=f(x)$.

(ii) सामान्यता जब निम्न सीमा शून्य होती है तब हम गुणधर्म-IV का प्रयोग करते हैं अर्थात् हम x को $f(a+b-x)$ (निम्न सीमा + उच्च सीमा $-x$) से प्रतिस्थापित करते हैं। परन्तु कभी-कभी ऐसा करते समय समाकल्य अर्थात् $f(x)$ का रूप परिवर्तित नहीं होता है अर्थात् गुणधर्म-IV का उपयोग व्यर्थ (Failure of Prop-IV) हो जाता है तब हम गुणधर्म-VII का प्रयोग करते हैं।

10.08 विशेष गुणधर्म (x के निष्कासन का नियम)

यदि $f(a+b-x)=f(x)$ हो तो $\int_a^b x\, f(x)dx$ से x का निष्कासन:

$$\int_a^b x\, f(x)dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$$

प्रमाण: माना $$I=\int_a^b f(x)dx$$

गुणधर्म IV के प्रयोग से

$$\int_a^b (a+b-x)f(a+b-x)dx$$

परन्तु दिया है $$f(a+b-x)=f(x)$$

$\therefore$ $$I=\int_a^b (a+b-x)f(x)dx$$

$$=(a+b)\int_a^b f(x)dx-\int_a^b x\, f(x)dx$$

या $$I=(a+b)\int_a^b f(x)dx-I$$

या $$2I=(a+b)\int_a^b f(x)dx \Rightarrow I=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-13. समाकल $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: माना $$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

या $$I=\int_0^{\pi} x.\left(\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\right)dx$$

यहाँ $$f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$$

$\therefore \qquad f(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)} = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} = f(x)$

$\therefore$ x के निष्कासन नियम से

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

माना $\cos x = t \Rightarrow \sin x\, dx = -dt \qquad x = 0$ तो $t = 1$ तथा $x = \pi$ तो $t = -1$

$\therefore$
$$I = \frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{-dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}(\tan^{-1} t)_{-1}^{1}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(-1)\right] = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\pi}{4} - \left(\frac{-\pi}{4}\right)\right] = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi^2}{4}.$$

महत्वपूर्ण मानक समाकल (Important standard integral)

$$I = \int_0^{\pi/2} \log \sin x\, dx = -\frac{\pi}{2}\log 2 = \int_0^{\pi/2} \log \cos x\, dx$$

हलः माना $\qquad I = \int_0^{\pi/2} \log \sin x\, dx \qquad (1)$

गुणधर्म IV का प्रयोग करने पर

$$I = \int_0^{\pi/2} \log\left[\sin\left(\pi/2 - x\right)\right]dx$$

या $\qquad I = \int_0^{\pi/2} \log \cos x\, dx \qquad (2)$

(1) व (2) को जोडने पर

$$2I = \int_0^{\pi/2} [\log \sin x + \log \cos x]dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log(\sin x \cos x)dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx = \int_0^{\pi/2} (\log \sin 2x - \log 2)dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log \sin 2x\, dx - \log 2\int_0^{\pi/2} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log \sin 2x\, dx - (\log 2)[x]_0^{\pi/2}$$

या $\qquad 2I = I_1 - \frac{\pi}{2}(\log 2) \qquad (3)$

जहाँ $\qquad I_1 = \int_0^{\pi/2} \log \sin 2x\, dx$

माना $\qquad 2x = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$

सीमाएं: जब $x=0$ तो $t=0$ तथा $x=\pi/2$ तो $t=\pi$

$$\therefore \quad I_1=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\log(\sin t)\,dt=\frac{1}{2}\times 2\int_0^{\pi/2}\log\sin t\,dt \qquad \text{(गुणधर्म VII से)}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\log\sin x\,dx \quad \text{(गुणधर्म I से)} = I \qquad \text{(समीकरण (1) से)}$$

$\therefore$ समीकरण (3) से
$$2I=I-\frac{\pi}{2}\log_e 2 \Rightarrow I=-\frac{\pi}{2}(\log_e 2)$$

या
$$\int_0^{\pi/2}\log\sin x\,dx=\int_0^{\pi/2}\log\cos x\,dx=-\frac{\pi}{2}\log 2.$$

$$\int_0^{\pi/2}\log\operatorname{cosec}x\,dx=\int_0^{\pi/2}\log\sec x\,dx=\frac{\pi}{2}\log 2.$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-14. निम्नलिखित समाकलों के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\int_1^4 f(x)dx$ जहाँ $f(x)=\begin{bmatrix}4x+3, & 1\le x\le 2\\ 3x+5, & 2\le x\le 4\end{bmatrix}$ (ii) $\int_0^2 |1-x|\,dx$ (iii) $\int_{-1}^1 e^{|x|}dx$

हल: (i)
$$\int_1^4 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx$$

$$=\int_1^2(4x+3)dx+\int_2^4(3x+5)dx \quad \left[\because f(x)=\begin{bmatrix}4x+3 & ; & 1\le x\le 2\\ 3x+5 & ; & 2\le x\le 4\end{bmatrix}\right]$$

$$=\left[2x^2+3x\right]_1^2+\left[\frac{3x^2}{2}+5x\right]_2^4$$

$$=\left[(8+6)-(2+3)\right]+\left[(24+20)-(6+10)\right]=9+28=37.$$

(ii)
$$\int_0^2|1-x|\,dx=\int_0^1|1-x|\,dx+\int_1^2|1-x|\,dx \quad \left[\begin{array}{lll}\because\ |1-x|=1-x & ; & x<1\\ \qquad\quad =-(1-x) & ; & x>1\end{array}\right]$$

$$=\int_0^1(1-x)dx+\int_1^2(1-x)dx$$

$$=\left[x-x^2/2\right]_0^1-\left[x-x^2/2\right]_1^2$$

$$=\left[(1-1/2)-0\right]-\left[(2-2)-(1-1/2)\right]=1/2+1/2=1.$$

(iii)
$$\int_{-1}^1 e^{|x|}dx=\int_{-1}^0 e^{|x|}dx+\int_0^1 e^{|x|}dx \quad \left[\because |x|=\begin{cases}x, & x\ge 0\\ -x, & x<0\end{cases}\right]$$

$$=\int_{-1}^0 e^{-x}dx+\int_0^1 e^x dx$$

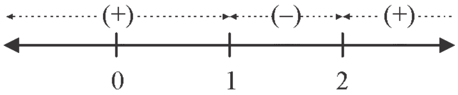
$$=[-e^{-x}]_{-1}^0+[e^x]_0^1=(-e^o+e^1)+(e-e^o)=2e-2.$$

उदाहरण-15. निम्नलिखित समाकलों के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\int_0^2 \left|x^2-3x+2\right|dx$ (ii) $\int_{1/e}^{e} \left|\log_e x\right|dx$ (iii) $\int_0^{\pi} \left|\cos x\right|dx$

हल: (i) यहाँ $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

x^2-3x+2 का चिह्न x के भिन्न-भिन्न मानो के अनुसार निम्न प्रकार होगा



$$\therefore \qquad |x^2-3x+2|=\begin{cases} x^2-3x+2, & 0\le x\le 1 \\ -(x^2-3x+2), & 1\le x\le 2 \end{cases}$$

$$\therefore \qquad \int_0^2 |x^2-3x+2|\,dx=\int_0^1 |x^2-3x+2|\,dx+\int_1^2 |x^2-3x+2|\,dx$$

$$=\int_0^1 (x^2-3x+2)\,dx+\int_1^2 -(x^2-3x+2)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_0^1-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_1^2$$

$$=\left[(1/3-3/2+2)-(0)\right]-\left[(8/3-6+4)-(1/3-3/2+2)\right]$$

$$=\frac{5}{6}-\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=1$$

(ii)
$$\int_{1/e}^{e} |\log_e x|\,dx=\int_{1/e}^{1} |\log_e x|\,dx+\int_1^e |\log_e x|\,dx$$

$$=\int_{1/e}^{1} -\log_e x\,dx+\int_1^e \log_e x\,dx \quad \left[\because |\log_e x|=\begin{cases} -\log_e x, & \text{यदि} \quad 1/e<x<1 \\ \log_e x, & \text{यदि} \quad 1\le x<e \end{cases}\right]$$

$$=-[x(\log_e x-1)]_{1/e}^{1}+[x(\log_e x-1)]_1^e \qquad \left[\because \int \log_e x\,dx=x(\log_e x-1)\right]$$

$$=-[(0-1)-1/e(-1-1)]+[e(1-1)-(0-1)]$$

$$=1-2/e+1=2-2/e$$

(iii)
$$\int_0^{\pi} |\cos x|\,dx=\int_0^{\pi/2} |\cos x|\,dx+\int_{\pi/2}^{\pi} |\cos x|\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx+\int_{\pi/2}^{\pi} -\cos x\,dx \qquad \because |\cos x|=\begin{cases} \cos x & ; \quad 0<x\le \pi/2 \\ -\cos x & ; \quad \pi/2<x\le \pi \end{cases}$$

$$=[\sin x]_0^{\pi/2}-[\sin x]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$=(\sin \pi/2-\sin 0)-(\sin \pi-\sin \pi/2)=(1-0)-(0-1)=2$$

उदाहरण-16. निम्न समाकलों के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\int_0^{\pi/2} \log \cot x \, dx$ (ii) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x} dx$

हल: (i) माना $I = \int_0^{\pi/2} \log \cot x \, dx$ (1)

या $I = \int_0^{\pi/2} \log[\cot(\pi/2 - x)] \, dx$ (गुणधर्म IV का प्रयोग करने पर)

या $I = \int_0^{\pi/2} \log \tan x \, dx$ (2)

(1) व (2) को जोड़ने पर–

$$2I = \int_0^{\pi/2} \log \cot x \, dx + \int_0^{\pi/2} \log \tan x \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\log(\cot x) + \log(\tan x)\right] dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log(\cot x \times \tan x) \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log(1) \, dx = \int_0^{\pi/2} (0) \, dx$$

या $2I = 0 \qquad \therefore I = 0$

(ii) माना $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x} dx$ (1)

गुणधर्म IV का प्रयोग करने पर–

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\pi/2 - x) - \cos(\pi/2 - x)}{1 + \sin(\pi/2 - x)\cos(\pi/2 - x)} dx$$

या $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin x \cos x} dx$ (2)

समीकरण (1) व (2) जोड़ने पर

$$2I = 0 \Rightarrow I = 0$$

उदाहरण-17. निम्न समाकलों के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\int_0^{8} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{8 - x}} dx$ (ii) $\int_0^{a} \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}}$

हल: (i) माना $I = \int_0^{8} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{8 - x}} dx$ (1)

गुणधर्म IV का प्रयोग करने पर–

$$I = \int_0^{8} \frac{\sqrt{8 - x}}{\sqrt{8 - x} + \sqrt{8 - (8 - x)}} dx$$

या $I = \int_0^{8} \frac{\sqrt{8 - x}}{\sqrt{8 - x} + \sqrt{x}} dx$ (2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर–

$$2I = \int_0^8 \frac{\sqrt{x}+\sqrt{8-x}}{\sqrt{8-x}+\sqrt{x}}\,dx = \int_0^8 dx = [x]_0^8 = 8, \qquad \therefore\ I = 4$$

(ii) $$I = \int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$$

माना $$x = a\sin\theta \Rightarrow dx = a\cos\theta\, d\theta$$

सीमाएं: $x=0$ तो $\theta=0$ तथा $x=a$ तो $\theta=\pi/2$

$\therefore$ $$I = \int_0^{\pi/2} \frac{a\cos\theta\, d\theta}{a\sin\theta + a\cos\theta} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\,d\theta \qquad (1)$$

गुणधर्म-(IV) $$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(\pi/2-\theta)\,d\theta}{\sin(\pi/2-\theta)+\cos(\pi/2-\theta)}$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\cos\theta+\sin\theta} \qquad (2)$$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर

$$2I = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta = [\theta]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 0$$

$\therefore$ $$I = \frac{\pi}{4}$$

उदाहरण-18. निम्न समाकल का मान ज्ञात कीजिए।

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\,dx$$

हल: माना $$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\,dx \qquad (1)$$

गुणधर्म IV के प्रयोग से

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(\pi/2-x)}{\sin(\pi/2-x)+\cos(\pi/2-x)}\,dx$$

या $$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\cos x+\sin x}\,dx \qquad (2)$$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर–

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\left(\frac{2\tan x/2}{1+\tan^2 x/2}\right) + \left(\frac{1-\tan^2 x/2}{1+\tan^2 x/2}\right)}$$

(sin x व cos x को tan $x/2$ में बदलने पर)

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1+\tan^2 x/2}{2\tan x/2 + 1 - \tan^2 x/2} dx$$

या
$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x/2}{1 + 2\tan x/2 - \tan^2 x/2} dx$$

माना $\tan\frac{x}{2} = t \Rightarrow \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx = dt$

सीमाएं: जब $x = 0$ तो $t = 0$; जब $x = \pi/2$ तो $t = 1$

$\therefore$
$$I = \int_0^1 \frac{dt}{1+2t-t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{2-(t-1)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\log\left|\frac{\sqrt{2}+(t-1)}{\sqrt{2}-(t-1)}\right|\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\log\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[0 + \log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right] = \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left[\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)} \times \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{(2-1)} = \frac{2}{2\sqrt{2}}\log\left(\sqrt{2}+1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(\sqrt{2}+1\right).$$

उदाहरण-19. निम्न समाकल का मान ज्ञात कीजिए।

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx$$

हल: माना
$$I = \int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx$$

$$= \int_{-a}^{a}\frac{a-x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$= \int_{-a}^{a} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx - \int_{-a}^{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \qquad (1)$$

या $= I_1 - I_2$

जहाँ $I_1 = \int_{-a}^{a} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = 2a\int_{0}^{a} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$ $\quad (\because f(x)$ सम फलन है)

अतः गुणधर्म VI के प्रयोग से

$$= 2a\left[\sin^{-1} x/a\right]_0^a = 2a\left(\sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(0)\right) = 2a \times \left(\pi/2 - 0\right) = \pi a$$

तथा $I_2 = \int_{-a}^{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = 0$

(गुणधर्म VI से, जब $f(x)$ विषम फलन हो तो $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$)

फलतः समीकरण (1) से, $I = \pi a - 0 = \pi a$

उदाहरण-20. सिद्ध कीजिए

$$\int_0^{\pi/4} \log_e(1 + \tan x)dx = \frac{\pi}{8}\log_e 2.$$

हल: माना $I = \int_0^{\pi/4} \log_e(1 + \tan x)dx$

गुणधर्म IV का प्रयोग करने पर

$$I = \int_0^{\pi/4} \log_e\left[1 + \tan\left(\pi/4 - x\right)\right]dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log_e\left[1 + \frac{\tan \pi/4 - \tan x}{1 + \tan(\pi/4)\tan x}\right]dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log_e\left[1 + \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}\right]dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log_e\left(\frac{2}{1 + \tan x}\right)dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} [\log_e 2 - \log_e(1 + \tan x)]dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} (\log_e 2)dx - \int_0^{\pi/4} \log_e(1 + \tan x)dx$$

या $I = (\log_e 2)[x]_0^{\pi/4} - I$

या $2I = \frac{\pi}{4}\log_e 2 \Rightarrow I = \frac{\pi}{8}\log_e 2$

$\Rightarrow \int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan x)dx = \frac{\pi}{8}\log_e 2$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण-21. सिद्ध कीजिए $I=\int_0^{\pi}\log(1+\cos x)\,dx=\pi\log_e(1/2)$.

हल: माना $$I=\int_0^{\pi}\log\left(1+\cos x\right)dx \qquad (1)$$

गुणधर्म IV का प्रयोग करने पर–

$$I=\int_0^{\pi}\log\left[1+\cos\left(\pi-x\right)\right]dx$$

या $$I=\int_0^{\pi}\log\left(1-\cos x\right)dx \qquad (2)$$

(1) व (2) को जोड़ने पर–

$$2I=\int_0^{\pi}\log\left(1+\cos x\right)+\log\left(1-\cos x\right)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\log\left\{(1+\cos x)(1-\cos x)\right\}dx$$

$$=\int_0^{\pi}\log(1-\cos^2 x)\,dx$$

या $$2I=\int_0^{\pi}\log\sin^2 x\,dx=2\int_0^{\pi}\log\sin x\,dx$$

या $$I=\int_0^{\pi}\log\sin x\,dx$$

या $$I=2\int_0^{\pi/2}\log\sin x\,dx \qquad \text{(गुणधर्म VII से)}$$

या $$I=2I_1,\ \text{जहाँ}\ I_1=\int_0^{\pi/2}\log\sin x\,dx \qquad (3)$$

या $$I_1=\int_0^{\pi/2}\log\cos x\,dx \qquad \text{(गुणधर्म IV के प्रयोग से)}\quad (4)$$

समीकरण (3) व (4) को जोड़ने पर

$$2I_1=\int_0^{\pi/2}\left(\log\sin x+\log\cos x\right)dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}\log\left(\sin x\cos x\right)dx$$

या $$2I_1=\int_0^{\pi/2}\log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx$$

या $$2I_1=\int_0^{\pi/2}\log\left(\sin 2x\right)dx-\int_0^{\pi/2}\left(\log 2\right)dx$$

या $$2I_1=I_2-\left(\log 2\right)[x]_0^{\pi/2}$$

या $$2I_1=I_2-\frac{\pi}{2}\log 2 \qquad (5)$$

जहाँ $$I_2=\int_0^{\pi/2}\log\left(\sin 2x\right)dx$$

माना $2x = t \Rightarrow 2dx = dt$ तथा सीमाएँ जब $x = 0$ तो $t = 0$, जब $x = \pi/2$ तो $t = \pi$

$\therefore$ $$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log(\sin t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log(\sin x)\,dx$$ (गुणधर्म I से)

या $$I_2 = \frac{1}{2} \times 2\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,dx$$ (गुणधर्म VII से)

या $$I_2 = \int_0^{\pi/2} \log \sin x\,dx = I_1$$

I_2 का मान समीकरण (5) में रखने पर

$$2I_1 = I_1 - \frac{\pi}{2}\log 2$$

या $$I_1 = \frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$$

$\therefore$ $$I = 2I_1 = 2 \times \frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2} = \pi\log\frac{1}{2}$$

या $$\int_0^{\pi/2} \log(1+\cos x)\,dx = \pi\log\frac{1}{2}$$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण-22. सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^{\pi} \frac{x\tan x}{\sec x + \tan x}\,dx = \pi[(\pi/2) - 1]$$

हल: $$\int_0^{\pi} \frac{x\tan x}{\sec x + \tan x}\,dx = \int_0^{\pi} x.\left(\frac{\sin x}{1+\sin x}\right)dx$$

यहाँ $$f(x) = \frac{\sin x}{1+\sin x}$$

तो $$f(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)}{1+\sin(\pi - x)} = \frac{\sin x}{1+\sin x} = f(x)$$

$\therefore x$ के निष्कासन नियम से, $$\int_a^b x f(x)\,dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x\tan x}{\sec x + \tan x}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{1}{1+\sin x}\right)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\left(1 - \sec^2 x + \sec x\tan x\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[x - \tan x + \sec x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}\left[(\pi - 0 - 1) - (0 - 0 + 1)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}[\pi - 2] = \pi(\pi/2 - 1)$$ सिद्ध हुआ।

प्रश्नमाला 10.3

निम्नलिखित समाकलों के मान ज्ञात कीजिए।

1. $\int_{-2}^{2} |2x+3|\,dx$

2. $\int_{-2}^{2} |1-x^2|\,dx$

3. $\int_{1}^{4} f(x)\,dx$, जहाँ $f(x)=\begin{cases} 7x+3 & ; \quad 1\le x\le 3 \\ 8x & ; \quad 3\le x\le 4 \end{cases}$

4. $\int_{0}^{3} [x]\,dx$ जहाँ $[.]$ महत्तम पूर्णांक फलन है।

5. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^5 \cos^2 x\,dx$

6. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}dx$

7. $\int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx$

8. $\int_{0}^{\pi} \frac{e^{\cos x}}{e^{\cos x}+e^{-\cos x}}dx$

9. $\int_{0}^{\pi/2} \sin 2x.\log\tan x\,dx$

10. $\int_{-1}^{1} \log\left[\frac{2-x}{2+x}\right]dx$

11. $\int_{0}^{1} \log\left(\frac{1}{x}-1\right)dx$

12. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$

13. $\int_{0}^{\pi/3} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

14. $\int_{0}^{\pi/2} \log\sin 2x\,dx$

15. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{(x+\pi/4)}{2-\cos 2x}dx$

16. $\int_{0}^{\pi} \log(1-\cos x)\,dx$

17. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^2 x\,dx$

18. $\int_{0}^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}dx$

19. $\int_{0}^{\pi} x\sin^3 x\,dx$

20. $\int_{0}^{\pi/2} \log(\tan x+\cot x)\,dx$

21. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+e^x}dx$

22. $\int_{a}^{b} \frac{f(x)}{f(x)+f(a+b-x)}dx$

विविध उदाहरण

उदाहरण-23. सिद्ध कीजिए

$$\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{1+\cos\propto\sin x}=\frac{\pi\propto}{\sin\propto}$$

हल: माना
$$f(x)=\frac{1}{1+\cos\propto\sin x}$$

$\therefore$
$$f(\pi-x)=\frac{1}{1+\cos\propto\sin(\pi-x)}=\frac{1}{1+\cos\propto\sin x}=f(x)$$

अतः x के निष्कासन नियम से

$$\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\cos\propto\sin x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos\propto\sin x}dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos\propto\left(\dfrac{2\tan x/2}{1+\tan^2 x/2}\right)}dx$$ (sin x का $\tan x/2$ में बदलने पर)

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sec^2 x/2}{1+\tan^2 x/2+2\cos\propto\tan x/2}dx$$

माना $\tan x/2 = t \Rightarrow \frac{1}{2}\sec^2 x/2\cdot dx = dt$

सीमाएं: $x=0$ तो $t=0$ तथा जब $x=\pi$ तो $t=\infty$

$$\therefore \quad \int_0^{\pi}\frac{x}{1+\cos\propto\sin x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty}\frac{2}{1+t^2+2t\cos x}dx$$

$$= \pi\int_0^{\infty}\frac{dt}{(t+\cos\propto)^2+(\sin\propto)^2}$$

$$= \pi\times\frac{1}{\sin\propto}\left[\tan^{-1}\left(\frac{t+\cos\propto}{\sin\propto}\right)\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{\pi}{\sin\propto}\left[\tan^{-1}(\infty)-\tan^{-1}(\cot\propto)\right]$$

$$= \frac{\pi}{\sin\propto}\left[\pi/2-(\pi/2-\propto)\right]$$ $[\because \cot\propto = \tan(\pi/2-\propto)]$

$$= \frac{\pi}{\sin\propto}(\propto) = \frac{\pi\propto}{\sin\propto}$$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण-24. $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ का मान ज्ञात कीजिए

हलः माना $$I = \int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$$

$$= \frac{1}{a^2-b^2}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x^2+b^2}-\frac{1}{x^2+a^2}\right)dx$$ (आंशिक भिन्न करने पर)

$$= \frac{1}{(a^2-b^2)}\left[\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{x}{b}-\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{(a^2-b^2)}\left[\left(\frac{1}{b}\tan^{-1}\infty-\frac{1}{a}\tan^{-1}\infty\right)-(0-0)\right]$$

$$= \frac{1}{(a^2-b^2)}\left[\frac{1}{b}.\frac{\pi}{2}-\frac{1}{a}.\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2(a^2-b^2)}\left(\frac{a-b}{ab}\right) = \frac{\pi}{2(a+b)(a-b)}\times\frac{(a-b)}{ab} = \frac{\pi}{2ab(a+b)}$$

उदाहरण-25. निम्न समाकल का मान ज्ञात कीजिए

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 2x \log \sin x \, dx$$

हल: माना $$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \underset{\text{II}}{\cos 2x} \underset{\text{I}}{\log \sin x} \, dx$$

$$= \left[\log \sin x . \frac{\sin 2x}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot x \times \frac{\sin 2x}{2} dx$$

$$= \left[0 - \frac{1}{2}\log \frac{1}{\sqrt{2}}\right] - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\log \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 + \cos 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{4}\log 2 - \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{4}\log 2 - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin \pi/2}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\log 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\log 2 - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

उदाहरण-26. समाकल $\int_0^{\infty} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: माना $x = \tan\theta \Rightarrow dx = \sec^2\theta \, d\theta$

सीमाएं: जब $x = 0$ तो $\theta = 0$ तथा $x = \infty$ तो $\theta = \pi/2$

$\therefore$ $$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\log(1+\tan^2\theta)}{(1+\tan^2\theta)} \sec^2\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log(1+\tan^2\theta) \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \log \sec^2\theta \, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \log \sec\theta \, d\theta = -2\int_0^{\pi/2} \log \cos\theta \, d\theta$$

$$= -2\int_0^{\pi/2} \log \cos(\pi/2 - \theta) \, d\theta$$ (गुणधर्म IV से)

$$= 2\int_0^{\pi/2} \log \sin\theta \, d\theta = -2(-\pi/2 \log 2)$$ (मानक समाकल से)

$$= \pi \log_e 2$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

विविध प्रश्नमाला—10

1. $\int_0^{\pi/4}\sqrt{1+\sin 2x}\,dx$ का मान है

(क) $2\int_0^a \sin^3 x.x\,dx$ (ख) 0 (ग) a^2 (घ) 1.

2. $\int_2^5 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{7-x}}dx$ का मान है

(क) 3 (ख) 2 (ग) 3 / 2 (घ) 1 / 2

3. $\int_{a-c}^{b-c} f(x+c)\,dx$ का मान है

(क) $\int_a^b f(x+c)\,dx$ (ख) $\int_a^b f(x)\,dx$ (ग) $\int_{a-2c}^{b-2c} f(x)\,dx$ (घ) $\int_a^b f(x+2c)dx$

4. यदि $A(x)=\int_0^x \theta^2 d\theta$ हो तो $A(3)$ का मान होगा–

(क) 9 (ख) 27 (ग) 3 (घ) 81

निम्नलिखित का समाकलन कीजिए

5. $\int_1^2 \frac{(x+3)}{x(x+2)}dx$

6. $\int_1^2 \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$

7. $\int_0^{\pi/2} e^x\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx$

8. $\int_{1/3}^1 \frac{(x-x^3)^{1/3}}{x^4}dx$

9. $\int_0^{\pi/2} x^2\cos^2 x\,dx$

10. $\int_0^1 \tan^{-1} x\,dx$

11. $\int_0^{\pi/4} \sin 3x \sin 2x$

12. $\int_{-2}^2 |1-x^2|\,dx$

13. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x(1+\sin x)}{(1+\cos^2 x)}dx$

14. $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\sin^{-1} x}{(1-x^2)^{3/2}}dx$

15. $\int_0^{\infty} (\cot^{-1} x)^2 dx$

16. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1-2a\cos x+a^2}, a>1$

17. सिद्ध कीजिए $\int_0^{\pi} \frac{xdx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\frac{\pi^2}{2ab}$

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. निश्चित समाकल का मान अद्वितीय (unique) होता है।

2. (i) $\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (ii) $\int_a^b [f(x)\pm\phi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \phi(x)dx$

(iii) $\int_a^a f(x)dx = 0$

3. (i) $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ (ii) $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^b f(x)dx$

(iii) $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^a f(x)dx$

4. **निश्चित समाकल के गुणधर्मः**

(i) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$ (ii) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(iii) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$ जहाँ $a<c<b$

व्यापकीकरणः $a<c_1<c_2<c_3<\ldots<c_n<b$ तो

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)dx + \ldots + \int_{c_n}^b f(x)dx$$

(iv) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$ अतः $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

(v) $\int_0^{na} f(x)dx = n\int_0^a f(x)dx$ अगर $f(a+x)=f(x)$ (अर्थात् $f(x), a$ आवर्तनांक का आवर्ती फलन है)

(vi) $$\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, & \text{अगर } f(x) \text{ सम फलन है अर्थात् } f(-x)=f(x) \\ 0, & \text{अगर } f(x) \text{ विषम फलन है अर्थात् } f(-x)=-f(x) \end{cases}$$

(vii) $$\int_0^{2a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, & \text{अगर } f(2a-x)=f(x) \\ 0, & \text{अगर } f(2a-x)=-f(x) \end{cases}$$

5. **x निष्कासन का नियमः** अगर $f(a+b-x)=f(x)$ हो तो

$$\int_a^b x\, f(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$$

6. $$\int_0^{\pi/2} \log\sin x\, dx = -\frac{\pi}{2}\log 2 = \int_0^{\pi/2}\log\cos x\, dx$$

तथा $$\int_0^{\pi/2}\log\operatorname{cosec} x\, dx = \frac{\pi}{2}\log 2 = \int_0^{\pi/2}\log\sec x\, dx$$

7. **योगफल की सीमा के रूप में निश्चित समाकलः** (परिभाषा) यदि $f(x)$ अन्तराल $[a, b]$ में परिभाषित वास्तविक मानों का सतत फलन हो तथा अन्तराल $[a, b]$ को h चौडाई के n बराबर भागों $a+h, a+2h, \ldots a+(n-1)h$ में विभक्त किया जाये तो

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\left[f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(a+nh)\right], \quad \text{जहाँ } n\to\infty, nh=b-a$$

इस परिभाषा से निश्चित समाकलन का मान ज्ञात करना प्रथम सिद्धान्त से समाकलन करना कहलाता है।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 10.1

1. 4	2. $\frac{1}{3}(b^3 - a^3)$	3. 86 / 3	4. $e^{-a} - e^{-b}$
5. 10	6. 82 / 3		

प्रश्नमाला 10.2

1. 290	2. $\pi/4$	3. $\sin(\log 3)$	4. $2(e-1)$
5. 2	6. $\frac{2}{3}(2-\sqrt{2})c^{3/2}$	7. $e^{\pi/2} - 1$	8. $\frac{1}{3}(1+\log 2)^2 - \frac{1}{3}$
9. π	10. $\frac{1}{20}\log_e 3$	11. 0	12. $\frac{3\sqrt{2}-4}{10}$
13. $e^2/2 - e$	14. 2 / 3	15. $\log e/2$	16. $\frac{1}{2\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$
17. $\pi/4$	18. $\frac{\pi-2}{2}$	19. 1	20. $\frac{\pi}{2(a+b)}$
21. $\log 4/e$	22. $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$	23. $\log 9/8$	24. $3\pi/2$
25. $1 - \pi/4$	26. $\log 9/8$		

प्रश्नमाला 10.3

1. 25 / 2	2. 4	3. 62	4. 3
5. 0	6. 0	7. $\pi/2$	8. $\pi/2$
9. 0	10. 0	11. 0	12. $\pi/12$
13. $\pi/4$	14. $\frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$	15. $\frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$	16. $\pi\log\frac{1}{2}$
17. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$	18. π	19. $\frac{2\pi}{3}$	20. $\pi\log 2$
21. 1	22. $\frac{b-a}{2}$		

विविध प्रश्नमाला—10

1. (ख)	2. (ग)	3. (ख)	4. (क)
5. $\frac{1}{2}\log 6$	6. $\frac{e}{6}(2e-3)$	7. $e^{\pi/2}$	8. 4
9. $\frac{\pi}{48}(\pi^2 - 6)$	10. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$	11. $\frac{3\sqrt{2}}{10}$	12. 4
13. π^2	14. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$	15. $\pi\log 2$	16. $\frac{\pi}{a^2-1}, a > 1$

11

समाकलन के अनुप्रयोग : क्षेत्रकलन
(Application of integral : Quadrature)

11.01 प्रस्तावना (Introduction)

पूर्व अध्यायों में हमने पढ़ा कि समाकलन गणित के अध्ययन की शुरूआत समतल क्षेत्रों के क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए ऐसी अनन्त श्रेणी का योग ज्ञात करने में हुई जिसका प्रत्येक पद शून्य की ओर अग्रसर था तथा यह योगफल निश्चित समाकल $\int_a^b f(x)dx$ द्वारा दिया गया। वास्तव में हमने योगफल की सीमा के रूप में निश्चित समाकलों का परिकलन करते समय वक्र $y = f(x)$ कोटियों $x = a, x = b$ व x-अक्ष से घिरे क्षेत्रफल $\int_a^b f(x)dx$ को ज्ञात करने का अध्ययन किया।

किसी समतल क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने की प्रक्रिया क्षेत्रकलन (Quadrature) कहलाती है। इस अध्याय में हम साधारण वक्रों के अन्तर्गत सरल रेखाओं व वृत्तों, परवलयों व दीर्घवृत्तों (केवल मानक रूप) के मध्य घिरे समतलीय क्षेत्रफलों (Plane area) को ज्ञात करने के लिये समाकलन के अनुप्रयोग का अध्ययन करेंगे।

11.02 साधारण वक्रों के अन्तर्गत क्षेत्रफल (Area under simple curves)

प्रमेय: वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष तथा कोटियों $x = a$ व $x = b$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल, निश्चित समाकल $\int_a^b f(x)dx$ द्वारा व्यक्त किया जाता है, अर्थात क्षेत्रफल $= \int_a^b y\,dx$

प्रमाण: माना वक्र PQ का समीकरण $y = f(x)$ है, जहाँ $f(x)$ प्रान्त $[a, b]$ में x का एकमानीय वास्तविक व संतत फलन है। आकृतिानुसार हमें क्षेत्र $PRSQP$ का क्षेत्रफल ज्ञात करना है।

माना $E(x, y)$ वक्र पर कोई बिन्दु है तथा $F(x+\delta x, y+\delta y)$ इसका समीपवर्ती बिन्दु है। EA व FB क्रमश: E व F की कोटियाँ हैं।

E से FB पर लम्ब EC डाला तथा F से बढ़ी हुई AE पर लम्ब FD डाला।

$$AB = OB - OA = (x+\delta x) - x = \delta x$$

$$FC = FB - CB = (y+\delta y) - y = \delta y$$

माना, क्षेत्रफल $RAEPR = A$

अब यदि x में वृद्धि δx के संगत क्षेत्रफल में वृद्धि δA हो, तो $\delta A =$ क्षेत्रफल $ABFEA$

तब आकृतिानुसार, (आयत $ABCE$ का क्षेत्रफल) < (क्षेत्रफल $ABFEA$) < (आयत $ABFD$ का क्षेत्रफल)

$\Rightarrow \quad y\delta x < \delta A < (y+\delta y).\delta x$

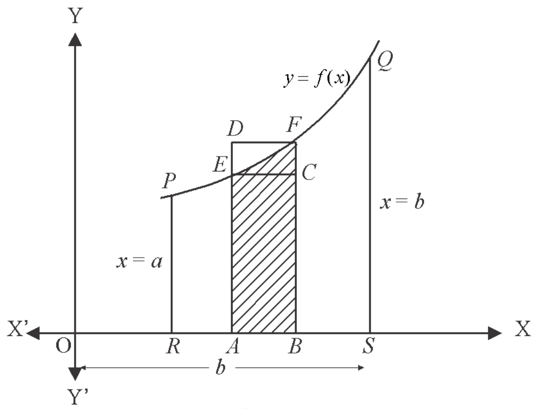
$\Rightarrow \quad y < \dfrac{\delta A}{\delta x} < y + \delta y$

जब $F \to E$ तब $\delta x \to o$ तथा $y + \delta y \to y$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{\delta x \to 0} y \le \lim\limits_{\delta x \to 0} \dfrac{\delta A}{\delta x} \le \lim\limits_{\delta x \to 0} (y+\delta y)$

$\Rightarrow \quad y \le \dfrac{dA}{dx} \le y$

$\Rightarrow \quad \dfrac{dA}{dx} = y \Rightarrow dA = ydx \Rightarrow dA = f(x)dx$



आकृति 11.01

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष $x=a$ तथा $x=b$ सीमाओं के अन्तर्गत समाकलन करने पर

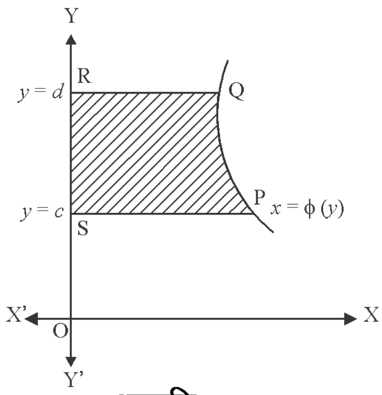
$$\int_a^b dA = \int_a^b f(x)dx$$

या $$[A]_a^b = \int_a^b f(x)dx$$

या (क्षेत्रफल A जब $x=b$)$-$(क्षेत्रफल A जब $x=a$)$=\int_a^b f(x)dx$

या क्षेत्रफल $PRSQP - 0 = \int_a^b f(x)dx$

या क्षेत्रफल $PRSQP = \int_a^b f(x)dx$ या $\int_a^b y\,dx$



आकृति 11.02

इस प्रकार, वक्र $y=f(x)$, कोटियों $x=a$ व $x=b$

तथा x-अक्ष के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल $=\int_a^b f(x)dx$ या $\int_a^b y\,dx$

इसी प्रकार "वक्र $x=\phi(y)$, भुजों $y=c$ व $y=d$

और y-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल $=\int_c^d \phi(y)dy$ या $=\int_c^d x\,dy$

टिप्पणी: (i) क्षेत्रकलन को सरलता से ज्ञात करने के लिये क्षेत्र का कच्चा आकृति (rough sketch) बना लेना चाहिए जिससे समाकलन की सीमाओं व अक्षों के सापेक्ष वक्र की सममिति का निर्धारण करने में सुविधा रहती है। वक्रों से परिबद्ध क्षेत्र का कच्चा आकृति बनाने के लिये वक्रों की पहचान एवं उनका अनुरेखण करना आवश्यक होता है।

11.03 सममित क्षेत्रफल (Symmetrical area)

यदि वक्र किसी निर्देशी अक्ष या किसी रेखा के प्रति सममित हो, तो किसी एक सममित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करके उसको सममित भागों की कुल संख्या से गुणा करके अभीष्ट क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं।

उदाहरणार्थ: वृत्त $x^2+y^2=a^2$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: स्पष्टतः वृत्त का केन्द्र (o, o) तथा त्रिज्या a है एवं यह दोनों अक्षों के प्रति सममित है अतः

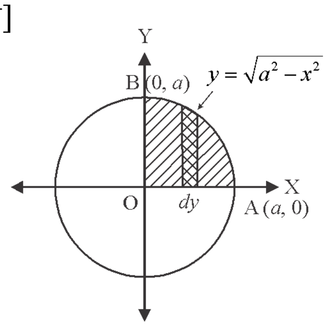
वृत्त का सम्पूर्ण क्षेत्रफल $= 4\times$[प्रथम चतुर्थांश में क्षेत्रफल $OABO$]

$$= 4\times\left[\text{वृत्त } y=\sqrt{a^2-x^2}, x\text{-अक्ष}, x=0 \text{ व } x=a \text{ से परिबद्ध क्षेत्रफल}\right]$$

$$=4\int_a^b y\,dx = 4\int_a^b \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=4\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$=4\left[\left(o+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)-(o+o)\right]=\pi a^2$$



आकृति 11.03

11.04 x-अक्ष के परित वक्र का क्षेत्रफल (Area of a curve around x-axis)

क्षेत्रफल सदैव धनात्मक माना जाता है। अतः यदि क्षेत्रफल का कुछ भाग x-अक्ष के ऊपर (जो कि धनात्मक होगा) तथा कुछ भाग x-अक्ष के नीचे (जो कि ऋणात्मक होगा) हो, तो दोनों भागों के क्षेत्रफल की अलग-अलग गणना करके उनके संख्यात्मक मानों (numerical values) का योग करने पर अभीष्ट क्षेत्रफल प्राप्त होता है।

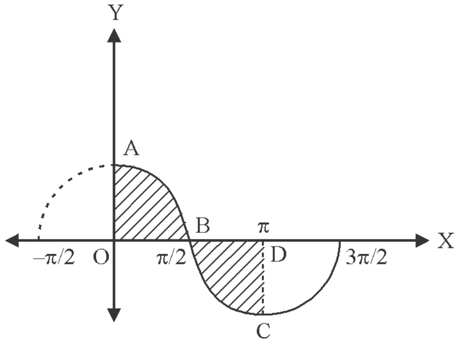
उदाहरणार्थ: वक्र $y = \cos x$ तथा x-अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए; जबकि $o \le x \le \pi$.

हल: ग्राफ से स्पष्ट है कि अभीष्ट क्षेत्रफल का कुछ भाग x-अक्ष के ऊपर व कुछ भाग x-अक्ष के नीचे है

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx + \left|\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\, dx\right|$

$= [\sin x]_o^{\pi/2} + \left|[\sin x]_{\pi/2}^{\pi}\right| = (1-0) + |0-1|$

$= 1 + 1 = 2$ वर्ग इकाई।



आकृति 11.04

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. परवलय $y^2 = 4x$ तथा रेखा $x = 3$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: दिए गए परवलय व रेखा का अनुरेखण करने पर

अभीष्ट क्षेत्रफल $=$ क्षेत्र AOBMA

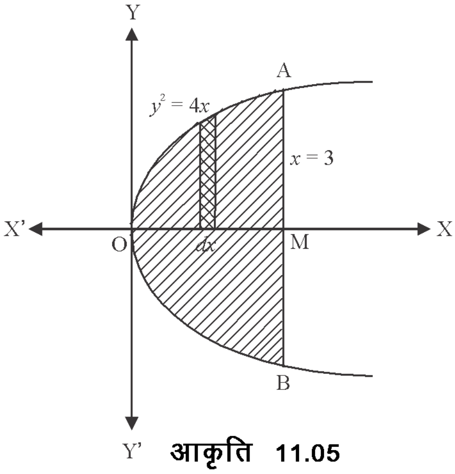
$= 2 \times$ क्षेत्र AOMA ($\because$ परवलय x-अक्ष के परित सममित है)

$= 2\int_0^3 y\, dx$

$= 2\int_0^3 \sqrt{4x}\, dx = 2 \times 2\int_0^3 \sqrt{x}\, dx$

$= 4 \times \left[\frac{2}{3} x^{3/2}\right]_0^3 = \frac{8}{3}\left[3^{3/2} - 0\right]$

$= \frac{8}{3} \times 3\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$ वर्ग इकाई।



आकृति 11.05

उदाहरण-2. वक्र $y = 2\sqrt{1-x^2}$ तथा x-अक्ष के ऊपर परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: $y = 2\sqrt{1-x^2}$ को सरल करने पर

$$y^2 = 4(1-x^2) \text{ या } \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1 \qquad (1)$$

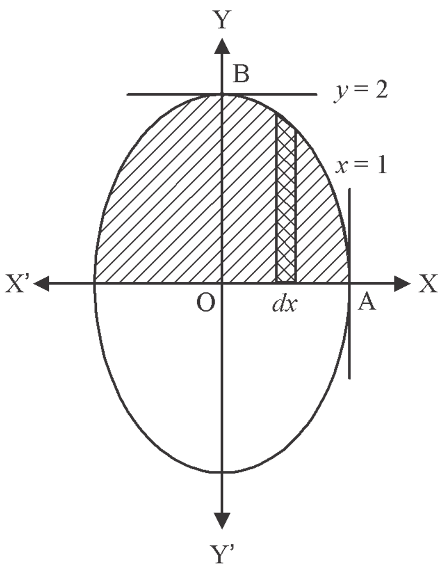
स्पष्टतः वक्र $y = 2\sqrt{1-x^2}$ दीर्घवृत्त (1) का ऊपरी भाग है। अतः हमें आकृतिानुसार छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करना है।

$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल $= 2 \times$ क्षेत्र OABO

$= 2\int_0^1 y\, dx = 2\int_0^1 2\sqrt{1-x^2}\, dx$

$= 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1} x\right]_0^1$

$= 4\left[\left(0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) - (o + o)\right] = \pi$ वर्ग इकाई।



आकृति 11.06

उदाहरण-3. परवलय $y^2 = 4ax$, x-अक्ष, रेखा $x = 2a$ तथा नाभिलम्ब से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि परवलय $y^2 = 4ax$ की नाभिलम्ब का समीकरण $x = a$ है। आकृति में यह LSL' द्वारा प्रकट है तथा PMQ कोटि $x = 2a$ है।

इसलिए अभीष्ट क्षेत्रफल $=$ क्षेत्रफल $SMPL$

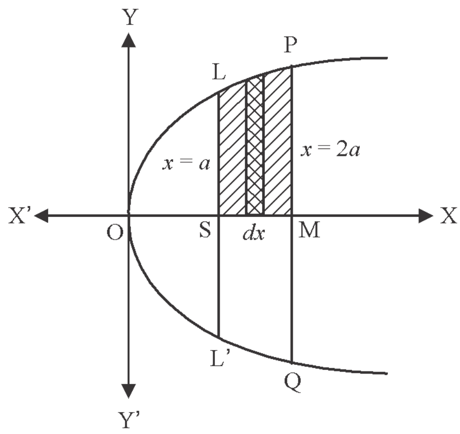
$$= \int_a^{2a} y\,dx = \int_a^{2a} \sqrt{4ax}\,dx$$

$$= 2\sqrt{a}\int_a^{2a} \sqrt{x}\,dx = 2\sqrt{a}\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_a^{2a}$$

$$= 2\sqrt{a}\left[\frac{2}{3}\times(2a)^{3/2} - \frac{2}{3}a^{3/2}\right]$$

$$= 2\sqrt{a}\left[\frac{4\sqrt{2}}{2}a\sqrt{a} - \frac{2}{3}a\sqrt{a}\right]$$

$$= \frac{4a^2}{3}\left[2\sqrt{2} - 1\right].$$



आकृति 11.07

उदाहरण-4. परवलय $y = 4x^2$ व रेखाओं $y = 1$ व $y = 4$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: परवलय $y = 4x^2$ अर्थात् $x^2 = \frac{1}{4}y$ तथा रेखाओं $y = 1$ व $y = 4$ का अनुरेखण आकृतिानुसार होगा।

अतः, अभीष्ट क्षेत्रफल $=$ क्षेत्र $PQRSP$

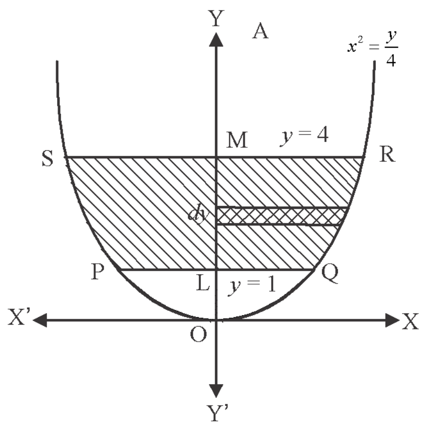
$= 2 \times$ क्षेत्र $RQLM$

$$= 2\int_1^4 x\,dy$$

$$= 2\int_1^4 \frac{1}{2}\sqrt{y}\,dy = \int_1^4 \sqrt{y}\,dy$$

$$= \frac{2}{3}\left[(y)^{3/2}\right]_1^4 = \frac{2}{3}\left[4^{3/2} - 1^{3/2}\right]$$

$$= \frac{2}{3}[8-1] = \frac{14}{3}$$ वर्ग इकाई।



आकृति 11.08

उदाहरण-5. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ तथा कोटियों $x = ae$ व $x = o$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए,

जहाँ, $b^2 = a^2(1-e^2), e < 1$.

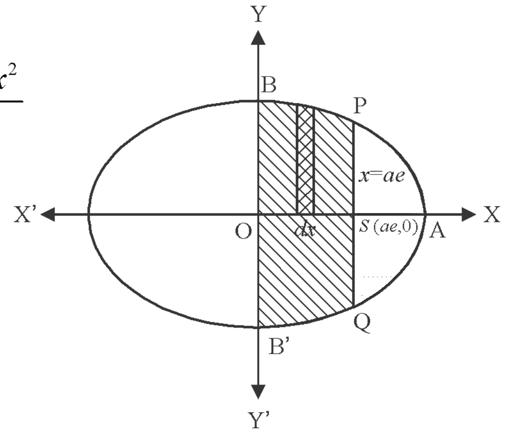
हल: अभीष्ट क्षेत्रफल $BPSQB'OB$ दिए गए दीर्घवृत्त व रेखाओं $x = o$ और $x = ae$ से घिरा हुआ है जैसा कि आकृति 11.09 में प्रकट है। चूंकि क्षेत्र x-अक्ष के प्रति सममित है अतः

$$\text{अभीष्ट क्षेत्रफल } BPSQB'OB = 2\int_o^{ae} y\,dx$$

अब दीर्घवृत्त की समीकरण से,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \text{ या } \frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2}$$

या $$y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right) \text{ या } y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$



आकृति 11.09

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल $=2\int_o^{ae}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$$=\frac{2b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_o^{ae}$$

$$=\frac{2b}{a}\left[\left(\frac{ae}{2}\sqrt{a^2-a^2e^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{ae}{a}\right)-(o+o)\right]$$

$$=\frac{2b}{a}\left[\frac{ae}{2}.a\sqrt{1-e^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}(e)\right]$$

$$=\frac{2a^2b}{2a}\left[e\sqrt{1-e^2}+\sin^{-1}e\right]$$

$$=ab\left[e\sqrt{1-e^2}+\sin^{-1}e\right] \text{ वर्ग इकाई।}$$

उदाहरण-6. वृत्त $x^2+y^2=9$ व रेखा $x=\sqrt{2}y$ तथा x-अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का प्रथम पाद में क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: वृत्त $x^2+y^2=9$ का केन्द्र (o,o) व त्रिज्या 3 इकाई है। सरल रेखा $x=\sqrt{2}y$ मूल बिन्दु से गुजरती है व वृत्त को बिन्दु P पर काटती है। वृत्त व रेखा की समीकरण को हल करने पर–

$$x^2+\frac{x^2}{2}=9 \Rightarrow x^2=6 \Rightarrow x=\pm\sqrt{6} \text{ तब } y=\pm\sqrt{3}$$

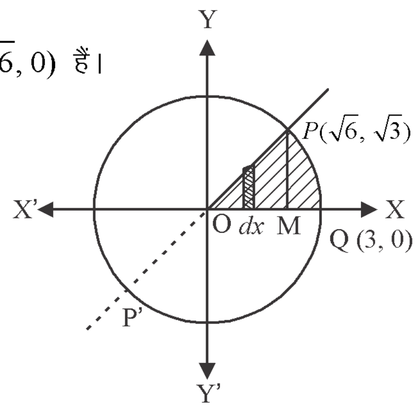
$\therefore$ P के निर्देशांक $(\sqrt{6},\sqrt{3})$ Q के निर्देशांक (3, 0) तथा M के निर्देशांक $(\sqrt{6}, 0)$ हैं।

अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्र OMPO + क्षेत्र PMQP

$$=\int_{0(y \text{ रेखा द्वारा})}^{\sqrt{6}} y\,dx+\int_{\sqrt{6}(y \text{ वृत्त द्वारा})}^{3} y\,dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{6}}\frac{x}{\sqrt{2}}dx+\int_{\sqrt{6}}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2\sqrt{2}}\right]_0^{\sqrt{6}}+\left[\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3}\right]_{\sqrt{6}}^{3}$$



आकृति 11.10

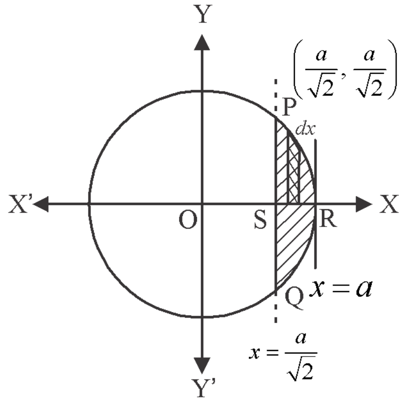
$$=\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+0\right)+\left[\left(0+\frac{9}{2}\sin^{-1}(1)\right)-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{3}+\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{9\pi}{4}-\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{9}{4}\left(\pi-2\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \text{ वर्ग इकाई।}$$

उदाहरण-7. वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ एवं रेखा $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ से घिरे छोटे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: वृत्त व रेखा की समीकरणों को हल करने पर–

$$\frac{a^2}{2} + y^2 = a^2 \Rightarrow y^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow y = \frac{a}{\sqrt{2}}$$



आकृति 11.11

$\therefore$ P के निर्देशांक $\left(a/\sqrt{2},\ a/\sqrt{2}\right)$

अभीष्ट क्षेत्रफल $=$ क्षेत्र $PSQRP$

$= 2 \times$ क्षेत्र PSRP

$$= 2\int_{a/\sqrt{2}}^{a} y\, dx = 2\int_{a/\sqrt{2}}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_{a/\sqrt{2}}^{a}$$

$$= 2\left[\left(\frac{a}{2}\sqrt{a^2 - a^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{a}{a}\right) - \left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{a}{a\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$= 2\left[o + \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= 2\left(\frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{4} - \frac{\pi a^2}{8}\right) = 2\left(\frac{\pi a^2}{8} - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{2}$$

$$= \frac{a^2}{4}(\pi - 2) \text{ वर्ग इकाई।}$$

उदाहरण-8. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ व रेखा $y = c$ के मध्य छोटे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जबकि $c < b$.

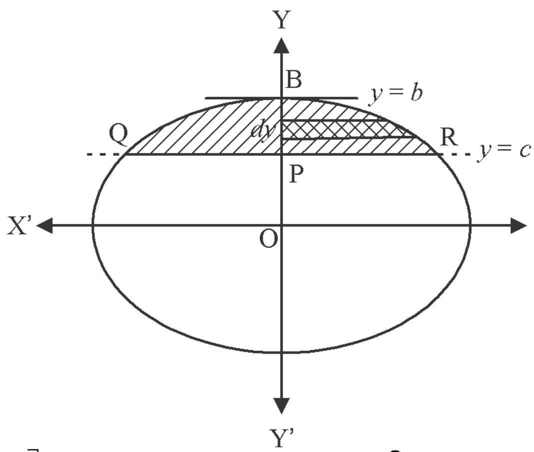
हल: आकृतिानुसार दीर्घवृत्त व रेखा के मध्य छोटे भाग का क्षेत्रफल छायांकित किया गया है।

अभीष्ट क्षेत्रफल $=$ क्षेत्र $BQPRB$

$= 2 \times$ क्षेत्र $BQPRB$

$$= 2\int_c^b x\, dy$$

$$= 2\int_c^b \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}\, dy$$



आकृति 11.12

$$= 2\frac{a}{b}\left[\frac{y}{2}\sqrt{b^2 - y^2} + \frac{b^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{y}{b}\right)\right]_c^b$$

$$= \frac{2a}{b}\left[0 + \frac{b^2}{2}\sin^{-1}(1) - \frac{c}{2}\sqrt{a^2 - c^2} - \frac{b^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{c}{b}\right)\right] \text{ वर्ग इकाई।}$$

उदाहरण-9. रेखा $2x+y=4$, x-अक्ष एवं कोटियों $x=0$ एवं $x=3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: जैसा कि आकृति में प्रकट है रेखा $2x+y=4$, x-अक्ष को $x=2$ पर मिलती है और y-अक्ष को $y=4$ पर मिलती है। जब x का मान 0 से 2 के मध्य है तो आलेख x-अक्ष के ऊपर व जब x, 2 व 3 के मध्य है तो आलेख x-अक्ष के नीचे है।

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल $=$ क्षेत्र OABO + क्षेत्र ALMA

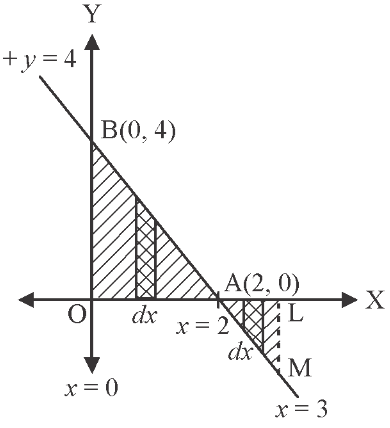
$$= \int_0^2 y\,dx + \left|\int_2^3 y\,dx\right|$$

$$= \int_0^2 (4-2x)\,dx + \left|\int_2^3 (4-2x)\,dx\right|$$

$$= \left[4x-x^2\right]_0^2 + \left|\left[4x-x^2\right]_2^3\right|$$

$$= \left[(8-4)-(0-0)\right] + \left|(12-9)-(8-4)\right|$$

$$= 4+|3-4| = 4+1 = 5 \text{ वर्ग इकाई।}$$



आकृति 11.13

प्रश्नमाला 11.1

1. परवलय $y^2=4ax$ तथा उसके नाभिलम्ब से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. वृत्त $x^2+y^2=4$ का आकृति बनाकर इसमें y-अक्ष व $x=1$ के मध्य का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. वक्र $y=\sin x$ तथा x-अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जबकि $0 \le x \le 2\pi$.
4. वक्र $y=2\sqrt{x}$ तथा $x=0, x=1$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. $y=|x|, x=-3, x=1$ व x-अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
6. वक्र $x^2=4ay$, x-अक्ष तथा रेखा $x=2$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
7. दीर्घवृत्त $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ से परिबद्ध व x –अक्ष से ऊपर की ओर स्थित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
8. दीर्घवृत्त $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ का सम्पूर्ण क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
9. निर्देशी अक्षों व रेखा $\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=2$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
10. रेखाओं $x+2y=8, x=2, x=4$ तथा x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
11. वक्र $y=x^2$, कोटियों $x=1, x=2$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
11. प्रथम चतुर्थांश में स्थित एवं $y=4x^2, x=0, y=1$ तथा $y=4$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

11.05 दो वक्रों के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल (Area between two curves)

प्रमेय: दो वक्रों $y=f(x)$ तथा $y=g(x)$ तथा दो कोटियों $x=a$ व $x=b$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल $=\int_a^b \left[f(x)-g(x)\right]dx$

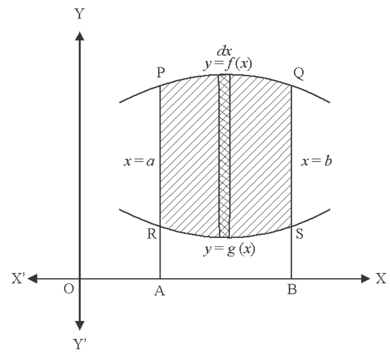
प्रमाण: संलग्न आकृति 11.14 में छायांकित भाग दो वक्रों $y=f(x)$ तथा $y=g(x)$ तथा दो रेखाओं $x=a$ और $x=b$ के मध्यवर्ती क्षेत्र के क्षेत्रफल को दर्शाता है।

इस, मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल= क्षेत्रफल $PQBAP$ – क्षेत्रफल $RSBAR$

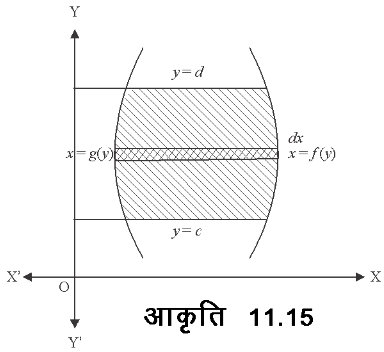
$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \left[f(x)-g(x)\right]dx$$

या $$\int_{a\,(\text{वक्र } y=f(x) \text{ से})}^{b} y\,dx - \int_{a\,(\text{वक्र } y=g(x) \text{ से})}^{b} y\,dx$$



आकृति 11.14



आकृति 11.15

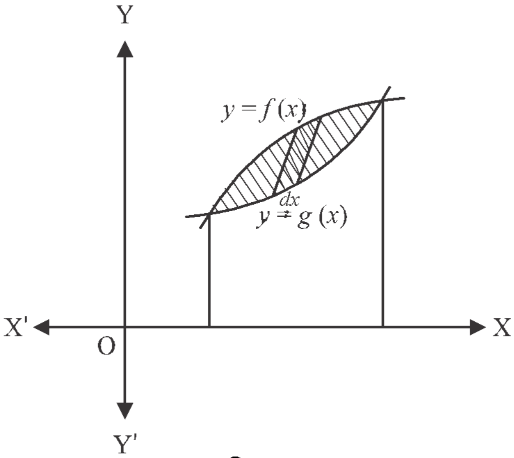
टिप्पणी: दो वक्रों $x = f(y)$ तथा $x = g(y)$ व रेखाओं $y = c$ व $y = d$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$= \int_a^b \left[f(y) - g(y) \right] dy$$

विशेष स्थितियाँ:

स्थिति-I: जब दोनों वक्र दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हो तथा उनका उभयनिष्ठ क्षेत्रफल इन बिन्दुओं के मध्य स्थित हो तो उभयनिष्ठ क्षेत्रफल

$$= \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx$$

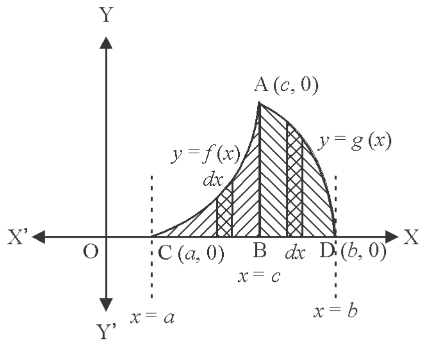


आकृति 11.16

स्थिति-II: जब दोनों वक्र एक ही बिन्दु पर प्रतिच्छेद करते हो तथा उनके मध्य का क्षेत्रफल x–अक्ष से परिबद्ध हो तो

$$\text{अभीष्ट क्षेत्रफल} = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b g(x)\,dx$$

(जहाँ दोनों वक्र एक दूसरे को बिन्दु $A(C, O)$ पर प्रतिच्छेद करते है।)



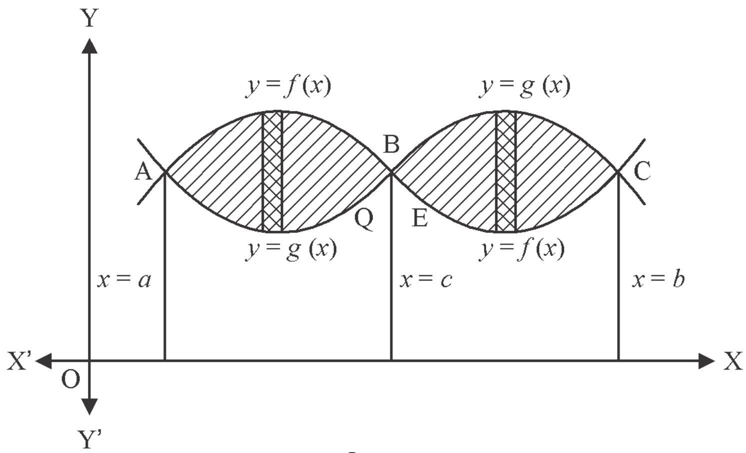
आकृति 11.17

स्थिति-III: अगर दोनों वक्र एक दूसरे को दो से अधिक बिन्दुओं पर काटे

आकृतिानुसार अन्तराल $[a, b]$ में दो वक्र $y = f(x)$ व $y = g(x)$ एक दूसरे को तीन बिन्दुओं A, B, C पर काटते हैं स्पष्टत: $[a, c]$ में $f(x) \geq g(x)$ तथा $[c, d]$ में $g(x) \geq f(x)$

अभीष्ट क्षेत्रफल $=$ क्षेत्रफल $APBQA$ + क्षेत्रफल $BECDB$

$$= \int_a^c \left[f(x) - g(x) \right] dx + \int_c^b \left[g(x) - f(x) \right] dx$$



आकृति 11.18

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-10. परवलय $y^2 = 4ax$ तथा रेखा $y = x$ द्वारा प्रथम चतुर्थांश में घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: परवलय व रेखा की समीकरणों को सरल करने पर–

$$y^2 = 4ax \text{ या } x(x-4a) = 0 \Rightarrow x = 0, 4a \quad \therefore y = 0, 4a$$

अतः रेखा परवलय को O (0, 0) व $A(4a, 4a)$ पर काटती हैं। अतः परवलय व रेखा के मध्यवर्ती अभीष्ट क्षेत्रफल

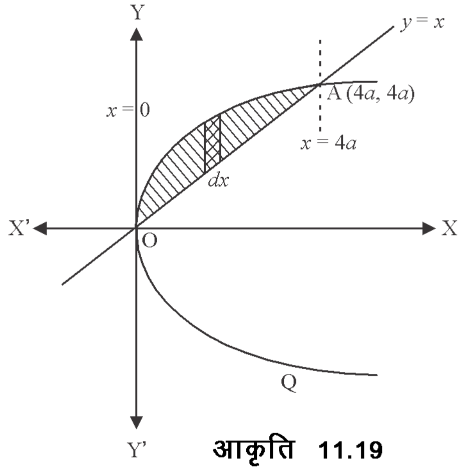
$$= \int_{0(y \text{ परवलय द्वारा})}^{4a} y\,dx - \int_{0(y \text{ रेखा द्वारा})}^{4a} y\,dx$$

$$= \int_0^{4a} \sqrt{4ax}\,dx - \int_0^{4a} x\,dx = 2\sqrt{a}\int_0^{4a}\sqrt{x}\,dx - \int_0^{4a} x\,dx$$

$$= 2\sqrt{a} \times \frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_0^{4a} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{4a}$$

$$= \frac{4\sqrt{a}}{3}\left[(4a)^{3/2} - 0\right] - \left[\frac{(4a)^2}{2} - 0\right]$$

$$= \frac{32a^2}{3} - 8a^2 = \frac{8a^2}{3} \text{ वर्ग इकाई।}$$



आकृति 11.19

उदाहरण-11. वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ तथा वक्र $y = |x|$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: वक्र $y = |x|$ द्वारा प्रकट रेखाएँ $y = x$ व $y = -x$ वृत्त को क्रमशः A व B बिन्दुओं पर काटती हैं जिनके निर्देशाक क्रमशः $(a/\sqrt{2}, a/\sqrt{2})$ तथा $(-a/\sqrt{2}, a/\sqrt{2})$ हैं।

अभीष्ट मध्यवर्ती क्षेत्रफल को आकृति 11.20 में छायांकित किया गया है।

$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल $=$ क्षेत्रफल $AOBCA$

$= 2 \times$ क्षेत्रफल $AOCA$

$$= 2\int_0^{a/2}(\sqrt{a^2 - x^2} - x)\,dx$$

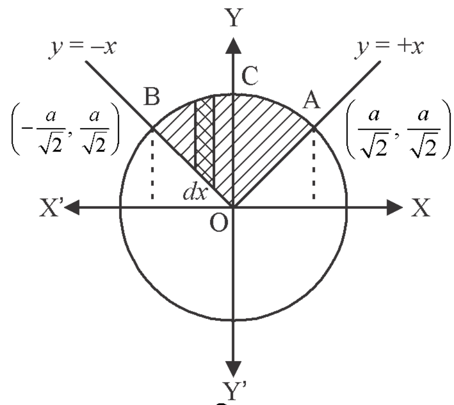
(यहाँ $f(x)$ वृत्त से व $g(x), y = x$ रेखा से लिया गया है।)

$$= 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2}\right]_0^{a/\sqrt{}}$$

$$= 2\left[\frac{a}{2\sqrt{2}}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{a}{a\sqrt{2}} - \frac{a^2}{2 \times 2}\right] - 2[0 + 0 - 0]$$

$$= 2\left[\frac{a}{2\sqrt{2}} \times \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{a^2}{2} \times \frac{\pi}{4} - \frac{a^2}{4}\right] = 2\left[\frac{a^2}{4} + \frac{\pi a^2}{8} - \frac{a^2}{4}\right]$$

$$= \frac{\pi a^2}{4} \text{ वर्ग इकाई।}$$



आकृति 11.20

उदाहरण-12. परवलयों $y^2 = 4ax$ तथा $x^2 = 4by$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: दिए गए परवलयों के समीकरण हैं

$$y^2 = 4ax \text{ तथा } x^2 = 4by$$

दोनों समीकरणों को हल करने पर

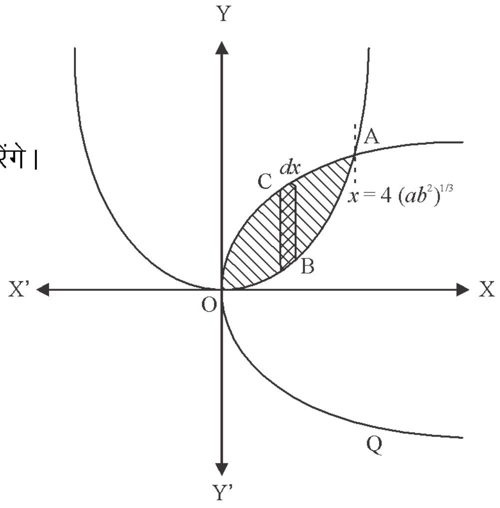
$$\left(x^2/4b\right)^2 = 4ax \text{ या } x^4 = 64ab^2x$$

या $\quad x(x^3 - 64ab^2) = 0 \Rightarrow x = 0,\ 4(ab^2)^{1/3}$

अतः दोनों वक्र x-अक्ष को $x = 0$ व $x = 4(ab^2)^{1/3}$ पर प्रतिच्छेद करेंगे।

अतः वक्रों का अनुरेखण करने पर आकृति 11.21 प्राप्त होता है।

अतः वक्रों के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल $OCABO$



आकृति 11.21

$$= \int_{0(\text{परवलय } y^2=4ax \text{ से})}^{4(ab^2)^{1/3}} y\,dx - \int_{0(\text{परवलय } x^2=4by \text{ से})}^{4(ab^2)^{1/3}} y\,dx$$

$$= \int_0^{4(ab^2)^{1/3}} \sqrt{4ax}\,dx - \int_0^{4(ab^2)^{1/3}} \frac{x^2}{4b}\,dx$$

$$= 2\sqrt{a}.\frac{2}{3}[x^{3/2}]_0^{4(ab^2)^{1/3}} - \frac{1}{4b}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{4(ab^2)^{1/3}}$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{a}\left[\left[4(ab^2)^{1/3}\right]^{3/2} - 0\right] - \frac{1}{12b}\left[\left\{4(ab^2)^{1/3}\right\}^3 - 0\right]$$

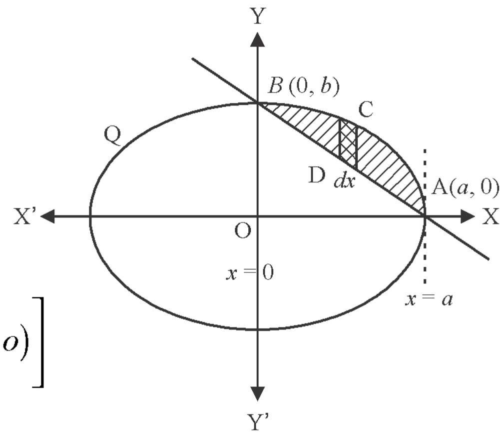
$$= \frac{4}{3}\sqrt{a}\left[8(ab^2)^{1/2}\right] - \frac{1}{12b}[64\,ab^2]$$

$$= \frac{32\sqrt{a}}{3}\sqrt{a}\,b - \frac{1}{12b} \times 64\,ab^2$$

$$= \frac{32}{3}ab - \frac{16ab}{3} = \frac{16ab}{3} \text{ वर्ग इकाई।}$$

उदाहरण-13. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ तथा रेखा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ के मध्यवर्ती लघु क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: आकृतिानुसार (11.22) दीर्घवृत्त व रेखा के मध्यवर्ती लघु क्षेत्रफल को छायांकित भाग द्वारा दर्शाया गया है। स्पष्टतः रेखा दीर्घवृत को बिन्दुओं $A(a, 0)$ व $B(o, \text{b})$ पर काटती है। अतः अभीष्ट क्षेत्रफल $ACBDA$



आकृति 11.22

$$= \int_{0\,(y \text{ दीर्घवृत्त से})}^{a} y\,dx - \int_{0\,(y \text{ सरल रेखा से})}^{a} y\,dx$$

$$= \int_o^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx - \int_o^a \frac{b}{a}(a - x)\,dx$$

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_o^a - \frac{b}{a}\left(ax - \frac{x^2}{2}\right)_o^a$$

$$= \frac{b}{a}\left[\left(o + \frac{a^2}{2} \times \frac{\pi}{2}\right) - (o + o)\right] - \frac{b}{a}\left[\left(a^2 - \frac{a^2}{2}\right) - (o - o)\right]$$

$$= \frac{\pi ab}{4} - \frac{ab}{2} = \frac{ab}{4}(\pi - 2) \text{ वर्ग इकाई।}$$

उदाहरण-14. परवलय $x^2 = 4y$ व रेखा $x = 4y - 2$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: परवलय व सरल रेखा की समीकरणों को हल करने पर–

$$x = x^2 - 2 \text{ या } x - x^2 - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2, -1$$

स्पष्टत: रेखा, परवलय को बिन्दुओं $x = 2$ तथा $x = -1$ पर काटती हैं।

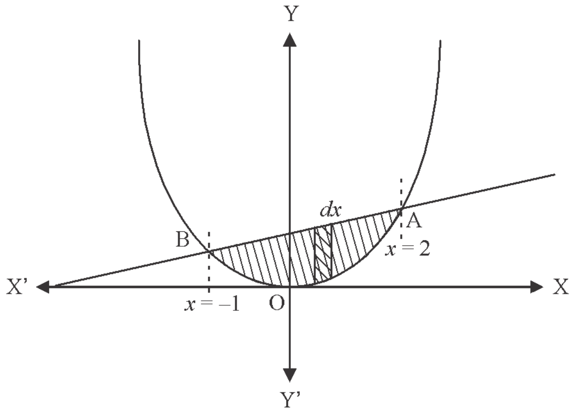
अत: अभीष्ट क्षेत्रफल $ABOA = \int_{-1(y,\text{ रेखा से})}^{2} y\,dx - \int_{-1(y,\text{ परवलय से})}^{2} y\,dx$

$$= \int_{-1}^{2} \frac{x+2}{4}\,dx - \int_{-1}^{2} \frac{x^2}{4}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)_{-1}^{2} - \left[\frac{x^3}{12}\right]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{4}{2}+4\right) - \left(\frac{1}{2}-2\right)\right] - \left[\frac{8}{12} - \left(\frac{-1}{12}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[6 + \frac{3}{2}\right] - \frac{9}{12} = \frac{1}{4} \times \frac{15}{2} - \frac{9}{12} = \frac{15}{8} - \frac{3}{4} = \frac{9}{8} \text{ वर्ग इकाई।}$$



आकृति 11.23

उदाहरण-15. वक्र $x^2 + y^2 = 2$ व $x = y^2$ के मध्य छोटे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: वृत्त $x^2 + y^2 = 2$ व परवलय $x = y^2$ के मध्यवर्ती छोटे भाग का क्षेत्रफल छायांकित भाग द्वारा प्रकट है प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात करने हेतु समीकरणों को सरल करने पर

$$x^2 + x = 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x = -2, 1 \text{ जब } x = 1 \text{ तो } y = \pm 1$$

अत: दोनों वक्र बिन्दु $A(1, 1)$ व बिन्दु $B(1, -1)$ पर एक दूसरे को काटते है।

फलत: अभीष्ट क्षेत्रफल= क्षेत्रफल $AOBCO = 2 \times$ क्षेत्रफल $AODCA$

$$= 2[\text{क्षेत्र } AODA + \text{क्षेत्र } ADCA]$$

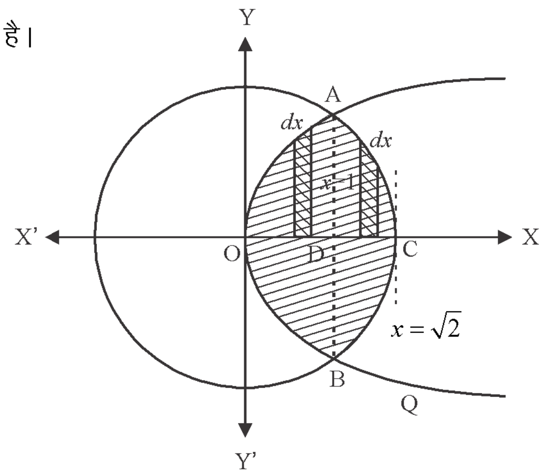
$$= 2\left[\int_{0(y\text{ परवलय से})}^{1} y\,dx + \int_{1(y\text{ वृत्त से})}^{\sqrt{2}} y\,dx\right]$$

$$= 2\left[\int_0^1 \sqrt{x}\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\,dx\right]$$

$$= 2\left[\frac{2}{3}\left\{x^{3/2}\right\}_0^1 + \left\{\frac{x}{2}\sqrt{2-x^2} + \frac{2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}\right\}_1^{\sqrt{2}}\right]$$

$$= 2\left[\frac{2}{3} \times (1-0) + \left(0 + \sin^{-1}1\right) - \left(\frac{1}{2} + \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$= 2\left[\frac{2}{3} + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right] = 2\left[\frac{1}{6} + \frac{\pi}{4}\right] = \left[\frac{1}{3} + \frac{\pi}{2}\right] \text{ वर्ग इकाई।}$$



आकृति 11.24

उदाहरण-16. समाकलन का उपयोग करते हुए उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $(-1, 1), (0, 5)$ व $(3, 2)$ हैं।

हल: माना $A(-1, 1), B(0, 5)$ व $C(3, 2)$ त्रिभुज के शीर्ष हैं।

रेखा AB का समीकरण

$$y-1=\frac{5-1}{0+1}(x+1)$$

या $\quad y-1=4x+4$

या $\quad 4x-y+5=0 \qquad (1)$

रेखा BC का समीकरण

$$y-5=\frac{2-5}{3-0}(x-0)$$

या $\quad 3y-15=-3x$

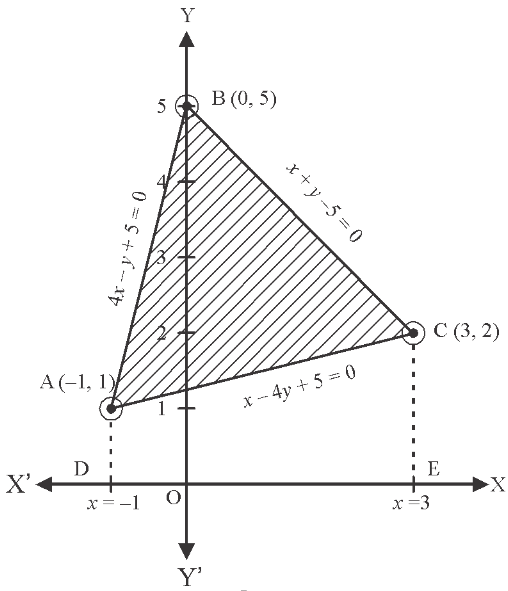
या $\quad x+y-5=0 \qquad (2)$

रेखा CA का समीकरण

$$y-1=\frac{2-1}{3+1}(x+1)$$

या $\quad 4y-4=x+1$

या $\quad x-4y+5=0 \qquad (3)$



आकृति 11.25

अतः $\quad \Delta ABC$ का क्षेत्रफल = समलम्ब $ABOD$ का क्षेत्र + समलम्ब $BOEC$ का क्षेत्र – समलम्ब $ACED$ का क्षेत्र

$$=\int_{-1(\text{रेखा } AB \text{ से})}^{0} y\,dx+\int_{0(\text{रेखा } BC \text{ से})}^{3} y\,dx-\int_{-1(\text{रेखा } CA \text{ से})}^{3} y\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(4x+5)\,dx+\int_{0}^{3}(5-x)\,dx-\int_{-1}^{3}\frac{x+5}{4}\,dx$$

$$=\left[2x^2+5x\right]_{-1}^{0}+\left[5x-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{3}-\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}+5x\right]_{-1}^{3}$$

$$=\left[(0+0)-(2-5)\right]+\left[(15-9/2)-(0-0)\right]-\frac{1}{4}\left[(9/2+15)-(1/2-5)\right]$$

$$=[3]+[21/2]-\frac{1}{4}(39/2+9/2)$$

$$=3+\frac{21}{2}-6=\frac{21}{2}-3=\frac{15}{2} \text{ वर्ग इकाई।}$$

प्रश्नमाला 11.3

1. परवलय $y^2=2x$ तथा वृत्त $x^2+y^2=8$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. परवलय $4y=3x^2$ तथा रेखा $3x-2y+12=0$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. वक्र $y=\sqrt{4-x^2}, x=\sqrt{3}y$ तथा x-अक्ष के मध्य घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. वृत्त $x^2+y^2=16$ व रेखा $y=x$ तथा x-अक्ष के मध्यवर्ती प्रथम चतुर्थांश में स्थित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. परवलयों $y^2=4x$ व $x^2=4y$ के मध्यवर्ती उभयनिष्ठ क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

6. वक्र $x^2+y^2=1$ व $x+y=1$ के मध्यवर्ती प्रथम चतुर्थांश में स्थित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

7. वक्र $y^2=4ax$ रेखा $y=2a$ एवं y–अक्ष के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8. वृत्त $x^2+y^2=16$ के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो परवलय $y^2=6x$ के बाहर हो।

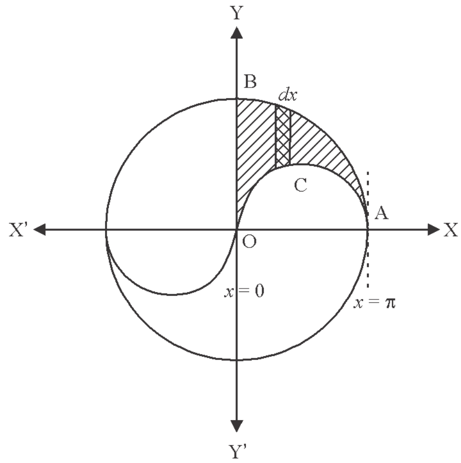
9. समाकलन विधि का उपयोग करते हुए एक ऐसे त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। जिसके शीर्षो के निर्देशांक $A(2, 0), B(4, 5), C(6, 3)$ हैं।

10. समाकलन विधि का उपयोग करते हुए ऐसे त्रिकोणीय क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाओं के समीकरण $3x-2y+3=0, x+2y-7=0$ एवं $x-2y+1=0$ है।

विविध उदाहरण

उदाहरण-17. वक्र $x^2+y^2=\pi^2$ तथा $y=\sin x$ के मध्यवर्ती प्रथम चतुर्थांश में स्थित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हलः आकृतिानुसार वृत्त $x^2+y^2=\pi^2$ तथा वक्र $y=\sin x$ के मध्यवर्ती प्रथम चतुर्थांश के क्षेत्रफल को छायांकित भाग द्वारा प्रकट किया गया है।



आकृति 11.26

अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्रफल $OCABO$

$$=\int_{0\,(y\text{ वृत्त से})}^{\pi} y\,dx-\int_{0\,(y,\text{ वक्र } y=\sin x\text{ से})}^{\pi} y\,dx$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{\pi^2-x^2}\,dx-\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$

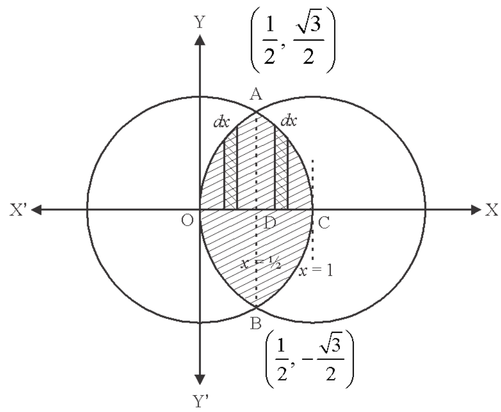
$$=\left[\frac{x}{2}\sqrt{\pi^2-x^2}+\frac{\pi^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{\pi}\right]_0^{\pi}-\left[-\cos x\right]_0^{\pi}$$

$$=\left[\left\{0+\frac{\pi^2}{2}\sin^{-1}(1)\right\}-\{0+0\}\right]+\left[\cos\pi-\cos 0\right]$$

$$=\frac{\pi^2}{2}\times\frac{\pi}{2}+(-1)-1=\frac{\pi^3}{4}-2=\frac{\pi^3-8}{4}\text{ वर्ग इकाई}$$

उदाहरण-18. वृत्तों $x^2+y^2=1$ व $(x-1)^2+y^2=1$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हलः दिए गए वृत्त हैः



आकृति 11.27

$$x^2+y^2=1 \qquad (1)$$

$$(x-1)^2+y^2=1 \qquad (2)$$

वृत्त (1) व (2) के केन्द्र क्रमशः (0, 0) व (1, 0) हैं तथा दोनों वृत्तों की त्रिज्याएँ 1 हैं। वृत्त (1) व (2) की समीकरणों को सरल करने पर

$$x^2-(x-1)^2=0$$

या $\quad x^2-x^2+2x-1=0$

$\Rightarrow \quad x=1/2 \quad \Rightarrow \quad y=\pm\sqrt{3}/2$

$\therefore \quad A$ के निर्देशांक $=(1/2, \sqrt{3}/2)$ तथा B के निर्देशांक $(1/2, -\sqrt{3}/2)$

जहाँ A व B दोनों वृत्तों के प्रतिच्छेद बिन्दु हैं।

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल $=$ क्षेत्रफल $OACBO$

$= 2\times$ क्षेत्रफल $OACDO$

$= 2$ [क्षेत्र $OADO +$ क्षेत्र $ADCA$]

$$= 2\left[\int_{0\,(y,\ \text{वृत्त}\ (2)\ \text{से})}^{1/2} y\,dx + \int_{1/2\,(y,\ \text{वृत्त}\ (1)\ \text{से})}^{1} y\,dx\right]$$

$$= 2\left[\int_0^{1/2} \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx + \int_{1/2}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx\right]$$

$$= 2\left[\frac{x-1}{2}\sqrt{1-(x-1)^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}(x-1)\right]_0^{1/2} + 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}x\right]_{1/2}^{1}$$

$$= 2\left[\left\{-\frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)\right\} - \left\{\frac{-1}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\sin^{-1}(-1)\right\}\right]$$

$$+2\left[\left\{0 + \frac{1}{2}\sin^{-1}(1)\right\} - \left\{\frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}\right]$$

$$= 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{2}\times\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] + 2\left[\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{2}\times\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6} = \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$ वर्ग इकाई।

उदाहरण-19. वक्रों $y = \sin x, y = \cos x$, y-अक्ष व $0 \le x \le \pi/2$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: $y = \sin x$ व $y = \cos x$ को हल करने पर $\sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1$

$\Rightarrow \qquad x = \pi/4$

अत: दोनों $x = \pi/4$ पर कटते हैं।

अत: B पर $x = \pi/4$ है। फलत:

अभीष्ट क्षेत्रफल $= AOBA$ का क्षेत्रफल

$=$ क्षेत्रफल $ABEO -$ क्षेत्रफल $OBEO$

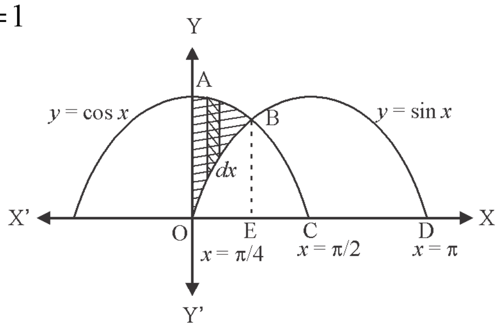
$$= \int_{0\,(y=\cos x\ \text{से})}^{\pi/4} y\cdot dx - \int_{0\,(y=\sin x\ \text{से})}^{\pi/4} y\cdot dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \cos x\,dx - \int_0^{\pi/4} \sin x\,dx$$

$$= [\sin x]_0^{\pi/4} - [\cos x]_0^{\pi/4}$$

$$= \sin\frac{\pi}{4} - 0 + \left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos 0\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = (\sqrt{2}-1)$$ वर्ग इकाई।



आकृति 11.28

उदाहरण-20. $\{(x, y) \mid x^2 \le y \le x\}$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: प्रश्नानुसार, दिए गए समीकरण

$$y = x^2 \qquad (1)$$

या $$y = x \qquad (2)$$

में वक्र (1) उपरी मुखी परवलय हैं तथा रेखा $y = x$ मूलबिन्दु से जाती है। परवलय व रेखा के मध्य अभीष्ट क्षेत्रफल को छायांकित किया गया है। समीकरण (1) व (2) को हल करने पर

$$x^2 = x \Rightarrow x(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, 1$$

$\therefore$ $$y = 0, 1$$

अतः परवलय व रेखा एक दूसरे को (0, 0) व (1, 1) पर काटते है।

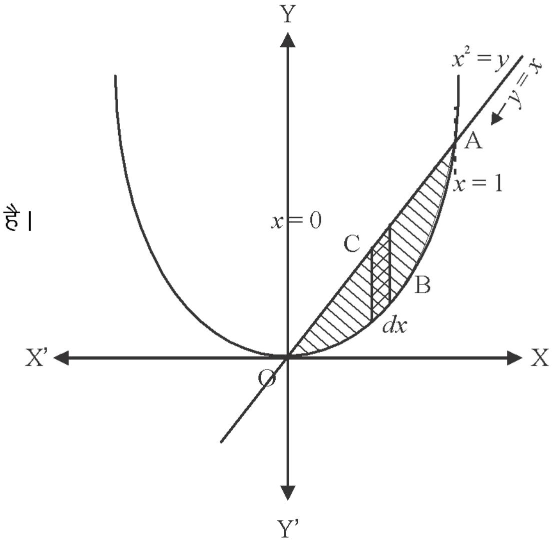
$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल $=$ क्षेत्रफल $OCABO$

$$= \int_{0(y \text{ रेखा से})}^{1} y\,dx - \int_{0(y \text{ परवलय से})}^{1} y\,dx$$

$$= \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^2\,dx$$

$$= \left[x^2/2\right]_0^1 - \left[x^3/3\right]_0^1$$

$$= (1/2 - 0) - (1/3 - 0) = 1/6 \text{ वर्ग इकाई।}$$



आकृति 11.28

उदाहरण-21. वक्र $y = x^2 + 2$ रेखा $y = x$, $x = 0$ एवं $x = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: वक्र $y = x^2 + 2$ एक ऐसा परवलय है जिसका शीर्ष $(0, 2)$ y–अक्ष पर स्थित है। $y = x$ मूल बिन्दु से जाने वाली रेखा है। अभीष्ट क्षेत्र वक्र $y = x^2 + 2$, $y = x$, $x = 0$ तथा $x = 3$ से घिरा हुआ है जिसे आकृति में छायांकित किया गया है। आकृति में बिन्दु Q जो $x = 3$ व वक्र $y = x^2 + 2$ का प्रतिच्छेद बिन्दु है, के निर्देशांक (3, 11) है।

अभीष्ट क्षेत्रफल $=$ क्षेत्रफल $OPQRO$

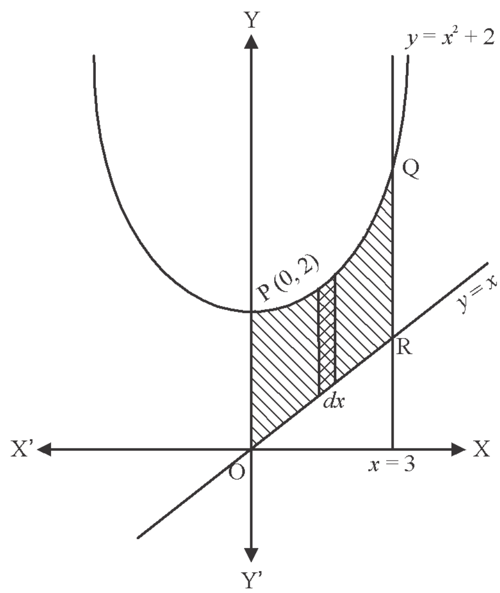
$$= \int_{0(y \text{ परवलय से})}^{3} y\,dx - \int_{0(y \text{ रेखा से})}^{3} y\,dx$$

$$= \int_0^3 (x^2 + 2)dx - \int_0^3 x\,dx$$

$$= \left[x^3/3 + 2x\right]_0^3 - \left[x^2/2\right]_0^3$$

$$= (27/3 + 6) - (0 + 0) - [9/2 - 0]$$

$$= 9 + 6 - 9/2 = 21/2 \text{ वर्ग इकाई।}$$



आकृति 11.29

विविध प्रश्नमाला–11

1. वक्र $y=\sqrt{x}$ तथा $y=x$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल वर्ग इकाई में है
   (क) 1 (ख) $1/9$ (ग) $1/6$ (घ) $2/3$
2. वक्र $y^2=x$ तथा $x^2=y$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल वर्ग इकाई में है
   (क) $1/3$ (ख) 1 (ग) $1/2$ (घ) 2
3. परवलय $x^2=4y$ तथा इसकी नाभिलम्ब से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल वर्ग इकाई में है
   (क) $5/3$ (ख) $2/3$ (ग) $4/3$ (घ) $8/3$
4. $y=\sin x, \dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{3\pi}{2}$ तथा x-अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल वर्ग इकाई में है
   (क) 1 (ख) 2 (ग) $1/2$ (घ) 4
5. $y^2=2x$ तथा वृत्त $x^2+y^2=8$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल वर्ग इकाई में है
   (क) $(2\pi+4/3)$ (ख) $(\pi+2/3)$ (ग) $(4\pi+4/3)$ (घ) $(\pi+4/3)$
6. परवलय $y^2=x$ तथा रेखा $x+y=2$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
7. प्रथम चतुर्थांश में वक्रों $y^2=2ax-x^2$ व $y^2=ax$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
8. परवलय $y=x^2$ तथा $y=|x|$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
9. वृत्त $x^2+y^2=16$ तथा परवलय $y^2=6x$ के मध्यवर्ती उभयनिष्ठ क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
10. वक्र $x^2+y^2=1$ व $x+y\ge 1$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
11. समाकलन का उपयोग कर ऐसे त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $(-1, 0), (1, 3)$ एवं $(3, 2)$ हैं।
12. रेखा $y=3x+2$, x-अक्ष एवं कोटियों $x=-1$ तथा $x=1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
13. $y^2=2x$, $y=4x-1$ व $y\ge o$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
14. वक्र $y^2=4x$, y-अक्ष एवं रेखा $y=3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
15. दो वृत्तों $x^2+y^2=4$ एवं $(x-2)^2+y^2=4$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. वक्र $y=f(x)$, x-अक्ष कोटियों $x=a$ व $x=b$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल निश्चित समाकल $\int_a^b f(x)\,dx$ या $\int_a^b y\,dx$ द्वारा व्यक्त किया जाता है अर्थात् क्षेत्रफल $= \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx$.
2. वक्र $x=\phi(y)$, y-अक्ष और भुजों $y=c$ व $y=d$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \int_c^d \phi(y)\,dy = \int_c^d x\,dy$.
3. यदि वक्र किसी निर्देशी अक्ष या किसी रेखा के परित सममित हो तो किसी एक सममित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करके उसे सममित भागों की संख्या से गुणा कर अभीष्ट क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं।
4. क्षेत्रकलन सदैव धनात्मक माना जाता है अतः यदि क्षेत्रफल का कुछ भाग x-अक्ष के उपर (जो $\oplus$ माना जाता है) तथा भाग x-अक्ष के नीचे है। (जो-माना जाता है) तो दोनों भागों के क्षेत्रफलों की अलग-अलग गणनाकर उनके संख्यात्मक मान का योग करने पर अभीष्ट क्षेत्रफल प्राप्त होता है।
5. दो वक्रों $y=f(x)$ तथा $y=g(x)$ तथा दो कोटियों $x=a$ व $x=b$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \int_a^b [f(x)-g(x)]dx$ जहाँ $f(x) \geq g(x)$
6. दो वक्रों $x=\phi(y)$ व $x=\psi(y)$ तथा भुजों $y=c$ व $y=d$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \int_c^d [\phi(y)-\psi(y)]dy$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 11.1

1. $8/3\, a^2$ वर्ग इकाई 2. $(\sqrt{3}+2\pi/3)$ वर्ग इकाई 3. 4 वर्ग इकाई
4. $4/3$ वर्ग इकाई 5. $5/2$ वर्ग इकाई 6. $2/a$ वर्ग इकाई 7. 3π वर्ग इकाई
8. πab वर्ग इकाई 9. $2ab$ वर्ग इकाई 10. 5 वर्ग इकाई 11. $7/3$वर्ग इकाई
12. $7/3$ वर्ग इकाई

प्रश्नमाला 11.2

1. $(2\pi+4/3)$ वर्ग इकाई 2. 27 वर्ग इकाई 3. $(\pi/3-\sqrt{3}/6)$ वर्ग इकाई
4. 2π वर्ग इकाई 5. $16/3$ वर्ग इकाई 6. $\pi-2/4$ वर्ग इकाई 7. $2\,a^2/3$ वर्ग इकाई
8. $9/2$ वर्ग इकाई 9. 7 वर्ग इकाई 10. 4 वर्ग इकाई

विविध प्रश्नमाला—11

1. (ग) 2. (क) 3. (घ) 4. (ख) 5. (क)
6. $9/2$ वर्ग इकाई 7. $a^2(\pi/4-2/3)$ वर्ग इकाई 8. $1/3$ वर्ग इकाई
9. $4/3(\sqrt{3}+4\pi)$ वर्ग इकाई 10. $\pi-2/4$ वर्ग इकाई 11. 4 वर्ग इकाई
12. $13/3$ वर्ग इकाई 13. $1/3$ वर्ग इकाई 14. $9/4$ वर्ग इकाई
15. $(8\pi/3-2\sqrt{3})$ वर्ग इकाई

12

अवकल समीकरण
(Differential Equation)

12.01 प्रस्तावना (Introduction)

विज्ञान की अनेक शाखाओं के अध्ययन के दौरान बहुधा ऐसी परिस्थितियाँ आती है जब किसी परिघटना से संबंधित राशियों के मध्य सीधे सम्बन्ध ज्ञात करना कठिन कार्य होता है। परन्तु राशियाँ एवं उनके अवकलजों के मध्य सम्बन्ध आसानी से स्थापित किए जा सकते है। इसके लिए अवकल समीकरणों के उपयोग की आवश्यकता होती है।

परिभाषा (Difinition)

एक ऐसी समीकरण जिसमें स्वतंत्र चर, आश्रित चर एवं आश्रित चर में स्वतंत्र चर के सापेक्ष अवकलन विद्यमान हो, अवकल समीकरण कहलाती है। अवकलन समीकरण सामान्यतः दो प्रकार की होती है:

(i) साधारण अवकल समीकरण (Ordinary differential equation)

(ii) आंशिक अवकल समीकरण (Partial differential equation)

ऐसी समीकरण जिसमें केवल एक ही स्वतंत्र चर हो तथा इस चर और उसके सापेक्ष एक या अधिक क्रम के अवकलज विद्यमान हो तो वे साधारण अवकल समीकरण कहलाती है यहाँ हम केवल साधारण अवकल समीकरण का ही अध्ययन करेंगे। अतः यहाँ अवकल समीकरण से अभिप्राय साधारण अवकल समीकरण ही होगा।

उदाहरणार्थ: $$\frac{dy}{dx} = x^2 y,\ \frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = \sin x,$$

यहाँ x स्वतंत्र चर तथा y आश्रित चर है।

12.02 अवकल समीकरण की कोटि तथा घात (Order and degree of a differential equation)

अवकल समीकरण की कोटि: किसी अवकल समीकरण में विद्यमान स्वतंत्र चर के सापेक्ष आश्रित चर के उच्चतम अवकलज की कोटि ही उस अवकल समीकरण की कोटि कहलाती है।

उदाहरणार्थ:

(i) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = e^x$ की कोटि एक है, क्योंकि इस समीकरण में आश्रित चर y का अधिकतम अवकलज एक बार ही हुआ है।

(ii) अवकल समीकरण $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + 2y = \sin\theta$ की कोटि दो है, क्योंकि इस समीकरण में आश्रित चर y का अधिकतम अवकलज दो बार हुआ है।

(iii) अवकल समीकरण $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \frac{dy}{dx} + 3y = 0$ की कोटि एक है, क्योंकि आश्रित चर y का अधिकतम अवकलन एक बार ही हुआ है।

अवकल समीकरण की घात: किसी अवकल समीकरण की घात उस अवकल समीकरण को अवकलजों के संदर्भ में परिमेय तथा पूर्ण बीजीय बनाने के बाद उसमें विद्यमान उच्चतम कोटि के अवकलज गुणांक की घात ही उस अवकल समीकरण की घात कहलाती है।

(i) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + \frac{dy}{dx} - 3y = 0$ की घात 2 है, क्योंकि इस समीकरण में उपस्थित अधिकतम अवकलन $\frac{d^3y}{dx^3}$ है। जिसकी घात 2 है।

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2} + \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{2/3} = 0$ की घात 3 है, क्योंकि इसका परिमेयकरण करने पर $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = -\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^2$ प्राप्त होता है, जहाँ उच्चतम अवकलज की घात 3 है।

(iii) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{xy}$ की घात एक है।

टिप्पणीः किसी अवकल समीकरण की कोटि एवं घात (यदि परिभाषित हो) सदैव धनात्मक पूर्णांक होते है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. निम्न अवकल समीकरणों की कोटि तथा घात ज्ञात कीजिए

(i) $\frac{dy}{dx}-\cos x=0$ (ii) $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=e^x$ (iii) $\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^4=\cos x$

(iv) $y=x\frac{dy}{dx}+\frac{a^2}{dy/dx}$ (v) $\frac{d^4y}{dx^4}+\sin\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=0$

हलः (i) इस अवकल समीकरण में उपस्थित उच्चतम कोटि का अवकलज $\frac{dy}{dx}$ है, इसलिए इसकी कोटि 1 है तथा $\frac{dy}{dx}$ की अधिकतम घातांक 1 है, इसलिए इस अवकल समीकरण की घात 1 है।

(ii) दी गई अवकल समीकरण में y का उच्चतम अवकलज $\frac{d^2y}{dx^2}$ है, इसलिए इसकी कोटि 2 है एवं $\frac{d^2y}{dx^2}$ की अधिकतम घातांक 1 है, इसलिए इस अवकल समीकरण की घात 1 है।

(iii) दी गई अवकल समीकरण में y का उच्चतम अवकलज $\frac{d^2y}{dx^2}$ है, इसलिए इसकी कोटि 2 है एवं $\frac{d^2y}{dx^2}$ की अधिकतम घातांक 1 है, इसलिए इस अवकल समीकरण की घात 1 है।

(iv) दी गई अवकल समीकरण को सरल करने पर हम देखते हैं कि $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+a^2=y\frac{dy}{dx}$। अतः इस अवकल समीकरण की कोटि एक तथा घात दो है।

(v) दी गई अवकल समीकरण में y का उच्चतम अवकलज $\frac{d^4y}{dx^4}$ है, इसलिए इसकी कोटि 4 है। साथ ही दिया गया अवकल समीकरण अवकल गुणांकों के संदर्भ में बहुपद नहीं है। अतः घात परिभाषित नहीं है।

प्रश्नमाला 12.1

निम्नलिखित अवकल समीकरणों की कोटि एवं घात ज्ञात कीजिए।

1. $\frac{dy}{dx}=\sin 2x+\cos 2x$
2. $\frac{d^2y}{dx^2}=\sin x+\cos x$
3. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$
4. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+\frac{1}{dy/dx}=2$
5. $a\frac{d^2y}{dx^2}=\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}$
6. $xdx+ydy=0$
7. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^5=0$
8. $x\frac{dy}{dx}+\frac{3}{(dy/dx)}=y^2$

12.03 अवकल समीकरण का निर्माण (Formation of differential equation)

माना $f(x, y, a)=0$ एक किसी वक्र कुल को प्रदर्शित करता है, जो एक अचर पर निर्भर करता है।

$$f(x, y, a)=0 \tag{1}$$

समीकरण (1) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\phi(x, y, y', a)=0 \qquad [\text{जहाँ } y'=\frac{dy}{dx}] \tag{2}$$

समीकरण (1) और (2) से a का विलोप करने पर x, y, y' में एक समीकरण प्राप्त होती है। यही वक्र कुल (1) के लिए अभीष्ट अवकल समीकरण होगी। इसी प्रकार यदि दी गई समीकरण में दो स्वेच्छ अचर हो तो हम दो बार अवकलन कर इससे प्राप्त दो समीकरणों एवं वक्र कुल की समीकरण से स्वेच्छ अचरों का विलोपन कर अभीष्ट अवकल समीकरण प्राप्त करते हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-2. उन सरल रेखाओं के कुल के लिए अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से गुजरती है।

हल: मूल बिन्दु से गुजरने वाली सरल रेखाओं का समीकरण

$$y=mx, \text{ जहाँ } m \text{ प्राचल है।} \tag{1}$$

समीकरण (1) का अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx}=m \tag{2}$$

समीकरण (1) तथा (2) से m का विलोपन करने पर

$$x\frac{dy}{dx}=y, \text{ जो कि अभीष्ट अवकल समीकरण है।}$$

उदाहरण-3. $y=ae^{2x}+be^{-x}$ के कुल की अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल:

$$y=ae^{2x}+be^{-x} \tag{1}$$

समीकरण (1) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx}=2ae^{2x}-be^{-x} \tag{2}$$

पुनः अवकलन करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2}=4ae^{2x}+be^{-x} \tag{3}$$

समीकरण (2) एवं (3) से

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=2ae^{2x}+2be^{-x}=2\left(ae^{2x}+be^{-x}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=2y. \qquad \text{(समीकरण 1 से)}$$

यही अभीष्ट अवकल समीकरण है।

उदाहरण-4. वक्र कुल $y=e^x\left[A\sin x+B\cos x\right]$ का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल: $y=e^x\left[A\sin x+B\cos x\right]$ का x के सापेक्ष अवकलन करने पर (1)

$$\frac{dy}{dx}=e^x[A\sin x+B\cos x]+e^x[A\cos x-B\sin x]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=y+e^x[A\cos x-B\sin x] \quad (2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}+e^x\left[A\cos x-B\sin x\right]+e^x\left[-A\sin x-B\cos x\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}-y-y$$ (समीकरण 2 से)

या $$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+2y=0.$$

यही अभीष्ट अवकल समीकरण है।

प्रश्नमाला 12.2

1. वक्र कुल $y=ax+\dfrac{b}{x}$ के लिए अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।
2. वक्र कुल $x^2+y^2=a^2$ के लिए अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।
3. वक्र कुल $y=Ae^{3x}+Be^{5x}$ का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।
4. वक्र कुल $y=e^x\left[A\cos x+B\sin x\right]$ का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।
5. वक्र कुल $y=a\cos\left(x+b\right)$ जहाँ a और b स्वेच्छ अचर हैं, की अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

12.04 अवकल समीकरण का हल (Solution of a differential equation)

अवकल समीकरण के हल से अभिप्राय समीकरण में प्रयुक्त स्वतंत्र एवं आश्रित चरों में एक ऐसा सम्बन्ध जिसमें कोई भी अवकल गुणांक न हो तथा इससे एवं इससे प्राप्त अवकलजों से दिया गया अवकल समीकरण सन्तुष्ट हो।

अवकल समीकरण का हल उसका पूर्वग (primitive) भी कहलाता है क्योंकि वह अवकल समीकरण उसी से व्युत्पन्न एक सम्बन्ध होता है।

व्यापक, विशिष्ट एवं विचित्र हल (General, particular and singular solution)

(i) **व्यापक हल या पूर्ण हल:** अवकल समीकरण के हल में यदि उसकी कोटि (order) के बराबर स्वेच्छ अचर हो तो वह हल व्यापक हल कहलाता है। इसे पूर्ण हल, पूर्ण समाकल या पूर्ण पूर्वग भी कहते हैं।

उदाहरणार्थ: $y=A\cos x+B\sin x$ अवकल समीकरण $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$ का व्यापक हल है क्योंकि अवकल समीकरण की कोटि 2 के बराबर स्वेच्छ अचर हल में विद्यमान है।

(ii) **विशिष्ट हल:** अवकल समीकरण के व्यापक हल में प्रयुक्त अचरों को स्वेच्छ मान देने पर प्राप्त हल विशिष्ट हल कहलाता है।

उदाहरणार्थ: $y=3\cos x+2\sin x$ अवकल समीकरण $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$ का विशिष्ट हल है।

(iii) **विचित्र हल:** अवकल समीकरण के वे हल जिनमें स्वेच्छ अचर विद्यमान नहीं होते हैं तथा सामान्यतया व्यापक हल की विशेष स्थिति नहीं होती हैं।

टिप्पणी: विचित्र हल पाठ्यक्रम में नहीं है। इसलिए यहाँ इस पर विस्तार से चर्चा नहीं करेंगे।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-5. सिद्ध कीजिए कि $y = cx + \frac{a}{c}$ अवकल समीकरण $y = x\frac{dy}{dx} + \frac{a}{dy/dx}$ का हल है।

हल: दिया समीकरण $y = cx + a/c$ है। (1)

इसका x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = c \tag{2}$$

समीकरण (1) तथा (2) से c को विलोपित करने पर

$$y = x\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{a}{(dy/dx)}$$

अतः $y = cx + a/c$ दी गई अवकल समीकरण का हल है।

उदाहरण-6. सिद्ध कीजिए कि $y = a\sin 2x$ अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$ का हल है।

हल: दिया समीकरण $y = a\sin 2x$ है। (1)

इसका x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = 2a\cos 2x \tag{2}$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -4a\sin 2x \tag{3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4a\sin 2x = 0$$

तथा $$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$$ (समीकरण (1) से)

अतः $y = a\sin 2x$ दी गई अवकल समीकरण का हल है।

उदाहरण-7. सिद्ध कीजिए कि $y + x + 1 = 0$ अवकल समीकरण $(y - x)dy - (y^2 - x^2)dx = 0$ का हल है।

हल: दिया समीकरण है $\because \quad y + x + 1 = 0$

$$\therefore \quad y = -(x+1) \Rightarrow dy = -dx \tag{1}$$

दी गई अवकल समीकरण का बायाँ पक्ष (LHS)

$$= (y-x)dy - (y^2 - x^2)dx$$

$$= (y-x)(-dx) - (y-x)(y+x)dx \quad [\because \text{ समीकरण (1) से}]$$

$$= -(y-x)(1+x+y)dx$$

$$= 0$$

$=$ दायाँ पक्ष (RHS)

अतः $y + x + 1 = 0$ दी गई अवकल समीकरण का हल है।

प्रश्नमाला 12.3

1. सिद्ध कीजिए कि $y^2 = 4a(x+a)$ अवकल समीकरण $y = \left[1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 2x\frac{dy}{dx}$ का हल है।

2. सिद्ध कीजिए कि $y = ae^{-2x} + be^{x}$ अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0$ का हल है।

3. सिद्ध कीजिए कि $y = \frac{c-x}{1+cx}$ अवकल समीकरण $(1+x^2)\frac{dy}{dx} + (1+y^2) = 0$ का हल है।

4. सिद्ध कीजिए कि $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ अवकल समीकरण $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$ का हल है।

5. सिद्ध कीजिए कि $xy = \log y + c$ अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1-xy}(xy \neq 1)$ का हल है।

12.06 प्रथम कोटि एवं प्रथम घात की अवकल समीकरण (Differential equation of first order and first degree)

प्रथम कोटि एवं प्रथम घात की समीकरण में स्वतंत्र चर x आश्रित चर y और $\frac{dy}{dx}$ विद्यमान होते है। अतः समीकरण को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है।

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \text{ जहाँ } f(x, y) \text{ चर } x \text{ तथा } y \text{ का कोई फलन है।}$$

या
$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

या
$$f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$$

जिस प्रकार प्रत्येक फलन का समाकलन करना सम्भव नहीं होता है, उसी प्रकार प्रत्येक अवकल समीकरण का हल ज्ञात करना भी सम्भव नहीं होता है। परन्तु यदि अवकल समीकरण निम्नलिखित मानक रूपों में से किसी भी एक रूप में हो तो उस अवकल समीकरण का हल ज्ञात करना सम्भव होता है।

(A) अवकल समीकरण जिसमें चरों को पृथक किया जाना संभव हो।
(B) प्रतिस्थापन द्वारा चरों का पृथक्कीकरण संभव हो।
(C) समघात रूप की अवकल समीकरण।
(D) समघात रूप में परिवर्तन संभव हो।
(E) रैखिक अवकल समीकरण।
(F) ऐसे अवकल समीकरण जिनको रैखिक अवकल समीकरण के रूप में समानीत किया जाना संभव हो।

टिप्पणी: उपर्युक्त के अतिरिक्त अवकल समीकरणों को कुछ स्थितियों में समाकल-गुणक ज्ञात करने की विधियों की सहायता से हल करना संभव होता है परन्तु पाठ्यक्रम का हिस्सा नहीं होने से उनका अध्ययन यहाँ नहीं दिया गया है।

(A) चरों का पृथक्करण (Variable separable form)

समीकरण $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ में x तथा y को अलग-अलग कर निम्न रूप से व्यक्त करने पर

$$f(x)dx + g(y)dy = 0 \qquad (1)$$

यहाँ चर x तथा y पृथक-पृथक हो गए हैं ऐसी स्थिति में समीकरण (1) के प्रत्येक पद का अलग-अलग समाकलन करने पर निम्न हल प्राप्त होता है।

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C, \text{ जहाँ } C \text{ कोई स्वेच्छ अचर है।}$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-8. हल कीजिए $\frac{dy}{dx}=e^{x+y}$.

हल: दी गई समीकरण को निम्न रूप में लिखने पर $\frac{dy}{dx}=e^{x}\cdot e^{y}$

अब चरों को पृथक करने पर $e^{x}dx=e^{-y}dy$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर $\int e^{x}dx=\int e^{-y}dy$

$\Rightarrow$ $e^{x}=-e^{-y}+C$

या $e^{x}+e^{-y}=C$, जहाँ C समाकल अचर है।

यही अभीष्ट हल है।

उदाहरण-9. हल कीजिए $\frac{dy}{dx}=\sin x-x$

हल: दी गई समीकरण $\frac{dy}{dx}=\sin x-x$

चरों को पृथक करने पर $dy=(\sin x-x)dx$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर $\int dy=\int(\sin x-x)dx$

या $y=-\cos x-\frac{x^2}{2}+C$, जहाँ C समाकल अचर है।

यही अभीष्ट हल है।

उदाहरण-10. हल कीजिए $x\cos^2 y dx=y\cos^2 x dy$.

हल: दिया गया समीकरण $x\cos^2 y dx=y\cos^2 x dy$

या $\frac{dy}{dx}=\frac{x\cos^2 y}{y\cos^2 x}=\frac{x\sec^2 x}{y\sec^2 y}$

चरों की पृथक करने पर

या $y\sec^2 y\,dy=x\sec^2 x\,dx$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर $\int y\sec^2 y\,dy=\int x\sec^2 x\,dx$

खण्डशः विधि से समाकलन करने पर

$y\tan y-\log\sec y=x\tan x-\log\sec x+C$, जहाँ C समाकल अचर है।

यही अभीष्ट हल है।

उदाहरण-11. हल कीजिए $\frac{dy}{dx}+\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}=0$.

हल: दी गई समीकरण $\frac{dy}{dx}=-\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$

अब चरों को पृथक करने पर $$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$\sin^{-1} x = -\sin^{-1} y + C_1$ (पहला रूप), जहाँ C_1 समाकल अचर है।

परन्तु यदि हम अंचराक C_1 को $\sin^{-1} C$ ले तो

$$\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1} C$$

प्रतिलोम फलन के सूत्र $\left[\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\}\right]$ से

$$\sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right] = \sin^{-1} C$$

या $$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्नमाला 12.4

निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए

1. $\left(e^y + 1\right)\cos x dx + e^y \sin x dy = 0$
2. $\left(1 + x^2\right)dy = \left(1 + y^2\right)dx$
3. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} = 2xy$
4. $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$
5. $\left(\sin x + \cos x\right)dy + \left(\cos x - \sin x\right)dx = 0$
6. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3e^{2x} + 3e^{4x}}{e^x + e^{-x}}$
7. $\sec^2 x \tan y dy + \sec^2 y \tan x dx = 0$
8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x(2\log x + 1)}{\sin y + y\cos y}$
9. $\left(1 + \cos x\right)dy = \left(1 - \cos x\right)dx$
10. $\sqrt{1 - x^6}\,dy = x^2 dx$

(B) चरों के पृथक्करण में समानीत होने वाली अवकल समीकरण (Differential equation reducable to variable separable)

इस विधि में दी गई अवकल समीकरण के अवलोकन से किसी विशिष्ट व्यंजक को प्रतिस्थापित करने से समीकरण चरों के पृथक्करण वाली समीकरण में परिणित हो जाती है और उसका हल प्राप्त कर पुनः वह प्रतिस्थापन कर समीकरण का हल प्राप्त किया जाता है। निम्न उदाहरणों से यह विधि अधिक स्पष्ट हो जाएगी।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-12. हल कीजिए $\dfrac{dy}{dx} = (4x + y + 1)^2$.

हल: दिये समीकरण में माना $4x + y + 1 = t$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$4 + \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} - 4$$

दी गई समीकरण में उपर्युक्त प्रतिस्थापन से

$$\frac{dt}{dx}-4=t^2$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dt}{dx}=t^2+4$$

$\Rightarrow$ $$\frac{1}{t^2+4}dt=dx \text{ (चर पृथक्करण से)}$$

समाकलन करने पर $$\int \frac{1}{t^2+(2)^2}dt=\int dx$$

या $$\frac{1}{2}\tan^{-1}(t/2)=x+C \text{, जहाँ } C \text{ समाकल अचर है।}$$

या $$\tan^{-1}t/2=2x+2C$$

या $$t=2\tan(2x+C_1) \text{, जहाँ } C_1=2C$$

t का मान रखने पर अभीष्ट हल

$$4x+y+1=2\tan(2x+C_1)$$

उदाहरण-13. हल कीजिए $(x-y)^2\frac{dy}{dx}=a^2$.

हल: इस समीकरण को निम्न रूप में लिखने पर

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a^2}{(x-y)^2} \tag{1}$$

माना $$x-y=t \Rightarrow 1-\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}$$

अतः समीकरण (1) से $$1-\frac{dt}{dx}=\frac{a^2}{t^2}$$

सरल करने पर $$\frac{dt}{dx}=1-\frac{a^2}{t^2}=\frac{t^2-a^2}{t^2}$$

अतः $$dx=\left[1+\frac{a^2}{(t^2-a^2)}\right]dt$$

समाकलन करने पर $$\int dx=\int\left[1+\frac{a^2}{t^2-a^2}\right]dt$$

या $$x=t+a^2\frac{1}{2a}\log\left(\frac{t-a}{t+a}\right)+C \text{, जहाँ } C \text{ समाकल अचर है।}$$

t का मान रखने पर अभीष्ट हल है $$y=\frac{a}{2}\log\left\{\frac{x-y-a}{x-y+a}\right\}+C.$$

उदाहरण-14. हल कीजिए $\frac{dy}{dx} = \sin(x+y) + \cos(x+y)$.

हल: यहाँ माना $x + y = t$, x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} - 1$$

दी गई समीकरण में उपर्युक्त प्रतिस्थापन करने पर

$$\frac{dt}{dx} - 1 = \sin t + \cos t$$

या $$\frac{dt}{dx} = 1 + \sin t + \cos t$$

या $$\frac{dt}{(\sin t + \cos t + 1)} = dx \qquad \text{[चर–पृथक्कीकरण]}$$

या $$\frac{(1/2)\sec^2 t/2}{1 + \tan t/2} dt = dx \qquad \text{[आधे कोण में बदलकर } 2\cos^2 t/2 \text{ उभयनिष्ठ लेने पर]}$$

समाकलन करने पर $$\int \frac{(1/2)\sec^2 t/2}{1 + \tan t/2} dt = \int dx$$

$$\log\left[1 + \tan\frac{t}{2}\right] = x + C, \text{ जहाँ } C \text{ समाकल अचर है।}$$

या $$\log\left[1 + \tan\frac{(x+y)}{2}\right] = x + C. \qquad [\because \; t = x + y \text{ रखने पर}]$$

उदाहरण-15. हल कीजिए $\left[\frac{x+y-a}{x+y-b}\right]\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+a}{x+y+b}$

हल: दी गई समीकरण से

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+y+a)(x+y-b)}{(x+y-a)(x+y+b)} \qquad (1)$$

माना $$x + y = t \Rightarrow 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \qquad \text{(अवकलन करने पर)}$$

अतः (1) से $$\frac{dt}{dx} = \frac{(t+a)(t-b)}{(t-a)(t+b)} + 1$$

सरल करने पर $$\frac{dt}{dx} = \frac{2(t^2 - ab)}{(t-a)(t+b)}$$

या $$2dx = \left[1 + \frac{t(b-a)}{t^2 - ab}\right] dt$$

समाकलन करने पर $$\int 2dx = \int \left[1+\frac{t(b-a)}{t^2-ab}\right] dt$$

$$2x = t+\frac{b-a}{2}\log\left(t^2-ab\right)+C$$, जहाँ C समाकल अचर है।

t का मान रखने पर अभीष्ट हल है।

$$x-y=\frac{b-a}{2}\log\left[(x+y)^2-ab\right]+C.$$

प्रश्नमाला 12.5

निम्नलिखित अवकलन समीकरणों को हल कीजिए

1. $(x+y)^2\dfrac{dy}{dx}=a^2$
2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+y+1}$
3. $\cos(x+y)dy=dx$
4. $e^{x+y}=1+\dfrac{dy}{dx}$
5. $(x+y)(dx-dy)=dx+dy$
6. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y+1}{x+y}$
7. $x+y=\sin^{-1}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$
8. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x-y}+1$
9. $\dfrac{dy}{dx}=\sec(x+y)$
10. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(x-y)+3}{2(x-y)+5}$

(C) समघात अवकल समीकरण (Homogeneous differential equation)

अवकल समीकरण $f(x, y)dx+g(x, y)dy=0$ को समघात अवकल समीकरण कहते है, यदि इसे निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जा सके

$$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

अर्थात् $f(x, y)$ और $g(x, y)$ के प्रत्येक पद में x तथा y की घातों का योग सदैव समान रहता है। समघात अवकल समीकरण को हल करने के लिए माना

$$y=vx \tag{2}$$

इसे x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx} \tag{3}$$

(2) तथा (3) का प्रयोग (1) में करने पर

$$v+x\frac{dv}{dx}=F(v)$$

या $$x\frac{dv}{dx}=F(v)-v$$

या $$\frac{1}{F(v)-v}dv=\frac{dx}{x}$$ [चर पृथक्कीरण से]

समाकलन करने पर $\int \frac{1}{F(v)-v} dv = \int \frac{1}{x} dx = \log x + C$, जहाँ C समाकल अचरांक है।

बाएँ पक्ष का समाकल कर $v = \frac{y}{x}$ प्रतिस्थापित करने पर दी गई अवकल समीकरण का अभीष्ट हल प्राप्त होता है।

टिप्पणी: यदि समघात अवकल समीकरण $\frac{dx}{dy} = f(x, y)$ के रूप में हो, जहाँ $f(x, y)$ शून्य घात वाला समघातीय फलन हो, तो $x = vy$ रखकर $\frac{dx}{dy}$ का मान ज्ञात करते हैं तथा $\frac{dx}{dy} = f(x, y)$ में $\frac{dx}{dy}$ का मान रखते हैं और अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात करते हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-16. हल कीजिए $\frac{dy}{dx} = \frac{3xy + y^2}{3x^2}$

हल: दी गई समीकरण $$\frac{dy}{dx} = \frac{3xy + y^2}{3x^2} \quad (1)$$

दी गई समीकरण समघात अवकल समीकरण है।

अतः माना $$y = vx \quad (2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = v + \frac{xdv}{dx} \quad (3)$$

समीकरण (2) और (3) का प्रयोग समीकरण (1) में करने पर

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{3vx^2 + v^2x^2}{3x^2} = \frac{3v + v^2}{3}$$

या $$x\frac{dv}{dx} = \frac{3v + v^2}{3} - v = \frac{v^2}{3}$$

या $$\frac{1}{v^2} dv = \frac{1}{3x} dx$$ [चर पृथक्कीकरण से]

समाकलन करने पर $$-\frac{1}{v} = \frac{1}{3}\log|x| + C$$, जहाँ C समाकल अचर है।

या $$-\frac{x}{y} = \frac{1}{3}\log|x| + C.$$ $\left[\because v = \frac{y}{x}\right]$

यही अभीष्ट हल है।

उदाहरण-17. हल कीजिए $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\left(\frac{y}{x}\right)$.

हल: $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1)$$

दी गई समीकरण समघात अवकल समीकरण है।

अतः माना $$y = vx$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

अतः (1) से $$v + x\frac{dv}{dx} = v + \tan v$$

या $$\frac{1}{x}dx = \cot v\, dv$$ [चर पृथक्कीकरण से]

समाकलन करने पर $\log|x| = \log\sin v + \log C$, जहाँ $\log C$ समाकल अचर है।

या $$x = C\sin v$$

v का मान रखने पर अभीष्ट हल $$x = C\sin\left(\frac{y}{x}\right).$$

उदाहरण-18. हल कीजिए: $x\sin\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y\sin\left(\frac{y}{x}\right) - x$

हल: दी गई समीकरण से

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\sin(y/x) - x}{x\sin(y/x)} \quad (1)$$

दी गई समीकरण समघात अवकल समीकरण है

अतः माना $$y = vx \quad (2)$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad (3)$$

अतः समीकरण (1) से $$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v\sin v - 1}{\sin v}$$

या $$v + x\frac{dv}{dx} = v - \operatorname{cosec} v$$

या $$\frac{1}{x}dx = -\sin v\, dv$$ [चर पृथक्कीकरण से]

$\log(x/c) = \cos v$, जहाँ C समाकल अचर है।

या $$x = Ce^{\cos v}$$

v का मान रखने पर अभीष्ट हल, $$x = ce^{\cos(y/x)}$$

उदाहरण-19. हल कीजिए $x\frac{dy}{dx} = y(\log y - \log x + 1)$

हल: दी गई समीकरण से $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left[\log\frac{y}{x} + 1\right] \quad (1)$$

समीकरण (1) समघात समीकरण है।

अतः माना $$y = vx \quad (2)$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad (3)$$

समीकरण (2) और (3) का प्रयोग समीकरण (1) में करने पर

$$v + x\frac{dv}{dx} = v(\log v + 1)$$

या $$x\frac{dv}{dx} = v\log v$$

या $$\frac{1}{v\log v}dv = \frac{1}{x}dx \qquad \text{[चर पृथक्ककीरण से]}$$

समाकलन करने पर $$\int\frac{(1/v)}{\log v}dv = \int\frac{1}{x}dx$$

या $\log(\log v) = \log x + \log C$, जहाँ $\log C$ समाकल अचर है।

या $$\log v = Cx$$

या $$\log\frac{y}{x} = Cx \qquad [\because\ v = y/x]$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्नमाला 12.6

निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए

1. $x^2ydx - (x^3 + y^3)dy = 0$
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sin\left(\frac{y}{x}\right)$
3. $x\frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{x} = y$
4. $x\sin\left[\frac{y}{x}\right]\frac{dy}{dx} = y\sin\left[\frac{y}{x}\right] - x$
5. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$
6. $(x^2 + y^2)dy = 2xydx$
7. $(1 + e^{x/y})dx + e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$
8. $(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$
9. $x^2\frac{dy}{dx} = x^2 + xy + y^2$
10. $x(x - y)dy = y(x + y)dx$

(D) समघात में परिणित होने वाली अवकल समीकरण (Differential equation reducible to homogeneous form)

जब अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}$, जहाँ $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ (1)

के रूप की हो तो इसमें अचर c तथा c' को प्रतिस्थापन $x = X + h$ तथा $y = Y + k$ द्वारा हटाकर, इसे समघात बनाई जाती है। तत्पश्चात समघात समीकरण को हल करने की विधि से हलकर अन्त में $X = x - h$ तथा $Y = y - k$ रखकर अभीष्ट हल प्राप्त किया जाता है।

अतः माना $x = X + h$; $y = Y + k$

$dx = dX$; $dy = dY$

अतः समीकरण (1) से $$\frac{dY}{dX} = \frac{a(X + h) + b(Y + k) + c}{a'(X + h) + b'(Y + k) + c'}$$

या
$$\frac{dY}{dX}=\frac{(aX+bY)+(ah+bk+c)}{(a'X+b'Y)+(a'h+b'k+c')} \quad (2)$$

अब समीकरण (2) को समघात बनाने के लिए अचरों h तथा k का चुनाव इस प्रकार किया जाता है कि

तथा
$$\left.\begin{array}{l} ah+bk+c=0 \\ a'h+b'k+c'=0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

इन्हें हलकर h तथा k का मान ज्ञात करते है।

अब समीकरण युग्म (3) का प्रयोग समीकरण (2) में करने पर

$$\frac{dY}{dX}=\frac{aX+bY}{a'X+b'Y} \quad (4)$$

जो कि समघात है, अतः (4) को समघात समीकरण की विधि से हल कर अन्त में $X=x-h$ तथा $Y=y-k$ रखकर अभीष्ट हल प्राप्त करेंगे।

टिप्पणी: उपर्युक्त विधि उस स्थिति में विफल हो जाती है जब $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$ क्योंकि तब h तथा k के मान या तो अनन्त आयेंगे या अनिर्धार्य।

ऐसी स्थिति में माना $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{1}{m}$ तो समीकरण (1) का रूप होगा

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{m[ax+by]+c'} \quad (5)$$

अब समीकरण (5) में प्रतिस्थापन $ax+by=v$ रखकर हल करने पर

$$\frac{dv}{dx}=a+b\left(\frac{v+c}{mv+c'}\right)$$

जो कि चरों को पृथक करने वाली विधि से हल की जा सकती है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-20. हल कीजिए $\frac{dy}{dx}=\frac{7x-3y-7}{7y-3x+3}$.

हल: दी गई समीकरण समघात रूप में परिवर्तित होने वाली अवकल समीकरण है क्योंकि $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$

अतः $x=X+h,\ y=Y+k$ रखने पर

$$\frac{dY}{dX}=\frac{7X-3Y+(7h-3k-7)}{-3X+7Y+(7K-3h+3)} \quad (1)$$

h तथा k का चयन इस प्रकार करे जिससे

$$7h-3k-7=0$$

तथा
$$7k-3h+3=0$$

इन्हे हल करने पर $h=1$ तथा $k=0$

अतः समीकरण (1) से
$$\frac{dY}{dX}=\frac{7X-3Y}{-3X+7Y} \quad (2)$$

जोकि समघात रूप है, अतः $Y = vX$ प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{dY}{dX} = v + X\frac{dv}{dX}$$

अतः (2) से
$$v + X\frac{dv}{dx} = \frac{7-3v}{-3+7v}$$

$\Rightarrow$
$$X\frac{dv}{dX} = \frac{7-3v}{-3+7v} - v$$

या
$$-7\frac{dX}{X} = \frac{7v-3}{v^2-1}dv \qquad \text{[चर पृथक्कीकरण से]}$$

या
$$-7\frac{dX}{X} = \frac{7}{2}\left(\frac{2v}{v^2-1}\right)dv - \frac{3}{v^2-1}dv$$

समाकलन करने पर $-7\log X = \frac{7}{2}\log\left(v^2-1\right) - \frac{3}{2}\log\left(\frac{v-1}{v+1}\right) - \log C$, जहाँ $\log C$ समाकल अचर है।

$\therefore$
$$\log X^7 + \log\frac{(v^2-1)^{7/2}(v+1)^{3/2}}{(v-1)^{3/2}} = \log C$$

$$\log\left[(v+1)^5(v-1)^2\right]X^7 = \log C$$

v का मान रखने पर
$$\log\left[\left(\frac{Y}{X}+1\right)^5\left(\frac{Y}{X}-1\right)^2\right]X^7 = \log C$$

या
$$\left(Y+X\right)^5\left(Y-X\right)^2 = C$$

अब $X = x-1$ तथा $Y = y$ रखने पर

$$\left(y+x-1\right)^5\left(y-x+1\right)^2 = C$$

यही अभीष्ट हल है।

उदाहरण-21. हल कीजिए $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x+y-1}$.

हलः दी गई अवकल समीकरण समघात रूप में परिवर्तित होने वाली समीकरण नहीं है। क्योंकि यहाँ $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$

अतः इस प्रकार के समीकरण को हल करने के लिए हम निम्न प्रतिस्थापन करेंगे।

$$x + y = v$$

या
$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

अतः
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1 = \frac{v+1}{v-1} \qquad \text{[दिए समीकरण से]}$$

या
$$\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{v-1}$$

या
$$2dx = \frac{(v-1)}{v}dv$$

या $$2dx = \left(1 - \frac{1}{v}\right)dv$$

समाकलन करने पर $$\int 2dx = \int \left(1 - \frac{1}{v}\right)dv$$

$2x = v - \log v + C$, जहाँ C समाकल अचर है।

v का मान रखने पर $$2x = x + y - \log(x+y) + C$$

या $$x - y + \log(x+y) = C$$

यही अभीष्ट हल है।

उदाहरण-22. हल कीजिए $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y+1}{2x+2y+3}$

हल: दी गई समीकरण $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y+1}{2x+2y+3}$, $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{c'}$ रूप में है

इसलिए माना $$x + y = v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1$$

या $$\frac{dv}{dx} - 1 = \frac{v+1}{2v+3}$$

या $$\frac{dv}{dx} = \frac{v+1}{2v+3} + 1 = \frac{3v+4}{2v+3}$$

या $$\frac{2v+3}{3v+4}dv = dx$$ [चर पृथक्कीकरण से]

समाकलन करने पर $$\int \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3v+4}\right)\right]dv = \int dx$$

$\dfrac{2}{3}v + \dfrac{1}{9}\log(3v+4) = x + C$, जहाँ C समाकल अचर है।

$$6v + \log(3v+4) = 9x + C_1$$ (जहाँ $C_1 = 9C$)

या $$6(x+y) + \log(3x+3y+4) = 9x + C_1$$ (v का मान रखने पर)

या $$6y - 3x + \log(3x+3y+4) = C_1$$

यही अभीष्ट हल है।

प्रश्नमाला 12.7

निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए।

1. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{3x+2y-5}{2x+3y-5} = 0$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y+3}{2x+2y+5}$

3. $(2x+y+1)dx + (4x+2y-1)dy = 0$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-3x-3y}{2(x+y)}$

5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x-2y-7}{2x+3y-6}$

(E) रैखिक अवकल समीकरण (Linear differential equation)

अब किसी अवकल समीकरण में आश्रित चर तथा उसके अवकलज प्रथम घात में हो, तो वह अवकल समीकरण प्रथम क्रम की रैखिक अवकल समीकरण कहलाती है। इसका व्यापक रूप है–

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q, \qquad (1)$$

जहाँ P तथा Q स्वतंत्र चर x के फलन या अचर है। यदि y स्वतंत्र तथा x को आश्रित चर ले तो इसका रूप

$$\frac{dx}{dy}+p_1x=Q_1 \qquad (2)$$

होता है, जहाँ P_1, Q_1 y के फलन या अचर है।

रैखिक अवकल समीकरण (1) का हल: समीकरण (1) के दोनों पक्षों को $e^{\int Pdx}$ से गुणा करने पर

$$e^{\int Pdx}\left[\frac{dy}{dx}+Py\right]=e^{\int Pdx}Q$$

या
$$\frac{d}{dx}\left[ye^{\int Pdx}\right]=e^{\int Pdx}Q$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$y\cdot e^{\int Pdx}=\int Qe^{\int Pdx}dy+C$$, जहाँ C समाकल अचर है।

या
$$y=e^{-\int Pdx}\{\int Qe^{\int Pdx}dx+C\}$$

जो कि समीकरण (1) का अभीष्ट हल है।

टिप्पणी: (i) $e^{\int Pdx}$ समीकरण (i) का समाकलन गुणक (Integrating factor) कहलाता है। जिसे संक्षेप में (I.F.) लिखते हैं।

(ii) अवकल समीकरण को हल करने से पूर्व अवकलज का गुणांक सदैव इकाई होना चाहिए।

(iii) अवकल समीकरण $\left(\frac{dx}{dy}+P_1x=Q_1\right)$ में समाकलन गुणक $e^{\int P_1dy}$ लेना होता है तथा इसका हल

$$x=e^{-\int P_1dy}\left\{\int Q_1e^{\int P_1dy}dy+C\right\}$$ होता है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-23. हल कीजिए $(1-x^2)\frac{dy}{dx}-xy=1$.

हल: दी गई समीकरण को मानक रूप में लिखने पर

$$\frac{dy}{dx}+\left(-\frac{x}{(1-x^2)}\right)y=\frac{1}{(1-x^2)}$$

यहाँ
$$P=-\frac{x}{(1-x^2)},\ Q=\frac{1}{(1-x^2)}$$

अतः समाकलन गुणांक (I.F.) $=e^{\int Pdx}=e^{-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1-x^2}dx}=e^{\frac{1}{2}\log(1-x^2)}=\sqrt{1-x^2}$

अतः हल होगा, $y(\text{I.F.})=\int(\text{I.F.})Q dx+C$, जहाँ C समाकल अचर है।

$$\therefore \qquad y\sqrt{1-x^2}=\int\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{(1-x^2)}dx$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

या $$y\sqrt{1-x^2}=\sin^{-1}x+C.$$

यही अभीष्ट हल है।

उदाहरण-24. हल कीजिए $\sec x\dfrac{dy}{dx}=y+\sin x$.

हल: दी गई समीकरण को मानक रूप में लिखने पर

$$\frac{dy}{dx}-y\cos x=\sin x\cos x,$$

यहाँ $$P=-\cos x,\ Q=\sin x\cos x$$

अतः समाकलन गुणक $(\text{I.F.})=e^{\int P dx}=e^{-\int\cos dx}=e^{-\sin x}$

अतः हल $$y\cdot e^{-\sin x}=\int\sin x\cos x e^{-\sin x}dx+C$$, जहाँ C समाकल अचर है।

$$=\int te^{-t}dt+C \qquad [\text{यहाँ } t=\sin x,\ \therefore dt=\cos x dx]$$

$$=-e^{-t}(1+t)+C \qquad [\text{खण्डशः समाकलन करने पर}]$$

$$=-e^{-\sin x}(1+\sin x)+C \qquad (\because\ t=\sin x \text{ रखने पर})$$

या $$y=Ce^{\sin x}-(1+\sin x)$$

यही अभीष्ट हल है।

उदाहरण-25. हल कीजिए $x\log x\dfrac{dy}{dx}+y=2\log x$

हल: दी गई समीकरण को मानक रूप में लिखने पर

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x\log x}=\frac{2}{x},$$

जहाँ $$P=\frac{1}{x\log x},\ Q=\frac{2}{x}$$

समाकलन गुणक $(\text{I.F.})=e^{\int P dx}=e^{\int\frac{1}{x\log x}dx}=e^{\log(\log x)}=\log x$

अतः हल $$y\log x=\int\frac{2}{x}\log x dx+C$$, जहाँ C समाकल अचर है।

$$=2\frac{(\log x)^2}{2}+C$$

या $$y=(\log x)+\frac{C}{(\log x)}.$$

यही अभीष्ट हल है।

उदाहरण-26. हल कीजिए $\left(1+y^2\right)dx=\left(\tan^{-1}y-x\right)dy$.

हल: दी गई समीकरण से

$$\frac{dx}{dy}+\frac{1}{\left(1+y^2\right)}x=\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2},$$

यहाँ $$P_1=\frac{1}{1+y^2},\ Q_1=\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}$$

अतः समाकलन गुणक $(\text{I.F.})=e^{\int P_1dy}=e^{\int\frac{1}{1+y^2}dy}=e^{\tan^{-1}y}$

अतः हल है $$xe^{\tan^{-1}y}=\int e^{\tan^{-1}y}\left(\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}\right)dy+C$$, जहाँ C समाकलन अचर है।

$$=\int te^t dt+C \qquad [\text{जहाँ } \tan^{-1}y=t \text{ माना}]$$

$$=(t-1)e^t+C$$

t का मान रखने पर समीकरण का अभीष्ट हल है

$$x=(\tan^{-1}y-1)+ce^{-\tan^{-1}y}.$$

प्रश्नमाला 12.8

निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए

1. $\frac{dy}{dx}+2y=4x$
2. $\cos^2x\frac{dy}{dx}+y=\tan x$
3. $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}+2yx=4x^2$
4. $\left(2x-10y^3\right)\frac{dy}{dx}+y=0$
5. $\frac{dy}{dx}+y\cot x=\sin x$
6. $\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}+2xy=x\sqrt{1-x^2}$
7. $\sin^{-1}\left[\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y\right]=x$
8. $x\frac{dy}{dx}+2y=x^2\log x$
9. $dx+xdy=e^{-y}\sec^2 y dy$
10. $\left(1+y^2\right)+\left(x-e^{\tan^{-1}y}\right)\frac{dy}{dx}=0$

(F) रैखिक अवकल समीकरण में समानेय अवकल समीकरण (Differential equation reducible to linear differential equation)

बर्नूली समीकरण (Bernoully equation)

$$\frac{dy}{dx}+Py=Qy^n \qquad (1)$$

उपर्युक्त प्रकार की अवकल समीकरणों को y^n से विभाजित करके रैखिक अवकल समीकरण में परिवर्तित किया जा सकता है। अतः दोनों तरफ y^n का भाग देने पर

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+Py^{1-n}=Q \qquad (2)$$

माना $$y^{1-n}=v$$

$$(1-n)\,y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(1-n)}\frac{dv}{dx}$$

समीकरण (2) में उपर्युक्त मान प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{1}{(1-n)}\frac{dv}{dx}+Pv=Q$$

या $$\frac{dv}{dx}+(1-n)Pv=(1-n)Q$$

जो कि रैखिक समीकरण हैं जिसे अनुच्छेद (v) में दर्शाई विधि से हल कर सकते हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-27. हल कीजिए $\dfrac{dy}{dx}+y=x^3y^6$

हल: दी गई समीकरण के दोनों पक्षों को xy^6 से भाग देने पर

$$\frac{1}{y^6}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{xy^5}=x^2 \qquad (1)$$

माना $$\frac{1}{y^5}=v\Rightarrow\frac{-5}{y^6}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

अत: (1) का परिवर्तित रूप $$-\frac{1}{5}\frac{dv}{dx}+\frac{1}{x}v=x^2$$

या $$\frac{dv}{dx}-\frac{5}{x}v=-5x^2$$, जो कि रैखिक अवकल समीकरण है। (2)

अत: समाकलन गुणक $(I.F.)=e^{\int Pdx}=e^{-5\int\frac{1}{x}dx}=e^{-5\log x}=\dfrac{1}{x^5}$

अत: समीकरण (2) का हल होगा, $$v\frac{1}{x^5}=\int\frac{1}{x^5}(-5x^2)dx+C$$

या $$\frac{v}{x^5}=-5\int x^{-3}dx+C=\frac{5}{2x^2}+C$$

अत: v का मान रखने पर अभीष्ट हल $$y^{-5}=\frac{5}{2}x^3+6x^5.$$

उदाहरण-28. हल कीजिए $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^y}{x^2}-\dfrac{1}{x}$

हल: दी गई समीकरण से $$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}=\frac{e^y}{x^2}$$

e^y से भाग देने पर $$e^{-y}\frac{dy}{dx}+\frac{e^{-y}}{x}=\frac{1}{x^2} \qquad (1)$$

माना $$e^{-y} = v \Rightarrow -e^{-y}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

अतः (1) का परिवर्तित रूप $$-\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = \frac{1}{x^2}$$

या $$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v = -\frac{1}{x^2} \qquad (2)$$

जो कि रैखिक समीकरण है।

अतः समाकलन गुणक $(I.F.) = e^{\int P dx} = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\log x} = \frac{1}{x}$

अतः (2) का हल होगा $$v\cdot\frac{1}{x} = \int \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

या $$\frac{v}{x} = \frac{1}{2x^2} + C$$

अतः v का मान रखने पर अभीष्ट हल, $2xe^{-y} - 1 = 2x^2C$.

उदाहरण-29. हल कीजिए $\frac{dy}{dx} + \left(2x\tan^{-1}y - x^3\right)\left(1+y^2\right) = 0$

हल: दी समीकरण है: $\frac{dy}{dx} + \left(2x\tan^{-1}y - x^3\right)\left(1+y^2\right) = 0$

या $$\frac{1}{\left(1+y^2\right)}\frac{dy}{dx} = -\left(2x\tan^{-1}y - x^3\right)$$

या $$\frac{1}{\left(1+y^2\right)}\frac{dy}{dx} + 2x\tan^{-1}y = x^3 \qquad (1)$$

माना $$\tan^{-1}y = v \Rightarrow \frac{1}{\left(1+y^2\right)}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

अतः समीकरण (1) से $$\frac{dv}{dx} + 2xv = x^3$$

जो कि रैखिक समीकरण है, जहाँ $P = 2x,\ Q = x^3$

$\therefore$ समाकलन गुणक $(I.F.) = e^{2\int x dx} = e^{x^2}$

अतः अभीष्ट हल $$v\cdot e^{x^2} = \int x^3 e^{x^2}dx + C$$

$$= \frac{1}{2}\int x^2(2x)e^{x^2}dx + C$$

$$= \frac{1}{2}\int te^t dt + C, \qquad [\text{जहाँ } t = x^2, \therefore dt = 2xdx]$$

$$= \frac{1}{2}e^t(t-1) + C \qquad [\text{खण्डशः समाकलन से}]$$

$$= \frac{1}{2}e^{x^2}\left(x^2-1\right) + C, \qquad \left[\because t = x^2\right]$$

v का मान पुनः प्रतिस्थापित करने पर

$$\left(\tan^{-1} y\right)e^{x^2} = \frac{1}{2}e^{x^2}\left(x^2-1\right)+C$$

$$\tan^{-1} y = \frac{1}{2}\left(x^2-1\right)+ce^{-x^2}.$$

यही अभीष्ट हल है।

उदाहरण-30. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+2y\tan x=\sin x$; का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए।

यदि $x=\pi/3$ तथा $y=0$

हल: दिया हुआ अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx}+2y\tan x=\sin x \qquad (1)$$

यहाँ $$P=2\tan x,\ Q=\sin x$$

$$\text{I.F.} = e^{2\int \tan x dx} = e^{2\log\sec x} = e^{\log\sec^2 x} = \sec^2 x$$

अवकल समीकरण का व्यापक हल

$$y\times \text{I.F.} = \int (\text{I.F.})\times Q dx$$

या $$y\cdot\sec^2 x = \int \sec^2 x\times \sin x dx$$

या $$y\cdot\sec^2 x = \int \sec x\tan x\, dx$$

या $$y\cdot\sec^2 x = \sec x + C \qquad (2)$$

जब $x=\pi/3,\ y=0$ समीकरण (2) में रखने पर

$$0=\sec\pi/3+C$$

या $$C=-2$$

$C=-2$ समीकरण (2) में रखने पर

$$y\sec^2 x=\sec x-2$$

या $$y=\cos x-2\cos^2 x$$

अभीष्ट विशिष्ट हल है।

प्रश्नमाला 12.9

निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए

1. $\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$
2. $\frac{dy}{dx}=e^{x-y}\left(e^x-e^y\right)$
3. $\frac{dy}{dx}-y\tan x=-y^2\sec x$
4. $\tan x\cos x\frac{dy}{dx}+\sin y+e^{\sin x}=0$
5. $\frac{dy}{dx}+x\sin 2y=x^3\cos^2 y$
6. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}\log y=\frac{y}{x^2}(\log y)^2$
7. $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+2xy=\frac{1}{1+x^2}$ यदि $x=1,\ y=0$

विविध प्रश्नमाला—12

1. समीकरण $\left(x^2+1\right)\frac{dy}{dx}=1$ का हल है

(क) $y=\cot^{-1}x+C$ (ख) $y=\tan^{-1}x+C$ (ग) $y=\sin^{-1}x+C$ (घ) $y=\cos^{-1}x+C$

2. समीकरण $\frac{dy}{dx}+2x=e^{3x}$ का हल है

(क) $y+x^2=\frac{1}{3}e^{3x}+C$ (ख) $y-x^2=\frac{1}{3}e^{3x}+C$ (ग) $y+x^2=e^{3x}+C$ (घ) $y-x^2=e^{3x}+C$

3. समीकरण $\frac{dy}{dx}+\cos x\tan y=0$ का हल है

(क) $\log\sin y+\sin x+C$ (ख) $\log\sin x\sin y=C$ (ग) $\sin y+\log\sin x+C$ (घ) $\sin x\sin y=C$

4. समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ का हल है

(क) $y=\log\left(e^x+e^{-x}\right)+C$ (ख) $y=\log\left(e^x-e^{-x}\right)+C$

(ग) $y=\log\left(e^x+1\right)+C$ (घ) $y=\log\left(1-e^{-x}\right)+C$

5. समीकरण $e^{-x+y}\frac{dy}{dx}=1$ का हल है

(क) $e^y=e^x+C$ (ख) $e^y=e^{-x}+C$ (ग) $e^{-y}=e^{-x}+C$ (घ) $e^{-y}=e^x+C$

6. समीकरण $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y}+y=0$ का हल है

(क) $x+\frac{1}{2}\log\left(1+y\right)=C$ (ख) $x+\frac{1}{2}\log\left(1+y^2\right)=C$

(ग) $x+\log\left(1+y\right)=C$ (घ) $x+\log\left(1+y^2\right)=C$

7. समीकरण $\frac{dy}{dx}=\cos^2 y$ का हल है

(क) $x+\tan y=C$ (ख) $\tan y=x+C$ (ग) $\sin y+x=C$ (घ) $\sin y-x=C$

8. समीकरण $\frac{dy}{dx}=e^{y+x}+e^yx^2$ का हल है

(क) $e^x+e^y=\frac{x^3}{3}+C$ (ख) $e^{-x}+e^y+\frac{x^3}{3}=C$ (ग) $e^{-x}+^{-y}=\frac{x^3}{3}+C$ (घ) $e^x+e^{-y}+\frac{x^3}{3}=C$

9. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{y^2}{x^2}$ में निम्न में से किस प्रतिस्थापन द्वारा रैखिक समीकरण में परिवर्तित होगी?

(क) $y=t$ (ख) $y^2=t$ (ग) $\frac{1}{y}=t$ (घ) $\frac{1}{y^2}=t$

10. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+xy=e^{-x}y^3$ में निम्न में से किस प्रतिस्थापन द्वारा अवकल समीकरण में परिवर्तित होगी?

(क) $\frac{1}{y}=v$ (ख) $y^{-2}=v$ (ग) $y^{-3}=v$ (घ) $y^3=v$

11. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+2x=e^{3x}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

12. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+y\tan x=\sin x$ का समाकलन गुणक ज्ञात कीजिए।

13. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{\sin x}y=e^{x}$ का समाकल गुणक ज्ञात कीजिए।

14. अवकल समीकरण $\cos(x+y)\frac{dy}{dx}=1$ किस रूप की है?

15. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}-y\tan x=e^{x}\sec x$ किस रूप की है?

निम्नलिखित अवकल समीकरणों के व्यापक हल ज्ञात कीजिए

16. $\frac{dy}{dx}=\frac{4x+3y+1}{3x+2y+1}$

17. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\left\{\log\left(\frac{y}{x}\right)+1\right\}$

18. $x\frac{dy}{dx}=y+2\sqrt{y^{2}-x^{2}}$

19. $\frac{dy}{dx}=e^{x-y}\left(e^{y}-e^{x}\right)$

20. $\frac{dy}{dx}+x\sin 2y=x^{3}\cos^{2}y$

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. एक ऐसी समीकरण जिसमें स्वतंत्र चर, आश्रित चर एवं उनके अवकलज विद्यमान हो, अवकल समीकरण कहलाती है। अवकलन समीकरण सामान्यत: दो प्रकार की होती है।
   (i) साधारण अवकल समीकरण (Ordinary differentaial equation)
   (ii) आंशिक अवकल समीकरण (Partial differential equation)
   ऐसी समीकरण जिसमें केवल एक ही स्वतंत्र चर हो और उसके सापेक्ष अवकलज विद्यमान हो, साधारण अवकल समीकरण कहलाती है।
2. किसी अवकल समीकरण में विद्यमान स्वतंत्र चर के सापेक्ष आश्रित चर के उच्चतम अवकलज की कोटि ही उस अवकल समीकरण की कोटि कहलाती है।
3. किसी अवकल समीकरण की घात उस अवकल समीकरण का अवकलजों के संदर्भ में परिमेय तथा पूर्ण बीजीय बनाने के बाद उसमें विद्यमान उच्चतम कोटि के अवकलन की घात ही उस अवकल समीकरण की घात कहलाती है।
4. **अवकल समीकरण का हल:** अवकल समीकरण के हल से अभिप्राय समीकरण में प्रयुक्त स्वतंत्र एवं आश्रित चरों में एक ऐसा संबन्ध जिसमें कोई भी अवकलज गुणांक न हो तथा यह सम्बन्ध एवं इससे प्राप्त अवकल गुणांक दिए हुए अवकल समीकरण को सन्तुष्ट करते हो।
   अवकल समीकरण का हल उसका पूर्वग (primitive) भी कहलाता है क्योंकि वह अवकल समीकरण उसी से व्युत्पन्न एक सम्बन्ध होता है।
   (i) **व्यापक हल या पूर्ण हल:** अवकल समीकरण के हल में यदि उसकी कोटि (order) के बराबर स्वेच्छ अचर हो तो वह हल व्यापक हल कहलाता है। इसे पूर्ण हल, पूर्ण समाकल या पूर्ण पूर्वग भी कहते हैं।
   (ii) **विशिष्ट हल:** अवकल समीकरण के व्यापक हल में प्रयुक्त अचरों को स्वेच्छ मान देने पर प्राप्त हल विशिष्ट हल कहलाता है।
   (iii) **विचित्र हल:** अवकल समीकरण के वे हल जिनमें स्वेच्छ अचर विद्यमान नहीं होते हैं तथा सामान्यतया व्यापक हल की विशेष स्थिति नहीं होती हैं।

5. प्रथम क्रम एवं प्रथम घात की अवकल समीकरण को हल करने की विभिन्न विधियाँ

(A) **चरों को पृथक करने वाली विधिः** समीकरण के व्यापक रूप $f(x)dx + g(y)dy = 0$ में लिखकर समाकलन करने पर अभीष्ट हल प्राप्त किया जा सकता है।

(B) **प्रतिस्थापन द्वारा चरों के पृथक्कीकरण विधिः** समीकरण के अवलोकन से किसी विशिष्ट व्यंजन को प्रतिस्थापित करने मात्र से समीकरण पृथक्करण वाली समीकरण में परिणित हो जाती है उसका हल प्राप्त करने के पश्चात वह प्रतिस्थापन लगाकर अभीष्ट हल प्राप्त किया जा सकता है।

(C) **समघात अवकल समीकरणः** यदि अवकल समीकरण के व्यापक रूप को $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)} = \dfrac{ax+by}{cx+dy}$ के रूप में लिखा जा सके, जहाँ $f_1(x,y)$ तथा $f_2(x,y), x$ तथा y में सम घात फलन हो तो चरों को पृथक करने वाली समीकरण में बदलने हेतु प्रतिस्थापन $y = vx$ का प्रयोग करें।

(D) **समघात में परिणित होने वाली अवकल समीकरण**

(i) रूपः $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}$, जहाँ $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$

समघात में बदलने हेतु $x = X + h,\ y = Y + k$ प्रतिस्थापित करें तथा अचर h व k का चुनाव इस प्रकार करें कि $ah + bk + c = 0$ तथा $a'h + b'k + c' = 0$ इन्हें हल कर h व k ज्ञात करें। अन्त में $X = x - h$ तथा $Y = y - k$ रखकर अभीष्ट हल प्राप्त करें।

(ii) जब $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$ हो तो उपरोक्त प्रकार की समीकरण को प्रतिस्थापन $ax + by = v$ मानकर चरों को पृथक करने वाली समीकरण में बदलकर हल प्राप्त करना होता है।

(E) **रैखिक अवकल समीकरण**

(i) व्यापक रूप $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$ जहाँ P तथा Q, x के फलन अथवा अचर है।

समाकलन गुणक $(I.F.) = e^{\int P dx}$

हलः $y(\text{I.F.}) = \int (\text{I.F.}) \times Q dx + C$

(ii) व्यापक रूप $\dfrac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$ जहाँ P_1 तथा Q_1, y के फलन अथवा अचर है।

तब समाकलन गुणक $(I.F.) = e^{\int P_1 dy}$

हलः $x \times \text{I.F.} = \int I.F. \times Q_1 dy + C$

6. **रैखिक समीकरण में बदले जाने वाली अवकल समीकरण (बरनॉली रूप) व्यापक रूप** $\dfrac{dy}{dx} + Py = Qy^n$, जहाँ P तथा Q, x के फलन अथवा अचर है इसे रैखिक समीकरण में बदलने हेतु y^n से भाग दें फिर $\dfrac{1}{y^n} = t$ रखकर हल करें। अन्त में $t = y^{-n}$ रखकर अभीष्ट हल प्राप्त करें।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 12.1

1. कोटि 1 घात 1
2. कोटि 2 घात 1
3. कोटि 2 घात 2
4. कोटि 1 घात 4
5. कोटि 2 घात 2
6. कोटि 1 घात 1
7. कोटि 2 घात 3
8. कोटि 1 घात 2

प्रश्नमाला 12.2

1. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}-y=0$
2. $x+y\dfrac{dy}{dx}=0$
3. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-8\dfrac{dy}{dx}+15y=0$
4. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+2y=0$
5. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$

प्रश्नमाला 12.4

1. $\sin x\left(e^y+1\right)=C$
2. $y-x=C(1+xy)$
3. $\log y=2\left[x-\log(x+1)\right]+C$
4. $e^y=e^x+\dfrac{1}{3}x^3+C$
5. $e^y\left(\sin x+\cos x\right)=C$
6. $y=e^{3x}+C$
7. $\sin^2 x+\sin^2 y=C$
8. $y\sin y=x^2\log x+C$
9. $y=2\tan\dfrac{x}{2}-x+C$
10. $y=\dfrac{1}{3}\sin^{-1}x^3+C$

प्रश्नमाला 12.5

1. $x+y=a\tan\left(\dfrac{y-C}{a}\right)$
2. $x+y+2=ce^y$
3. $y=\tan\left(\dfrac{x+y}{2}\right)+C$
4. $x+e^{-(x+y)}=C$
5. $x-y+c=\log(x+y)$
6. $2(y-x)=\log(1+2x+2y)+C_1$
7. $x=\tan(x+y)-\sec(x+y)+C$
8. $2x+(x-y)^2=0$
9. $y=\tan\left(\dfrac{x+y}{2}\right)+C$
10. $2(x-y)+\log(x-y+2)=x+c$

प्रश्नमाला 12.6

1. $y=Ce^{x^3/3y^3}$
2. $\tan\dfrac{y}{2x}=Cx$
3. $(x+cy)=y\log x$
4. $x=Ce^{\cos(y/x)}$
5. $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$
6. $x=C\left(x^2-y^2\right)$
7. $x+ye^{x/y}=C$
8. $x^2y^2+2x^3y=C$
9. $\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)=\log x+C$
10. $\dfrac{x}{y}+\log(xy)=0$

प्रश्नमाला 12.7

1. $3\left(x^2+y^2\right)+4xy-10(x+y-1)=C$
2. $x-2y+\log(x-y+2)=C$
3. $x+2y+\log(2x+y-1)=C$
4. $3x+2y+C+2\log(1-x-y)=0$
5. $3(y-1)^2+4\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(y-1)-6\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2=C$

प्रश्नमाला 12.8

1. $y = 2x - 1 + Ce^{-2x}$
2. $y = \tan x - 1 + Ce^{-\tan x}$
3. $y = \dfrac{4x^3}{3(1+x^2)} + \dfrac{C}{(1+x^2)}$
4. $xy^2 = 2y^5 + C$
5. $y \sin x = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\sin 2x + C$
6. $y = \sqrt{1-x^2} + C(1-x^2)$
7. $x^2 y = C + (2-x^2)\cos x + 2x \sin x$
8. $16x^2 y = 4x^4 \log x - x^4 + C$
9. $xe^y = \tan y + C$
10. $x = \dfrac{1}{2}e^{\tan^{-1} y} + Ce^{-\tan^{-1} y}$

प्रश्नमाला 12.9

1. $y^{-2} = 1 + x^2 + Ce^{x^2}$
2. $e^y = e^x - 1 + Ce^{-e^x}$
3. $\dfrac{1}{y} - \sin x + C\cos x = 0$
4. $\sin x \sin y = C + e^{\sin x}$
5. $\tan y = \dfrac{1}{2}(x^2 - 1) + Ce^{-x^2}$
6. $\dfrac{1}{\log y} = \dfrac{1}{2x} + Cx$
7. $y(1+x^2) = \tan^{-1} x - \pi/4$

विविध प्रश्नमाला—12

1. (ख)
2. (क)
3. (क)
4. (ख)
5. (क)
6. (ख)
7. (ख)
8. (घ)
9. (ग)
10. (ख)
11. $y + x^2 = \dfrac{1}{3}e^{3x} + C$
12. $\sec x$
13. $\tan x/2$
14. चरों को पृथक-पृथक में परिवर्तित करने वाली समीकरण
15. रैखिक समीकरण
16. $2x^2 + 3xy + y^2 + x + y = 0$
17. $\log\left(\dfrac{y}{x}\right) = Cx$
18. $y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^3$
19. $e^y = e^x + 1 + Ce^{e^x}$
20. $e^{e^2} \tan y = \dfrac{1}{2}(x^2 - 1)e^{x/2} + C$

13

सदिश
(Vector)

13.01 परिचय (Introduction)

हमारे दैनिक जीवन में विभिन्न प्रकार की भौतिक राशियों का काफी महत्व है। उदाहरणार्थ जैसे यात्रा के समय बस की गति 40 किमी./घण्टा थी से हम यह नहीं बता सकते है कि बस किस तरफ जा रही थी अर्थात् यहाँ हमें केवल गति का परिमाण ही ज्ञात है परन्तु इसके साथ ही यदि हम बता दें कि बस की दिशा किस तरफ थी तो हम यह भी बता सकेंगे कि एक निश्चित समय में बस किस स्थान पर पहुँच जायेगी।

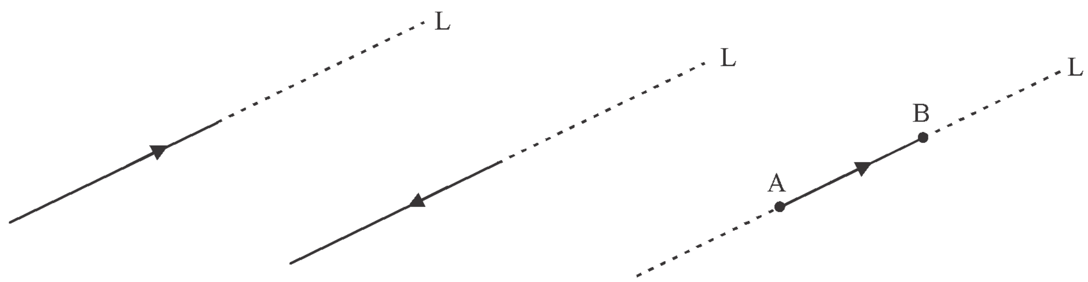
अतः हम कह सकते हैं कि व्यवहार में दो प्रकार की भौतिक राशियाँ होती है, एक वे जिनमें केवल परिमाण ज्ञात हो जैसे लम्बाई, क्षेत्रफल समय, आयतन, इत्यादि तथा दूसरी वे जिनमें परिमाण के साथ-साथ दिशा भी ज्ञात हो जैसे वेग, त्वरण, बल, संवेग इत्यादि। यहाँ प्रथम प्रकार की राशियों को अदिश राशियाँ तथा द्वितीय प्रकार की राशियों को सदिश राशियाँ कहते हैं।

इस अध्याय में हम सदिश राशियों की कुछ आधारभूत संकल्पनाएँ, सदिशों की विभिन्न संक्रियाएँ और उनके बीजीय एवं ज्यामितीय गुण धर्मों का अध्ययन करेंगे।

13.02 आधारभूत संकल्पनाएँ (Basic concepts)

माना किसी तल अथवा त्रिविमीय अतंरिक्ष में L कोई सरल रेखा है। तीर के निशानों की सहायता से इस रेखा को दिशाएं प्रदान की जा सकती हैं निश्चित दिशा वाली कोई भी रेखा दिष्ट रेखा कहलाती है।

यदि हम एक दिष्ट रेखा L को रेखा खण्ड AB तक प्रतिबंधित कर देते है तब हमें एक निश्चित दिशा वाली रेखा L पर परिमाण निर्धारित हो जाता है। इस प्रकार हमें एक दिष्ट रेखा खण्ड प्राप्त होता है। अतः एक दिष्ट रेखा खण्ड में परिमाण एवं दिशा दोनों होते हैं।



आकृति 13.01

प्रत्येक दिष्ट रेखा खण्ड की निम्न विशेषताएँ होती है–

(i) लम्बाई (Length): दिष्ट रेखा खण्ड $\vec{AB}$ की लम्बाई, रेखाखण्ड की लम्बाई है जिसे AB या $|\vec{AB}|$ से निरूपित करते है।

(ii) आधार (Support): एक दिष्ट रेखा खण्ड $\vec{AB}$ का आधार एक रेखा L है जिसका AB एक खण्ड है।

(iii) अभिदिशा (Sense): एक दिष्ट देखा खण्ड की अभिदिशा इसके प्रारम्भिक बिन्दु से अन्तिम बिन्दु की ओर है। अतः $\vec{AB}$ की अभिदिशा A से B की ओर है, जबकि $\vec{BA}$ की अभिदिशा B से A की ओर है।

टिप्पणी: यद्यपि $\vec{AB}$ और $\vec{BA}$ की लम्बाई और आधार वही है परन्तु ये भिन्न दिष्ट रेखा खण्ड है क्योंकि $\vec{AB}$ और $\vec{BA}$ विपरीत अभिदिशा के है।

सदिश राशिः एक ऐसी राशि जिसमें परिमाण एवं दिशा दोनों होते हैं, सदिश कहलाती है। अतः एक दिष्ट रेखाखण्ड सदिश होता है। जिसे $\vec{AB}$ अथवा $\vec{a}$ के रूप में निर्दिष्ट करते है और इसे सदिश $\vec{AB}$ अथवा सदिश $\vec{a}$ के रूप में पढ़ा जाता है।

वह बिन्दु A जहाँ से सदिश $\vec{AB}$ प्रारम्भ होता है, प्रारम्भिक बिन्दु कहलाता है और वह बिन्दु B जहाँ पर सदिश $\vec{AB}$ समाप्त होता है, अंतिम बिन्दु कहलाता है।

सदिश का मापांकः किसी सदिश का मापांक वह धनात्मक वास्तविक संख्या है जो उस सदिश के परिमाण अथवा उसको निरूपित करने वाले दिष्ट रेखा खण्ड की लम्बाई का अभिव्यक्त करती हैं।

यदि $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ एक सदिश हो, तो इसके मापांक को प्रायः $|\vec{a}|$ या $|\overrightarrow{AB}|$ से प्रकट करते हैं। अर्थात् सदिश $\vec{a}$ का मापांक $= |\vec{a}| = a$

टिप्पणीः $|\vec{a}| \geq 0$

13.03 सदिशों के प्रकार (Various types of vectors)

(1) मात्रक अथवा इकाई सदिश (Unit vector): जिस सदिश का मापांक एक इकाई हो, उसे मात्रक सदिश कहते हैं। a, b, c की दिशाओं में मात्रक सदिशों को क्रमशः $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ से प्रकट किया जाता है।

इस प्रकार $$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|},\ \hat{b} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}, \hat{c} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$$

$\hat{a}$ को a कैप पढ़ते है।

(2) शून्य सदिश (Zero or null vector): जिस सदिश का मापांक (Modulus) शून्य होता है, उसे **शून्य सदिश** कहते हैं। ऐसी स्थिति में प्रारम्भिक और अन्तिम बिन्दु सम्पाती होते हैं और दिशा अनिर्धारित होती है या दिशा स्वेच्छ (Arbitrary) होती है।

एक शून्य सदिश को $\vec{O}$ या गहरे काले टाइप O से प्रकट किया जाता है। $\overrightarrow{AA}$ या $\overrightarrow{BB}$ शून्य सदिश है। एक शून्य सदिश की निश्चित दिशा नहीं होती हैं $\vec{a}$ एक शून्य सदिश होगा।

यदि और केवल यदि $|\vec{a}| = 0$

अर्थात् यदि $|\overrightarrow{AB}| = 0$

तो A और B सम्पाती हैं।

(3) समदिश सदिश (Like Vectors): यदि सदिशों की एक ही अभिदिशा हो तो वे समदिश सदिश कहलाते हैं।

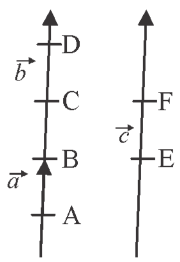
(4) समान अथवा तुल्य सदिश (Equal vectors)– यदि (i) सदिशों के परिमाण बराबर हों; (ii) उनका आधार समान अथवा समान्तर हो (iii) उनकी अभिदिशा (Sense of direction) एक ही हो तो उन्हें समान या तुल्य सदिश कहते हैं। यह आवश्यक नहीं कि उनका प्रारम्भिक बिन्दु एक ही हो।

आकृति (13.02) में दिष्ट रेखा खण्ड $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}$ से निरूपित तीन सदिशों $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के प्रारम्भिक तथा अन्तिम बिन्दु भिन्न–भिन्न हैं परन्तु उनकी लम्बाई समान है तथा उनका आधार समान या समान्तर है। अतः वे समान सदिश है।

अर्थात् $$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$$

यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ समान या तुल्य सदिश हों तो हम इसे

$\vec{a} = \vec{b}$ द्वारा लिखते हैं



आकृति 13.02

(5) विपरीत सदिश (Unlike vectors): यदि सदिशों की अभिदिशा विपरीत हो तो वे विपरीत सदिश कहलाते हैं।

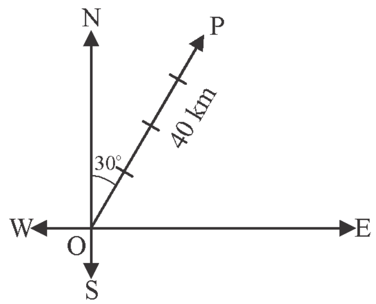
(6) ऋण सदिश (Negative vector): विपरीत अभिदिशा वाले वे सदिश जिनका मापांक समान हो को ऋण सदिश कहते हैं।

अतः यदि $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ तो $\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$

स्थिति सदिश (Position vector)

किसी मूलबिन्दु O के सापेक्ष बिन्दु P की स्थिति को सदिश $\overrightarrow{OP}$ से अद्वितीयतः (Uniquely) वर्णित किया जा सकता है। ऐसे सदिश को O के सापेक्ष बिन्दु P का स्थिति सदिश (Position vector) कहा जाता हैं। इस प्रकार O के सापेक्ष P का स्थिति-सदिश $\overrightarrow{OP}$ है।

यदि $\overrightarrow{AB}$ कोई सदिश हो और O मूलबिन्दु हो तो A के स्थिति सदिश $\overrightarrow{OA}$ को $\vec{a}$ से और B के स्थिति-सदिश $\overrightarrow{OB}$ को $\vec{b}$ से प्रकट करते हैं।



आकृति 13.03

उदाहरणार्थ 1. उत्तर से 30° पूर्व में 40 km के विस्थापन का आलेखीय निरूपण कीजिए।

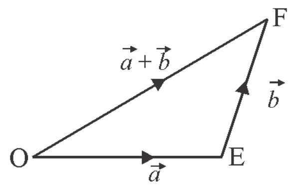
हलः 10 km को 1 cm मानकर 4 cm का एक रेखाखण्ड OP, ON की दायीं ओर ON के साथ 30° का कोण बनाते हुए खींचा गया। इस प्रकार सदिश $\overrightarrow{OP}$, ON से 30° पूर्व में 40 km के विस्थापन को निरूपित करता है। (आकृति 13.03)

13.04 सदिशों का योग (Addition of vectors)

(A): दो सदिशों का योग (Addition of two vectors)

किसी समतल में $\overrightarrow{AB}$ व $\overrightarrow{CD}$ दो सदिश जिन्हें $\vec{a}$ व $\vec{b}$ से निरूपित किया जाता है तो सदिशों का योग दो प्रकार से किया जा सकता है।

I. सदिश योग का त्रिभुज नियम (Triangle law of vector addition): माना सदिशों के समतल में स्थित O एक निश्चित बिन्दु है। O से $\overrightarrow{AB}$ के समान्तर एवं बराबर दिष्ट रेखा खण्ड $\overrightarrow{OE}$ खीचों। यह सदिश $\vec{a}$ को निरूपित करेगा। इसके पश्चात् E से $\overrightarrow{CD}$ के समान्तर और बराबर दिष्ट रेखा खण्ड $\overrightarrow{EF}$ खीचों यह सदिश $\vec{b}$ को निरूपित करेगा। इस प्रकार प्राप्त रेखा खण्ड $\overrightarrow{OF}$ सदिशों $\vec{a}$ व $\vec{b}$ के योग को निरूपित करेगा। अर्थात्



आकृति 13.04

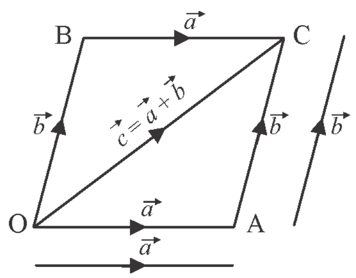
$$\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}$$

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OF}$$

दो सदिशों के योग करने की इस विधि को सदिश योग का त्रिभुज नियम कहते हैं। इस नियम के अनुसार **"दो सदिश यदि एक ही क्रम में किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को निरूपित करते हैं तो उनका योग उल्टे क्रम में त्रिभुज की तीसरी भुजा द्वारा निरूपित होगा।"**

II. सदिश योग का समान्तर चतुर्भुज नियम (Parallelogram law of vector addition):

माना कि एक ही तल में $\vec{a}$ व $\vec{b}$ दो सदिश राशियाँ हैं। इसी तल में O एक स्वेच्छ बिन्दु लिया, O को मूलबिन्दु लेते हुए O से सदिश $\vec{a}$ व सदिश $\vec{b}$ के समान दिशा में $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ सदिश खींचो। अतः $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ और $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ होगा।



आकृति 13.05

अब समान्तर चतुर्भुज OACB बनाइए। अब OC समान्तर चतुर्भुज OACB का विकर्ण है। यहाँ $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}=\vec{a}$ और $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ है।

अब त्रिभुज OAC में, योग के त्रिभुज नियम द्वारा $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$

अतः यदि दो सदिशों को एक समान्तर चतुर्भुज की दो संलग्न भुजाओं द्वारा प्रदर्शित किया जाये तो इन दो सदिशों के योगफल को समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण जिसका आरम्भिक बिन्दु वहीं हो जो दिये हुए सदिशों का है, द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। इस नियम को सदिश योग का समान्तर चतुर्भुज नियम कहते हैं।

(B) दो से अधिक सदिशों का योग (Addition of more than two vectors)

दो से अधिक सदिशों के योग के लिए सदिश योग का त्रिभुज नियम बढ़ाया जा सकता है। इस नियम को बार–बार काम में लेने पर हम दो से अधिक सदिशों का योग ज्ञात कर सकते हैं। इसे सदिश योग का बहुभुज नियम (Polygon law of vector addtion) भी कहते हैं।

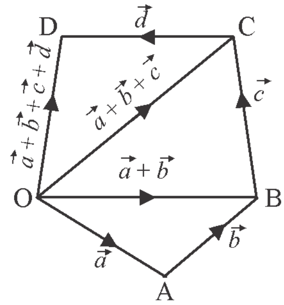
उदाहरणार्थः मान लो हमें चार सदिशों $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ का योग ज्ञात करना है। सदिशों के तल में O एक स्वेच्छ बिन्दु लिया।

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ खींचों। सदिश $\overrightarrow{OA}$ के अन्तिम बिन्दु A से $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ खींचों। इसी प्रकार $\overrightarrow{AB}$ के अन्तिम बिन्दु B से $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$ खींचों। $\vec{c}$ के अन्तिम बिन्दु C से $\overrightarrow{CD}=\vec{d}$ खींचों। अब सदिश योग के त्रिभुज द्वारा हम देखते हैं कि

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}\Rightarrow\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}\Rightarrow\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{OC}$$

तथा
$$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}\Rightarrow\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\overrightarrow{OD}$$



आकृति 13.06

अतः सदिश $\overrightarrow{OD}$, सदिशों $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ के योग को व्यक्त करता है। बहुभुज OABCD सदिशों का बहुभुज (Polygon of vectors) या सदिश–बहुभुज कहलाता है।

टिप्पणीः यदि पहले सदिश का आरम्भिक बिन्दु व अन्तिम सदिश का अन्तिम बिन्दु एक हो जाये तो सदिशों का योग शून्य (zero) सदिश होगा।

13.05 सदिश योग के गुणधर्म (Properties of vector addition):

सदिशों का योग निम्नलिखित नियमों का पालन करता है:

(i) क्रम विनिमेयता (Commutativity): सदिशों का योग क्रम-विनिमेय नियम का पालन करता है, अर्थात् किन्ही सदिश $\vec{a}$ व $\vec{b}$ के लिए

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

प्रमाणः मान लो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ को क्रमशः $\overrightarrow{OA}$ व $\overrightarrow{AB}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। अतः $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ और $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ है।

सदिश योग के त्रिभुज नियम द्वारा

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b} \qquad \ldots (i)$$

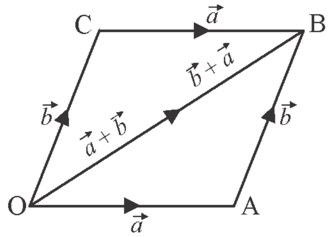
समान्तर चतुर्भुज OABC को पूरा करो जिसकी OA व AB दो संलग्न भुजाएं हैं, तब तुल्य सदिशों की परिभाषा से,

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OA}=\vec{a}$$

और $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}=\vec{b}$

पुनः सदिश योग के त्रिभुज OCB, से

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\vec{b}+\vec{a} \qquad \ldots (ii)$$



आकृति 13.07

इस प्रकार समीकरण (i) और (ii) से,

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

अतः सदिशों का योग क्रम विनिमेय होता है।

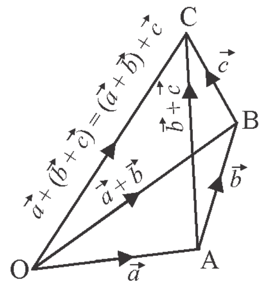
(ii) साहचर्यता (Associativity): सदिशों का योग साहचर्य नियम का पालन करता है, अर्थात् $\vec{a},\vec{b}$ व $\vec{c}$ कोई तीन सदिश हों तो

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$$

प्रमाणः मान लो सदिशों $\vec{a}, \vec{b}$ व $\vec{c}$ को क्रमशः $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{BC}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। अतः $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}$ व $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$ है। त्रिभुज OAB तथा OBC में सदिश योग के त्रिभुज नियम से,

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$$

तथा $$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} \qquad (1)$$



आकृति 13.08

इसी प्रकार त्रिभुज ABC और त्रिभुज OAC से सदिश योग के त्रिभुज नियम से,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{b} + \vec{c}$$

तथा $$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) \qquad (2)$$

अतः समीकरण (1) और (2) से

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$$

अतः सदिशों का योग साहचर्य होता है।

टिप्पणीः उपर्युक्त नियम से यह स्पष्ट है कि तीन सदिशों $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ का योग उनके क्रम (Order) पर जिसमें वे जोड़े जाते हैं, निर्भर नहीं करता। इसलिए उपर्युक्त योग को बिना किसी संदिग्धता से $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ द्वारा लिखा जा सकता है।

इसी प्रकार बल त्रिभुज के संयोजन के नियम से न केवल विस्थापन या बलों को संयोजित कर सकते हैं परन्तु सभी सदिश राशियों, जैसे–वेग, त्वरण आदि को भी संयोजित कर सकते हैं।

तत्समकता (Identity):

प्रत्येक सदिश $\vec{a}$ के लिए $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} = \vec{0} + \vec{a}$, जहाँ $\vec{0}$ शून्य सदिश है, इसे सदिश योग के लिए तत्समक सदिश भी कहते हैं।

दो सदिशों के योग की परिभाषा से

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA} = \vec{a} + \vec{0}$$

$\therefore$ $$\vec{a} = \vec{a} + \vec{0}$$

इसी प्रकार $$\vec{a} = \vec{0} + \vec{a}$$

प्रमाणः मान लो कोई सदिश $\vec{a} = \overrightarrow{OP}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है तो ऋण सदिश (Negative Vector) की परिभाषा के अनुसार सदिश $(-\vec{a}), \overrightarrow{PO}$ द्वारा व्यक्त किया जायेगा।

आकृति 13.09

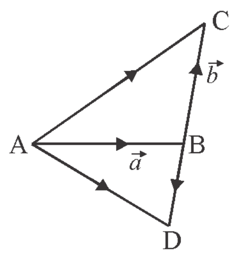
अब $$\vec{a} + (-\vec{a}) = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{OO} = \vec{0}$$

इसी प्रकार $$(-\vec{a}) + \vec{a} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$$

अतः समीकरण (1) और (2) से, $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$

13.06 सदिशों का व्यवकलन या घटाना (Subtraction of vectors)

मान लो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ सदिश राशियाँ है। सदिशों के तल में A एक स्वेच्छ बिन्दु लिया। A को प्रारम्भिक बिन्दु मानते हुए A से सदिश $\vec{a}$ के समान सदिश $\overrightarrow{AB}$ खींचो। अब सदिश $\overrightarrow{AB}$ के अन्तिम बिन्दु पर सदिश $\vec{b}$ के समान सदिश $\overrightarrow{BC}$ खींचों। अतः $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ और $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ होगा। अब यदि हम $\vec{a} - \vec{b}$ ज्ञात करना चाहें तो B पर BC के बराबर परिमाण की विपरीत दिशा में एक रेखा BD खींचों तो दिष्ट रेखाखण्ड $\overrightarrow{BD}$ सदिश $(-\vec{b})$ को निरूपित करेगा अर्थात् $\overrightarrow{BD} = -\vec{b}$



आकृति 13.10

बिन्दु A को बिन्दु D से मिलायें। अब त्रिभुज ABD में सदिश योग के त्रिभुज नियम से

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$$

अतः सदिश $\vec{b}$ को सदिश $\vec{a}$ में से घटाने के लिए अर्थात् $(\vec{a} - \vec{b})$ ज्ञात करने के लिए सदिश $\vec{b}$ की दिशा विपरीत करके सदिश $\vec{a}$ में जोड़ो अर्थात् सदिश $\vec{a}$ में $-\vec{b}$ को जोड़ो।

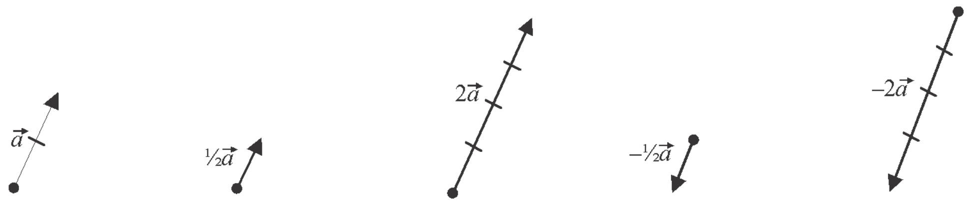
इसी प्रकार यदि सदिश $\vec{a}$ को सदिश $\vec{b}$ में से घटना हो अर्थात् $(\vec{b} - \vec{a})$ ज्ञात करना है तो सदिश $\vec{b}$ में सदिश $\vec{a}$ का ऋण सदिश $(-\vec{a})$ को जोड़ों।

13.07 एक सदिश का अदिश से गुणन (Multiplication of a vector by a scalar)

मान लीजिए कि $\vec{a}$ एक दिया हुआ सदिश है और λ एक अदिश है। तब सदिश $\vec{a}$ का अदिश λ से गुणनफल जिसे $\lambda\vec{a}$ के रूप में निर्दिष्ट किया जाता है, सदिश $\vec{a}$ का अदिश λ से गुणन कहलाता है। ध्यान कीजिए कि $\lambda\vec{a}$ भी सदिश $\vec{a}$ के संरेख एक सदिश है। λ के मान धनात्मक अथवा ऋणात्मक होने के अनुसार $\lambda\vec{a}$ की दिशा, $\vec{a}$ के समान अथवा विपरीत होती है। $\lambda\vec{a}$ का परिमाण $\vec{a}$ के परिमाण का $|\lambda|$ गुणा होता है, अर्थात्

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$$

एक सदिश से अदिश के गुणन का ज्यामितीय चाक्षुषीकरण (रूप की कल्पना (visualisation)) आकृति 13.11 में दी गई है।



आकृति 13.11

जब $\lambda = -1$, तब $\lambda\vec{a} = -\vec{a}$ जो एक ऐसा सदिश है जिसका परिमाण $\vec{a}$ के समान है और दिशा $\vec{a}$ की दिशा के विपरीत है। सदिश $-\vec{a}$ सदिश $\vec{a}$ का ऋणात्मक (अथवा योज्य प्रतिलोम) कहलाता है और हम हमेशा $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{O}$ पाते हैं।

यदि $\lambda = \dfrac{1}{|\vec{a}|}$, जहाँ $\vec{a} \neq 0$, अर्थात् $\vec{a}$ एक शून्य सदिश नहीं है, तब

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a}| = 1$$

इस प्रकार $\lambda\vec{a}, \vec{a}$ की दिशा में मात्रक सदिश को निरूपित करता है। हम इसे

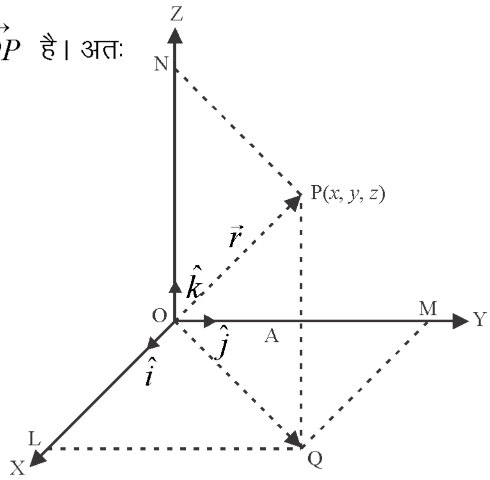
$$\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$$ के रूप में लिखते हैं।

13.08 एक सदिश के घटक (Components of a vector)

माना A(1, 0, 0), B(0, 1, 0) तथा C (0, 0, 1) क्रमशः x-अक्ष, y-अक्ष ओर z-अक्ष पर स्थित बिन्दु है। स्पष्ट रूप से

$$|\overrightarrow{OA}| = 1, |\overrightarrow{OB}| = 1 \text{ और } |\overrightarrow{OC}| = 1$$

सदिश $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ और $\overrightarrow{OC}$ जिनमें से प्रत्येक का परिमाण 1 है, क्रमशः OX, OY और OZ अक्षों के अनुदिश मात्रक सदिश (unit vectors) कहलाते हैं और इनको क्रमशः $\hat{i}, \hat{j}$ तथा $\hat{k}$ द्वारा व्यक्त करते हैं।



आकृति 13.12

माना P $(x, y,. z)$ एक बिन्दु है, जिसका स्थिति सदिश, आकृतिानुसार $\vec{OP}$ है। अतः

$$\vec{OL} = x\hat{i}$$

$$\vec{OM} = \vec{LQ} = y\hat{j}$$

$$\therefore \quad \vec{OQ} = \vec{OL} + \vec{LQ}$$

$$= x\hat{i} + y\hat{j}$$

पुनः

$$\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP}$$

$$= \left(x\hat{i} + y\hat{j}\right) + z\hat{k}$$

$$= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

इस प्रकार, O के सापेक्ष P का स्थिति सदिश $\vec{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ के रूप में प्राप्त होता है। किसी भी सदिश का यह रूप घटक रूप कहलाता है। यहाँ x, y एवं z, $\overrightarrow{OP}$ के अदिश घटक कहलाते है और $x\hat{i}, y\hat{j}$ एवं $z\hat{k}$ क्रमागत अक्षों के अनुदिश $\overrightarrow{OP}$ के घटक कहलाते हैं। x, y एवं z को समकोणिक घटक भी कहा जाता हैं।

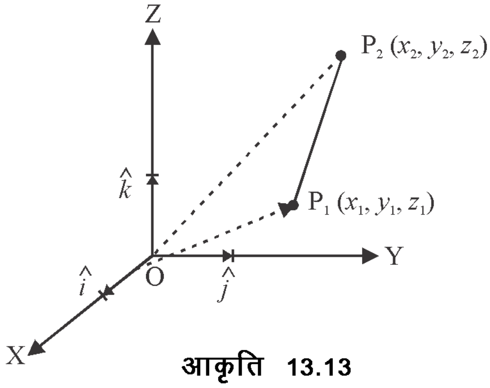
यदि $\overrightarrow{OP} = \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ हो, तो

$$\overrightarrow{OP} = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

13.09 दो बिन्दुओं को मिलाने वाला सदिश (Vector joining two points)

यदि $P_1(x_1, y_1, z_1)$ और $P_2(x_2, y_2, z_2)$ दो बिन्दु हैं, तब P_1 को P_2 से मिलाने वाला सदिश $\overrightarrow{P_1P_2}$ है (आकृति 13. 13) P_1 व P_2 को मूल बिन्दु O से मिलाने पर और त्रिभुज नियम का प्रयोग करने पर हम त्रिभुज OP_1P_2 से पाते हैं कि

$$\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2}$$



आकृति 13.13

सदिश योगफल के गुणधर्मों का उपयोग करते हुए उपर्युक्त समीकरण निम्नलिखित रूप से लिखा जाता है।

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$$

अर्थात् $\quad \overrightarrow{P_1P_2} = P_2$ का स्थिति सदिश $-P_1$ का स्थिति सदिश

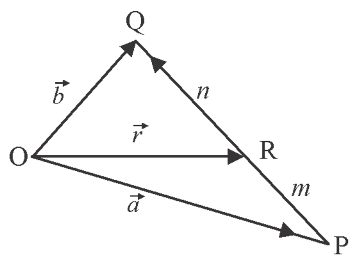
अर्थात्

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \left(x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}\right) - \left(x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}\right)$$

$$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

सदिश $\overrightarrow{P_1P_2}$ का परिमाण, $|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ के रूप में प्राप्त होता है।

13.10 खंड सूत्र (Section formula)



आकृति 13.14 (a)

मान लीजिए मूल बिन्दु O के सापेक्ष दो बिन्दुओं P व Q के आकृति 13.14 (a) में स्थिति सदिश $\overrightarrow{OP}$ और $\overrightarrow{OQ}$ से निरूपित किये गये है। बिन्दुओं P एवं Q को मिलाने वाले रेखा खंड पर स्थित किसी तीसरे बिन्दु R द्वारा इसे दो प्रकार से विभाजित किया जा सकता है। (आकृति 13.14 (a) एवं आकृति 13.14 (b))। यहाँ हमारा उद्देश्य मूल बिन्दु O के सापेक्ष बिन्दु R का स्थिति सदिश $\overrightarrow{OR}$ ज्ञात करना है। हम दोनों स्थितियों पर विचार करते हैं।

स्थिति–I: जब R, PQ को अंतः विभाजित करता है:

माना R, $\overrightarrow{PQ}$ को $m : n$ अनुपात में अंतः विभाजित करता है (आकृति 13.14(a)), तो

$$\frac{PR}{RQ} = \frac{m}{n}$$

$\Rightarrow$ $$nPR = mRQ$$

$\Rightarrow$ $$n\overrightarrow{PR} = m\overrightarrow{RQ}$$

$\Rightarrow n$ (R का स्थिति सदिश –P का स्थिति सदिश) $= m$ (Q का स्थिति सदिश –R का स्थिति सदिश)

$\Rightarrow$ $$n(\vec{r} - \vec{a}) = m(\vec{b} - \vec{r})$$

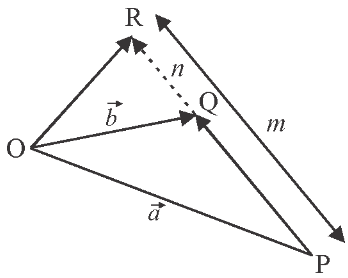
$\Rightarrow$ $$(m+n)\vec{r} = m\vec{b} + n\vec{a}$$

$\Rightarrow$ $$\vec{r} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$$

अतः बिन्दु R, जो कि P और Q को $m : n$ के अनुपात में अंतः विभाजित करता है, का स्थिति सदिश $\overrightarrow{OR} = \dfrac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$ के रूप में प्राप्त होता है।

स्थिति–II: जब R, PQ को बाह्य विभाजित करता है:

माना R, $\overrightarrow{PQ}$ को आगे बढ़ाने पर $m : n$ अनुपात में बाह्य विभाजित करता है (आकृति 13.14 (b)), तो



आकृति 13.14 (b)

$$\frac{PR}{QR} = \frac{m}{n}$$

$\Rightarrow$ $$nPR = mQR$$

$\Rightarrow$ $$n\overrightarrow{PR} = m\overrightarrow{QR}$$

$\Rightarrow n$ (R का स्थिति सदिश –P का स्थिति सदिश) $= m$ (R का स्थिति सदिश –Q का स्थिति सदिश)

$\Rightarrow$ $$n(\vec{r} - \vec{a}) = m(\vec{r} - \vec{b})$$

$\Rightarrow$ $$m\vec{b} - n\vec{a} = m\vec{r} - n\vec{r}$$

$\Rightarrow$ $$\vec{r} = \frac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$$

अतः बिन्दु R, जो कि P और Q को m : n के अनुपात में बाह्य विभाजित करता है, का स्थिति सदिश $\overrightarrow{OR} = \dfrac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$ के रूप में प्राप्त होता है।

टिप्पणी: यदि R, PQ का मध्य बिन्दु है, तो $m = n$ और इसलिए स्थिति I से $\overrightarrow{PQ}$ के मध्य बिन्दु R का स्थिति सदिश $\overrightarrow{OR} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ के रूप में होगा।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. सदिश $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}, \vec{b} = -2\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $\vec{c} = \hat{i} - 6\hat{j} - 7\hat{k}$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: सदिशों का योगफल

$$= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$
$$= (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) + (-2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}) + (\hat{i} - 6\hat{j} - 7\hat{k})$$
$$= (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) + (-2\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}) + (\hat{i} + 5\hat{j} - 7\hat{k})$$
$$= 0 - \hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k} = -4\hat{j} - \hat{k}$$

उदाहरण-2. यदि सदिश $\vec{a} = x\hat{i} + 2\hat{j} + z\hat{k}$ और $\vec{b} = 2\hat{i} + y\hat{j} + \hat{k}$ समान है तो x, y और z के मान ज्ञात कीजिए।

हल: ध्यान दीजिए कि दो सदिश समान होते हैं यदि और केवल यदि उनके संगत घटक समान है।

अतः दिए हुए सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ समान होंगे यदि और केवल यदि $x = 2, y = 2, z = 1$

उदाहरण-3. मान लीजिए $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j}$ और $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j}$ तब क्या $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ है? क्या सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ समान हैं?

हल: यहाँ $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ और $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

इसलिए $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ परन्तु दिए हुए सदिश समान नहीं हैं क्योंकि इनके संगत घटक भिन्न हैं।

उदाहरण-4. सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

हल: सदिश $\vec{a}$ के अनुदिश मात्रक संदिश $\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ द्वारा प्राप्त होता है।

अब $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$

इसलिए $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) = \frac{2}{\sqrt{14}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\hat{k}$

उदाहरण-5. सदिश $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j}$ के अनुदिश एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिमाण 7 इकाई है।

हल: दिए हुए सदिश $\vec{a}$ के अनुदिश मात्रक सदिश $\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\hat{i} - 2\hat{j}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}$ है।

इसलिए $\vec{a}$ के अनुदिश और 7 परिमाण वाला सदिश $7\hat{a} = 7\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}\right) = \frac{7}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{14}{\sqrt{5}}\hat{j}$ है।

उदाहरण-6. सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ के योगफल के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

हल: दिए हुए सदिशों का योगफल

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ (माना) अतः $\vec{c} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ है।

और $|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$

अतः अभीष्ट मात्रक सदिश

$$\hat{c} = \frac{1}{|\vec{c}|}\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{29}}(4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) = \frac{4}{\sqrt{29}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{29}}\hat{j} - \frac{2}{\sqrt{29}}\hat{k} \text{ है।}$$

उदाहरण-7. बिन्दु P(2, 3, 0) एवं Q(–1, –2, –4) को मिलाने वाला एवं P से Q की तरफ दिष्ट सदिश ज्ञात कीजिए।
हल: क्योंकि सदिश P से Q की तरफ दिष्ट है, स्पष्टतः P प्रारंभिक बिन्दु है और Q अंतिम बिन्दु है,

इसलिए P और Q को मिलाने वाला अभीष्ट सदिश $\overrightarrow{PQ}$, निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है।

$$\overrightarrow{PQ} = Q \text{ का स्थिति सदिश } -P \text{ का स्थिति सदिश}$$

$$= -i - 2j - 4k - (2i + 3j)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (-1-2)\hat{i} + (-2-3)\hat{j} + (-4-0)\hat{k}$$

अर्थात् $$\overrightarrow{PQ} = -3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k}$$

उदाहरण-8. दो बिन्दु P और Q जिनके स्थिति सदिश $\overrightarrow{OP} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ और $\overrightarrow{OQ} = \vec{a} + \vec{b}$ हैं। एक ऐसे बिन्दु R का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए, जो P एवं Q को मिलाने वाली रेखा को 2 : 1 के अनुपात में (i) अंतः (ii) बाह्य विभाजित करता है।
हल: (i) P और Q को मिलाने वाली रेखा को 2 : 1 के अनुपात में अंतः विभाजित करने वाले बिन्दु R का स्थिति सदिश है:

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2(\vec{a} + \vec{b}) + (3\vec{a} - 2\vec{b})}{3} = \frac{5\vec{a}}{3}$$

(ii) P और Q को मिलाने वाली रेखा को 2 : 1 के अनुपात में बाह्य विभाजित करने वाले बिन्दु R का स्थिति सदिश है:

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2(\vec{a} + \vec{b}) - (3\vec{a} - 2\vec{b})}{2-1} = 4\vec{b} - \vec{a}$$

उदाहरण-9. दर्शाइए कि बिन्दु $A(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}), B(\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}), C(3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k})$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।
हल: हम देखते हैं कि

$$\overrightarrow{AB} = (1-2)\hat{i} + (-3+1)\hat{j} + (-5-1)\hat{k} = -\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = (3-1)\hat{i} + (-4+3)\hat{j} + (-4+5)\hat{k} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

और $$\overrightarrow{CA} = (2-3)\hat{i} + (-1+4)\hat{j} + (1+4)\hat{k} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

इसके अतिरिक्त ध्यान दीजिए कि

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = 41 = 6 + 35 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2$$

अतः दिया हुआ त्रिभुज एक समकोण त्रिभुज है।

प्रश्नमाला 13.1

1. निम्नलिखित सदिशों के परिमाण का परिकलन कीजिए:

$$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k};\ \vec{b} = 2\hat{i} - 7\hat{j} - 3\hat{k};\ \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$$

2. समान परिमाण वाले दो विभिन्न सदिश लिखिए।
3. समान दिशा वाले दो विभिन्न सदिश लिखिए।
4. यदि सदिश $2\hat{i} + 3\hat{j}$ और $x\hat{i} + y\hat{j}$ समान हों तो x और y के मान ज्ञात कीजिए।
5. एक सदिश का प्रारंभिक बिन्दु (2, 1) है और अंतिम बिन्दु (–5, 7) हैं। इस सदिश के अदिश एवं सदिश घटक ज्ञात कीजिए।
6. सदिश $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k};\ \vec{b} = -2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$ और $\vec{c} = \hat{i} - 6\hat{j} - 7\hat{k}$ का योगफल ज्ञात कीजिए।
7. सदिश $\vec{c} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ के अनुदिश एक मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

8. सदिश $\overrightarrow{PQ}$, के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए, जहाँ बिन्दु P और Q क्रमशः (1, 2, 3) और (4, 5, 6) हैं।

9. दिए हुए सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ और $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ के लिए सदिश $\vec{a} + \vec{b}$ के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

10. सदिश $5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ के अनुदिश एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिमाण 8 इकाई है।

11. दर्शाइए कि सदिश $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ और $-4\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$ संरेख हैं।

12. बिन्दुओं $P\left(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}\right)$ और $Q\left(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right)$ को मिलाने वाली रेखा को 2 : 1 के अनुपात में (i) अंतः (ii) बाह्य, विभाजित करने वाले बिन्दु R का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए।

13. दो बिन्दुओं P(2, 3, 4) और Q(4, 1, –2) को मिलाने वाले सदिश का मध्य बिन्दु ज्ञात कीजिए।

14. दर्शाइए कि बिन्दु A, B और C, जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{c} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ हैं, एक समकोण त्रिभुज के शीर्षों का निर्माण करते हैं।

13.11 दो सदिशों का गुणनफल (Product of two vectors)

हम जानते हैं कि दो संख्याओं का गुणनफल एक संख्या होती है, दो आव्यूहों का गुणनफल एक आव्यूह होता है परन्तु दो सदिशों का गुणनफल आवश्यक नहीं की सदैव सदिश हो। सदिशों की स्थिति में हम उन्हें दो प्रकार से गुणा करते हैं।

(I) अदिश गुणनफल (Scalar product): इसमें दो सदिशों के गुणनफल से प्राप्त राशि अदिश होती है।

(II) सदिश गुणनफल (Vector product): इसमें दो सदिशों के गुणनफल से प्राप्त राशि सदिश होती है।

13.12 अदिश (बिन्दु) गुणनफल (Scalar or dot product)

जब दो सदिश राशियों का गुणनफल एक अदिश राशि हो तो उसे दो सदिशों का अदिश गुणन कहते हैं। अर्थात् दो सदिशों $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ के अदिश गुणनफल को $\vec{a} \cdot \vec{b}$ यथा $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ के मध्य बिन्दु (·) लगाकर प्रदर्शित करते हैं, अतः इसे बिन्दु गुणनफल भी कहते हैं।

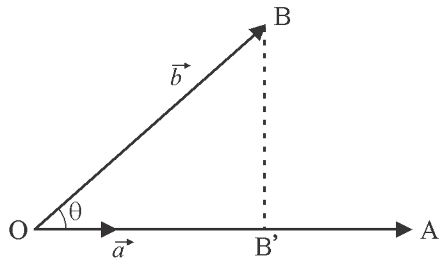
परिभाषा: यदि दो सदिशों $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ के मध्य कोण θ हो तो उनका अदिश गुणनफल $\vec{a} \cdot \vec{b}$ निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित किया जाता है।

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = ab\cos\theta$$

($|\vec{a}| = a$ एवं $|\vec{b}| = b$ क्रमशः $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ के परिमाण है।)

टिप्पणी: जब दोनों सदिश, इकाई सदिश हों तो

$$\hat{a}.\hat{b} = (1)(1)\cos\theta = \cos\theta$$



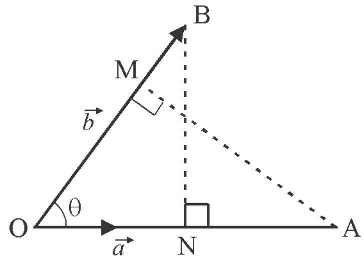
आकृति 13.15

13.13 अदिश गुणनफल की ज्यामितीय व्याख्या (Geometrical interpretation of scalar product)

मानाकि $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ तथा $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ दो सदिश हैं जिनके मध्य कोण θ है। परिभाषानुसार उनका अदिश गुणनफल

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a\,b\cos\theta$$

$$= |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \qquad (1)$$



आकृति 13.16

अब A एवं B बिन्दुओं से OB एवं OA पर क्रमशः AM तथा BN लम्ब डालें। तब ΔOMA तथा ΔONB से

$OM = OA\cos\theta = \overrightarrow{OA}$ का $\overrightarrow{OB}$ की दिशा में प्रक्षेप,

$ON = OB\cos\theta = \overrightarrow{OB}$ का $\overrightarrow{OA}$ की दिशा में प्रक्षेप,

समीकरण (1) से, $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|(|\vec{b}|\cos\theta) = |\vec{a}|(ON)$

$= (\vec{a}$ का परिमाण) ($\vec{b}$ का $\vec{a}$ पर प्रक्षेप) (2)

इसी प्रकार समीकरण (1) से

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|(|\vec{a}|\cos\theta) = |\vec{b}|(OM)$

$= (\vec{b}$ का परिमाण) ($\vec{a}$ का $\vec{b}$ पर प्रक्षेप) (3)

अतः दो सदिशों का अदिश गुणनफल उन दो संख्याओं के गुणनफल के बराबर होता है, जिनमें से प्रथम संख्या किसी एक सदिश का मापांक तथा द्वितीय संख्या, द्वितीय सदिश का प्रथम सदिश की दिशा में प्रक्षेप है।

टिप्पणी: समीकरण (2) से, $\vec{b}$ का $\vec{a}$ पर प्रक्षेप $= \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\cdot\vec{b} = \hat{a}\cdot\vec{b}$

तथा समीकरण (3) से, $\vec{a}$ का $\vec{b}$ पर प्रक्षेप $= \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{a}\cdot\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{a}\cdot\hat{b}$

13.14 अदिश गुणन के कुछ महत्वपूर्ण निगमन (Some important deductions from scalar product of vectros) :

माना दो सदिश राशियों $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ के मध्य का कोण θ है तथा इनके परिमाण क्रमशः a एवं b है। परिभाषा के अनुसार

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta \quad (1)$$

अब यहाँ हम कुछ विशेष स्थितियों में इस परिणाम की व्याख्या करेंगे।

(i) जब सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ समदिश समान्तर हों: इस स्थिति में सदिशों के मध्य का कोण $\theta = 0^\circ$ होगा। अतः समीकरण (1) से

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 0^\circ = |\vec{a}||\vec{b}| = ab$$

अर्थात् इस स्थिति में सदिशों का अदिश गुणन उनके परिमाणों के गुणनफल के बराबर होता है।

(ii) जब सदिश $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ समान सदिश हों: इस स्थिति में सदिशों के मध्य का कोण $\theta = 0^\circ$ होगा। अतः समीकरण (1) से

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0^\circ = |\vec{a}||\vec{a}| = aa = a^2$$

अर्थात् किसी सदिश का वर्ग उसके मापांक के वर्ग के बराबर होता है।

(iii) जब सदिश $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ विपरित समान्तर हों: इस स्थिति में सदिशों के मध्य का कोण $\theta = 180^\circ$ होगा। अतः समीकरण (1) से

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 180^\circ = ab(-1) = -ab$$

अर्थात् दो विपरीत समान्तर सदिशों का अदिश गुणनफल उनके परिमाणों के गुणनफल के बराबर एवं ऋण चिन्ह् का होता है।

(iv) जब सदिश $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ परस्पर लम्बवत् हों : इस स्थिति में सदिशों के मध्य का कोण $\theta = \pi/2$ होगा। अतः समीकरण (1) से

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{2} = |\vec{a}||\vec{b}|0 = 0$$

अर्थात् दो परस्पर लम्बवत् सदिशों का अदिश गुणनफल सदैव शून्य होता है। अतः यदि सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ परस्पर लम्बवत् हैं, तो

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

विलोमतः यदि दो अशून्य सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ का अदिश गुणनफल शून्य हों, तो सदिश परस्पर लम्बवत् होंगे।

माना $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$\Rightarrow \quad |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 0$

$\Rightarrow \quad \cos\theta = 0 \qquad [\because |\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0]$

$\Rightarrow \quad \theta = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}\perp\vec{b}$

अतः $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\perp\vec{b}$

टिप्पणी: मूल बिन्दु O से तीन परस्पर लम्बवत् दिशाओं OX, OY तथा OZ में इकाई सदिश क्रमशः $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ है। स्पष्टतः इनमें से प्रत्येक दो इकाई सदिशों के मध्य का कोण $\pi/2$ है। अतः उपर्युक्त परिभाषा एवं निगमनों की सहायता से

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$$

तथा
$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$$

उपर्युक्त परिणामों को निम्न तालिका द्वारा भी व्यक्त किया जा सकता है।

·	i	j	k
i	1	0	0
j	0	1	0
k	0	0	1

13.15 अदिश गुणन के गुणधर्म (Properties of scalar product)

(i) क्रमविनिमेयता (Commutativity): सदिशों का अदिश गुणनफल क्रम विनिमेय होता है।

प्रमाण: यदि $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ कोई दो अशून्य सदिश हो तथा इनके मध्य कोण θ है, तो अदिश गुणन की परिभाषा से

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta$$
$$= b\,a\cos\theta \qquad (\because ab = ba, \text{ संख्याओं का गुणन क्रमविनिमेय होता है।})$$
$$= \vec{b}\cdot\vec{a}$$

टिप्पणी: यदि कोई एक सदिश शून्य सदिश है तो यह गुणधर्म स्वतः स्पष्ट हो जाता है।

(ii) साहचर्यता (Associativity): यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ कोई दो सदिश हों तथा m कोई अदिश राशि हो, तो

$$(m\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(m\vec{b}) = m(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

(iii) बंटनता (Distributivity): यदि $\vec{a}, \vec{b}$ एवं $\vec{c}$ कोई तीन सदिश हों तो

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$

इसी प्रकार
$$(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{c}\cdot\vec{a}$$

13.16 घटकों के पदो में दो सदिशों का अदिश गुणनफल (Scalar product of two vectors in terms of the components)

माना कि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ और $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$, दो सदिश राशियाँ हैं, तो

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}\right)\cdot\left(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}\right)$$
$$= a_1b_1(\hat{i}\cdot\hat{i}) + a_1b_2(\hat{i}\cdot\hat{j}) + a_1b_3(\hat{i}\cdot\hat{k}) + a_2b_1(\hat{j}\cdot\hat{i}) + a_2b_2(\hat{j}\cdot\hat{j})$$
$$+ a_2b_3(\hat{j}\cdot\hat{k}) + a_3b_1(\hat{k}\cdot\hat{i}) + a_3b_2(\hat{k}\cdot\hat{j}) + a_3b_3(\hat{k}\cdot\hat{k}) \quad \text{(बीजीय गुणधर्म (ii) एवं (iii) से)}$$
$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \qquad \text{(अनुच्छेद 13.14 की टिप्पणी से)}$$

अतः $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

टिप्पणी:
$$\vec{a}\cdot\vec{a} = \left(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}\right)\cdot\left(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}\right)$$
$$= a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a^2$$

अर्थात्, $(\vec{a})^2 = a^2$

13.17 दो सदिशों के मध्य कोण (Angle between two vectors):

माना कि दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के मध्य कोण θ है। अतः सदिशों के अदिश गुणन की परिभाषा से,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta$$

या $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab} = \left(\dfrac{\vec{a}}{a}\right)\cdot\left(\dfrac{\vec{b}}{b}\right) = \hat{a}\cdot\hat{b}$, जहाँ $\hat{a}, \hat{b}$ क्रमशः $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ की दिशा में इकाई सदिश हैं।

पुनः यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ हों, तो

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})\cdot(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \qquad \text{(अनुच्छेद 13.16 से)}$$

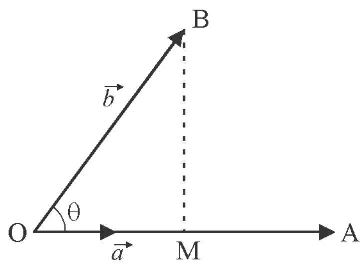
अतः $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

टिप्पणी: सदिशों $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ के परस्पर लम्बवत होने पर $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

13.18 किसी सदिश $\vec{b}$ के सदिश $\vec{a}$ के अनुदिश एवं इसके लम्बवत् दिशा में घटक (Components of any vector $\vec{b}$ along and perpendicular to a vector $\vec{a}$)

माना कि $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ तथा $BM \perp OA$.

अतः ΔOBM में त्रिभुज नियम से, $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}$, जहाँ $\overrightarrow{OM}$ एवं $\overrightarrow{MB}$ सदिश $\vec{b}$ के सदिश $\vec{a}$ के अनुदिश तथा इसके लम्बवत् घटक हैं।



आकृति 13.17

अब $\overrightarrow{OM} = (OM)\hat{a} = (b\cos\theta)\hat{a}$

$$= b\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}\right)\hat{a} \qquad \text{(अनुच्छेद 13.17 से)}$$

$$= \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a}\right)\hat{a} = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2}\right)\vec{a} \qquad \left[\because \hat{a} = \frac{\vec{a}}{a}\right]$$

तथा $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$

$$= \vec{b} - \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2}\right)\vec{a}$$

अतः सदिश $\vec{b}$ के घटक, सदिश $\vec{a}$ की दिशा में तथा सदिश $\vec{a}$ के लम्बवत् दिशा में क्रमशः $\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2}\right)\vec{a}$ तथा $\vec{b} - \left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2}\right)\vec{a}$ होंगे।

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण-10. यदि $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ हो तो $\vec{a}\cdot\vec{b}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः $\vec{a}\cdot\vec{b} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})\cdot(3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$

$$= (1)(3) + (2)(2) + (3)(1) = 3 + 4 + 3 = 10$$

अतः $\vec{a}\cdot\vec{b}$ का मान 10 है।

उदाहरण-11. λ के किस मान के लिये सदिश $2\hat{i}+\lambda\hat{j}+5\hat{k}$ और $-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ परस्पर लम्बवत् है।

हल: दिये गये सदिश लम्बवत् होंगे यदि इनका अदिश गुणनफल शून्य हो, अर्थात्

$$(2\hat{i}+\lambda\hat{j}+5\hat{k})\cdot(-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=0$$

या $$(2)(-1)+(\lambda)(1)+(5)(1)=0$$

या $$2+\lambda+5=0$$

या $$\lambda=-3$$

अतः $\lambda=-3$ के लिये दिये गये सदिश परस्पर लम्बवत् होंगे।

उदाहरण-12. सदिश $3\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ तथा $2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ के मध्य का कोण ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि $\vec{a}=3\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ तथा $\vec{b}=2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ तथा यदि $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ के मध्य कोण θ हो तो

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\theta$$

$$\Rightarrow \qquad \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}=\frac{(3\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k})\cdot(2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})}{\sqrt{9+1+9}\sqrt{4+4+1}}$$

$$=\frac{(3)(2)+(1)(2)+(3)(-1)}{\sqrt{19}\sqrt{9}}=\frac{5}{3\sqrt{19}}$$

अतः दिये गये सदिशों के मध्य का कोण $\cos^{-1}\left(\frac{5}{3\sqrt{19}}\right)$ है।

उदाहरण-13. प्रदर्शित कीजिए कि–

(i) $(\vec{a}+\vec{b})=a^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+b^2$

तथा (ii) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=a^2-b^2$

हल: (i) $(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$=a^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}+b^2 \qquad [\because \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}]$$

$$=a^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+b^2$$

(ii) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}$

$$=a^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}-b^2$$

$$=a^2-b^2 \qquad [\because \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}]$$

उदाहरण-14. यदि दो इकाई सदिशों $\hat{a}$ और $\hat{b}$ के मध्य का कोण θ हो, तब सिद्ध कीजिए कि

$$\sin(\theta/2)=\frac{1}{2}|\hat{a}-\hat{b}|$$

हल: $$|\hat{a}-\hat{b}|^2=(\hat{a}-\hat{b})\cdot(\hat{a}-\hat{b})$$

$$=\hat{a}.\hat{a}-\hat{a}.\hat{b}-\hat{b}.\hat{a}+\hat{b}\hat{b}$$

$$=|\hat{a}|^2-2\hat{a}.\hat{b}+|\hat{b}|^2 \qquad \left[\because \hat{a}.\hat{b}=\hat{b}.\hat{a}\right]$$

$$= 1 - 2\hat{a}\cdot\hat{b} + 1 \qquad \left[\because |\hat{a}| = 1 = |\hat{b}|\right]$$

$$= 2 - 2(1)(1)\cos\theta = 2(1-\cos\theta)$$

$$= 2\cdot\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad |\hat{a}-\hat{b}| = 2\sin\frac{\theta}{2} \text{ या } \sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}|\hat{a}-\hat{b}|$$

यही सिद्ध करना था।

उदाहरण-15. (i) यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ समान परिमाण के परस्पर लम्ब सदिश हों, तो सिद्ध कीजिए कि सदिश $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ सदिशों $\vec{a},\vec{b}$ और $\vec{c}$ के साथ बराबर कोण बनाता है।

(ii) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ क्रमशः 3, 4, 5 परिमाण के सदिश हैं। यदि प्रत्येक सदिश अन्य दो सदिशों के योग पर लम्ब हों, तो सदिश $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ का परिमाण ज्ञात कीजिए।

हल: (i) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ परस्पर लम्ब है अतः $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c} = \vec{c}.\vec{a} = 0$

पुनः सदिशों $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ के परिमाण बराबर है अतः $a = b = c$

तथा $$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2 = (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}$$

$$= a^2+b^2+c^2 = 3a^2 \qquad \left[\because a=b=c \text{ तथा } \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 0 \text{ इत्यादि}\right]$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = \sqrt{3}a$$

$$\because \quad (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{a} = a^2$$

माना $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ एवं $\vec{a}$ के मध्य कोण θ_1 है।

अतः $$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a} = |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\,|\vec{a}|\cos\theta_1$$

$$\Rightarrow \quad a^2 = (\sqrt{3}a)(a)\cos\theta_1$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad \theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

इसी प्रकार, यदि सदिश $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, सदिश $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के साथ क्रमशः θ_2 तथा θ_3 कोण बनाता है, तो सिद्ध किया जा सकता है कि $\theta_2 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ तथा $\theta_3 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

अर्थात् सदिश $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ सदिशों $\vec{a},\vec{b}$ एवं $\vec{c}$ के साथ बराबर कोण बनाता है।

(ii) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = 0,\ \vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{c}) = 0$ तथा $\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = 0$

तीनों को जोड़ने पर, $2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}) = 0$

तथा $\vec{a}\cdot\vec{a}=a^2=9,\ b^2=16,\ c^2=25$

$$\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}+2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=9+16+25+0=50$$

$$\Rightarrow \qquad \left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\sqrt{50}=5\sqrt{2} \text{ इकाई।}$$

प्रश्नमाला 13.2

1. यदि दो सदिशों के परिमाण 4 और 5 इकाई हों, तो उनका अदिश गुणनफल ज्ञात कीजिए जबकि उनके मध्य का कोण हों
   (i) 60° (ii) 90° (iii) 30°
2. $\vec{a}.\vec{b}$ का मान ज्ञात कीजिए जबकि $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ क्रमशः है
   (i) $2\hat{i}+5\hat{j};\ 3\hat{i}-2\hat{j}$ (ii) $4\hat{i}+3\hat{k};\ \hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ (iii) $5\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k};\ 2\hat{i}-3\hat{j}$
3. सिद्ध कीजिए कि $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\le|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2$
4. यदि दो बिन्दुओं P एवं Q के निर्देशांक क्रमशः $(3, 4)$ एवं $(12, 9)$ हो, तो $\angle POQ$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ O मूल बिन्दु है।
5. λ के किस मान के लिए सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ परस्पर लम्बवत् है।
   (i) $\vec{a}=2\hat{i}+\lambda\hat{j}+\hat{k};\quad \vec{b}=4\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}$ (ii) $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k};\quad \vec{b}=3\hat{i}+2\hat{j}-\lambda\hat{k}$
6. सदिश $4\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ का सदिश $3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।
7. यदि $\vec{a}=2\hat{i}-16\hat{j}+5\hat{k}$ तथा $\vec{b}=3\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ हो, तो एक सदिश $\vec{c}$ ज्ञात कीजिए कि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ एक समकोण त्रिभुज की भुजाओं को निरूपित करें।
8. यदि $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$, तो सिद्ध कीजिए कि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ परस्पर लम्ब सदिश है।
9. यदि बिन्दुओं A, B, C तथा D के निर्देशांक क्रमशः $(3, 2, 4), (4, 5, -1), (6, 3, 2)$ तथा $(2, 1, 0)$ हों, तो सिद्ध कीजिए कि रेखाएं AB तथा CD परस्पर लम्ब है।
10. किसी सदिश $\vec{a}$ के लिए सिद्ध कीजिए कि $\vec{a}=(\vec{a}\cdot\hat{i})\hat{i}+(\vec{a}\cdot\hat{j})\hat{j}+(\vec{a}\cdot\hat{k})\hat{k}$
11. सदिश विधि से सिद्ध कीजिए की समान्तर चतुर्भुज के विकर्णों के वर्गों का योग उसकी भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

13.19 दो सदिशों का सदिश या वज्र गुणन (Vector or cross product of two vectors)

परिभाषाः यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो सदिशों के मध्य का कोण $\theta\left(0\le\theta\le\pi\right)$ हो, तो इनका सदिश या वज्र गुणनफल एक ऐसा सदिश है जिसका परिमाण $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ के बराबर है और जिसकी दिशा $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के तल के लम्बवत् इस प्रकार है कि $\vec{a},\vec{b}$ तथा यह सदिश एक दक्षिण हस्त पेंच के तंत्र के अनुरूप हों।

सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के सदिश गुणनफल को प्रतिकात्मक रूप में $\vec{a}\times\vec{b}$ से व्यक्त करते हैं।

अतः $$\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}, \tag{1}$$

जहाँ $\hat{n}$, $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के तल के लम्बवत् इकाई सदिश है तथा $\vec{a},\vec{b}$ तथा $\hat{n}$ दक्षिण हस्त तंत्र का निर्माण करते है। अतः परिभाषा से

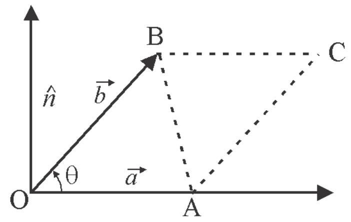
$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta \quad\Rightarrow\quad \sin\theta=\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} \tag{2}$$

सूत्र (1) से, $$\hat{n}=\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta}=\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$$

अतः $\vec{a}$ और $\vec{b}$ की तल के लम्बवत् इकाई सदिश $= \dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$ (3)

क्योंकि इस प्रकार दो सदिशों का गुणनफल, एक सदिश प्राप्त होता है अतः इसे सदिश गुणन कहते हैं। पुनः इसको $\vec{a}\times\vec{b}$ से अर्थात् $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ के मध्य वज्र का चिह्न ('$\times$') लगाकर प्रदर्शित करते हैं अतः इसे वज्र गुणन भी कहते हैं।

13.20 सदिश गुणनफल की ज्यामितीय व्याख्या (Geometrical interpretation of vector product)



आकृति 13.18

माना कि $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ कोई दो असमान्तर तथा अशून्य सदिश हैं, जिनके मध्य का कोण θ है। $\hat{n}$ इन दोनों सदिशों के लम्बवत् $\vec{a}$ से $\vec{b}$ के घूर्णन की दिशा में इकाई सदिश है।

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

$$= (OA)(OB)\sin\theta \qquad (1)$$

OA एवं OB को आसन्न भुजाएं मानकर समान्तर चतुर्भुज $OACB$ पूरा करने पर, समान्तर चतुर्भुज $OACB$ का क्षेत्रफल

$$= 2(\Delta OAB \text{ का क्षेत्रफल })$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin\theta\right) = OA\cdot OB\sin\theta \qquad (2)$$

(1) और (2) से स्पष्ट है कि सदिश गुणनफल $\vec{a}\times\vec{b}$ का मापांक $= |\vec{a}\times\vec{b}|$

= उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल जिसकी आसन्न भुजाएं सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ से निरूपित होती हैं। इस सदिश गुणनफल को उस समान्तर चतुर्भुज का सदिश क्षेत्रफल कहते है।

13.21 सदिश गुणन से कुछ महत्वपूर्ण निगमन (Some important deductions from vector product)

(i) दो समान्तर सदिशों का सदिश गुणनफल सदैव शून्य सदिश होता है।

प्रमाण: यदि $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ दो समान्तर सदिश हैं तो उनके मध्य का कोण $\theta = 0°$ या $\theta = \pi°$ होगा। अतः दोनों ही स्थिति में $\sin\theta$ का मान शून्य होगा। अतः

$$\vec{a}\times\vec{b} = ab\sin\theta\hat{n} = (0)\hat{n} = \vec{O} \text{ (शून्य सदिश)}$$

विलोम: यदि दो अशून्य सदिशों का सदिश गुणनफल शून्य सदिश हो तो, वे समान्तर सदिश होते है, क्योंकि

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{O}, \quad \Rightarrow \quad ab\sin\theta\hat{n} = \vec{O} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = 0 \qquad [\because a \neq 0, b \neq 0]$$

$$\Rightarrow \quad \theta = 0 \text{ या } \theta = \pi$$

अर्थात् $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ समान्तर सदिश है।

टिप्पणी: (i) $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{O}$, (ii) $\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = \vec{O}$

(ii) दो लम्बवत् सदिशों के सदिश गुणनफल का परिमाण उन सदिशों के परिमाणों के गुणनफल के तुल्य होता है।

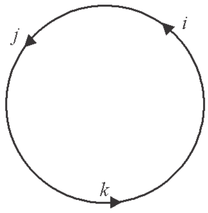
प्रमाण: यदि $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ दो लम्बवत् सदिश हों, तो $\theta = 90°$ होगा।

$$\text{अतः} \quad \vec{a}\times\vec{b} = (ab\sin 90°)\hat{n}$$

$$= (ab)\hat{n}$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{a}\times\vec{b}| = ab$$

अर्थात् सदिश $\vec{a}\times\vec{b}$ का परिमाण $= (\vec{a}$ का परिमाण$)$ $(\vec{b}$ का परिमाण$)$, यहाँ $\hat{n}$, सदिश $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ के तल के लम्बवत् इकाई सदिश है तथा ये दक्षिण हस्त तंत्र के नियम का पालन करते है।



आकृति 13.19

विशेष अवस्था: इकाई सदिशों का सदिश गुणन $\hat{i}\times\hat{j}=(1)(1)\sin 90^\circ\hat{k}=\hat{k}$

इसी प्रकार, $\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$ तथा $\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$

पुनः $\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k}$ (अर्थात् $\hat{i}\times\hat{j}$ के विपरित)

इसी प्रकार $\hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}$ तथा $\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$

इसे सामने के आकृति 13.19 के द्वारा भी समझा जा सकता है। यदि इकाई सदिशों के गुणन में घूर्णन घड़ी की दिशा के विपरीत अर्थात् वामावर्त है तो परिणामी इकाई सदिश धनात्मक होगा तथा यदि घूर्णन दक्षिणावर्त्त है तो परिणामी इकाईसदिश ऋणात्मक होगा।

13.22 सदिश गुणन के बीजीय गुणधर्म (Algebraic properties of vector product)

(i) क्रमविनिमेयता (Commutativity): सदिश गुणनफल क्रमविनिमेय नहीं होता है, अर्थात् किन्ही दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के लिए

$$\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{b}\times\vec{a}$$

(ii) साहचर्यता (Associativity): किसी अदिश राशि के प्रति, सदिश गुणनफल साहचर्य होता है, अर्थात् यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ कोई दो सदिश हैं तथा m कोई एक अदिश राशि हो, तब

$$m(\vec{a}\times\vec{b})=(m\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(m\vec{b})$$

(iii) बंटनता (Distributivity): सदिश गुणनफल सदिश योग पर बंटन नियम का पालन करता है, अर्थात् यदि $\vec{a}, \vec{b}$ एवं $\vec{c}$ तीन सदिश हों, तो

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

13.23 घटकों के पदों में दो सदिशों का सदिश गुणन (Vector product of two vectors in terms of components)

यदि $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ तथा $\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ दो सदिश हों, तो

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})\times(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})$$

$$=a_1b_1(\hat{i}\times\hat{i})+a_1b_2(\hat{i}\times\hat{j})+a_1b_3(\hat{i}\times\hat{k})+a_2b_1(\hat{j}\times\hat{i})$$

$$+a_2b_2(\hat{j}\times\hat{j})+a_2b_3(\hat{j}\times\hat{k})+a_3b_1(\hat{k}\times\hat{i})+a_3b_2(\hat{k}\times\hat{j})+a_3b_3(\hat{k}\times\hat{k})$$

$$=a_1b_1(\vec{0})+a_1b_2(\hat{k})+a_1b_3(-\hat{j})+a_2b_1(-\hat{k})+a_2b_2(\vec{0})+a_2b_3(\hat{i})+a_3b_1(\hat{j})+a_3b_2(-\hat{i})+a_3b_3(\vec{0})$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\hat{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\hat{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{k}$$

अतः $$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

जो कि $\vec{a}\times\vec{b}$ का सारणिक रूप है।

13.24 दो सदिशों के मध्य कोण (Angle between two vectors)

यदि $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ के मध्य θ कोण हो तो

$$\vec{a}\times\vec{b} = ab\sin\theta\hat{n}$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{a}\times\vec{b}| = |ab\sin\theta||\hat{n}| = ab|\sin\theta||\hat{n}|$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2\theta = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|^2}{(a^2)(b^2)}$$

$$= \frac{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}{(a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2})(b_1^{\,2}+b_2^{\,2}+b_3^{\,2})}$$

अतः θ का मान उपर्युक्त सूत्र से ज्ञात किया जा सकता है।

13.25 त्रिभुज का सदिश क्षेत्रफल (Vector area of a triangle)

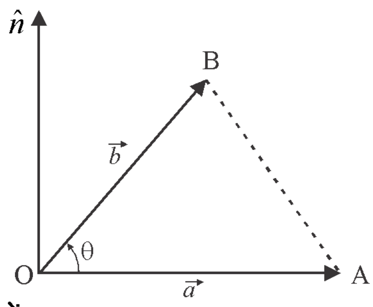
(i) जब त्रिभुज की दो आसन्न भुजाओं को निरूपित करने वाले सदिश $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ दिये गये हों

माना कि $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ तथा $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ हो, तो $\vec{a}\times\vec{b} = ab\sin\theta\hat{n}$

अतः त्रिभुज (ΔOAB) का सदिश क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}ab\sin\theta\hat{n} = \frac{1}{2}(\vec{a}\times\vec{b})$,

यहाँ $\hat{n}$ सदिश क्षेत्रफल की दिशा है।

टिप्पणी: ΔOBA का सदिश क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\left(\vec{b}\times\vec{a}\right) = -\frac{1}{2}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$



आकृति 13.20

(ii) जब त्रिभुज के शीर्षों A, B, C के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}, \vec{b}$ एवं $\vec{c}$ दिये गये हों :

ΔABC की आसन्न भुजाएं क्रमशः AB एवं AC हैं तथा

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}-\vec{a} \text{ एवं } \overrightarrow{AC} = \vec{c}-\vec{a}$$

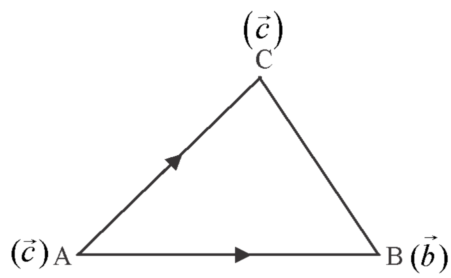
अतः ΔABC का सदिश क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\times\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\vec{b}\times\vec{c}-\vec{b}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{c}+\vec{a}\times\vec{a}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\vec{b}\times\vec{c}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{c}\times\vec{a}\right] \qquad \left[\because \vec{a}\times\vec{a} = \vec{O}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}\right]$$



आकृति 13.21

13.26 तीन बिन्दुओं के संरेख होने का प्रतिबन्ध (Condition of collinearity of three points)

यदि बिन्दु A, B एवं C संरेख हैं, तो तीनों बिन्दु एक ही रेखा पर होगें। अतः इन बिन्दुओं से निर्मित त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल शून्य होगा। माना कि इनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}, \vec{b}$ एवं $\vec{c}$ हैं। अतः ΔABC का क्षेत्रफल $= 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a} = 0$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-16. $(2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k})\times(3\hat{i}+4\hat{j}-4\hat{k})$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हल: $$(2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k})\times(3\hat{i}+4\hat{j}-4\hat{k})=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & -3 & 4\\ 3 & 4 & -4\end{vmatrix}$$

$$=(12-16)\hat{i}+(12+8)\hat{j}+(8+9)\hat{k}=-4\hat{i}+20\hat{j}+17\hat{k}$$

अतः अभीष्ट मान $-4\hat{i}+20\hat{j}+17\hat{k}$ है।

उदाहरण-17. यदि $\vec{a}=3\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ तथा $\vec{b}=2\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ हों तो, $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ दोनों के लम्बवत् इकाई सदिश $\hat{n}$ ज्ञात कीजिए।

हल: सदिश गुणन की परिभाषा से,

$$\hat{n}=\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$$

$$=\frac{(3\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})\times(2\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})}{\left|(3\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})\times(2\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})\right|}$$ होगा।

पुनः $$(3\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})\times(2\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & -2 & 2\end{vmatrix}$$

$$=(2+4)\hat{i}+(4-6)\hat{j}+(-6-2)\hat{k}$$

$$=6\hat{i}-2\hat{j}-8\hat{k}$$

अतः $$\hat{n}=\frac{6\hat{i}-2\hat{j}-8\hat{k}}{\left|6\hat{i}-2\hat{j}-8\hat{k}\right|}$$

$$=\frac{6\hat{i}-2\hat{j}-8\hat{k}}{\sqrt{36+4+64}}=\frac{6\hat{i}-2\hat{j}-8\hat{k}}{\sqrt{104}}$$

$$=\frac{3\hat{i}-\hat{j}-4\hat{k}}{\sqrt{26}}$$, जो कि अभीष्ट हल है।

अतः अभीष्ट लम्बवत् इकाई सदिश $\frac{1}{\sqrt{26}}(3\hat{i}-\hat{j}-4\hat{k})$ है।

उदाहरण-18. यदि $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$ तथा $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$, तो सिद्ध कीजिए कि $\vec{a}-\vec{d}$ एवं $\vec{b}-\vec{c}$ समान्तर है।

हल: $$(\vec{a}-\vec{d})\times(\vec{b}-\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c})-(\vec{d}\times\vec{b}-\vec{d}\times\vec{c})$$

$$=\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{d}+(-\vec{c})\times\vec{d}$$

$$=(\vec{a}\times\vec{b}-\vec{c}\times\vec{d})+(\vec{b}\times\vec{d}-\vec{a}\times\vec{c})$$

$$=\vec{O}+\vec{O}=\vec{O}$$

अतः $\vec{a}-\vec{d}$ एवं $\vec{b}-\vec{c}$ समान्तर सदिश हैं।

उदाहरण-19. यदि $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{b}$ तो सिद्ध कीजिए $\vec{a}-\vec{c}=\lambda\vec{b}$, जहाँ λ एक अदिश है।

हल: $$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{b}$$

$\Rightarrow$ $\vec{a}\times\vec{b}-\vec{c}\times\vec{b}=0$

$\Rightarrow$ $(\vec{a}-\vec{c})\times\vec{b}=0$

$\therefore$ $\vec{a}-\vec{c}$ एवं $\vec{b}$ समान्तर हैं। अतः $\vec{a}-\vec{c}=\lambda\vec{b}$, जहाँ λ अदिश राशि है।

टिप्पणी: (i) यदि $\vec{a}-\vec{c}$ एवं $\vec{b}$ समदिश हैं, तो λ धनात्मक होगा।

(ii) यदि $\vec{a}-\vec{c}$ एवं $\vec{b}$ विपरीत हैं, तो λ ऋणात्मक होगा।

उदाहरण-20. यदि $A(1, 2, 2), B(2, -1, 1)$ तथा $C(-1, -2, 3)$ समतल में कोई तीन बिन्दु हों, तो समतल ABC के अभिलम्ब की दिशा में एक सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिमाण 5 इकाई हो।

हल: $\overrightarrow{AB}=$ (B का स्थिति सदिश) – (A का स्थिति सदिश)

$$=\left(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)-\left(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}\right)$$

$$=\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}$$

तथा $\overrightarrow{AC}=$ (C का स्थिति सदिश) – (A का स्थिति सदिश)

$$=\left(-\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}\right)-\left(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}\right)$$

$$=-2\hat{i}-4\hat{j}+\hat{k}$$

$\because$ $\overrightarrow{AB}$ तथा $\overrightarrow{AC}$ दोनों, समतल ABC में हैं। अतः सदिश $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ समतल के अभिलम्ब के अनुदिश होगा।

अतः $$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}\right)\times\left(-2\hat{i}-4\hat{j}+\hat{k}\right)$$

$$=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & -3 & -1\\ -2 & -4 & 1\end{vmatrix}$$

$$=-7\hat{i}+\hat{j}-10\hat{k}$$

समतल ABC के अभिलम्ब के अनुदिश इकाई सदिश

$$\hat{n}=\frac{-7\hat{i}+\hat{j}-10\hat{k}}{\sqrt{49+1+100}}=\frac{-1}{\sqrt{150}}\left(7\hat{i}-\hat{j}+10\hat{k}\right)$$

अतः अभिलम्ब की दिशा में 5 इकाई परिमाण का सदिश

$$=5\left[\frac{-1}{\sqrt{150}}\left(7\hat{i}-\hat{j}+10\hat{k}\right)\right]=\frac{-1}{\sqrt{6}}\left(7\hat{i}-\hat{j}+10\hat{k}\right)$$

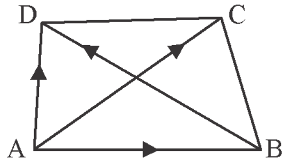
उदाहरण-21. सिद्ध कीजिए कि चतुर्भुज $ABCD$ का सदिश क्षेत्रफल $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}$ द्वारा व्यक्त होता है, जहाँ AC तथा BD इसके विकर्ण है।

हल: चतुभुर्ज $ABCD$ का सदिश क्षेत्रफल $= \Delta ACD$ का सदिश क्षेत्रफल $+\Delta ABC$ का सदिश क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AC} \times \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)\right] = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}$$



आकृति 13.22

अतः चतुभुर्ज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}\right|$ इतिसिद्धम्।

प्रश्नमाला 13.3

1. सदिशों $3\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ तथा $2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ का सदिश गुणनफल ज्ञात कीजिए।
2. सदिशों $\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ तथा $2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ के लम्ब इकाई सदिश ज्ञात कीजिए।
3. सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के लिए सिद्ध कीजिए कि $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{a} & \vec{a}.\vec{b} \\ \vec{a}.\vec{b} & \vec{b}.\vec{b} \end{vmatrix}$
4. सिद्ध कीजिए कि $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)+\vec{b}\times\left(\vec{c}+\vec{a}\right)+\vec{c}\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0$
5. यदि $\hat{a},\hat{b},\hat{c}$ इस प्रकार के इकाई सदिश हैं कि $\hat{a}\cdot\hat{b}=\hat{a}\cdot\hat{c}=0$ तथा $\hat{b}$ और $\hat{c}$ के मध्य का कोण $\pi/6$ है, तब सिद्ध कीजिए कि $\hat{a}=\pm 2\left(\hat{b}\times\hat{c}\right)$
6. $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ का मान ज्ञात कीजिए, यदि $\left|\vec{a}\right|=10, \left|\vec{b}\right|=2$ तथा $\vec{a}\cdot\vec{b}=12$
7. सदिशों $4\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ तथा $-2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ के लम्बवत् 9 इकाई परिमाण वाला सदिश ज्ञात कीजिए।
8. प्रदर्शित कीजिए कि $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=2\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ इसकी ज्यामितीय व्याख्या भी कीजिए।
9. किसी सदिश $\vec{a}$ के लिए सिद्ध कीजिए कि $\left|\vec{a}\times\hat{i}\right|^2+\left|\vec{a}\times\hat{j}\right|^2+\left|\vec{a}\times\hat{k}\right|^2=2\left|\vec{a}\right|^2$
10. यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएं सदिश $\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ तथा $3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ से निरूपित हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

13.27 तीन सदिशों का गुणनफल (Product of three vectors)

तीन सदिशों के गुणन की संभावित स्थितियां निम्नलिखित है:

(i) $\vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$ (ii) $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$ (iii) $\vec{a}\times\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$

(iv) $\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ (v) $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ (vi) $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$

इन संभावित स्थितियों का परिक्षण करने पर निम्नलिखित तथ्य स्पष्ट होते हैं।

(i) $\vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$ **अर्थयुक्त है,** क्योंकि $\vec{b}\cdot\vec{c}$ अदिश राशि है। अतः यहाँ परिणाम $\vec{a}$ की दिशा में एक सदिश है जिसका परिमाण $\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$ गुणा है। परन्तु यह स्थिति तीन सदिशों का गुणन नहीं कहलाती है।

(ii) $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$ **अर्थहीन है,** क्योंकि $\vec{b}\cdot\vec{c}$ अदिश राशि है जबकि $\vec{a}$ के साथ अदिश गुणन के लिए एक सदिश राशि की आवश्यकता होती है।

(iii) $\vec{a}\times(\vec{b}\,.\,\vec{c})$ **अर्थहीन है।** क्योंकि $\vec{b}\cdot\vec{c}$ अदिश राशि है जबकि $\vec{a}$ के साथ सदिश गुणन के लिए एक सदिश राशि की आवश्कता होती है।

(iv) $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$ **अर्थहीन है।** क्योंकि $\vec{b}\times\vec{c}$ सदिश राशि है तथा $\vec{a}$ भी एक सदिश है एवं क्योंकि इन दो सदिश राशियों के मध्य न तो $(\cdot)$ एवं न ही $(\times)$ चिन्ह है। अतः परिणामी के बारे में कुछ नहीं कहा जा सकता है।

(v) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ **अर्थयुक्त है।** क्योंकि $\vec{b}\times\vec{c}$ सदिश राशि है तथा $\vec{a}$ भी एक सदिश राशि है। इन दो सदिशों का अदिश गुणनफल संभव होगा तथा परिणामी एक अदिश राशि होगी। अतः इस प्रकार के गुणन को अदिश त्रिक् गुणन (Scalar triple product) कहते है।

(vi) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ **अर्थयुक्त है।** क्योंकि $\vec{b}\times\vec{c}$ सदिश राशि है तथा $\vec{a}$ भी एक सदिश राशि है। इन दो सदिशों का सदिश गुणनफल संभव होगा तथा परिणामी एक सदिश राशि होगी। अतः इस प्रकार के गुणन को सदिश त्रिक् गुणन (Vector triple product) कहते है।

उपर्युक्त विश्लेषण से यह स्पष्ट होता है कि तीन सदिशों के दो ही तरह के गुणनफल अर्थयुक्त है जिनका अध्ययन यहाँ किया जाएगा।

13.28 अदिश त्रिक् गुणनफल (Scalar triple product)

परिभाषाः किन्ही दो सदिशों के सदिश गुणनफल का तीसरे सदिश के साथ अदिश गुणनफल को तीन सदिशों का अदिश त्रिक् गुणनफल कहते हैं।

क्योंकि इस प्रकार के गुणनफल में दोनो ही तरह के गुणनफल (अदिश एवं सदिश) ज्ञात करते हैं अतः कभी–कभी इसे मिश्र गुणनफल भी कहते है।

यदि $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ कोई तीन सदिश हो तो $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ को सदिश $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ का अदिश त्रिक् गुणनफल कहते है तथा इसे $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$ से निरूपित करते हैं। अतः संकेतानुसार $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ तथा $[\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}]=\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$ ।

टिप्पणी: बॉक्स में लिखने के कारण इसे बॉक्स गुणा भी कहते हैं, ध्यान रहे कि बॉक्स में लिखते समय मध्य में कोमा चिह्न का प्रयोग न करें।

13.29 अदिश त्रिक् गुणनफल की ज्यामितीय व्याख्या (Geometrical interpretation of scalar triple product)

माना $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}$ तथा $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ है। आकृतिानुसार तीन संगामी कोरो $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ वाली समान्तर षट्फलकी का निर्माण किया।

अब, समान्तर चतुर्भुज OBDC का सदिश क्षेत्रफल $=\vec{b}\times\vec{c}$ जिसकी दिशा OBDC के लम्बवत है।

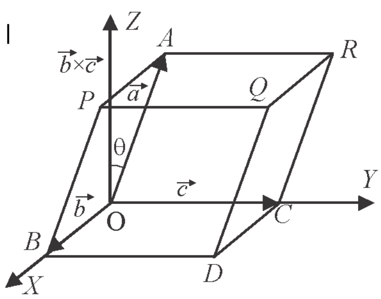
$\therefore\quad \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=|\vec{a}||\vec{b}\times\vec{c}|\cos\theta,$ जहाँ θ सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}\times\vec{c}$ के बीच का कोण है।

$=|\vec{b}\times\vec{c}|(|a|\cos\theta)$

= (समान्तर चतुर्भुज OBDC का क्षेत्रफल) (समान्तर षट्फलक की ऊँचाई)

= (अर्थात् आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊँचाई)

$\Rightarrow\quad \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=$ समान्तर षट्फलक का आयतन जिसकी तीन संगामी कोरें सदिश $\vec{a},\vec{b}$ और $\vec{c}$ से निरूपित है



आकृति 13.23

अतः तीन सदिश $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ का अदिश त्रिक् गुणनफल उस समान्तर षट्फलकी के आयतन के बराबर होता है जिसकी तीनों आसन्न कोरें सदिश $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ से निरूपित होती है।

इसी प्रकार हम प्रदर्शित कर सकते हैं कि $\vec{b}.\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{c}.\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ समान्तर षट्फलक का आयतन जिसकी संगामी कोरें दिये गये सदिशों $\vec{a},\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ द्वारा निरूपित हैं। अतः

$$\vec{a}.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}.\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{c}.\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$$

या $$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}]=[\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}]$$

13.30 अदिश त्रिक् गुणनफल के गुणधर्म (Properties of scalar triple product)

(i) अदिश त्रिक् गुणन में बिन्दु तथा वज्र की स्थिति परस्पर बदली जा सकती है।
ज्यामितीय व्याख्या से

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) \tag{1}$$

पुनः $$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a} \tag{2}$$

इसी प्रकार $$\vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b} \tag{3}$$

तथा $$\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} \tag{4}$$

समीकरण (1) तथा (4) से $$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$$

अर्थात् $$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$$

अतः चक्रिय क्रम अपरिवर्तित रखने पर बिन्दु तथा वज्र का चिह्न परस्पर परिवर्तित किया जा सकता है।

(ii) सदिशों के चक्रिय क्रम बदलने पर अदिश त्रिक् गुणन का चिह्न बदल जाता है।

$\because$ $$(\vec{b}\times\vec{c})=-(\vec{c}\times\vec{b})$$

$\therefore$ $$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=-\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{b})$$

अतः $$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=-[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}]$$

इसी प्रकार अन्य भी लिखे जा सकते है। परिणाम में एक बार फिर सदिशों का क्रम बदलने पर पुनः वे प्रारम्भ वाले चक्रिय क्रम में आ जाते है तथा चिन्ह् भी पहले के समान हो जाता है।

(iii) अदिश त्रिक् गुणनफल में जब दो सदिश समान्तर हों, तब गुणनफल शून्य होता है।

माना कि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ तीन सदिश है जिनमें सदिश $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ समान्तर है। अब चूंकि $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ समान्तर है अतः $\vec{b}=\lambda\vec{c}$, जहाँ λ एक अचर राशि है।

$$\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right]=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\left(\lambda\vec{c}\times\vec{c}\right)=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{0}\right)=0 \qquad \because\left[\vec{c}\times\vec{c}=\vec{0}\right]$$

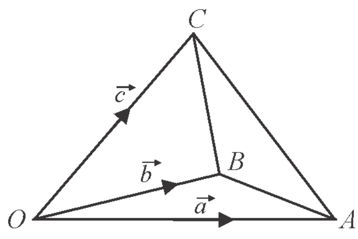
टिप्पणी: यदि दो सदिश समान हो तो भी परिणाम शून्य ही होगा।

13.31 चतुष्फलक का आयतन (Volume of a tetrahedron)

माना कि चतुष्फलक OABC में O मूल बिन्दु तथा $A\left(\vec{a}\right), B\left(\vec{b}\right)$ एवं $C\left(\vec{c}\right)$ अन्य शीर्ष है।

चतुष्फलक का आयतन $(V)=\dfrac{1}{3}$ (आधार का क्षेत्रफल) $\times$ (ऊँचाई)

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right]\cdot\vec{c}=\frac{1}{6}\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]$$



आकृति 13.24

अतः चतुष्फलक का आयतन $=(1/6)$ (समान्तर षट्फलकी का आयतन, जिसकी तीन संगामी कोरे $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ है)

टिप्पणी: यदि चतुष्फलक के चारों शीर्ष $A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c})$ तथा $D(\vec{d})$ हो तो चतुष्फलक का आयतन

$$=\frac{1}{6}[\vec{a}-\vec{b} \quad \vec{a}-\vec{c} \quad \vec{a}-\vec{d}]$$

13.32 तीन असमान्तर और अशून्य सदिशों $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के समतलीय होने का आवश्यक एवं प्रर्याप्त प्रतिबन्ध $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=0$ है। (Necessary and sufficient condition for the three non-parallel and non-zero vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ to be coplanar is that $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=0$)

आवश्यक प्रतिबन्ध: माना कि $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ तीन अशून्य, असमान्तर समतलीय सदिश है। अतः $\vec{b}\times\vec{c}$ समतल के लम्ब दिशा में एक सदिश होगा। पुनः $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$

($\because \vec{a}$ समतल में है तथा $\vec{b}\times\vec{c}$ समतल के लम्ब सदिश है एवं दो लम्ब सदिशों का अदिश गुणन शून्य होता है।)

अर्थात् $\quad [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=0$

पर्याप्त प्रतिबन्ध: माना कि

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$$

$\Rightarrow \quad \vec{a}\perp(\vec{b}\times\vec{c})$, परन्तु $\vec{b}\times\vec{c}$, सदिश $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के लम्बवत् होता है। अर्थात् सदिश $\vec{a}$ सदिश $\vec{b}$ एवं $\vec{c}$ के तल में स्थिति होना चाहिए। अतः सदिश $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ समतलीय होंगे।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-22. सिद्ध कीजिए कि $[\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}]+[\hat{j}\ \hat{k}\ \hat{i}]+[\hat{k}\ \hat{i}\ \hat{j}]=3.$

हल: $\quad [\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}]=\hat{i}\cdot(\hat{j}\times\hat{k})=\hat{i}\cdot\hat{i}=1$

$\because \quad [\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}]=[\hat{j}\ \hat{k}\ \hat{i}]=[\hat{k}\ \hat{i}\ \hat{j}]$

अतः $\quad [\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}]+[\hat{j}\ \hat{k}\ \hat{i}]+[\hat{k}\ \hat{i}\ \hat{j}]=1+1+1=3$

उदाहरण-23. यदि $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ तथा $\vec{c}=\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ हो, तो $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ तथा $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ का मान ज्ञात कीजिए। दर्शाइये कि $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

हल:
$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=0$$
($\because$ प्रथम एवं तृतीय स्तम्भ समान है।)

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$$
($\because$ प्रथम एवं तृतीय स्तम्भ समान है।)

अतः $\quad \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

उदाहरण-24. सिद्ध कीजिए कि $\left[\vec{a}+\vec{b} \quad \vec{b}+\vec{c} \quad \vec{c}+\vec{a}\right]=2\left[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}\right]$

हल: चूंकि $\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\times\left(\vec{c}+\vec{a}\right)=\vec{b}\times\left(\vec{c}+\vec{a}\right)+\vec{c}\times\left(\vec{c}+\vec{a}\right)$ (बंटन नियम से)

$$=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)+\left(\vec{c}\times\vec{c}\right)+\left(\vec{c}\times\vec{a}\right) \quad \text{(बंटन नियम से)}$$

$$=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)+\left(\vec{c}\times\vec{a}\right) \quad (1)$$

$$\therefore \quad \left[\vec{a}+\vec{b} \ \ \vec{b}+\vec{c} \ \ \vec{c}+\vec{a}\right]=\left(\vec{a}+\vec{b}\right).\left\{\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\times\left(\vec{c}+\vec{a}\right)\right\}$$

$$=\left(\vec{a}+\vec{b}\right).\left\{\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)+\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\right\} \quad \text{(समीकरण (1) से)}$$

$$=\left(\vec{a}+\vec{b}\right).\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\left(\vec{a}+\vec{b}\right).\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)+\left(\vec{a}+\vec{b}\right).\left(\vec{c}\times\vec{a}\right) \quad \text{(बंटन निमय से)}$$

$$=\vec{a}.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\vec{b}.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\vec{a}.\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)+\vec{b}.\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)+\vec{a}.\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+\vec{b}.\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)$$

$$=\left[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}\right]+0+0+0+0+\left[\vec{b} \ \vec{c} \ \vec{a}\right] \quad (\because \text{ त्रिक् गुणन के गुणधर्म से})$$

$$=2\left[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}\right]$$

उदाहरण-25. λ के किस मान के लिये सदिश $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ तथा $\vec{c}=3\hat{i}+\lambda\hat{j}+5\hat{k}$ समतलीय होगें।

हल: तीन सदिशों $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के समतलीय होने का प्रतिबन्ध $\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right]=0$ है।

अर्थात्
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & \lambda & 5 \end{vmatrix}=0 \quad \text{या} \quad \begin{vmatrix} 3 & \lambda & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=0$$

(चक्रिय क्रम में पंक्तिया बदलने पर सारणीक के मान में अन्तर नहीं आता)

अतः $3(3-2)+\lambda(1+6)+5(4+1)=0 \quad \Rightarrow 3+7\lambda+25=0$

$\Rightarrow \quad \lambda=-4$

अतः $\lambda=-4$ के लिये तीनो सदिश $\vec{a}, \vec{b}$ एवं $\vec{c}$ समतलीय होंगे।

उदाहरण-26. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $A(4,8,12), B(2,4,6), C(3,5,4), D(5,8,5)$ समतलीय है।

हल: यदि चारों बिन्दु समतलीय है, तो सदिश $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$ भी समतलीय होंगे। पुनः समतलीयता के प्रतिबन्ध से $\left[\overrightarrow{BA} \ \ \overrightarrow{BC} \ \ \overrightarrow{BD}\right]=0$

अब
$$\overrightarrow{BA}=\left(4\hat{i}+8\hat{j}+12\hat{k}\right)-\left(2\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}\right)=2\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}$$
$$\overrightarrow{BC}=\left(3\hat{i}+5\hat{j}+4\hat{k}\right)-\left(2\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}\right)=\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$$
$$\overrightarrow{BD}=\left(5\hat{i}+8\hat{j}+5\hat{k}\right)-\left(2\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}\right)=3\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$$

अतः
$$\left[\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{BD}\right]=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}=2(7)+4(-5)+6(1)=0$$

अतः चारो बिन्दु समतलीय है।

उदाहरण-27. यदि चार बिन्दु $A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c})$ एवं $D(\vec{d})$ समतलीय हो तो सिद्ध कीजिए कि

$$\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = \left[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}\right] + \left[\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{d}\right] + \left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{d}\right]$$

हल: चारों बिन्दु समतलीय है। अतः सदिश $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ एवं $\overrightarrow{AD}$ भी समतलीय होगें।

$$\Rightarrow \qquad \left[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \left[(\vec{b}-\vec{a})\ (\vec{c}-\vec{a})\ (\vec{d}-\vec{a})\right] = 0$$

$$\Rightarrow \qquad (\vec{b}-\vec{a}) \cdot \left\{(\vec{c}-\vec{a}) \times (\vec{d}-\vec{a})\right\} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad (\vec{b}-\vec{a}) \cdot \left\{\vec{c}\times\vec{d} - \vec{c}\times\vec{a} - \vec{a}\times\vec{d} + \vec{a}\times\vec{a}\right\} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) - \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) - \vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{d}) - \vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = 0$$

(शेष अदिश त्रिक् गुणनफल का मान शून्य होगा क्योंकि $\vec{a}$ दो बार आयेगा।)

अतः $\quad \left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = \left[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}\right] + \left[\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{d}\right] + \left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{d}\right]$

उदाहरण-28. उस समान्तर षट्फलकी का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी तीन संगामी कोरे $2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}, \hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ तथा $2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ है।

हल: माना कि $\vec{a}=2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}, \vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ तथा $\vec{c}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ है। षट्फलकी का आयतन $=\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right]$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(3)+3(-4)+4(-5) = 6-12-20 = -26 \text{ इकाई}$$

चूंकि आयतन सदैव धनात्मक होता है। अतः उत्तर 26 इकाई।

उदाहरण-29. एक चतुष्फलक के चारों शीर्ष $O(0,0,0), A(1,2,1), B(2,1,3)$ और $C(-1,1,2)$ है। चतुष्फलक का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $O(0,0,0)$ मूल बिन्दु है तथा शीर्षो के स्थिति सदिश $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ तथा $\vec{c}=-\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ है।

$$\text{अतः चतुष्फलक का आयतन} = \frac{1}{6}\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\left[1(-1)+2(-7)+1(3)\right] = -2 \text{ इकाई}$$

चूंकि आयतन सदैव धनात्मक होता है अतः उत्तर 2 इकाई।

प्रश्नमाला 13.4

1. सिद्ध कीजिए कि

   (i) $[\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}]+[\hat{i}\ \hat{k}\ \hat{j}]=0$ (ii) $[2\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}]+[\hat{i}\ \hat{k}\ \hat{j}]+[\hat{k}\ \hat{j}\ 2\hat{i}]=-1$

2. यदि $\vec{a}=2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}, \vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ तथा $\vec{c}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ हो, तो $\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. सिद्ध कीजिए कि सदिश $-2\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}, -2\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}$ तथा $4\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}$ समतलीय है।

4. λ के किस मान के लिये, निम्नलिखित सदिश समतलीय होंगे

   (i) $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ तथा $\vec{c}=3\hat{i}+\lambda\hat{j}+5\hat{k}$

   (ii) $\vec{a}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ तथा $\vec{c}=\lambda\hat{i}-\hat{j}+\lambda\hat{k}$

5. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित चारों बिन्दु समतलीय हैं।

   (i) $A(-1,4,-3), B(3,2,-5), C(-3,8,-5), D(-3,2,1)$

   (ii) $A(0,-1,0), B(2,1,-1), C(1,1,1), D(3,3,0)$

6. सिद्ध कीजिए कि $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ तथा $\vec{c}=3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$ एक समकोण त्रिभुज की सदिश भुजाएं हैं।

7. उस समान्तर षट्फलक का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी तीन संगामी कोरे निम्न लिखित सदिशों द्वारा निरूपित हैं:

   (i) $\vec{a}=4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ तथा $\vec{c}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$

   (ii) $\vec{a}=2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ तथा $\vec{c}=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$

13.33 सदिश त्रिक् गुणनफल (Vector triple product)

परिभाषा: ''किन्ही दो सदिशों के सदिश गुणनफल का तीसरे सदिश के साथ सदिश गुणनफल, तीनों सदिशों का सदिश त्रिक् गुणनफल कहलाता है।''

यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ तीन सदिश है, तो इनके सदिश त्रिक् गुणनफल $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}), (\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}, (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ इत्यादि होंगे।

ज्यामितीय व्याख्या : क्योंकि दो सदिशों का सदिश या वज्र गुणनफल उन दोनों सदिशों के तल के लम्बवत् एक सदिश होता है, अतः सदिश $\vec{b}\times\vec{c}$, सदिश $\vec{b}$ तथा सदिश $\vec{c}$ के तल के लम्बवत एक सदिश है।

अब $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$, सदिश $\vec{a}$ तथा सदिश $(\vec{b}\times\vec{c})$ के लम्बवत् एक सदिश है अर्थात् यह, सदिश $\vec{b}$ तथा सदिश $\vec{c}$ के तल में स्थित एक सदिश है। अतः इसे $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के पदों में भी व्यक्त किया जा सकता है, अर्थात् $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}$, जहाँ λ तथा μ अदिश राशियाँ है।

टिप्पणी: सदिश त्रिक् गुणनफल की उपर्युक्त परिभाषा एवं ज्यामितीय व्याख्या से स्पष्ट है कि $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$, अर्थात् सदिश त्रिक् गुणनफल साहचर्य नहीं है।

13.34 सदिश $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ के लिये सिद्ध कीजिए कि

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

माना कि $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}, \vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ तथा $\vec{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$

अब $$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})\times\begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}\right) \times \left\{(b_2c_3 - b_3c_2)\hat{i} + (b_3c_1 - b_1c_3)\hat{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\hat{k}\right\}$$

$$= \sum \left\{a_2\left(b_1c_2 - b_2c_1\right) - a_3\left(b_3c_1 - b_1c_3\right)\right\}\hat{i}$$

$$= \sum \left\{b_1\left(a_2c_2 + a_3c_3\right) - c_1\left(a_2b_2 + a_3b_3\right)\right\}\hat{i}$$

$$= \sum \left\{\left(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3\right)b_1 - \left(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\right)c_1\right\}\hat{i} \qquad (a_1b_1c_1 \text{ जोड़ने एवं घटाने पर})$$

$$= \sum \left\{\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)b_1 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)c_1\right\}\hat{i} = \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$$

अतः $\quad \vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$

इसी प्रकार $\quad \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} = -\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = -\left\{\left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right)\vec{a} - \left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\vec{b}\right\} = \left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\vec{b} - \left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right)\vec{a}$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-30. यदि $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}, \vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ तथा $\vec{c} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ हो, तो $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c} = \left(3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}\right)\cdot\left(2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}\right)$$

$$= (3)(2) + (2)(1) + (1)(-1) = 7$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}\right)\cdot\left(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}\right)$$

$$= (3)(1) + (2)(-2) + (1)(2) = 1$$

अतः

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$$

$$= 7\left(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}\right) - 1\left(2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}\right) = 5\hat{i} - 15\hat{j} + 15\hat{k}$$

उदाहरण-31. सिद्ध कीजिए कि $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} = \vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$, यदि और केवल यदि $\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\times\vec{b} = \vec{O}$

हलः माना कि

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} = \vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a} = \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$$

$$\Rightarrow \quad -\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a} = -\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a} - \left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)\vec{c} = \vec{O}$$

अतः

$$\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\times\vec{b} = \vec{O}$$

उदाहरण-32. सिद्ध कीजिए कि सदिश $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}), \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})$ तथा $\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$ समतलीय है।

हल: माना कि $\vec{P}=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}), \vec{Q}=\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})$ तथा $\vec{R}=\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$, तो

$$\vec{P}+\vec{Q}+\vec{R}=\{(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}\}+\{(\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}\}+\{(\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}\}=\vec{O}$$

$\Rightarrow \quad \vec{P}=(-1)\vec{Q}+(-1)\vec{R}$

$\Rightarrow \quad \vec{P},\vec{Q}$ एवं $\vec{R}$ एक ही समतल में हैं।

$\Rightarrow \quad \vec{P},\vec{Q},\vec{R}$ समतलीय है

उदाहरण-33. सिद्ध कीजिए कि $\left[(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{b}\times\vec{c})(\vec{c}\times\vec{a})\right]=\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right]^2$

हल: $\left[(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{b}\times\vec{c})(\vec{c}\times\vec{a})\right]=\{(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{b}\times\vec{c})\}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$

$$=\{\vec{d}\times(\vec{b}\times\vec{c})\}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}), \qquad (\text{माना } \vec{d}=\vec{a}\times\vec{b})$$

$$=\{(\vec{d}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{d}\cdot\vec{b})\vec{c}\}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$$

$$=\{[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}]\,\vec{b}-[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{b}]\,\vec{c}\}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$$

$$\left[\because \vec{d}\cdot\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}] \text{ तथा } \vec{d}\cdot\vec{b}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b}=[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{b}]=0\right]$$

$$=[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}]\{\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})\} \quad \{\because [\vec{c}\;\vec{c}\;\vec{a}]=0\}$$

$$=[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}][\vec{b}\;\vec{c}\;\vec{a}]=[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}]^2 \qquad \left[\because [\vec{b}\;\vec{c}\;\vec{a}]=[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}]\right]$$

प्रश्नमाला 13.5

1. $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ का मान ज्ञात कीजिए यदि

   (i) $\vec{a}=3\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ तथा $\vec{c}=-\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$

   (ii) $\vec{a}=2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}, \vec{b}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ तथा $\vec{c}=-\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$

2. सिद्ध कीजिए कि $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ यदि

   (i) $\vec{a}=2\hat{i}+5\hat{j}-7\hat{k}, \vec{b}=-3\hat{i}+4\hat{j}+\hat{k}, \vec{c}=-\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}$

   (ii) $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}, \vec{b}=-\hat{i}+\hat{j}+\sqrt{2}\hat{k}, \vec{c}=4\hat{i}-2\hat{j}+\sqrt{3}\hat{k}$

3. सूत्र $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ का सत्यापन कीजिए, जबकि

   (i) $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}, \vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, \vec{c}=\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$

   (ii) $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}, \vec{c}=3\hat{i}+5\hat{j}+2\hat{k}$

4. किसी सदिश $\vec{a}$ के लिए सिद्ध कीजिए कि

$$\hat{i}\times(\vec{a}\times\hat{i})+\hat{j}\times(\vec{a}\times\hat{j})+\hat{k}\times(\vec{a}\times\hat{k})=2\vec{a}$$

5. सिद्ध कीजिए कि

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{0}$$

6. सिद्ध कीजिए कि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ समतलीय है, यदि और केवल यदि $\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a}$ समतलीय हैं।

7. सिद्ध कीजिए कि

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]\vec{c}-[\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{d}]\vec{d}$$

8. दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के परिमाण क्रमशः $\sqrt{3}$ एवं 2 हैं और $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{6}$ है तो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

9. सदिशों $\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ और $3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

10. सदिश $\hat{i}+\hat{j}$ पर सदिश $\hat{i}-\hat{j}$ का प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

11. सदिश $\hat{i}+3\hat{j}+7\hat{k}$ का, सदिश $7\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

12. $(3\vec{a}-5\vec{b})\cdot(2\vec{a}+7\vec{b})$ का मान ज्ञात कीजिए।

13. दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के परिमाण ज्ञात कीजिए, यदि इनके परिमाण समान है और इन के बीच का कोण 60° है तथा इनका अदिश गुणनफल $\frac{1}{2}$ है।

14. यदि एक मात्रक सदिश $\vec{a}$, के लिए $(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}+\vec{a})=12$ हो तो $|\vec{x}|$ का मान ज्ञात कीजिए।

15. यदि $\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}, \vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ और $\vec{c}=3\hat{i}+3\hat{j}$ इस प्रकार है कि $\vec{a}+\lambda\vec{b}, \vec{c}$ पर लंब है, तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

16. यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ मात्रक सदिश इस प्रकार है कि $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ तो $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ का मान ज्ञात कीजिए।

17. यदि किसी त्रिभुज ABC के शीर्ष A, B, C क्रमशः $(1, 2, 3)(-1, 0, 0)(0, 1, 2)$ हैं तो $\angle ABC$ ज्ञात कीजिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\theta$, अतः $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}\,(\vec{a}\neq 0\neq\vec{b})$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}$$

.	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{i}$	1	0	0
$\hat{j}$	0	1	0
$\hat{k}$	0	0	1

2. यदि $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ तथा $\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ तो $\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

3. $\vec{a}\times\vec{b}=(ab\sin\theta)\hat{n}$

$\sin\theta=\dfrac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{ab}$ तथा $\hat{n}=\dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$

उपर्युक्त परिणामों को आकृति के अनुसार पढ़ने पर

$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k},\ \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i},\ \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$

$\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k},\ \hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i},\ \hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$

$\hat{i}\times\hat{i}=\vec{O}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}$

$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{O}\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}\qquad(\vec{a}\neq\vec{O}\neq\vec{b})$

X	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{i}$	0	$\hat{k}$	$\hat{j}$
$\hat{j}$	$-\hat{k}$	0	$\hat{i}$
$\hat{k}$	$\hat{j}$	$-\hat{i}$	0

4. $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ तथा $\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ तो $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

5. समान्तर चतुर्भुज का सदिश क्षेत्रफल $=\vec{a}\times\vec{b}$, जहाँ $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ समान्तर चतुर्भुज की आसन्न भुजाएं है।

6. ΔABC का क्षेत्रफल $=\dfrac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}\right|$, जहाँ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ त्रिभुज के शीर्षों के स्थिति सदिश हैं।

7. तीन बिन्दुओं जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a},\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ है, के संरेख होने का प्रतिबन्ध $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{O}$

8. समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल, जिसके विकर्ण $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ हैं $=\dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$

9. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ के अदिश त्रिक् गुणनफल $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ को $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$ से व्यक्त करते है।

10. यदि $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k},\ \vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k},$

$\vec{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$, तो $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

11. समान्तर षट्फलकी का आयतन $=[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$, (जहाँ सदिश $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ इसकी संगामी कोरों को निरूपित करती है।)

12. चतुष्फलक का आयतन $=\dfrac{1}{6}[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$, जहाँ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ संगामी कोरे हैं।

13. तीन सदिश $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ का सदिश त्रिक् गुणनफल $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$.

14. सदिशों में सदिश गुणन की क्रिया साहचर्य के गुणधर्म का पालन नहीं करती है, अर्थात् $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 13.1

(1) $|\vec{a}| = \sqrt{3}; |\vec{b}| = \sqrt{62}; |\vec{c}| = 1$ (2) कोई दो सदिश (3) कोई दो सदिश (4) $x = 2,\ y = 3$

(5) $-7, 6$ तथा $-7i, 6j$ (6) $-4\hat{j} - \hat{k}$ (7) $\dfrac{\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{6}}$ (8) $\dfrac{(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})}{\sqrt{3}}$

(9) $\dfrac{\hat{i} + \hat{k}}{\sqrt{2}}$ (10) $\dfrac{8(5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{30}}$ (11) $-4\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k} = -2(2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k})$

(12) $\dfrac{1}{\sqrt{14}}, \dfrac{2}{\sqrt{14}}, \dfrac{3}{\sqrt{14}}$ (13) $-\dfrac{1}{3}, \dfrac{-2}{3}, \dfrac{2}{3}$ (14) $\dfrac{-\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}}{3}, -3\hat{i} + 3\hat{k}$ (15) (3, 2, 1)

प्रश्नमाला 13.2

(1) (i) 10 ; (ii) 0 ; (iii) $10\sqrt{3}$ (2) (i) –4 ; (ii) 7 ; (iii) 7 (4) $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{72}{75}\right)$

(5) (i) 3 ; (ii) 3 (6) $\dfrac{2}{7}$ (7) $5\hat{i} - 15\hat{j} + 7\hat{k}$

प्रश्नमाला 13.3

(1) $4\hat{i} - 5\hat{j} + 7\hat{k}$ (2) $\dfrac{\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{3}}$ (6) 16 (7) $-3\hat{i} + 6\hat{j} + 6\hat{k}$ (10) $\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$

प्रश्नमाला 13.4

(2) –7 (5) (i) –4 ; (ii) 1 (8) (i) 30 ; (ii) 14

प्रश्नमाला 13.5

(1) (i) $-2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$; (ii) $8\hat{i} - 19\hat{j} - \hat{k}$

(8) $\dfrac{\pi}{4}$ (9) $\cos^{-1}\left(\dfrac{5}{7}\right)$ (10) 0 (11) $\dfrac{60}{\sqrt{114}}$ (12) $6|\vec{a}|^2 + 11\vec{a}\cdot\vec{b} - 35|\vec{b}|^2$

(13) $|\vec{a}|^2 = 1, |\vec{b}| = 1$ (14) $\sqrt{13}$ (15) 8 (16) $-\dfrac{3}{2}$ (17) $\cos^{-1}\left(\dfrac{10}{\sqrt{102}}\right)$

14

त्रि–विमीय ज्यामिति
(Three Dimensional Geometry)

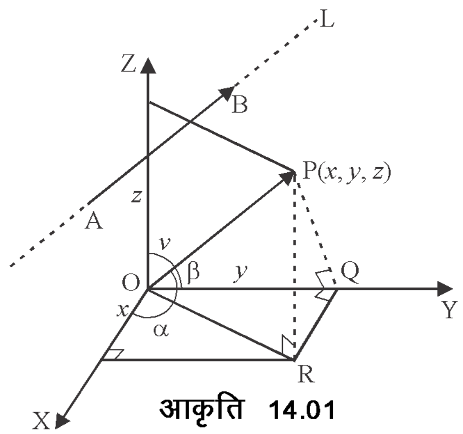
14.01 भूमिका (Introduction)

इस अध्याय में त्रिविम में दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा की दिक्-कोज्याएँ, दिक् अनुपात का अध्ययन करते हुए रेखा के समीकरण एवं उनके गुणधर्मों का अध्ययन करेंगे। त्रिविम में रेखाओं और तलों के समीकरणों को सदिश एवं कार्तीय दोनों ही रूपों में प्रस्तुत करना सीखेंगे। दो रेखाओं, दो तलों व एक रेखा और एक तल के मध्य का कोण ज्ञात करना भी सीखेंगे। दो विषम तलीय रेखाओं के मध्य न्यूनतम दूरी व एक तल की एक बिन्दु से दूरी के विषय में भी विचार विमर्श करेंगे।

14.02 एक रेखा की दिक्–कोज्याएँ (Direction cosines of a line)

किसी रेखा L की दिक् कोज्याओं से हमारा तात्पर्य उस सदिश $\overrightarrow{AB}$ की दिक् कोज्याओं से है जिसका आधार दी गई रेखा L है। माना $\overrightarrow{OP} \| \overrightarrow{AB}$ । यदि $\overrightarrow{OP}$, निर्देशांक अक्षों OX, OY तथा OZ की धनात्मक दिशाओं के साथ क्रमशः कोण α, β तथा γ कोण बनाये तो $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ को सदिश $\overrightarrow{OP}$ की दिक् कोज्याएँ कहते हैं। सदिश $\overrightarrow{OP}$ तथा $\overrightarrow{AB}$ की दिक् कोज्याएँ समान होगी क्योंकि ये सदिश समान्तर है तथा अक्षो के साथ समान कोण बनाते हैं। साधारणतः दिक् कोज्याओं को क्रमशः ℓ, m, n से व्यक्त करते है अर्थात्

$$\ell = \cos\alpha, m = \cos\beta, n = \cos\gamma .$$



आकृति 14.01

टिप्पणी: 1. दिक् कोज्याएँ कभी भी किसी कोष्टक में नहीं लिखी जाती है।

2. सदिश $\overrightarrow{BA}$ निर्देशांक अक्षों OX, OY तथा OZ के साथ क्रमशः कोण $\pi-\alpha, \pi-\beta, \pi-\gamma$ बनाता है अतः $\overrightarrow{BA}$ की दिक्- कोज्याएँ $\cos(\pi-\alpha), \cos(\pi-\beta), \cos(\pi-\gamma)$ अर्थात् $-\ell, -m, -n$ होंगी। अतः यदि ℓ, m, n किसी रेखा की दिक् कोज्याएँ है तो $-\ell, -m, -n$ भी उसी रेखा की दिक् कोज्याएँ होंगी, क्योकि $\overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{BA}$ की आधार रेखा L ही है।

2. x-अक्ष की दिक्-कोज्याएँ; 1, 0, 0
   y-अक्ष की दिक्-कोज्याएँ; 0, 1, 0
   z-अक्ष की दिक्-कोज्याएँ; 0, 0, 1

14.03 रेखा की दिक् कोज्याओं में संबंध (Relation among the direction cosines of a line)

आकृति 14.01 में माना सदिश $\overrightarrow{AB}$ की दिक् कोज्याएँ ℓ, m, n है जिसका आधार रेखा L है। माना $\overrightarrow{OP} \| \overrightarrow{AB}$ तथा P के निर्देशांक (x, y, z) हैं बिन्दु P से Y अक्ष पर लंब PQ खीचिएं।

यदि $\quad OP = r,$ तो $\cos\beta = y - r$

$\Rightarrow \quad y = r\cos\beta = mr$ इसी प्रकार $z = nr$ तथा $x = \ell r$

पुनः
$$OP = r$$
$$\Rightarrow \quad (OP)^2 = r^2$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$
$$\Rightarrow \quad r^2\left(\ell^2 + m^2 + n^2\right) = r^2$$
$$\Rightarrow \quad \ell^2 + m^2 + n^2 = 1$$

14.04 रेखा के दिक्–अनुपात (Direction ratios of a line)

एक रेखा के दिक् कोज्याओं के समानुपाती संख्याओं को रेखा के दिक् अनुपात कहते हैं। यदि एक रेखा के दिक् अनुपात a, b, c और दिक् कोज्याएँ ℓ, m, n हो, तो

$$\frac{\ell}{a}=\frac{m}{b}=\frac{n}{c}$$

किसी रेखा के दिक् अनुपात वास्तव में उस सदिश के दिक् अनुपात होते है जिसका आधार वह रेखा है।

टिप्पणी:

1. यदि रेखा के दिक् अनुपात a, b, c है, तो $ka, kb, kc,\ k \neq 0$ भी दिक् अनुपातों का एक समूह है। अतः किसी एक रेखा के दिक् अनुपातों के असंख्य समूह हो सकते है।
2. किसी सदिश की दिक् कोज्याओं ℓ, m, n के लिए $\ell^2+m^2+n^2=1$ परन्तु दिक् अनुपात a, b, c के लिए $a^2+b^2+c^2 \neq 1$, जब तक की a, b, c स्वंय दिक् कोज्याएँ ही न हो जाएं।
3. $\frac{l}{a}=\frac{m}{b}=\frac{n}{c}=k$ (माना)

   अतः $\ell = ak, m = bk, n = ck$

   परन्तु $\ell^2+m^2+n^2=1$

   $\Rightarrow \quad k^2\left(a^2+b^2+c^2\right)=1$

   $\Rightarrow \quad k=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

   अतः $\ell=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}; m=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ n=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

   अतः किसी रेखा के दिक् अनुपात ज्ञात हो, तो उसकी दिक् कोज्याएँ ज्ञात कर सकते है।
4. माना $\vec{r}=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$

   अतः $\hat{r}=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)i+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)j+\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)k$

   $=\ell\hat{i}+m\hat{j}+n\hat{k}$

   जहाँ $\ell=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}; m=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ n=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

   अतः सदिश $\vec{r}$ में $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ के गुणांक उस सदिश के दिक् अनुपात होते है।

14.05 दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा की दिक्–कोज्याएँ (Direction cosines of a line passing through two points)

माना दो बिन्दुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ से जाने वाली रेखा L है।

अतः $\overrightarrow{PQ}=$ (Q का स्थिति सदिश) – (P का स्थिति सदिश)

$$=\left(x_2\hat{i}+y_2\hat{j}+z_2\hat{k}\right)-\left(x_1\hat{i}+y_1\hat{j}+z_1\hat{k}\right)$$

$$=(x_2-x_1)i+(y_2-y_1)j+(z_2-z_1)k$$

अतः $\overrightarrow{PQ}$ के दिक्–अनुपात $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ होगें तथा इसकी दिक् कोज्याएँ

$$\frac{x_2 - x_1}{|\overrightarrow{PQ}|}, \frac{y_2 - y_1}{|\overrightarrow{PQ}|}, \frac{z_2 - z_1}{|\overrightarrow{PQ}|},$$

जहाँ $$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. एक रेखा X तथा Y–अक्षों की धनात्मक दिशाओं के साथ क्रमशः 30° व 60° के कोण बनाती है। यह रेखा Z–अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ कितना कोण बनायेगी?

हलः माना रेखा, Z–अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ γ कोण बनाती है। इस प्रकार यह रेखा अक्षों की धनात्मक दिशाओं के साथ 30°, 60° तथा γ कोण बनाती है।

$\therefore$ इस रेखा की दिक्–कोज्याएँ $\cos 30°$, $\cos 60°$ तथा $\cos\gamma$ अर्थात् $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$ तथा $\cos\gamma$ है।

हम जानते हैं कि $$\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$$

$\therefore$ $$\left(\sqrt{3}/2\right)^2 + (1/2)^2 + (\cos\gamma)^2 = 1$$

या $$\cos^2\gamma = 1 - 1$$

$\Rightarrow$ $$\cos^2\gamma = 0$$

$\Rightarrow$ $$\cos\gamma = 0$$

या $$\gamma = 90°$$

अतः यह रेखा Z–अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ 90° का कोण बनाती है अर्थात् यह रेखा XY समतल में स्थित है।

उदाहरण-2. यदि एक सदिश OX, OY तथा OZ अक्षों के साथ क्रमशः α, β तथा γ कोण बनाता है तो सिद्ध कीजिए किः

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$$

हलः माना दिये सदिश की दिक् कोज्याएं ℓ, m, n हैं।

तब $\cos\alpha = \ell$, $\cos\beta = m$ तथा $\cos\gamma = n$

हम जानते हैं कि $\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$

$\therefore$ $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$\Rightarrow$ $$\left(1 - \sin^2\alpha\right) + \left(1 - \sin^2\beta\right) + \left(1 - \sin^2\gamma\right) = 1$$

$\Rightarrow$ $$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$$

उदाहरण-3. बिन्दुओं (1, 0, 0) तथा (0, 1, 1) को जोड़ने वाली रेखा की दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए।

हलः (1, 0, 0) तथा (0, 1, 1) को जोड़ने वाली रेखाओं के दिक्–अनुपात हैंः

$$0 - 1, 1 - 0, 1 - 0 = -1, 1, 1$$

अतः दिक्–कोसाइन हैंः

$$\mp\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

उदाहरण-4. दर्शाइए कि बिन्दु A(2, 3, 4), B(–1, 2, –3) तथा C(–4, 1, –10) संरेख हैं।

हल: A तथा B को मिलाने वाली रेखा के दिक्–अनुपात हैं:

$-1-2,\ 2-3$ तथा $-3-4$

अर्थात् $-3, -1$ तथा -7

B तथा C को मिलाने वाली रेखा के दिक्–अनुपात हैं:

$-4+1,\ 1-2$ तथा $-10+3$

अर्थात् $-3, -1$ तथा -7

पूर्णतः स्पष्ट है कि AB तथा BC के दिक्–अनुपात समानुपाती है।

अतः $AB \parallel BC$

परन्तु AB तथा BC में B उभयनिष्ठ है।

$\therefore$ A, B तथा C संरेख हैं।

उदाहरण-5. यदि एक रेखा X, Y और Z–अक्ष के साथ क्रमशः 90°, 135° तथा 45° के कोण बनाती है तो इस रेखा के दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए।

हल: दिक् कोण हैं : $90^\circ,\ 135^\circ,\ 45^\circ$

$\therefore$ दिक्–कोसाइन हैं:

$$\ell = \cos 90^o = 0,\ m = \cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ n = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

अतः दी रेखा के दिक्–कोसाइन है:

$$0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

प्रश्नमाला 14.1

1. एक रेखा के दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए जो निर्देशाक्षों के साथ समान कोण बनाती हैं।
2. दो बिन्दुओं (4, 2, 3) तथा (4, 5, 7) को मिलाने वाली सरल रेखा की दिक्–कोज्याएँ ज्ञात कीजिए।
3. यदि एक रेखा के दिक्–अनुपात 2, –1, –2 हैं, तो इसकी दिक्-कोज्याएँ ज्ञात कीजिए।
4. एक सदिश $\vec{r}$, X, Y तथा Z–अक्षों के साथ क्रमशः $45^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ के कोण बनाता है। यदि सदिश $\vec{r}$ का परिमाण 2 इकाई है तो $\vec{r}$ ज्ञात कीजिए।

14.06 अंतरिक्ष में रेखा का समीकरण (Equation of a line in space)

एक रेखा अद्वितीयतः निर्धारित होती है, यदि

(i) यह दिए बिन्दु से दी गई दिशा से होकर जाती है, या

(ii) यह दो बिन्दुओं से होकर जाती है।

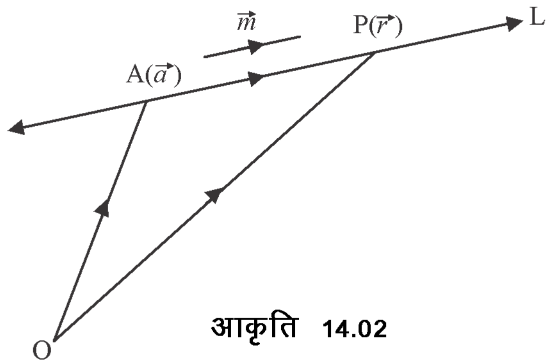
(i) दिए गए बिन्दु $A(\vec{a})$ से जोने वाली तथा दिए गए सदिश $\vec{m}$ के समान्तर रेखा का समीकरण (Equation of a line through a given point A$(\vec{a})$ and parallel to a given vector $\vec{m}$)

माना वह रेखा L है जिसका समीकरण ज्ञात करना है। माना यह रेखा सदिश $\vec{m}$ के समान्तर है और बिन्दु A से गुजरती है जिसका स्थिति सदिश $\vec{a}$ है। माना O मूल बिन्दु है। अतः $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$

माना रेखा L पर एक स्वेच्छ बिन्दु P है जिसका स्थिति सदिश $\vec{r}$ है,

तब $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$

स्पष्टतः $\overrightarrow{AP} \parallel \vec{m}$



आकृति 14.02

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AP} = \lambda \vec{m}$

$\Rightarrow \quad$ (P का स्थिति सदिश) $-$ (A का स्थिति सदिश) $= \lambda \vec{m}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \lambda \vec{m}$

$\Rightarrow \quad \vec{r} - \vec{a} = \lambda \vec{m}$

$\Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{m}$

स्पष्टतः λ के प्रत्येक मान के लिए यह समीकरण रेखा के किसी बिन्दु की स्थिति प्रदान करता है।
अतः रेखा का सदिश समीकरण है

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{m} \qquad (1)$$

कार्तीय रूप (Cartesian form)

माना रेखा बिन्दु $A(x_1, y_1, z_1)$ से गुजरती है तथा इसके दिक् अनुपात a, b, c है। माना रेखा पर किसी बिन्दु P के निर्देशांक (x, y, z) है। तब,

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$

चूंकि दी गई रेखा के दिक् अनुपात a, b, c है और यह सदिश $\vec{m}$ के समान्तर है, अतः $\vec{m} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$
अब, रेखा का सदिश समीकरण है

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{m}$$

$\Rightarrow \quad x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = \left(x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}\right) + \lambda\left(a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}\right)$

$\Rightarrow \quad x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = (x_1 + \lambda a)i + (y_1 + \lambda b)j + (z_1 + \lambda c)$

$\Rightarrow \quad x = x_1 + \lambda a; \quad y = y_1 + \lambda b; \quad z = z_1 + \lambda c$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c} = \lambda$

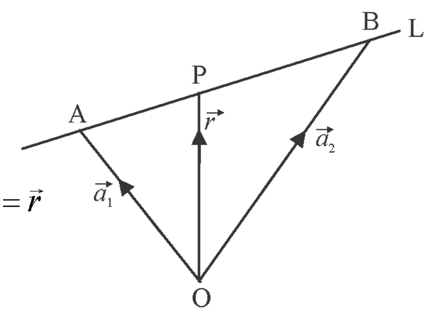
अतः रेखा जिसके दिक् अनुपात a, b, c है और जो $A(x_1, y_1, z_1)$ से गुजरती है, का समीकरण है

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

(ii) दो दिए गए बिन्दुओं से जाने वाली रेखा का समीकरण (Equation of a line passing through two given points)

सदिश रूप (Vector form)

माना वह रेखा L है जिसका समीकरण ज्ञात करना है। माना यह रेखा दो बिन्दुओं A तथा B से गुजरती है जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}_1$ तथा $\vec{a}_2$ है। यदि O मूल बिन्दु हो, तो $\overrightarrow{OA} = \vec{a}_1$ तथा $\overrightarrow{OB} = \vec{a}_2$



आकृति 14.03

$\therefore \quad \overrightarrow{AB} =$ (B का स्थिति सदिश) $-$ (A का स्थिति सदिश)

$\qquad = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$

माना रेखा L पर एक स्वेच्छ बिन्दु P है जिसका स्थिति सदिश $\vec{r}$ है, तब $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$

$\therefore \quad \overrightarrow{AP} = \vec{r} - \vec{a}_1$

चूंकि $\overrightarrow{AP}$ और $\overrightarrow{AB}$ संरेखीय सदिश है, अतः

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AP} = \lambda\left(\overrightarrow{AB}\right), \lambda \in R$

$$\Rightarrow \qquad \vec{r} - \vec{a}_1 = \lambda(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)$$

अतः रेखा L का सदिश समीकरण जो बिन्दु $A(\vec{a}_1)$ तथा $A(\vec{a}_2)$ से गुजरती है

$$\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \qquad (2)$$

कार्तीय रूप (Carte sian form)

माना रेखा L, दो बिन्दुओं $A(x_1, y_1, z_1)$ तथा $B(x_2, y_2, z_2)$ से गुजरती है। माना रेखा पर किसी स्वेच्छ बिन्दु P के निर्देशांक (x, y, z) है।

चूँकि $\overrightarrow{AP}$ और $\overrightarrow{AB}$ संरेखीय है, अतः

$$\Rightarrow \qquad (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}) = \lambda\{(x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})\}$$

$$\Rightarrow \qquad (x - x_1)\hat{i} + (y - y_1)\hat{j} + (z - z_1)\hat{k} = \lambda(x_2 - x_1)\hat{i} + \lambda(y_2 - y_1)\hat{j} + \lambda(z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\Rightarrow \qquad x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1);\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1);\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

जो कि दो दिए गए बिन्दुओं से जाने वाली रेखा का समीकरण है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-6. बिन्दु $(5, 2, -4)$ से जाने वाली तथा सदिश $3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$ के समांतर रेखा का सदिश तथा कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए।

हलः हमें ज्ञात है, कि

$$\vec{a} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} \text{ और } \vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$$

यदि रेखा पर स्थिति किसी स्वेच्छ बिन्दु $P(x, y, z)$ का स्थिति सदिश $\vec{r}$ है तो अनुच्छेद 14.06 के (1) के अनुसार रेखा का सदिश समीकरण

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4k + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k})$$

$$= (5 + 3\lambda)\hat{i} + (2 + 2\lambda)\hat{j} + (-4 - 8\lambda)\hat{k}$$

तुलना करने पर $\quad \dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+4}{-8} = \lambda$

अतः अभीष्ट कार्तीय रूप में रेखा का समीकरण $\dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+4}{-8}$ है।

उदाहरण-7. बिन्दुओं $(-1, 0, 2)$ और $(3, 4, 6)$ से होकर जाने वाली रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

हलः मान लीजिए बिन्दुओं A$(-1, 0, 2)$ और B $(3, 4, 6)$ के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}$ व $\vec{b}$ हैं।

तब $\qquad \vec{a} = -\hat{i} + 2\hat{k}$

और $\qquad \vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$

इसलिए $\qquad \vec{b} - \vec{a} = 4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$

मान लीजिए कि रेखा पर स्थित किसी स्वेच्छ बिन्दु P का स्थिति सदिश $\vec{r}$ है। अतः रेखा का सदिश समीकरण

$$\vec{r} = -\hat{i} + 2\hat{k} + \lambda(4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k})$$ [अनुच्छेद 14.06 के (2) से]

उदाहरण-8. उस रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु A (2, –1, 1) से गुजरती है और जो बिन्दुओं B (–1, 4, 1) तथा C (1, 2, 2) को मिलाने वाली रेखा के समान्तर है। रेखा का कार्तीय समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

हल: दी गई रेखा का सदिश समीकरण के लिए

B का स्थिति सदिश $= -\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$

और C का स्थिति सदिश $= \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

$\therefore$ $\vec{BC} = C$ का स्थिति सदिश – B का स्थिति सदिश

$$= \left(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}\right) - \left(-\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}\right) = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

A का स्थिति सदिश है: $\vec{r}_1 = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\therefore$ दी गई रेखा का सदिश समीकरण

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda(\overrightarrow{BC})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r} = \left(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}\right) + \lambda\left(2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}\right) \qquad (1)$$

दी गई रेखा का कार्तीय समीकरण

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ लेने पर, (i) से,

$$\left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right) = \left(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}\right) + \lambda\left(2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right) = (2 + 2\lambda)\hat{i} + (-1 - 2\lambda)\hat{j} + (1 + \lambda)\hat{k}$$

तुलना करने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{1} = \lambda$$

अतः रेखा का कार्तीय रूप में वांछित समीकरण, $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$ है।

उदाहरण-9. एक रेखा का कार्तीय समीकरण $6x - 2 = 3y + 1 = 2z - 2$ है। (a) रेखा के दिक्–अनुपात, (b) उस रेखा का कार्तीय और सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो (2, –1, –1) से गुजरने वाली तथा दी गई रेखा के समान्तर हो।

हल: रेखा का समीकरण है:

$$6x - 2 = 3y + 1 = 2z - 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x - (1/3)}{1/6} = \frac{y + (1/3)}{1/3} = \frac{z-1}{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x - (1/3)}{1} = \frac{y + (1/3)}{2} = \frac{z-1}{3}$$

(a) अतः दी गई रेखा के दिक्–अनुपात 1, 2, 3 हैं।

(b) दी गई रेखा के समान्तर रेखा के दिक्–अनुपात 1, 2, 3 हैं।

$\therefore$ उस रेखा का कार्तीय समीकरण जो (2, –1, –1) से गुजरती है तथा दी गई रेखा के समान्तर है

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{3}$$

बिन्दु A(2, –1, –1) से गुजरने वाली और सदिश $\vec{m} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ के समान्तर रेखा के समीकरण के लिए, A का स्थिति सदिश

$$\vec{r}_1 = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$$

$\therefore$ वांछित रेखा का सदिश समीकरण

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\vec{m}$$

अर्थात् $$\vec{r} = \left(2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}\right) + \lambda\left(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}\right)$$

प्रश्नमाला 14.2

1. बिन्दु (5, 7, 9) से गुजरने वाली उन सरल रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए, जो निम्न अक्षों के समान्तर है:
   (i) X–अक्ष (ii) Y–अक्ष (iii) Z–अक्ष
2. सरल रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो एक बिन्दु जिसका स्थिति सदिश $2i - 3j + 4k$ है, से गुजरती है, तथा सदिश $3i + 4j - 5k$ के समान्तर है। इसका कार्तीय रूप में रूपान्तरण भी ज्ञात कीजिए।
3. सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो सदिश $2i - j + 3k$ के समान्तर है और बिन्दु (5, –2, 4) से गुजरती है।
4. उस रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (2, –1, 1) से गुजरती है तथा रेखा $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z-2}{-3}$ के समान्तर है।
5. एक रेखा का कार्तीय समीकरण
   $$\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-6}{2}$$
   है तो रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।
6. उस रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो (1, 2, 3) से जाती है तथा $-\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{7} = \frac{2z-6}{3}$ के समान्तर है।
7. समानतर चतुर्भुज ABCD के तीन शीर्षों के निर्देशांक A(4, 5, 10), B(2, 3, 4) और C(1, 2, -1) हैं। AB और BC के सदिश और कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए। D के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।
8. एक रेखा का कार्तीय समीकरण $3x + 1 = 6y - 2 = 1 - z$ है। वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जहां से यह गुजरती है, साथ ही इसके दिक्–अनुपात तथा सदिश समीकरण भी ज्ञात कीजिए।
9. बिन्दु (1, 2, 3) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो सदिश $\left(3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}\right)$ के समान्तर हैं।
10. बिन्दु जिसका स्थिति सदिश $2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ है, से गुजरने व सदिश $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ की दिशा में जाने वाली रेखा का सदिश और कार्तीय रूपों में समीकरण ज्ञात कीजिए।
11. एक रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (–2, 4, –5) से जाती है और $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+8}{6}$ के समान्तर है।
12. एक रेखा का कार्तीय समीकरण $\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-6}{2}$ है, इसका सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।
13. मूलबिन्दु और (5, –2, 3) से जाने वाली रेखा का सदिश तथा कार्तीय रूपों में समीकरण ज्ञात कीजिए।
14. बिन्दुओं (3, –2, –5) और (3, –2, 6) से गुजरने वाली रेखा का सदिश तथा कार्तीय रूपों में समीकरण ज्ञात कीजिए।

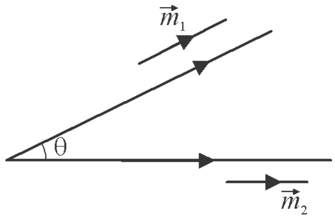
14.07 दो रेखाओं के मध्य कोण (Angle between two lines)

सदिश रूपः

माना दो रेखाओं के सदिश समीकरण निम्न है

$$\vec{r}=\vec{a}_1+\lambda\vec{m}_1,\ \lambda\in R \text{ तथा } \vec{r}=\vec{a}_2+\mu\vec{m}_2,\ \mu\in R$$

यदि दोनों रेखाओं के मध्य कोण θ हो, तो आकृति 14.04 से स्पष्ट है कि सदिश $\vec{m}_1$ तथा सदिश $\vec{m}_2$ में मध्य कोण भी θ ही है। अतः $\cos\theta=\dfrac{\vec{m}_1\cdot\vec{m}_2}{|\vec{m}_1||\vec{m}_2|}$



आकृति 14.04

कार्तीय रूप

माना दो रेखाओं के कार्तीय समीकरण निम्न है–

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1} \text{ तथा } \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$$

अतः $\vec{m}_1=a_1\hat{i}+b_1\hat{j}+c_1\hat{k}$ तथा $\vec{m}_2=a_2\hat{i}+b_2\hat{j}+c_2\hat{k}$

परन्तु $$\cos\theta=\frac{\vec{m}_1\cdot\vec{m}_2}{|\vec{m}_1||\vec{m}_2|}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

टिप्पणीः

1. यदि रेखाओं की दिक्–कोज्याएँ क्रमशः ℓ_1,m_1,n_1 तथा ℓ_2,m_2,n_2 हो और उनके मध्य कोण θ हो, तो $\cos\theta=\ell_1\ell_2+m_1m_2+n_1n_2$
2. यदि दोनों रेखाऐं लम्बवत् हो, तो $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$ या $\ell_1\ell_2+m_1m_2+n_1n_2=0$
3. यदि दोनों रेखाएं समान्तर हो, तो $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ या $\dfrac{\ell_1}{\ell_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-10. रेखाओं $\dfrac{5-x}{3}=\dfrac{y+3}{-4},\ \dfrac{z-7}{0}$ और $\dfrac{x}{1}=\dfrac{1-y}{2}=\dfrac{z-6}{2}$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

हलः दी गई रेखाएँ

$$\frac{x-5}{-3}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z-7}{0} \qquad (1)$$

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-6}{2} \qquad (2)$$

माना (1) और (2) के समान्तर सदिश क्रमशः $\vec{m}_1$ और $\vec{m}_2$ है, तब $\vec{m}_1=-3\hat{i}-4\hat{j}+0k$ तथा $\vec{m}_2=\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ हैं। माना $\vec{m}_1$ और $\vec{m}_2$ के मध्य का कोण θ है, तब

$$\cos\theta=\frac{\vec{m}_1\cdot\vec{m}_2}{|\vec{m}_1||\vec{m}_2|}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta=\frac{\{(-3)\times1+(-4)\times(-2)+0\times2\}}{\left\{\sqrt{(-3)^2+(-4)^2+0^2}\right\}\left\{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}\right\}}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \theta=\cos^{-1}(1/3).$$

उदाहरण-11. दी गई रेखाओं

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda\left(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}\right) \quad \text{और} \quad \vec{r} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + \mu\left(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}\right)$$

के मध्य कोण ज्ञात कीजिए

हल: रेखाओं के समीकरण से $\vec{b_1} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ और $\vec{b_2} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$

दोनों रेखाओं के मध्य कोण θ है, इसलिए

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}\right| = \left|\frac{\left(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}\right)\cdot\left(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}\right)}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{9+4+36}}\right|$$

$$= \left|\frac{3+4+12}{3\times 7}\right| = \frac{19}{21}$$

अतः $\qquad \theta = \cos^{-1}(19/21)$

उदाहरण-12. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(-1, 3, -2)$ से गुजरती हो और निम्न रेखाओं पर लम्ब हो:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \text{ और } \frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{5}$$

हल: माना वांछित रेखा के दिक्–अनुपात a, b, c हैं। चूंकि यह दी गई दो रेखाओं पर लम्ब है, अतः वज्रगुणन द्वारा

$$a + 2b + 3c = 0 \qquad (1)$$

और $\qquad -3a + 2b + 5c = 0 \qquad (2)$

(1) और (2) को वज्रगुणन द्वारा हल करने पर,

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{-14} = \frac{c}{8}$$

या $\qquad \frac{a}{2} = \frac{b}{-7} = \frac{c}{4} = k$ (माना)

अतः वांछित रेखा $(-1, 3, -2)$ से गुजरती है तथा इसके दिक्–अनुपात $2, -7, 4$ हैं। अतः इसका समीकरण है:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-7} = \frac{z+2}{4}$$

प्रश्नमाला 14.3

1. निम्नलिखित रेखाओं के मध्य का कोण ज्ञात कीजिए:

$$\vec{r} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k} + \lambda\left(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}\right) \text{ और } \vec{r} = 7\hat{i} - 6\hat{j} + \mu\left(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}\right)$$

2. निम्नलिखित रेखाओं के मध्य का कोण ज्ञात कीजिए:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} \text{ और } \frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{8}$$

3. दर्शाइए कि बिन्दुओं $(1, -1, 2), (3, 4, -2)$ से होकर जाने वाली रेखा बिंदुओं $(0, 3, 2)$ और $(3, 5, 6)$ से जाने वाली रेखा पर लंब है।

4. यदि रेखाएँ $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2k} = \frac{z-3}{2}$ और $\frac{x-1}{3k} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-5}$ परस्पर लंब हों तो k का मान ज्ञात कीजिए।

5. बिन्दु $(1, 2, -4)$ से जाने वाली और दोनों रेखाओं $\frac{x-8}{3} = \frac{y+19}{-16} = \frac{z-10}{7}$ और $\frac{x-15}{3} = \frac{y-29}{8} = \frac{z-5}{-5}$ पर लंब रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

6. उस रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(-2, 4, -5)$ से जाती है और $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+8}{6}$ के समांतर है।

14.08 दो रेखाओं का प्रतिच्छेदन (Intersection of two lines)

अंतरिक्ष में यदि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती है, तो उनका एक उभयनिष्ठ बिन्दु अवश्य होगा और उनके मध्य की न्यूनतम दूरी शून्य होगी। इनका प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात करने के लिए निम्न क्रिया विधियों का प्रयोग किया जा सकता है।

(1) सदिश रूप में रेखाओं के समीकरण:

माना दो रेखाएँ $\vec{r} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) + \lambda(m_1\hat{i} + m_2\hat{j} + m_3\hat{k})$ (i)

तथा $\vec{r} = (a'_1\hat{i} + a'_2\hat{j} + a'_3\hat{k}) + \mu(m'_1\hat{i} + m'_2\hat{j} + m'_3\hat{k})$ हैं। (ii)

(a) $\because$ रेखाएँ प्रतिच्छेद करती है अतः

$$(a_1 i + a_2 j + a_3 k) + \lambda(m_1\hat{i} + m_2\hat{j} + m_3\hat{k}) = \vec{r} = (a'_1\hat{i} + a'_2\hat{j} + a'_3\hat{k}) + \mu(m'_1\hat{i} + m'_2\hat{j} + m'_3\hat{k})$$

तुलना करने पर

$$a_1 + \lambda m_1 = a'_1 + \mu m'_1;\quad a_2 + \lambda m_2 = a'_2 + \mu m'_2;\quad a_3 + \lambda m_3 = a'_3 + \mu m'_3$$

(b) किन्ही दो समीकरणों को हल कर λ व μ के मान ज्ञात करते हैं। यदि ये मान तृतीय समीकरण को संतुष्ट करते हैं तो रेखाएँ प्रतिच्छेद करती है अन्यथा नहीं।

(c) प्रतिच्छेद बिन्दु का स्थिति सदिश ज्ञात करने के लिए λ, μ के मान (i) या (ii) में रखे।

(2) कार्तीय रूप में रेखाओं के समीकरण:

माना रेखाएँ $\dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{y - y_1}{b_1} = \dfrac{z - z_1}{c_1} = r_1$ (माना) (i)

तथा $\dfrac{x - x_2}{a_2} = \dfrac{y - y_2}{b_2} = \dfrac{z - z_2}{c_2} = r_2$ (माना) है। (ii)

(a) (i) तथा (ii) पर व्यापक बिन्दु

$$(a_1 r_1 + x_1,\ b_1 r_1 + y_1,\ c_1 r_1 + z_1) \text{ तथा } (a_2 r_2 + x_2,\ b_2 r_2 + y_2,\ c_2 r_2 + z_2) \text{ लिखे।}$$

$\because$ रेखाएँ प्रतिच्छेद करती है, अतः उनके प्रतिच्छेद बिन्दु के लिए,

$$a_1 r_1 + x_1 = a_2 r_2 + x_2;\quad b_1 r_1 + y_1 = b_2 r_2 + y_2 \text{ तथा } c_1 r_1 + z_1 = c_2 r_2 + z_2$$

(b) किन्हीं दो समीकरण को सरल कर r_1 व r_2 का मान ज्ञात करें। यदि r_1 व r_2 के मान तृतीय समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं तो रेखाएं प्रतिच्छेद करती है अन्यथा नहीं।

(b) r_1 व r_2 का मान व्यापक बिन्दु में रखने पर प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक प्राप्त होंगे।

इन विधियों का अध्ययन निम्न दृष्टांतीय उदाहरणों की सहायता से किया जा सकता है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-13. सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z+1}{7} \quad \text{और} \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+10}{8}$$

प्रतिच्छेद करती है। इनके प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

हल: रेखा $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+3}{-4} = \dfrac{z+1}{7} = r_1$ (माना)

पर किसी बिन्दु के निर्देशांक $(r_1 + 4, -4r_1 - 3, 7r_1 - 1)$ हैं। इसी प्रकार रेखा

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+10}{8} = r_2 \text{ (माना)}$$

पर किसी बिन्दु के निर्देशांक $(2r_2 + 1, -3r_2 - 1, 8r_2 - 10)$ हैं।

ये रेखाएं परस्पर एक दूसरे को प्रतिच्छेद करेगी, यदि दोनों रेखाओं पर एक बिन्दु उभयनिष्ठ हो, जिसके लिए निम्न समीकरण संतुष्ट होने चाहिए। अर्थात्

$$r_1 + 4 = 2r_2 + 1 \quad (1)$$

$$-4r_1 - 3 = -3r_2 - 1 \quad (2)$$

$$7r_1 - 1 = 8r_2 - 10 \quad (3)$$

समीकरण (1) व (2) को हल करने पर $r_1 = 1,\ r_2 = 2,$ जो स्पष्टतः समीकरण (3) को भी संतुष्ट करते हैं। अतः दोनों रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती है, तथा प्रतिच्छेदन बिन्दु के निर्देशांक (5, –7, 6) हैं।

उदाहरण-14. सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ

$$\vec{r} = (i + j - k) + \lambda(3i - j) \text{ और } \vec{r} = (4i - k) + \mu(2i + 3k)$$

प्रतिच्छेद करती हैं। प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

हल: यदि रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं तो प्रतिच्छेद बिन्दु का स्थिति सदिश (माना $\vec{r}$) दोनों रेखाओं के समीकरणों को संतुष्ट करेगा। अतः दी गई रेखाओं के समीकरणों से

$$(i + j - k) + \lambda(3i - j) = (4i - k) + \mu(2i + 3k)$$

$$1 + 3\lambda = 4 + 2\mu \quad \Rightarrow \quad 3\lambda - 2\mu = 3 \quad (1)$$

$$1 - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 \quad (2)$$

$$-1 = -1 + 3\mu \quad \Rightarrow \quad \mu = 0 \quad (3)$$

(i, j, k गुणांकों की तुलना करने पर)

समीकरण (2) व (3) से $\lambda = 1,\ \mu = 0$ जो समीकरण (1) को भी संतुष्ट करते हैं, अतः दी गई रेखाएँ परस्पर काटती है। $\lambda = 1$ समीकरण $\vec{r} = (i + j - k) + \lambda(3i - j)$ में रखने पर प्रतिच्छेद बिन्दु का स्थिति सदिश होगा।

$$\vec{r} = 4i + 0j - k$$

अतः प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक (4, 0, –1) होंगे।

उदाहरण-15. दिखाइए कि रेखाएँ

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{5} \quad \text{और} \quad \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-2}$$

एक–दूसरे को प्रतिच्छेद नहीं करती हैं।

हल: दी गई रेखाएँ हैं:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{5} = \lambda \quad (1)$$

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-2} = \mu \quad (2)$$

$P(3\lambda + 1,\ 2\lambda - 1,\ 5\lambda + 1)$, (1) पर कोई बिन्दु है तथा $Q(4\mu + 2,\ 3\mu + 1,\ -2\mu - 1)$, (2) पर कोई बिन्दु है। यदि रेखाएँ (1) और (2) प्रतिच्छेद करती हैं, तब P और Q को λ तथा μ के कुछ मान के लिए अवश्य समाहित होना चाहिए।

अर्थात् $\quad 3\lambda + 1 = 4\mu + 2 \quad ; \quad 2\lambda - 1 = 3\mu + 1 \quad ; \quad 5\lambda + 1 = -2\mu - 1$

$$\Leftrightarrow \quad 3\lambda - 4\mu = 1 \quad (3)$$

$$2\lambda - 3\mu = 2 \quad (4)$$

$$5\lambda + 2\mu = -2 \quad (5)$$

(3) और (4) को हल करने पर, $\lambda = -5$ और $\mu = -4$.

लेकिन λ और μ के मान (5) को सन्तुष्ट नहीं करते हैं। अतः दी गई रेखाएँ प्रतिच्छेद नहीं करती हैं।

14.09 एक रेखा से एक बिन्दु की लम्बवत दूरी (Perpendicular distance of a point from a line)

सदिश रूप: स्थिति सदिश $\vec{\alpha}$ वाले बिन्दु से रेखा $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ पर डाले लम्ब की लम्बाई ज्ञात करना:

माना $P(\vec{\alpha})$ बिन्दु से दी गयी रेखा पर डाले लम्ब का पाद L है।

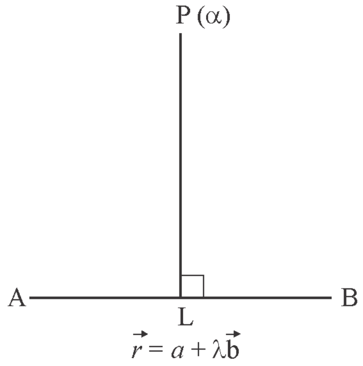
$\because$ $\vec{r}$ रेखा पर स्वेच्छ बिन्दु है अतः माना बिन्दु L का स्थिति सदिश $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ है।

$\therefore$ $\overrightarrow{PL} = L$ का स्थिति सदिश $-$ P का स्थिति सदिश

$$= \vec{a} + \lambda\vec{b} - \vec{\alpha}$$

$$= (\vec{a} - \vec{\alpha}) + \lambda\vec{b}$$

$\because$ सदिश $\overrightarrow{PL}$ सदिश $\vec{b}$ के समान्तर रेखा के लम्बवत है अतः



आकृति 14.05

$$\overrightarrow{PL} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\left\{(\vec{a} - \vec{\alpha}) + \lambda\vec{b}\right\} \cdot \vec{b} = 0$$

$$(\vec{a} - \vec{\alpha}) \cdot \vec{b} + \lambda |\vec{b}|^2 = 0$$

$$\lambda = -\frac{(\vec{a} - \vec{\alpha}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

$\therefore$ L का स्थिति सदिश

$$= \vec{a} + \lambda\vec{b}$$

$$= \vec{a} - \left(\frac{(\vec{a} - \vec{\alpha}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}$$

$\therefore$ $\overrightarrow{PL}$ का समीकरण

$$\vec{r} = \vec{\alpha} + \mu\left[\left\{\vec{a} - \left(\frac{(\vec{a} - \vec{\alpha}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}\right\} - \alpha\right]$$

$$= \vec{\alpha} + \mu\left[(a - \vec{\alpha}) - \left\{\frac{(\vec{a} - \vec{\alpha}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right\}\vec{b}\right]$$

$\overrightarrow{PL}$ का परिमाण PL की लम्बाई है।

कार्तीय रूप: बिन्दु $P(\alpha, \beta, \gamma)$ से रेखा $\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$ डाले लम्ब की लम्बाई ज्ञात करना:

बिन्दु $P(\alpha, \beta, \gamma)$ से दी रेखा $\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$ पर डाले गये लम्ब का पाद L है।

माना L के निर्देशांक $(x_1 + a\lambda,\ y_1 + b\lambda,\ z_1 + c\lambda)$ है।

$\therefore$ PL के दिक् अनुपात $x_1 + a\lambda - \alpha,\ y_1 + b\lambda - \beta$ तथा $z_1 + c\lambda - \gamma$ है।

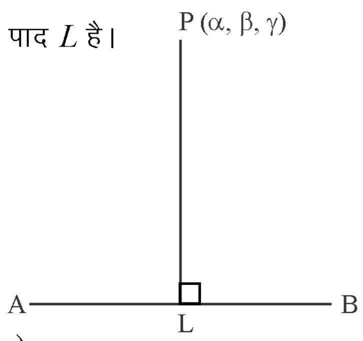
रेखा AB के दिक् अनुपात a, b, c है।

$\because$ PL व AB परस्पर लम्बवत है, अतः

$$(x_1 + a\lambda - \alpha)a + (y_1 + b\lambda - \beta)b + (z_1 + c\lambda - \gamma)c = 0$$

$\Rightarrow$

$$\lambda = \frac{a(\alpha - x_1) + b(\beta - y_1) + c(\gamma - z_1)}{a^2 + b^2 + c^2}$$



आकृति 14.06

λ का मान L के निर्देशांक में रखने पर हमें L के वास्तविक निर्देशांक प्राप्त होंगे। अब दूरी सूत्र का प्रयोग कर PL की दूरी ज्ञात करते है।

विधि को निम्न दृष्टांतीय उदाहरण से समझा जा सकता है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-16. बिन्दु (1, 2, 3) से रेखा $\frac{x-6}{3}=\frac{y-7}{2}=\frac{z-7}{-2}$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना बिन्दु P (1, 2, 3) से दी गई रेखा पर डाले गए लम्ब का पाद L है।

रेखा $\frac{x-6}{3}=\frac{y-7}{2}=\frac{z-7}{-2}$ पर व्यापक बिन्दु के निर्देशांक $\frac{x-6}{3}=\frac{y-7}{2}=\frac{z-7}{-2}=\lambda$ (माना) से प्राप्त करने पर L के निर्देशांक

$$(3\lambda+6,\ 2\lambda+7,\ -2\lambda+7) \qquad (1)$$

$\therefore$ PL के दिक्–अनुपात

$$3\lambda+6-1,\ 2\lambda+7-2,\ -2\lambda+7-3$$

अर्थात् $3\lambda+5,\ 2\lambda+5,\ -2\lambda+4$

दी गई रेखा के दिक्–अनुपात (3, 2, –2) हैं। चूंकि PL दी गई रेखा पर लम्ब है, अतः

$$3(3\lambda+5)+2(2\lambda+5)+(-2)(-2\lambda+4)=0$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda=-1$$

समीकरण (1) में $\lambda=-1$ रखने पर L के निर्देशांक (3, 5, 9) हैं।

$$PL=\sqrt{(3-1)^2+(5-2)^2-(9-3)^2}$$

$$= 7 \text{ इकाई}$$

अतः अभीष्ट लम्ब की लम्बाई 7 इकाई है।

प्रश्नमाला 14.4

1. दिखाइए कि रेखाएं $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ और $\frac{x-4}{5}=\frac{y-1}{2}=z$ परस्पर प्रतिच्छेदी हैं। उनका प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात कीजिए।
2. निर्धारित करें निम्न रेखाएं प्रतिच्छेदी है या नहीं $\vec{r}=(\hat{i}-\hat{j})+\lambda(2\hat{i}+\hat{k})$ और $\vec{r}=(2\hat{i}-\hat{j})+\mu(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})$.
3. बिन्दु (2, 3, 4) से रेखा $\frac{4-x}{2}=\frac{y}{6}=\frac{1-z}{3}$ पर डाले गये लम्ब का पाद ज्ञात कीजिए। साथ ही दिए गए बिन्दु से रेखा की लम्बवत् दूरी भी ज्ञात कीजिए।
4. बिन्दु (2, 3, 2) से जाने वाली रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $\vec{r}=(-2\hat{i}+3\hat{j})+\mu(2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k})$ के समान्तर है। इन रेखाओं के मध्य की दूरी भी ज्ञात कीजिए।

14.10 विषमतलीय रेखाएँ तथा दो विषमतलीय रेखाओं के मध्य न्यूनतम दूरी (Skew lines and shortest distance between two skew lines)

अंतरिक्ष में ऐसी रेखाएँ जो न तो प्रतिच्छेद करती है और न ही समान्तर होती है। ऐसी रेखाएँ किसी एक समल में समाहित नहीं हो सकती अतः इन्हें विषमतलीय रेखाएँ (skew lines) कहते हैं।

दो विषमतलीय रेखाओं के मध्य न्यूनतम दूरी से हमारा अभिप्राय एक ऐसे रेखाखण्ड से है तो एक रेखा पर स्थित एक बिन्दु को दूसरे रेखा पर स्थित अन्य बिन्दु को मिलाने से प्राप्त हो ताकि इसकी लम्बाई न्यूनतम हो। यह एक अद्विितिय रेखा खण्ड होता है जो दोनो विषमतलीय रेखाओं पर लम्ब होगा।

टिप्पणी: यदि दो रेखाएं किसी बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है, तो उनके मध्य न्यूनतम दूरी शून्य होगी।

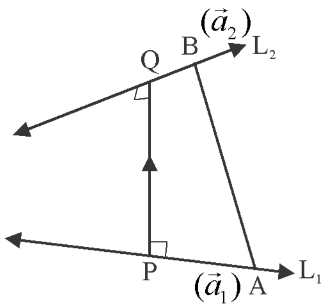
14.11 दो विषमतलीय रेखाओं के मध्य न्यूनतम दूरी ज्ञात करना (To find the shortest distance between two skew lines)

सदिश रूप (Vector form)

मान लीजिए L_1 और L_2 दो विषमतलीय रेखाएँ है जिनके समीकरण निम्नलिखित है

$$L_1 : \vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$$

$$L_2 : \vec{r} = \vec{a}_2 + \lambda \vec{b}_2$$



आकृति 14.07

आकृति से स्पष्ट है कि रेखा $L_1, \vec{b}_1$ के समान्तर तथा $A(\vec{a}_1)$ से गुजरती है तथा रेखा $L_2, \vec{b}_2$ के समान्तर तथा $B(\vec{a}_2)$ से गुजरती है। यदि L_1 और L_2 के मध्य न्यूनतम दूरी सदिश $\overrightarrow{PQ}$ का परिमाण है, तो सदिश $\overrightarrow{PQ}$, सदिश $\vec{b}_1$ और सदिश $\vec{b}_2$ दोनों के ही लम्ब होगा। अर्थात् सदिश $\overrightarrow{PQ}, \left(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2\right)$ की दिशा में होगा। यदि $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2$ की दिशा में इकाई सदिश $\hat{n}$ हो, तो

$$\hat{n} = \frac{\vec{b}_1 \times \vec{b}_2}{\left|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2\right|}$$

अतः $\quad \overrightarrow{PQ} = (PQ)\hat{n} = d\hat{n}$, जहाँ $PQ = d$ (Shortest Distance)

मान लीजिए $\overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{PQ}$ के मध्य कोण θ है, तब

$$PQ = AB\cos\theta \tag{1}$$

परन्तु
$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PQ}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{PQ}\right|} \tag{2}$$

$$= \frac{(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)\cdot(d\hat{n})}{(AB)(d)}, \qquad \overrightarrow{AB} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$$

$$= \frac{(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)\cdot\hat{n}}{(AB)}$$

अतः (1) से
$$PQ = (AB)\frac{(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)\cdot\hat{n}}{(AB)}$$

$$= (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)\cdot\hat{n}$$

$$= \frac{(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)\cdot\left(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2\right)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}$$

अतः अभीष्ट न्यूनतम दूरी,
$$= d = PQ = \left|\frac{(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)\cdot\left(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2\right)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right|$$

टिप्पणी: यदि दोनों रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती है, तो दोनों के मध्य न्यूनतम दूरी शून्य होगी।

अर्थात् $$\left|\frac{(\vec{a}_2-\vec{a}_1)\cdot(\vec{b}_1\times\vec{b}_2)}{|\vec{b}_1\times\vec{b}_2|}\right|=0$$

$\Rightarrow$ $$(\vec{a}_2-\vec{a}_1)\cdot(\vec{b}_1\times\vec{b}_2)=0$$

$\Rightarrow$ $$\left[(\vec{a}_2-\vec{a}_1)\ \vec{b}_1\ \ \vec{b}_2\right]=0$$

कार्तीय रूप (Cartesian form)

रेखाओं $$L_1:\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$$

और $$L_2:\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$$

के मध्य की न्यूनतम दूरी है

$$d=\frac{\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}}$$

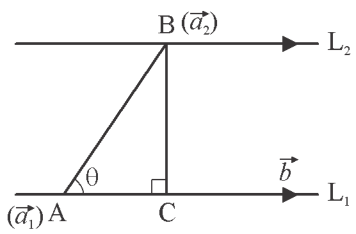
14.12 दो समान्तर रेखाओं के मध्य दूरी (Distance between two parallel lines)

यदि दो रेखाएँ L_1 और L_2 समान्तर है, तो वे समतलीय भी होगी। माना दी गई रेखाऐं क्रमशः $\vec{r}=a_1+\lambda\vec{b}$ तथा $\vec{r}=\vec{a}_2+\mu\vec{b}$ है।

आकृति से स्पष्ट है कि L_1 पर बिन्दु का स्थिति सदिश $\vec{a}_1$ है तथा L_2 पर बिन्दु B का स्थिति सदिश $\vec{a}_2$ है। माना BC रेखा L_1 पर लम्ब है, जहाँ C, L_1 पर स्थित है। अतः रेखाओं L_1 और L_2 के मध्य की दूरी$=BC$

माना $\overrightarrow{AB}$ और $\vec{b}$ के मध्य कोण θ है।

अतः $$\vec{b}\times\overrightarrow{AB}=\left(|\vec{b}||\overrightarrow{AB}|\sin\theta\right)\hat{n}$$



आकृति 14.08

जहाँ $\hat{n}$, रेखाओं L_1 और L_2 के तल पर लम्ब इकाई सदिश है।

$\Rightarrow$ $$\vec{b}\times(\vec{a}_2-\vec{a}_1)=|\vec{b}|(BC)\hat{n},\ \text{जहाँ}\ BC=(AB)\sin\theta$$

$\Rightarrow$ $$\left|\vec{b}\times(\vec{a}_2-\vec{a}_1)\right|=|\vec{b}|(BC),\ \text{जहाँ}\ |\hat{n}|=1$$

$\Rightarrow$ $$BC=\frac{\left|\vec{b}\times(\vec{a}_2-\vec{a}_1)\right|}{|\vec{b}|}$$

अतः दी गई समान्तर रेखाओं के मध्य दूरी

$$d = BC = \left|\frac{\vec{b}\times(\vec{a}_2-\vec{a}_1)}{|\vec{b}|}\right|$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-17. रेखाएँ, जिनके सदिश समीकरण निम्नलिखित हैं, के मध्य न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए:

$\vec{r} = (\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})+\lambda(\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})$ और $\vec{r} = (4\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k})+\mu(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})$

हल: $\vec{r} = \vec{a}_1+\lambda\vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2+\mu\vec{b}_2$

हम देखते हैं: $\vec{a}_1 = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k},\ \vec{a}_2 = 4\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k}$

$\vec{b}_1 = \hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ और $\vec{b}_2 = 2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$

$\therefore\quad (\vec{a}_2-\vec{a}_1) = (4\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k})-(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}) = (3\hat{i}+3\hat{j}+3\hat{k})$

और $$(\vec{b}_1\times\vec{b}_2) = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-3-6)+\hat{j}(4-1)+\hat{k}(3+6) = -9\hat{i}+3\hat{j}+9\hat{k}$$

$\therefore\quad |\vec{b}_1\times\vec{b}_2| = \sqrt{81+9+81} = \sqrt{171}$

$$\text{S.D.} = \frac{|(\vec{a}_2-\vec{a}_1)\cdot(\vec{b}_1\times\vec{b}_2)|}{|\vec{b}_1\times\vec{b}_2|}$$

$$\therefore\quad \text{S.D.} = \frac{|(3\hat{i}+3\hat{j}+3\hat{k})\cdot(-9\hat{i}+3\hat{j}+9\hat{k})|}{\sqrt{171}}$$

$$= \frac{|-27+9+27|}{\sqrt{171}} = \frac{9}{\sqrt{171}} = \frac{9}{3\sqrt{19}} = \frac{3}{\sqrt{19}}$$

उदाहरण-18. रेखाओं $\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-3}$ तथा $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{2}$ के मध्य की लघुत्तम दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: दी गई रेखाओं के समीकरण

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-3} \qquad (1)$$

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{2} \qquad (2)$$

समीकरण (1) से, रेखा $(3, 4, -1)$ से गुजरती है और इसके दिक् अनुपात 2, 1, –3 है, अतः सदिश समीकरण $\vec{r} = \vec{a}_1+\lambda\vec{b}_1$ से

$$\vec{a}_1 = 3\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k},\ \vec{b}_1 = 2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$$

इसी प्रकार रेखा (2) से,

$$\vec{a}_2 = \hat{i}+3\hat{j}+\hat{k},\ \vec{b}_2 = -\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$$

अब $\qquad \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \left(\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}\right) - \left(3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}\right) = -2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

और $\qquad \vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 11\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k}$

$\therefore \qquad |\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| = |11\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k}| = \sqrt{121+1+49} = \sqrt{171} = 3\sqrt{19}$

लघुतम दूरी $\qquad = \left|\dfrac{(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)\cdot(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right|$

$$= \left|\frac{(-2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})\cdot(11\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k})}{3\sqrt{19}}\right| = \left|\frac{-22+1+14}{3\sqrt{19}}\right| = \frac{7}{3\sqrt{19}}$$

उदाहरण-19. निम्नलिखित दी गई रेखाओं L_1 और L_2

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda\left(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}\right) \text{ और } \vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu\left(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}\right)$$

के मध्य न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

हलः दी गई दोनों रेखाएँ समातंर है। इनकी $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}$ तथा $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\vec{b}$ से तुलना करने पर,

$$\vec{a}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k},\ \vec{a}_2 = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$$

और $\quad \vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$

अतः रेखाओं के मध्य की दूरी

$$d = \left|\frac{\vec{b} \times \left(\vec{a}_2 - \vec{a}_1\right)}{|\vec{b}|}\right| = \left|\frac{\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\sqrt{4+9+36}}\right| = \frac{\left|-9\hat{i} + 14\hat{j} - 4\hat{k}\right|}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{293}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{293}}{7}$$

प्रश्नमाला 14.5

1. रेखाओं $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ और $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ के मध्य की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।
2. रेखाओं $\dfrac{x+1}{7} = \dfrac{y+1}{-6} = \dfrac{z+1}{1}$ और $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-5}{-2} = \dfrac{z-7}{1}$ के मध्य की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।
3. रेखाएं, जिनके सदिश समीकरण निम्नलिखित है, के मध्य की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए:
$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) \text{ और } \vec{r} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$$
4. रेखाएं, जिनकी सदिश समीकरण निम्नलिखित हैं, के मध्य की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए:
$$\vec{r} = (1-t)\hat{i} + (t-2)\hat{j} + (3-2t)\hat{k} \text{ और } \vec{r} = (s+1)\hat{i} + (2s-1)\hat{j} - (2s+1)\hat{k}$$
5. निम्न रेखाओं के मध्य लघुत्तम दूरी ज्ञात कीजिए:
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = z \text{ और } \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1}, z = 2$$

तथा लघुतम दूरी वाली रेखा का समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

14.13 समतल (Plane)

समतल से हमारा तात्पर्य एक ऐसे पृष्ठ से है जिस पर यदि दो भिन्न बिन्दु लिए जाएं तो इनको मिलाने वाली रेखा खण्ड का प्रत्येक बिन्दु अभीष्ट पृष्ठ पर स्थित हो अर्थात् सम्पूर्ण रेखा उस पृष्ठ पर स्थित हो।

14.14 समतल का व्यापक समीकरण (General equation of a plane)

सिद्ध करना कि x, y तथा z में एक घातीय व्यापक समीकरण सदैव एक समतल को व्यक्त करता है।

माना x, y तथा z में एक घातीय व्यापक समीकरण

$$ax+by+cz+d=0, \tag{1}$$

है, जहाँ a, b, c तथा d स्थिरांक है तथा a, b, c सभी शून्य नहीं है।

माना समीकरण (1) द्वारा निरूपित पृष्ठ पर $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ दो बिन्दु हैं, तो

$$ax_1+by_1+cz_1+d=0 \tag{2}$$

तथा
$$ax_2+by_2+cz_2+d=0 \tag{3}$$

(2) को m_2 तथा (3) को m_1 से (जहाँ $m_1+m_2 \neq 0$) गुणा कर योग करने पर

$$a(m_2x_1+m_1x_2)+b(m_2y_1+m_1y_2)+c(m_2z_1+m_1z_2)+d(m_1+m_2)=0$$

या
$$a\left(\frac{m_2x_1+m_1x_2}{m_1+m_2}\right)+b\left(\frac{m_2y_1+m_1y_2}{m_1+m_2}\right)+c\left(\frac{m_2z_1+m_1z_2}{m_1+m_2}\right)+d=0$$

इससे यह स्पष्ट रूप से प्रदर्शित होता है कि बिन्दु P तथा Q को $m_1 : m_2$ अनुपात में विभाजित करने वाला बिन्दु

$$R\left(\frac{m_2x_1+m_1x_2}{m_1+m_2}, \frac{m_2y_1+m_1y_2}{m_1+m_2}, \frac{m_2z_1+m_1z_2}{m_1+m_2}\right)$$

भी m_1, m_2 के प्रत्येक मान के लिए ($m_1=-m_2$ के अतिरिक्त) समीकरण (1) द्वारा निरूपित पृष्ठ पर स्थित है।

यहाँ हमने यह प्रदर्शित किया है कि यदि $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ पृष्ठ (1) पर स्थित है तो P तथा Q को मिलाने वाली रेखा का प्रत्येक बिन्दु R भी पृष्ठ (1) पर स्थित है अर्थात् सम्पूर्ण रेखा PQ पृष्ठ (1) पर स्थित है।

अतः (1) द्वारा निरूपित पृष्ठ एक समतल है। इस प्रकार सिद्ध होता है कि x, y, z में एक में एक घातीय व्यापक समीकरण (1) सदैव एक समतल को निरूपित करता है।

उप प्रमेयः एक बिन्दु रूप (One point form):

सिद्ध करना कि एक बिन्दु (x_1, y_1, z_1) से गुजरने वाले समतल का समीकरण

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0,$$

होता है।

माना आवश्यक समतल का समीकरण निम्न हैः

$$ax+by+cz+d=0, \tag{1}$$

चूंकि यह समतल बिन्दु (x_1, y_1, z_1) से गुजरता है,

अतः
$$ax_1+by_1+cz_1+d=0. \tag{2}$$

(1) से (2) को घटाने पर,

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0, \tag{3}$$

जो कि अभीष्ट समतल का समीकरण है।

विशेष स्थितियाँ: समतल के व्यापक समीकरण $ax+by+cz+d=0$ में

	यदि		समतल का रूप		निष्कर्ष
1.	$d=0$	$\Rightarrow$	$ax+by+cz=0$	$\Rightarrow$	समतल मूल बिन्दु से गुजरेगा।
2. (i)	$a=0$	$\Rightarrow$	$by+cz+d=0$	$\Rightarrow$	समतल X- अक्ष के समान्तर है।
(ii)	$b=0$	$\Rightarrow$	$ax+cz+d=0$	$\Rightarrow$	समतल Y- अक्ष के समान्तर है।
(iii)	$c=0$	$\Rightarrow$	$ax+by+d=0$	$\Rightarrow$	समतल Z- अक्ष के समान्तर है।
3. (i)	$a=0, d=0$	$\Rightarrow$	$by+cz=0$	$\Rightarrow$	समतल X- अक्ष के गुजरता है।
(ii)	$b=0, d=0$	$\Rightarrow$	$ax+cz=0$	$\Rightarrow$	समतल Y- अक्ष के गुजरता है।
(iii)	$c=0, d=0$	$\Rightarrow$	$ax+by=0$	$\Rightarrow$	समतल Z- अक्ष के गुजरता है।
4. (i)	$b=0, c=0$	$\Rightarrow$	$ax+d=0$	$\Rightarrow$	समतल X- अक्ष के लम्बवत है।
(ii)	$a=0, c=0$	$\Rightarrow$	$by+d=0$	$\Rightarrow$	समतल Y- अक्ष के लम्बवत है।
(iii)	$a=0, b=0$	$\Rightarrow$	$cz+d=0$	$\Rightarrow$	समतल Z- अक्ष के लम्बवत है।
5. (i)	$a=b=d=0$	$\Rightarrow$	$cz=0$	$\Rightarrow$	समतल XY- तल के संपाती है।
(ii)	$b=c=d=0$	$\Rightarrow$	$ax=0$	$\Rightarrow$	समतल YZ- तल के संपाती है।
(iii)	$a=c=d=0$	$\Rightarrow$	$by=0$	$\Rightarrow$	समतल ZX- तल के संपाती है।

टिप्पणी: क्योंकि समतल के समीकरण में तीन स्वेच्छ स्वतंत्र स्थिरांक है अतः समतल का समीकरण पूर्ण रूप से निर्धारित करने के लिए तीन स्थिरांक ज्ञात करने होते हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-20. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें बिन्दुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाली रेखा, समतल $ax+by+cz+d=0$ द्वारा विभाजित होती है।

हल: माना बिन्दुओं P तथा Q को मिलाने वाली रेखा, समतल $ax+by+cz+d=0$ द्वारा $\lambda:1$ अनुपात में विभाजित होती है।

माना समतल एवं रेखा का प्रतिच्छेद बिन्दु R है। अतः बिन्दु R रेखा PQ पर स्थित है तथा PQ को $\lambda:1$ अनुपात में विभाजित करता है। अतः R के निर्देशांक $\left(\frac{\lambda x_2+x_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda y_2+y_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda z_2+z_1}{\lambda+1}\right)$ होंगे।

चूंकि बिन्दु R समतल पर भी स्थित है। अतः यह समतल के समीकरण को संतुष्ट करेगा।

$$\therefore \quad a\left(\frac{\lambda x_2+x_1}{\lambda+1}\right)+b\left(\frac{\lambda y_2+y_1}{\lambda+1}\right)+c\left(\frac{\lambda z_2+z_1}{\lambda+1}\right)+d=0$$

या
$$a(\lambda x_2+x_1)+b(\lambda y_2+y_1)+c(\lambda z_2+z_1)+d(\lambda+1)=0$$

या
$$\lambda(ax_2+by_2+cz_2+d)=-(ax_1+by_1+cz_1+d)$$

या
$$\lambda=-\frac{(ax_1+by_1+cz_1+d)}{(ax_2+by_2+cz_2+d)}$$

यही अभीष्ट अनुपात है।

उदाहरण-21. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें बिन्दुओं $P(-2, 4, 7)$ तथा $Q(3, -5, 8)$ को मिलाने वाली रेखा को निर्देशांक तलों द्वारा काटा जाता है।

हल: बिन्दुओं $P(-2, 4, 7)$ तथा $Q(3, -5, 8)$ को मिलाने वाली रेखा को $\lambda:1$ के अनुपात में विभाजित करने वाले बिन्दु R के निर्देशांक $\left(\frac{3\lambda-2}{\lambda+1}, \frac{-5\lambda+4}{\lambda+1}, \frac{8\lambda+7}{\lambda+1}\right)$ होंगे।

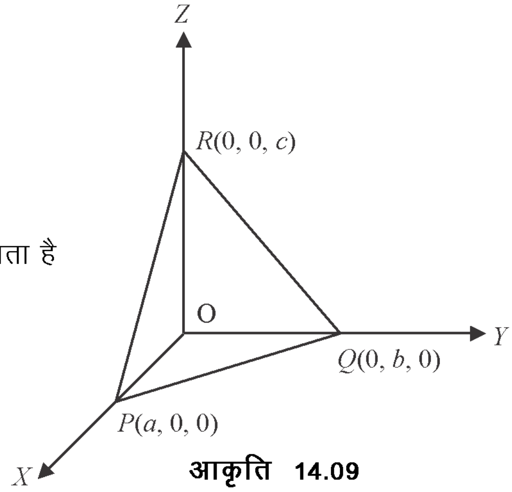
(i) यदि R, YZ तल पर स्थित है अर्थात् $x=0$ तल पर तो $\frac{3\lambda-2}{\lambda+1}=0$ या $\lambda=\frac{2}{3}$ । अर्थात् 2 : 3 अभीष्ट अनुपात है।

(ii) यदि R, ZX तल पर स्थित है अर्थात् $y=0$ तल पर तो $\frac{-5\lambda+4}{\lambda+1}=0$ या $\lambda=\frac{4}{5}$ । अर्थात् 4 : 5 अभीष्ट अनुपात है।

(iii) यदि R, XY तल पर स्थित है अर्थात् $z=0$ तल पर तो $\frac{8\lambda+7}{\lambda+1}=0$ या $\lambda=-\frac{7}{8}$ । अर्थात् –7 : 5 अभीष्ट अनुपात है।

14.15 समतल का अन्तः खण्ड रूप (Intercept form of a plane)

सिद्ध करना कि X, Y तथा Z-अक्षों पर क्रमशः a, b तथा c के अन्तः खण्ड काटने वाले समतल का समीकरण $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ होता है।



आकृति 14.09

माना समतल का समीकरण

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (1)$$

है। माना समतल (1) अक्षों पर क्रमशः बिन्दु P, Q तथा R पर इस प्रकार मिलता है कि $OP=a$, $OQ=b$ तथा $OR=c$

अतः बिन्दुओं P, Q तथा R के निर्देशांक कमशः $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ तथा $(0, 0, c)$ होंगे। चूंकि बिन्दु $P\,(a, 0, 0)$ समतल (1) पर स्थित है,

$$\therefore \qquad A\cdot a+B\cdot 0+C\cdot 0+D=0 \quad \Rightarrow \quad A=-\frac{D}{a}$$

इसी प्रकार समतल (1) बिन्दुओं Q तथा R से भी गुजरता है तो $B=-D/b$ व $C=-D/c$

A, B, C के ये मान (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$$-\frac{D}{a}x-\frac{D}{b}y-\frac{D}{c}z+D=0 \quad \text{या} \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

अर्थात् (2) ही अभीष्ट समतल का समीकरण है

टिप्पणी: समतल के व्यापक समीकरण को अन्तः खण्ड रूप में परिवर्तित कर समतल द्वारा अक्षों पर काटे गये अन्तः खण्ड ज्ञात किये जा सकते हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-22. समतल के समीकरण $3x-4y+2z=12$ को अन्तः खण्ड रूप में परिवर्तित कर निर्देशांक अक्षों पर काटे गये अन्तः खण्ड ज्ञात कीजिए।

हल: दिये समतल का समीकरण $3x-4y+2z=12$, है।

$$\Rightarrow \qquad \frac{3x}{12}-\frac{4y}{12}+\frac{2z}{12}=1$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x}{4}+\frac{y}{(-3)}+\frac{z}{6}=1$$

इसकी तुलना समतल के अन्तः खण्ड रूप $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ से करने पर हम देखते हैं कि समतल द्वारा निर्देशांक अक्षों X, Y तथा Z पर काटे गये अन्तः खण्ड क्रमशः 4, –3 तथा 6 हैं।

उदाहरण-23. एक समतल निर्देशांक अक्षों को A, B तथा C पर इस प्रकार मिलता है कि इससे निर्मित त्रिभज ABC का केन्द्रक, बिन्दु $K\,(p, q, r)$ है। प्रदर्शित कीजिए कि अभीष्ट समतल का समीकरण $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=3$ है।

हल: माना अभीष्ट समतल का समीकरण $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, है। अतः बिन्दु A, B तथा C के निर्देशांक क्रमशः $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ तथा $(0, 0, c)$ होंगे। अतः त्रिभुज ABC का केन्द्रक $K(a/3, b/3, c/3)$ होगा। परन्तु प्रश्नानुसार, त्रिभुज ABC का केन्द्रक $K(p, q, r)$ है।

$$\therefore \quad \frac{a}{3}=p, \qquad \frac{b}{3}=q, \qquad \frac{c}{3}=r$$

$$\Rightarrow \quad a=3p, \qquad b=3q, \qquad c=3r.$$

समीकरण (1) में a, b तथा c के मान प्रतिस्थापित करने पर हमें अभीष्ट समतल का समीकरण

$$\frac{x}{3p}+\frac{y}{3q}+\frac{z}{3r}=1, \qquad \text{अर्थात्} \quad \frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=3,$$

प्राप्त होता है।

उदाहरण-24. एक चर समतल इस प्रकार गति करता है कि इसके द्वारा निर्देशांक अक्षों पर काटे गये अन्तः खण्डों के व्युत्क्रमों का योग एक स्थिरांक है। सिद्ध कीजिए कि यह समतल एक नियत बिन्दु से गुजरता है।

हल: माना कि चर समतल का समीकरण $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, (1)

है, अतः इसके द्वारा अक्षों पर अन्तःखण्ड a, b तथा c काटे जाते हैं।

प्रश्नानुसार, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=$ स्थिरांक $=\frac{1}{\lambda}$ (माना)

$$\therefore \quad \frac{\lambda}{a}+\frac{\lambda}{b}+\frac{\lambda}{c}=1 \qquad (2)$$

समीकरण (2) प्रदर्शित करता है कि बिन्दु $(\lambda, \lambda, \lambda)$ समीकरण (1) को सन्तुष्ट करता है, अर्थात् समतल (1) नियत बिन्दु $(\lambda, \lambda, \lambda)$ से गुजरता है।

14.16 समतल का अभिलम्ब रूप में समीकरण (Equation of a plane in normal form)

सदिश रूप: एक समतल का मूल बिन्दु से लम्ब दूरी (p) तथा समतल के लम्बवत इकाई सदिश $(\hat{n})$ दिये गये हो तो समतल का समीकरण ज्ञात करना:

माना संदर्भ का मूल बिन्दु O है।

माना $ON = p =$ दिये समतल पर मूल बिन्दू से डाले गये लम्ब की लम्बाई है।

माना समतल पर लम्ब इकाई सदिश $\hat{n}$ है जिसकी दिशा O से N की तरफ धनात्मक है।

$$\therefore \quad \overrightarrow{ON}=p\hat{n} \qquad (1)$$

माना समतल पर स्थित किसी बिन्दु P का स्थिति सदिश $\vec{r}$ है तब P समतल पर कहीं भी स्थित हो $\overrightarrow{NP}\perp\overrightarrow{ON}$.

$$\therefore \quad \overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{ON}=0 \qquad (2)$$

परन्तु $\quad \overrightarrow{NP}=\vec{r}-p\hat{n} \qquad (3)$

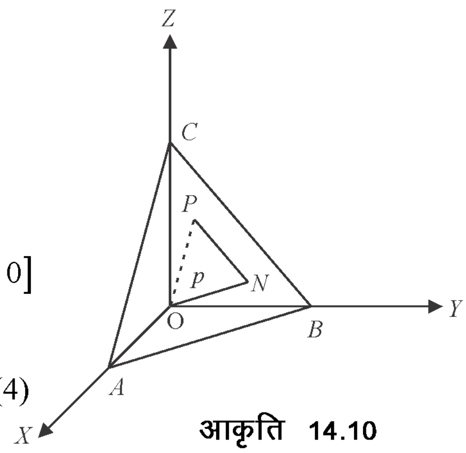
समीकरणों (1), (2) तथा (3) द्वारा

$$(\vec{r}-p\hat{n})\cdot p\hat{n}=0$$

या $\quad (\vec{r}-p\hat{n})\cdot\hat{n}=0 \qquad [\because p\neq 0]$

या $\quad \vec{r}\cdot\hat{n}-p\hat{n}\cdot\hat{n}=0$

या $\quad \vec{r}\cdot\hat{n}=p \quad [\because \hat{n}\cdot\hat{n}=1] \quad (4)$



आकृति 14.10

कार्तीय रूप: मान लो ABC कोई एक समतल है तथा ON, मूल बिन्दु से इस पर लम्ब है, जहाँ N लम्ब का पाद है। यदि मूल बिन्दु से समतल पर खींचे गये इस लम्ब ON की लम्बाई p तथा दिक् कोज्याएं l, m, n हो तो समतल का समीकरण l, m, n तथा p के पदों में ज्ञात करेंगे।

स्पष्टत: बिन्दु N के निर्देशांक (lp, mp, np) है। यदि समतल में स्थित कोई एक बिन्दु $P(x, y, z)$ लें तो रेखा PN की दिक् कोज्याएं $\dfrac{x-lp}{PN}, \dfrac{y-mp}{PN}, \dfrac{z-np}{PN}$, होंगी। अब चूंकि ON समतल पर लम्ब है, अत: यह समतल में स्थित प्रत्येक रेखा पर लम्ब होगा। फलत: ON तथा PN परस्पर लम्बवत है। अत: लम्ब प्रतिबन्ध से

$$l\left(\frac{x-lp}{PN}\right)+m\left(\frac{y-mp}{PN}\right)+\left(\frac{z-np}{PN}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad lx+my+nz=p\left(l^2+m^2+n^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad lx+my+nz=p \qquad \left[\because\ l^2+m^2+n^2=1\right]$$

राशियों l, m, n तथा p में यह सम्बन्ध समतल ABC के प्रत्येक बिन्दु (x, y, z) के लिए सत्य होगा। अत: अभिलम्ब रूप में यह अभीष्ट समतल का समीकरण है।

टिप्पणी: 1. माना $\vec{n}$ एक सदिश है जिसका परिमाण n तथा दिशा $\hat{n}$ की दिशा है तो $\vec{n}=n\hat{n}$.

अत: समीकरण (4) से $\qquad \vec{r}\cdot(\vec{n}/n)=p \quad \Rightarrow \quad \vec{r}\cdot\vec{n}=np$

या $\qquad \vec{r}\cdot\vec{n}=q$ (माना), $\qquad$ (5)

जहाँ $\qquad q=np$ या $p=q/n$. $\qquad$ (6)

$\therefore$ समीकरण (5), $\vec{n}$ के लम्बवत समतल के सदिश समीकरण को निरूपित करता है।

एवं $\quad p =$ समतल (5) पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब की लम्बाई है।

$\qquad = q/n = q/|\vec{n}| = q(\vec{n}$ का परिमाण)

2. जब मूल बिन्दु समतल पर स्थित हो तो $p=0$, अत: समतल जो मूल बिन्दु से गुजरता है एवं सदिश $\vec{n}$ के लम्बवत है, का समीकरण $\vec{r}\cdot\vec{n}=0$ होगा

3. समतल के अभिलम्ब रूप के समीकरण में सदिश $\vec{n}$ की दिशा मूल बिन्दु से समतल की तरफ तथा p धनात्मक होता है।

4. यदि समतल $\vec{r}\cdot\vec{n}=q$ द्वारा अक्षों पर अन्त: खण्ड x_1, y_1, z_1 काटे जाते हैं तो इन बिन्दुओं के स्थिति सदिश क्रमश: $x_1 i, y_1 j$ तथा $z_1 k$ होंगे। चूंकि यह बिन्दु समतल पर स्थित है अत:

$$x_1 i\cdot\vec{n}=q \qquad x_1 j\cdot\vec{n}=q, \qquad z_1 k\cdot\vec{n}=q$$

$$\Rightarrow \quad x_1=\frac{q}{i\cdot\vec{n}}, \qquad y_1=\frac{q}{j\cdot\vec{n}}, \qquad z_1=\frac{q}{k\cdot\vec{n}}.$$

5. समतल के सदिश समीकरण का तात्पर्य एक ऐसे समीकरण से है जिसमें समतल के किसी स्वेच्छ बिन्दु का स्थिति सदिश $\vec{r}$ सम्मिलित हो।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-25. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से 4 इकाई दूरी पर है तथा सदिश $i-2j+2k$ इसके अभिलम्ब है।

हल: सदिश रूप: यहाँ $p = 4$ तथा $\vec{n}=i-2j+2k$

$$\therefore \quad \hat{n}=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{i-2j+2k}{\sqrt{(1+4+4)}}=\frac{1}{3}i-\frac{2}{3}j+\frac{2}{3}k$$

अतः अभीष्ट समतल का समीकरण $\vec{r}\cdot\left(\frac{1}{3}i-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}k\right)=4$

या $\vec{r}\cdot(i-2j+2k)=12$

यही अभीष्ट समतल का समीकरण है।

कार्तीय रूपः उपर्युक्त समीकरण में $\vec{r}=xi+yj+zk$ रखने पर समतल का कार्तीय रूप में

समीकरण $(xi+yj+zk)\cdot(i-2j+2k)=12$

अर्थात् $x-2y+2z=12$, प्राप्त होता है।

उदाहरण-26. समतल के समीकरण $\vec{r}\cdot(i-2j+2k)=12$ को अभिलम्ब रूप में परिवर्तित कर मूल बिन्दु से इसकी लम्ब दूरी ज्ञात कीजिए।

हलः सदिश रूपः समतल का दिया गया समीकरण $\vec{r}\cdot(i-2j+2k)=12$ है।

अर्थात् $\vec{r}\cdot\vec{n}=12,$

जहाँ $\vec{n}=i-2j+2k.$ $\therefore$ $|\vec{n}|=\sqrt{(1+4+4)}=3\neq 1$

अतः दिया गया समीकरण अभिलम्ब रूप में नहीं है।

$\therefore$ समीकरण को अभिलम्ब रूप में परिवर्तन करने हेतु दोनों तरफ $|\vec{n}|=3$ का भाग देने पर

$$(\vec{r}\cdot\vec{n})/3=12/3 \quad\Rightarrow\quad \vec{r}\cdot\left(\frac{1}{3}i-\frac{2}{3}j+\frac{2}{3}k\right)=4$$

यह समीकरण दिये गये समतल के अभिलम्ब रूप को प्रदर्शित करता है। तथा इसकी मूल बिन्दु से लम्ब दूरी 4 इकाई है।

कार्तीय रूपः दिए समतल का कार्तीय रूप में समीकरण

$$x-2y+2z=12$$

है। यहां दक्षिण पक्ष धनात्मक हैं। अब समीकरण में $\sqrt{(1+4+4)}=3\neq 1$ का भाग दोनों पक्षों में देने पर

$$\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z=4,$$

प्राप्त समीकरण समतल के अभिलम्ब रूप को प्रकट करता है। इस समतल की मूल बिन्दु से लम्ब दूरी 4 इकाई हैं। यहां अभिलम्ब की दिक् कोज्याएं $\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}$ हैं।

उदाहरण-27. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से 2 इकाई दूरी पर हो तथा इसके अभिलम्ब के दिक् अनुपात 12, –3, 4 हो।

हलः कार्तीय रूपः प्रश्नानुसार $p=2$ तथा अभिलम्ब के दिक् अनुपात $12,-3,4$ है।

अतः अभिलम्ब की दिक् कोज्याएं $12/13,-3/13,4/13$ होगी, क्योंकि

$$\sqrt{\{(12)^2+(-3)^2+(4)^2\}}=13$$

अतः अभीष्ट समतल का समीकरण

$$\frac{12}{13}x-\frac{3}{13}y+\frac{4}{13}z=2, \qquad [lx+my+nz=p \text{ से}]$$

अर्थात् $12x-3y+4z=26,$

होगा, जो अभीष्ट समतल का समीकरण है।

सदिश रूपः माना $\vec{n}$ समतल के अभिलम्ब सदिश है एवं $\vec{n}$ के दिक् अनुपात 12, –3, 4 है।

$$\therefore \quad \vec{n} = 12i - 3j + 4k \quad \Rightarrow \quad |\vec{n}| = \sqrt{\{(12)^2 + (-3)^2 + (4)^2\}} = 13 \neq 1$$

$$\therefore \quad \hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{12}{13}i - \frac{3}{13}j + \frac{4}{13}k$$

अभीष्ट समतल मूल बिन्दु से 2 इकाई दूरी पर है अतः इसका समीकरण

$$\vec{r} \cdot \hat{n} = 2$$

अर्थात् $$\vec{r} \cdot \left(\frac{12}{13}i - \frac{3}{13}j + \frac{4}{13}k\right) = 2$$

होगा, जो अभीष्ट समतल का समीकरण है।

उदाहरण-28. समतल $\vec{r} \cdot (6i + 2j - 3k) + 7 = 0$ पर मूल बिन्दु से डाले लम्ब की दिक् कोज्याएं ज्ञात कीजिए।

हलः कार्तीय रूपः समतल का समीकरण निम्न प्रकार से लिखा जा सकता हैः

$$(xi + yj + zk) \cdot (6i + 2j - 3k) + 7 = 0$$

अर्थात् $$6x + 2y - 3z + 7 = 0$$

अर्थात् $$-6x - 2y + 3z = 7 \qquad (1)$$

जब $$\sqrt{\{(-6)^2 + (-2)^2 + (3)^2\}} = 7 \neq 1$$

अतः समीकरण (1) के सभी पक्षों में 7 का भाग देने पर, समीकरण

$$-\frac{6}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{3}{7}z = 1, \qquad (2)$$

प्राप्त होता है।

समीकरण (2) की तुलना समतल के अभिलम्ब रूप के मानक समीकरण से करने पर हमें मूल बिन्दु से समतल पर डाए गए लम्ब की दिक् कोज्याएं $-6/7,\ -2/7,\ 3/7$ प्राप्त होती हैं।

सदिश रूपः मूल बिन्दु से दिये समतल पर डाले गये लम्ब की दिक् कोज्याएं ज्ञात करने हेतु सर्वप्रथम दिए समतल को अभिलम्ब रूप में परिवर्तित करना होगा।

दिए समतल का समीकरण $\vec{r} \cdot (6i + 2j - 3k) + 7 = 0$, है।

अर्थात् $$\vec{r} \cdot (6i + 2j - 3k) = -7$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r} \cdot (-6i - 2j + 3k) = 7$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r} \cdot \vec{n} = 7,$$ जहाँ $\vec{n} = (-6i - 2j + 3k)$ है।

अब $$|\vec{n}| = \sqrt{\{(-6)^2 + (-2)^2 + (3)^2\}} = 7 \neq 1.$$

अतः (1) के सभी पक्षों में $|\vec{n}| = 7$ का भाग देने पर

$$\frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{7} = \frac{7}{7}$$

या $$\vec{r} \cdot \left(-\frac{6}{7}i + \frac{2}{7}j + \frac{3}{7}k\right) = 1$$

अतः मूल बिन्दु से समतल पर डाले गये लम्ब की दिक् कोज्याएं $-\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{3}{7}$ हैं।

प्रश्नमाला 14.6

1. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो X- अक्ष के लम्ब है तथा बिन्दु $(2, -1, 3)$ से गुजरता है।
2. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो X- अक्ष तथा बिन्दु $(3, 2, 4)$ से गुजरता है।
3. एक चर समतल, बिन्दु (p, q, r) से गुजरता है तथा निर्देशी अक्षों को बिन्दु A, B तथा C पर मिलता है। प्रदर्शित कीजिए कि निर्देशांक समतलों के समान्तर A, B तथा C से गुजरने वाले समतलों के उभयनिष्ठ बिन्दु का बिन्दुपथ

$$\frac{p}{x}+\frac{q}{y}+\frac{r}{z}=1,$$

होगा।
4. उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से 7 इकाई दूरी पर है तथा i इसके अभिलम्ब की तरफ इकाई सदिश है।
5. उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से 7 इकाई दूरी पर है तथा सदिश $6i+3j-2k$ इसके अभिलम्ब है।
6. समतल के समीकरण $\vec{r}\cdot(3i-4j+12k)=5$ को अभिलम्ब रूप में परिवर्तित कर इसकी मूल बिन्दु से लम्ब दूरी ज्ञात कीजिए। प्राप्त समतल के अभिलम्ब की दिक् कोज्याएं भी ज्ञात कीजिए।

या

समतल के समीकरण $3x-4y+12z=5$ को अभिलम्ब रूप में परिवर्तित कर इसकी मूल बिन्दु से लम्ब दूरी ज्ञात कीजिए। समतल के अभिलम्ब की दिक् कोज्याएं भी ज्ञात कीजिए।
7. उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से 4 इकाई दूरी पर है तथा इसके अभिलम्ब के दिक् अनुपात $2, -1, 2$ हैं।
8. समतल के समीकरण $2x-3y+6z+14=0$ से समतल का अभिलम्ब रूप ज्ञात कीजिए।
9. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जिस पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब की लम्बाई 13 है तथा इस लम्ब के दिक् अनुपात $4, -3, 12$ है।
10. समतल $x+y+z-3=0$ का इकाई अभिलम्ब सदिश ज्ञात कीजिए।

14.17 दो समतलों के मध्य कोण (Angle between two planes)

दो समतलों के मध्य कोण से अभिप्राय उनके अभिलम्बों के मध्य कोण से है।

सदिश रूप: माना दो समतलों के समीकरण हैं

$$\vec{r}\cdot\vec{n}_1=d_1 \qquad \text{तथा} \qquad \vec{r}\cdot\vec{n}_2=d_2 \text{ है,}$$

जहाँ $\vec{n}_1$ और $\vec{n}_2$ समतलों के अभिलम्ब सदिश है। माना दोनों समतलों के मध्य कोण θ है तो समतलों के अभिलम्बों के मध्य कोण भी θ होगा।

$$\cos\theta=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} \qquad \text{या} \qquad \theta=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right)$$

टिप्पणी: (i) दोनों समतल परस्पर लम्बवत होंगे यदि $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$.

(ii) दोनों समतल परस्पर समान्तर होंगे यदि $\vec{n}_1=\lambda\vec{n}_2$, जहाँ λ अचर है।

कार्तीय रूप: माना $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ तथा $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ दो दिए गए समतल है जिनके मध्य कोण θ है। माना $\vec{n}_1$ और $\vec{n}_2$ इन समतलों के अभिलम्ब सदिश है तो

$$\vec{n}_1=a_1i+b_1j+c_1k$$

तथा

$$\vec{n}_2=a_2i+b_2j+c_2k$$

क्योंकि a_1, b_1, c_1 तथा a_2, b_2, c_2 क्रमशः समलतों के अभिलम्बों के दिक् अनुपात हैं।

$$\therefore \qquad \cos\theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2+c_1^2)}\sqrt{(a_2^2+b_2^2+c_2^2)}}$$

टिप्पणीः (i) दोनों समतल परस्पर लम्बवत होंगे यदि $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

(ii) दोनों समतल परस्पर समान्तर होंगे यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

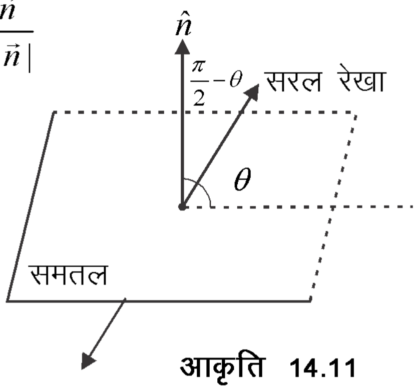
14.18 एक रेखा व एक समतल के मध्य कोण (Angle between a plane and a line)

एक रेखा व समतल के मध्य कोण, समतल के अभिलम्ब एवं रेखा के मध्य के कोण का पूरक (complement) होता है।

सदिश रूपः माना समतल का समीकरण है $\vec{r}\cdot\vec{n} = d$, जहाँ $\vec{n}$ समतल के अभिलम्ब सदिश है, तथा रेखा का समीकरण $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ है। यह रेखा, बिन्दु जिसका स्थिति सदिश $\vec{a}$ है, से गुजरती है, तथा सदिश $\vec{b}$ के समान्तर है।

यदि θ समतल और रेखा के मध्य कोण है, तो रेखा व समतल का अभिलम्ब के मध्य कोण $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ होगा। अतः

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|} \qquad \text{या} \qquad \sin\theta = \frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|}$$



आकृति 14.11

टिप्पणीः (i) रेखा समतल के लम्बवत होगी, यदि $\vec{b}\times\vec{n} = \vec{O}$ या $\vec{b} = \lambda\vec{n}$.

(ii) रेखा समतल के समान्तर होगी यदि $\vec{b}\cdot\vec{n} = 0$.

कार्तीय रूपः माना समतल का समीकरण है

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (1)$$

तथा रेखा का समीकरण है

$$\frac{x - x_1}{\ell} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \qquad (2)$$

समतल (1) के अभिलम्ब के दिक् अनुपात a, b, c हैं तथा रेखा (2) के दिक् अनुपात l, m, n हैं। यदि सरल रेखा और समतल के मध्य कोण θ है, तो अभिलम्ब एवं रेखा के मध्य कोण $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ होगा।

$$\therefore \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{al + bm + cn}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}\sqrt{(l^2+m^2+n^2)}}$$

या

$$\sin\theta = \frac{al + bm + cn}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}\sqrt{(l^2+m^2+n^2)}}$$

टिप्पणीः (i) रेखा समतल के लम्बवत होगी, यदि $\frac{a}{\ell} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n}$.

(ii) रेखा समतल के समान्तर होगी यदि, $a\ell + bm + cn = 0$.

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-29. समतलों $\vec{r}\cdot(2i-3j+4k)=1$ और $\vec{r}\cdot(-i+j)=4$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

हलः हम जानते हैं कि दो समतलों $\vec{r}\cdot\vec{n}_1=d_1$ और $\vec{r}\cdot\vec{n}_2=d_2$ के मध्य कोण

$$\cos\theta=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|},$$

यहाँ $\vec{n}_1=2i-3j+4k$ तथा $\vec{n}_2=-i+j+0k$

$$\therefore \qquad \cos\theta=\frac{-2-3+0}{\sqrt{4+9+16}\sqrt{1+1}}=\frac{-5}{\sqrt{29}\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \qquad \theta=\cos^{-1}\left(\frac{-5}{\sqrt{58}}\right)$$

उदाहरण-30. सिद्ध कीजिए कि समतल $2x+6y+6z=7$ और $3x+4y-5z=8$ परस्पर लम्बवत है।

हलः हम जानते है कि समतल

$$2x+6y+6z=7$$

और

$$3x+4y-5z=8$$

परस्पर लम्बवत होंगे, यदि इनके अभिलम्ब परस्पर लम्बवत होंगे।

अर्थात् $\qquad 2(3)+6(4)+6(-5)=0$

या $\qquad 6+24-30=0$

जो कि सत्य है, अतः दिये गये समतल परस्पर लम्बवत है।

उदाहरण-31. यदि समतल $\vec{r}\cdot(i+2j+3k)=7$ और $\vec{r}\cdot(\lambda i+2j-7k)=26$ परस्पर लम्बवत है, तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः हम जानते हैं कि समतल $\vec{r}\cdot\vec{n}_1=d_1$ और $\vec{r}\cdot\vec{n}_2=d_2$ परस्पर लम्बवत होंगे यदि

$$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$$

दिये समतलों से $\vec{n}_1=(i+2j+3k)$ तथा $\vec{n}_2=(\lambda i+2j-7k)$, अतः प्रतिबंधानुसार

$$(i+2j+3k)\cdot(\lambda i+2j-7k)=0$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda+4-21=0 \text{ या } \lambda=17$$

उदाहरण-32. रेखा $\vec{r}=(2i+2j+9k)+\lambda(2i+3j+4k)$ और समतल $\vec{r}\cdot(i+j+k)=5$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

हलः हम जानते हैं कि रेखा $\vec{r}=\vec{a}+\lambda\vec{b}$ और समतल $\vec{r}\cdot\vec{n}=d$ के मध्य कोण θ हो, तो

$$\sin\theta=\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|}$$

अतः मानक समीकरणों से तुलना करने पर, यहाँ

$$\vec{b}=2i+3j+4k \qquad \text{और} \qquad \vec{n}=i+j+k$$

$$\therefore \qquad \sin\theta=\frac{(2i+3j+4k)\cdot(i+j+k)}{\sqrt{4+9+16}\sqrt{1+1+1}}=\frac{9}{\sqrt{87}}$$

$$\Rightarrow \qquad \theta=\sin^{-1}\left(\frac{9}{\sqrt{87}}\right) \qquad \text{या} \qquad \theta=\sin^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{29}}\right)$$

उदाहरण-33. रेखा $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{1}$ और समतल $2x+y-z=4$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

हलः समतल $$2x+y-z=4 \qquad (1)$$

के अभिलम्ब सदिश $\vec{n}=2i+j-k$ तथा रेखा $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{1}$ के समान्तर सदिश $\vec{b}=i-j+k$ है। यदि समतल और सरल रेखा के मध्य कोण θ हो, तो

$$\sin\theta=\frac{(i-j+k)\cdot(2i+j-k)}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{4+1+1}}=\frac{2-1-1}{\sqrt{3}\sqrt{6}}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \theta=0$$

उदाहरण-34. यदि रेखा $\vec{r}=(i-2j+k)+\lambda(2i+j+2k)$, समतल $\vec{r}\cdot(3i-2j+mk)=4$ के समान्तर हो, तो m का मान ज्ञात कीजिए।

हलः दी गई रेखा, सदिश $\vec{b}=2i+j+2k$ के समान्तर है और समतल का अभिलम्ब सदिश $\vec{n}=3i-2j+mk$ है। क्योंकि दी गई रेखा समतल के समान्तर है अतः $\vec{b}\perp\vec{n}$

$$\Rightarrow \qquad \vec{b}\cdot\vec{n}=0$$
$$\Rightarrow \qquad (2i+j+2k)\cdot(3i-2j+mk)=0$$
$$\Rightarrow \qquad 6-2+2m=0$$
$$\Rightarrow \qquad m=-2$$

14.19 समतल से बिन्दु की दूरी (Distance of a point from a plane)

एक बिन्दु जिसका स्थिति सदिश $\vec{a}$ है, से समतल $\vec{r}\cdot\vec{n}=q$ पर डाले गये लम्ब की लम्बाई ज्ञात करनाः

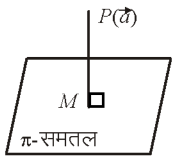
माना π दिया गया समतल है तथा P बिन्दु का स्थिति सदिश $\vec{a}$ है। माना बिन्दु P से π समतल पर डाले गये लम्ब की लम्बाई PM है।

$\because$ रेखा PM, बिन्दु $P(\vec{a})$ से गुजरती है तथा समतल π के अभिलम्ब सदिश $\vec{n}$ के समान्तर है।

$\therefore$ रेखा PM का सदिश समीकरण $\vec{r}=\vec{a}+\lambda\vec{n}$ होगा, जहां λ अदिश है।

पुनः बिन्दु M, रेखा PM तथा π समतल का प्रतिच्छेदन बिन्दु है। अतः बिन्दु M समतल के सदिश समीकरण को संतुष्ट करेगा।

$$\therefore \qquad (\vec{a}+\lambda\vec{n})\cdot\vec{n}=q$$
$$\Rightarrow \qquad \vec{a}\cdot\vec{n}+\lambda\vec{n}\cdot\vec{n}=q$$
$$\Rightarrow \qquad \vec{a}\cdot\vec{n}+\lambda|\vec{n}|^2=q$$
$$\Rightarrow \qquad \lambda=\frac{q-\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}$$



आकृति 14.12

λ का यह मान रेखा PM के समीकरण में रखने से बिन्दु M का स्थिति सदिश

$$\vec{r}=\vec{a}+\frac{q-\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$$, प्राप्त होता है।

$$\therefore \qquad \overrightarrow{PM}=(M \text{ का स्थिति सदिश})-(P \text{ का स्थिति सदिश})$$
$$=\vec{a}+\frac{q-\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}-\vec{a}=\frac{(q-\vec{a}\cdot\vec{n})\vec{n}}{|\vec{n}|^2}$$

$$\therefore \qquad PM = |\overrightarrow{PM}| = \frac{|(q - \vec{a}\cdot\vec{n})\vec{n}|}{|\vec{n}|^2} = \frac{|(q - \vec{a}\cdot\vec{n})||\vec{n}|}{|\vec{n}|^2} = \frac{|(q - \vec{a}\cdot\vec{n})|}{|\vec{n}|}$$

अतः अभीष्ट लम्बाई $\dfrac{|q - \vec{a}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$ या $\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{n} - q|}{|\vec{n}|}$ होगी।

टिप्पणी: (i)
$$\overrightarrow{PM} = (PM)\hat{n} = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{n} - q|}{|\vec{n}|}\hat{n}$$
$$= \frac{|\vec{a}\cdot\vec{n} - q|}{|\vec{n}|} \times \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{n} - q|\vec{n}}{|\vec{n}|^2}$$

(ii) मूल बिन्दु से समतल $\vec{r}\cdot\vec{n} = q$ पर डाले गये लम्ब की लम्बाई

$$= \frac{q}{|\vec{n}|} \qquad [\text{यहाँ } \vec{a} = \vec{0}]$$

कार्तीय रूप: बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ से समतल $ax + by + cz + d = 0$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई ज्ञात करना:

माना बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ से समतल $ax + by + cz + d = 0$ पर डाले गए लम्ब का पाद M है। अतः रेखा PM का समीकरण

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}, \qquad (1)$$

होगा। क्योंकि समतल के अभिलम्ब के दिक् अनुपात a, b, c रेखा PM के दिक् अनुपात होंगे। अतः इस रेखा पर किसी बिन्दु के निर्देशांक $(x_1 + ar,\ y_1 + br,\ z_1 + cr)$ होंगे, जहाँ r एक वास्तविक संख्या है। यदि यह बिन्दु M के निर्देशांक है तो समतल के समीकरण को संतुष्ट करेंगे, अर्थात्

$$a(x_1 + ar) + b(y_1 + br) + c(z_1 + cr) + d = 0$$

या
$$r = -\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \qquad (2)$$

अब
$$PM = \sqrt{\{(x_1 + ar - x_1)^2 + (y_1 + br - y_1)^2 + (z_1 + cr - z_1)^2\}}$$
$$= |r|\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$$

अब
$$PM = \left|-\frac{(ax_1 + by_1 + cz_1 + d)}{(a^2 + b^2 + c^2)}\right|\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)} \qquad [(2) \text{ के प्रयोग से}]$$

अतः अभीष्ट लम्बाई $\left|(ax_1 + by_1 + cz_1 + d)/\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}\right|$ होगी।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-35. बिन्दु जिसका स्थिति सदिश $2i - j - 4k$ है, की समतल $\vec{r}\cdot(3i - 4j + 12k) - 9 = 0$ से लम्ब दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि बिन्दु जिसका स्थिति सदिश $\vec{a}$ है, की समतल $\vec{r}\cdot\vec{n} = q$ से लम्ब दूरी $\left|\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{n} - q}{\vec{n}}\right|$ होती है।

यहाँ $\vec{a} = 2i - j - 4k,\ \vec{n} = 3i - 4j + 12k$ तथा $q = 9$ हैं।

$$\therefore \quad \text{अभीष्ट दूरी} = \frac{|(2i - j - 4k)\cdot(3i - 4j + 12k) - 9|}{\sqrt{(9 + 16 + 144)}} = \frac{47}{13}$$

उदाहरण-36. प्रदर्शित कीजिए कि बिन्दु $A(1,-1,3)$ तथा $B(3,3,3)$, समतल $\vec{r}\cdot(5i+2j-7k)+9=0$ से बराबर दूरी पर है।

हल: बिन्दु A का स्थित सदिश $i-j+3k$ है।

$\therefore$ बिन्दु A की समतल से लम्ब दूरी $=\dfrac{|(i-j+3k)\cdot(5i+2j-7k)+9|}{\sqrt{(25+4+49)}}=\dfrac{9}{\sqrt{78}}$ (1)

पुनः बिन्दु B का स्थिति सदिश $3i+3j+3k$ है।

$\therefore$ बिन्दु B की समतल से लम्ब दूरी $=\dfrac{|(3i+3j+3k)\cdot(5i+2j-7k)+9|}{\sqrt{(25+4+49)}}=\dfrac{9}{\sqrt{78}}$ (2)

समीकरण (1) व (2) से हम निष्कर्ष निकालते हैं कि दिये गये बिन्दु समतल से बराबर दूरी पर है।

प्रश्नमाला 14.7

1. निम्न समतलों के मध्य कोण ज्ञात कीजिए:
   (i) $\vec{r}\cdot(2i-j+2k)=6$ तथा $\vec{r}\cdot(3i+6j-2k)=9$
   (ii) $\vec{r}\cdot(2i+3j-6k)=5$ तथा $\vec{r}\cdot(i-2j+2k)=9$
   (iii) $\vec{r}\cdot(i+j+2k)=5$ तथा $\vec{r}\cdot(2i-j+2k)=6$
2. निम्न समतलों के मध्य कोण ज्ञात कीजिए:
   (i) $x+y+2z=9$ और $2x-y+z=15$
   (ii) $2x-y+z=4$ और $x+y+2z=3$
   (iii) $x+y-2z=3$ और $2x-2y+z=5$
3. सिद्ध कीजिए कि निम्न समतल परस्पर लम्बवत है।
   (i) $x-2y+4z=10$ और $18x+17y+4z=49$
   (ii) $\vec{r}\cdot(2i-j+k)=4$ और $\vec{r}\cdot(-i-j+k)=3$
4. ; fn fuEu l ery i jLi j y Ecor gks r ks λ का मान ज्ञात कीजिए।
   (i) $\vec{r}\cdot(2i-j+\lambda k)=5$ और $\vec{r}\cdot(3i+2j+2k)=4$
   (ii) $2x-4y+3z=5$ और $x+2y+\lambda z=5$
5. रेखा $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{4}$ और समतल $2x+y-3z+4=0$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।
6. रेखा $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$ और समतल $3x+4y+z+5=0$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।
7. रेखा $\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})+\lambda(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$ और समतल $\vec{r}\cdot(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})=4$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।
8. रेखा $\vec{r}=(2i+3j+k)+\lambda(i+2j-k)$ और समतल $\vec{r}\cdot(2i-j+k)=4$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।
9. यदि रेखा $\vec{r}=(\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})+\lambda(2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})$, समतल $\vec{r}\cdot(3\hat{i}-2\hat{j}+m\hat{k})=3$ के समान्तर हो, तो m का मान ज्ञात कीजिए।
10. यदि रेखा $\vec{r}=i+\lambda(2i-mj-3k)$, समतल $\vec{r}\cdot(mi+3j+k)=4$ के समान्तर हो, तो m का मान ज्ञात कीजिए।

विविध प्रश्नमाला—14

1. निम्न में से कौनसा समूह एक रेखा की दिक् कोज्याएँ नहीं हैः
(क) 1, 1, 1 (ख) 0, 0, –1 (ग) –1, 0, 0 (घ) 0, –1, 0

2. बिन्दु P समष्टि में इस प्रकार है कि $OP = 6$ तथा $\overrightarrow{OP}, OX$ तथा OY -अक्षों के साथ क्रमशः 45° व 60° के कोण बनाता है तो P का स्थिति सदिश होगाः
(क) $3i + 3j \pm 3\sqrt{2}k$ (ख) $6i + 6\sqrt{2}j \pm 6k$ (ग) $3\sqrt{2}i + 3j \pm 3k$ (घ) $3i + 3\sqrt{2}j \pm 3k$

3. धन के दो विकर्णों के मध्य का कोण होगा
(क) 30° (ख) 45° (ग) $\cos^{-1}(1/\sqrt{3})$ (घ) $\cos^{-1}(1/3)$

4. सदिश $3i$ की दिक् कोज्याएं होगीः
(क) 3, 0, 0 (ख) 1, 0, 0 (ग) –1, 0, 0 (घ) –3, 0, 0

5. सरल रेखा $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-4}{-5} = \dfrac{x+7}{13}$ का सदिश रूप होगा
(क) $(3i + 4j - 7k) + \lambda(-2i - 5j + 13k)$ (ख) $(-2i - 5j + 13k) + \lambda(3i + 4j - 7k)$
(ग) $(-3i - 4j + 7k) + \lambda(-2i - 5j + 13k)$ (घ) इनमें से कोई नहीं

6. रेखाएँ $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+2}{\lambda} = \dfrac{z-1}{-1}$ तथा $\dfrac{x-1}{-\lambda} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+1}{1}$ परस्पर लम्बवत हो तो λ का मान होगा
(क) 0 (ख) 1 (ग) –1 (घ) 2

7. रेखाओं $\vec{r} = (5i + 7j + 3k) + \lambda(5i - 16j + 7k)$ तथा $\vec{r} = (9i + 13j + 15k) + \mu(3i + 8j - 5k)$ के मध्य लघुत्तम दूरी है
(क) 10 इकाई (ख) 12 इकाई (ग) 14 इकाई (घ) 7 इकाई

8. रेखा $\vec{r} = (2i - j + k) + \lambda(-i + j + k)$ तथा समतल $\vec{r} \cdot (3i + 2j - k) = 4$ के मध्य कोण होगा
(क) $\sin^{-1}(-2/\sqrt{42})$ (ख) $\sin^{-1}(2/\sqrt{42})$ (ग) $\cos^{-1}(-2/\sqrt{42})$ (घ) $\cos^{-1}(2/\sqrt{42})$

9. समीकरण $lx + my + nz = p$ समतल का अभिलम्ब रूप है तो निम्न में से असत्य हैः
(क) l, m, n समतल के अभिलम्ब की दिक् कोज्याएं हैं। (ख) p, समतल की मूल बिन्दु से लम्बवत दूरी है।
(ग) p के प्रत्येक मान के लिए समतल मूल बिन्दु से गुजरता हैं। (घ) $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

10. एक समतल निर्देशांक अक्षों को A, B, C पर इस प्रकार मिलता है कि त्रिभुज ABC का केन्द्रक (1, 2, 3) है तो समतल का समीकरण होगा
(क) $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 1$ (ख) $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = \dfrac{1}{6}$ (ग) $\dfrac{x-1}{1} + \dfrac{y-2}{2} + \dfrac{z-3}{3} = 1$ (घ) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{6} + \dfrac{z}{9} = 1$

11. दो बिन्दुओं के स्थिति सदिश क्रमशः $P(2i + j + 3k)$ तथा $Q(-4i - 2j + k)$ हैं। Q से गुजरने वाले तथा PQ के लम्बवत समतल का समीकरण होगाः
(क) $\vec{r} \cdot (6i + 3j + 2k) = 28$ (ख) $\vec{r} \cdot (6i + 3j + 2k) = 32$
(ग) $\vec{r} \cdot (6i + 3j + 2k) + 28 = 0$ (घ) $\vec{r} \cdot (6i + 3j + 2k) + 32 = 0$

12. दो रेखाओं की दिक् कोज्याएं निम्न सम्बन्धों द्वारा दी गई हैं, उन्हें ज्ञात कीजिए।
$$l - 5m + 3n = 0 \quad \text{तथा} \quad 7l^2 + 5m^2 - 3n^2 = 0$$

13. एक रेखा खण्ड का अक्षों पर प्रक्षेप –3, 4, –12 है। रेखा खण्ड की लम्बाई तथा दिक् कोज्याएं ज्ञात कीजिए।

14. सिद्ध कीजिए कि बिन्दुओं (a, b, c) और (a', b', c') को मिलाने वाली रेखा मूल बिन्दु से गुजरती है, यदि $aa' + bb' + cc' = pp'$, जहाँ p और p' इन बिन्दुओं की मूल बिन्दु से दूरियाँ हैं।

15. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $P(-2, 1, 2)$ से गुजरता है एवं दो सदिशों $\vec{a} = -i + 2j - 3k$ तथा $\vec{b} = 5i - j + k$ के समान्तर है।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. **एक रेखा की दिक् कोज्याएँ:** यदि एक रेखा OP (सदिश $\overrightarrow{OP}$) निर्देशांक अक्षों की धनात्मक दिशाओं के साथ क्रमशः α, β, γ कोण बनाये तो $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ को रेखा OP (सदिश $\overrightarrow{OP}$) की दिक् कोज्याएं कहते हैं तथा साधारणतः इनको l, m, n से निरूपित किया जाता है।

   यहाँ $0 \le \alpha, \beta, \gamma \le \pi$.

   (i) सदिश $\overrightarrow{PO}$; OX, OY तथा OZ – अक्षों के साथ कोण $\pi-\alpha, \pi-\beta, \pi-\gamma$ बनाता है। अतः $\overrightarrow{PO}$ की दिक्-कोज्याएं $\cos(\pi-\alpha), \cos(\pi-\beta)$, $\cos(\pi-\gamma)$ अर्थात् $-l, -m, -n$ होगी।

   अतः यदि l, m, n किसी रेखा की दिक् कोज्याएं है तो $-l, -m, -n$ भी उसी रेखा की दिक् कोज्याएं होगी क्योंकि हर स्थिति में आधार रेखा वही है।

   (ii) X, Y तथा Z- अक्षों की दिक् कोज्याएं क्रमशः 1, 0, 0; 0, 1, 0 तथा 0, 0, 1 हैं।

2. **निर्देशांक अक्षों पर एक सदिश का प्रक्षेप:** यदि $\vec{r}$ दिया गया सदिश हैं एवं l, m, n इसकी दिक् कोज्याएं हैं तो इस सदिश का X, Y तथा Z- अक्षों पर प्रक्षेप क्रमशः lr, mr तथा nr होते हैं।

3. **दिक् कोज्याओं के रूप में एक बिन्दु के निर्देशांक:** यदि $P(x, y, z)$ एक बिन्दु है तो इसके निर्देशांक (lr, mr, nr) होंगे, जहाँ $l, m, n, \overrightarrow{OP}$ की दिक् कोज्याएँ हैं तथा $|\vec{r}| = r$, $\overrightarrow{OP}$ का परिमाण है।

4. **इकाई सदिश $\hat{r}$ को दिक् कोज्याओं के रूप में व्यक्त करना:**

$$\hat{r}\,(\vec{r} \text{ की दिशा में इकाई सदिश}) = li + mj + nk,$$

   जहाँ l, m, n सदिश $\vec{r}$ की दिक् कोज्याएं हैं।

5. $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, जहाँ l, m, n किसी रेखा की दिक् कोज्याएँ हैं।

6. **एक रेखा के दिक् अनुपात:** किसी सदिश $\vec{r}$ के लिए तीन संख्याओं का एक समूह जो दिक् कोज्याओं l, m, n के समानुपाती हो, को सदिश $\vec{r}$ के दिक् अनुपात कहते हैं।

7. **दिक् अनुपातों का दिक् कोज्याओं में परिवर्तन:** माना $\vec{r} = ai + bj + ck$ एक सदिश है इसके दिक् अनुपात i, j, k के गुणांक a, b तथा c हैं। अतः इस रेखा की दिक् कोज्याएँ l, m, n निम्न प्रकार से प्राप्त होती हैः

$$l = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}},\quad m = \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}},\quad n = \frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}$$

8. **दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा के दिक् अनुपात तथा दिक् कोज्याएँ:** माना दिये गये दो बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ हैं। तब $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ रेखा PQ के दिक् अनुपात है तथा $\frac{x_2-x_1}{PQ}, \frac{y_2-y_1}{PQ}, \frac{z_2-z_1}{PQ}$ रेखा की दिक् कोज्याएँ हैं,

   जहाँ
$$PQ = \sqrt{\left\{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2\right\}}$$

9. दी गई दिक् कोज्याओं l, m, n वाली रेखा के समान्तर तथा दिए गए बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ से गुजरने वाली रेखा का समीकरण $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} = r$.

10. j§kkij fLFkr fdl h Hkh fcUnq ds funZ'kkad $(lr+x_1, mr+y_1, nr+z_1)$ जहाँ r प्राचल (parameter) हैं तथा ये ऐसे बिन्दु के निर्देशांक है जो रेखा पर बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ से r दूरी पर है।

11. यदि दिक् अनुपात a, b, c दिये हो तो रेखा का समीकरण

$$\frac{x-x_1}{a/\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{y-y_1}{b/\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{z-z_1}{c/\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = r$$

या $$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} = R, \quad R = \frac{r}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

12. इस रेखा पर स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक $(ar+x_1, br+y_1, cr+z_1)$ होंगे परन्तु इस स्थिति में यह बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ से दूरी r पर स्थित नहीं होगा।

13. दिये गये बिन्दु जिसका स्थिति सदिश $\vec{a}$ है से गुजरने वाली तथा एक सदिश $\vec{b}$ के समान्तर सरल रेखा का समीकरण $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$, λ कोई वास्तविक संख्या है।

14. यदि उपरोक्त रेखा मूल बिन्दु से गुजरे तो $\vec{r} = \lambda\vec{b}$.

15. **विषमतलीय रेखाएं:** दो असमान्तर एवं परस्पर न काटने वाली रेखाएँ अर्थात् एक ही समतल में न होने वाली असमतलीय रेखाएं, विषमतलीय रेखाएं कहलाती है।

16. **लघुत्तम दूरी की रेखा:** दो विषम तलीय रेखाएँ AB और CD हो, इनके बीच की दूरी दोनों के लम्बवत होती है, जिसे लघुत्तम दूरी की रेखा कहते हैं।

17. **लघुत्तम दूरी:** दो विषमतलीय रेखाओं

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \text{ और } \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$ के मध्य लघुत्तम दूरी

$$= \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \div \sqrt{\left\{\sum (m_1n_2 - m_2n_1)^2\right\}}$$

18. यदि लघुत्तम दूरी शून्य हो, तो रेखाएं समतलीय होंगी, जिसका प्रतिबन्ध

$$= \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

19. **लघुत्तम दूरी:** दो विषम तलीय रेखाओं

$$\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1 \quad \text{और} \quad \vec{r} = \vec{a}_2 + \lambda\vec{b}_2$$

के मध्य लघुत्तम दूरी $= d$ $$= \left|\frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right|$$

20. दो समतलों $\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = d_1$ और $\vec{r}\cdot\vec{n}_2 = d_2$ के मध्य कोण θ हो, तो

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} \quad \text{या} \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right)$$

(i) दोनों समतल परस्पर लम्बवत होंगे यदि $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.

(ii) दोनों समतल परस्पर समान्तर होंगे यदि $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$, जहाँ λ अचर है।

21. दो समतलों $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ के मध्य कोण θ हो, तो

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

(i) दोनों समतल परस्पर लम्बवत होंगे यदि $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

(ii) दोनों समतल समान्तर होंगे, यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

22. दो रेखाओं $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \lambda \vec{b}_2$ के मध्य कोण θ हो, तो

$$\cos\theta = \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|} \qquad \text{या} \qquad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}\right)$$

(i) दोनों रेखाएँ परस्पर लम्बवत होंगी, यदि $\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = 0$.

(ii) दोनों रेखाएँ परस्पर समान्तर होंगी, यदि $\vec{b}_1 = \lambda \vec{b}_2$, जहाँ λ अचर है।

23. दो रेखाओं $\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$ और $\frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$ के मध्य कोण θ हो, तो

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

(i) दोनों रेखाएँ परस्पर लम्बवत होंगी, यदि $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

(ii) दोनों रेखाएँ परस्पर समान्तर होंगी, यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

24. एक रेखा व समतल के मध्य कोण, समतल के अभिलम्ब व रेखा के मध्य के कोण का पूरक (complement) होता है। माना समतल का समीकरण $\vec{r} \cdot \vec{n} = d$ और रेखा का समीकरण $\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$ है। यदि इनके मध्य कोण θ है, तो

$$\sin\theta = \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|}$$

(i) रेखा समतल के लम्बवत होगी, यदि $\vec{b} \times \vec{n}$ या $\vec{b} = \lambda \vec{n}$.

(ii) रेखा समतल के समान्तर होगी, यदि $\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$.

25. **समतल का व्यापक समीकरणः**

$$ax + by + cz + d = 0,$$

जहाँ a, b, c, d अचर राशियाँ है तथा a, b, c सभी शून्य नहीं हैं।

(a) x, y, z में प्रथम घात का समीकरण सदैव एक समतल को निरूपित करता है।

(b) समतल के समीकरण में केवल तीन स्वतंत्र अचर होते हैं।

26. **एक बिन्दु (x_1, y_1, z_1) से गुजरने वाले समतल का समीकरणः**

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0,$$

जहाँ a, b, c अचर है।

27. **समतल का अन्तः खण्ड रूप में समीकरणः**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

जहाँ a, b तथा c क्रमशः X, Y तथा Z- अक्षों पर अन्तः खण्ड है।

28. **अभिलम्ब रूप में समतल का समीकरणः**

$$\vec{r} \cdot \hat{n} = p,$$

यहाँ p मूल बिन्दु से समतल की लम्बवत दूरी है तथा $\hat{n}$ समतल के अभिलम्ब इकाई सदिश है।

टिप्पणीः अभिलम्ब में समतल का समीकरण $\vec{r} \cdot \vec{n} = q$ रूप में भी लिखा जा सकता है, यहाँ

$$q = |\vec{n}|\, p.$$

29. **समतल से बिन्दु की दूरीः**

$$d = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n} - q|}{|\vec{n}|},$$

जहाँ $\vec{a}$ बिन्दु का स्थिति सदिश है तथा $\vec{r} \cdot \vec{n} = q$ समतल का समीकरण है।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 14.1

1. $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ 2. $0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{4}{5}$ 3. $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$ 4. $\sqrt{2}\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$

प्रश्नमाला 14.2

1. (i) $\frac{x-5}{0}=\frac{y-7}{0}=\frac{z-9}{0}$; (ii) $\frac{x-5}{0}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-9}{0}$; (iii) $\frac{x-5}{0}=\frac{y-7}{0}=\frac{z-9}{1}$

2. $\vec{r}=\left(2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}\right)+\lambda\left(3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}\right)$; $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-4}{-5}$ 3. $\vec{r}=5\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}+\lambda\left(2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}\right)$

4. $\vec{r}=\left(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)+\lambda\left(2\hat{i}+7\hat{j}-3\hat{k}\right)$ 5. $\vec{r}=\left(5\hat{i}-4\hat{j}+6\hat{k}\right)+\lambda\left(3\hat{i}+7\hat{j}+2\hat{k}\right)$ 6. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{14}=\frac{z-3}{3}$

7. (i) AB का समीकरण: $\vec{r}=\left(4\hat{i}+5\hat{j}+10\hat{k}\right)+\mu\left(\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}\right)$; $\frac{x-4}{1}=\frac{z-5}{1}=\frac{z-10}{3}$

(ii) BC का समीकरण: $\vec{r}=\left(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}\right)+\lambda\left(\hat{i}+\hat{j}+5\hat{k}\right)$; $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{5}$; (iii) D के निर्देशांक: (3, 4, 5)

8. $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$; 2, 1, −6; $\vec{r}=-\frac{1}{3}\hat{i}+\frac{1}{3}\hat{j}+\hat{k}+\lambda\left(2\hat{i}+\hat{j}-6\hat{k}\right)$

9. $\vec{r}=\left(2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}\right)+\lambda\left(3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}\right)$; $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-2}$

10. $\vec{r}=\left(2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}\right)+\lambda\left(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}\right)$; $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-4}{-1}$ 11. $\frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+5}{6}$

12. $\vec{r}=\left(5\hat{i}-4\hat{j}+6\hat{k}\right)+\lambda\left(3\hat{i}+7\hat{j}+2\hat{k}\right)$ 13. $\frac{x}{5}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{3}$; $\vec{r}=\lambda\left(5\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}\right)$

14. $\vec{r}=\left(3\hat{i}-2\hat{j}-5\hat{k}\right)+\lambda\left(11\hat{k}\right)$; $\frac{x-3}{0}=\frac{z+2}{0}=\frac{z+5}{11}$

प्रश्नमाला 14.3

1. $\theta=\cos^{-1}(19/21)$ 2. $\theta=\cos^{-1}(2/3)$ 4. $k=-10/7$

5. $\vec{r}=\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}+\lambda\left(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}\right)$; $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+4}{6}$ 6. $\frac{x+}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+5}{6}$

प्रश्नमाला 14.4

1. $(-1, -1, -1)$ 2. नहीं 3. $\left(\frac{170}{49}, \frac{78}{49}, \frac{10}{49}\right)$; $\frac{3}{7}\sqrt{101}$ 4. $\vec{r}=\left(2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}\right)+\lambda\left(2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k}\right)$; $\frac{\sqrt{580}}{7}$

प्रश्नमाला 14.5

1. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 2. $2\sqrt{29}$ 3. $\frac{3}{\sqrt{19}}$ 4. $\frac{8}{\sqrt{29}}$ 5. $\frac{3}{\sqrt{59}}$; $\frac{59x-253}{1}=\frac{59y-232}{-3}=\frac{592-97}{7}$

प्रश्नमाला 14.6

1. $x-2=0$ 2. $2y-z=0$ 4. $\vec{r}\cdot i=7$ 5. $\vec{r}\cdot\left(\frac{6}{7}i+\frac{3}{7}j-\frac{2}{7}k\right)=7$ या $\vec{r}\cdot(6i+3j-2k)=49$

6. $\vec{r}\cdot\left(\frac{3}{13}i-\frac{4}{13}j+\frac{12}{13}k\right)=\frac{5}{13};\ \frac{5}{13};\ \frac{3}{13},-\frac{4}{13},\frac{12}{13}$ या $\frac{3}{13}x-\frac{4}{13}y+\frac{12}{13}z=\frac{5}{13};\ \frac{5}{13};\ \frac{3}{13},-\frac{4}{13},\frac{12}{13}$

7. $\vec{r}\cdot\left(\frac{2}{3}i-\frac{1}{3}j+\frac{2}{3}k\right)=4$ 8. $-\frac{2}{7}x+\frac{3}{7}y-\frac{6}{7}z=2$ 9. $\frac{4}{13}x-\frac{3}{13}y+\frac{12}{13}z=13$ 10. $\frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k)$

प्रश्नमाला 14.7

1. (i) $\cos^{-1}\left(-\frac{4}{21}\right)$; (ii) $\cos^{-1}\left(-\frac{16}{21}\right)$; (iii) $\cos^{-1}\left(\frac{5}{3\sqrt{6}}\right)$ 2. (i) $\theta=\frac{\pi}{3}$; (ii) $\theta=\frac{\pi}{3}$; (iii) $\cos^{-1}\left(-\frac{2}{3\sqrt{6}}\right)$

4. (i) $\lambda=-2$; (ii) $\lambda=2$ 5. $\sin^{-1}\left(\frac{-4}{\sqrt{406}}\right)$ 6. $\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{7}{52}}\right)$ 7. $\sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

8. $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{6}\right)$ 9. $m=-2$ 10. $m=-3$

विविध प्रश्नमाला—14

1. (क) 2. (ग) 3. (घ) 4. (ख) 5. (ग) 6. (ख) 7. (क)
8. (क) 9. (ग) 10. (घ) 11. (ग)

12. $-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}};\ \frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}$ 13. $13;\ -\frac{3}{13},\frac{4}{13},-\frac{12}{13}$

14. $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right);\ x-2y+z=0$ 15. $x+14y+9z=30$

15

रैखिक प्रोगामन
(Linear Programming)

15.01 भूमिका (Introduction)

मानव, जीवन के प्रत्येक क्षेत्र में उपस्थित समस्याओं का समाधान तत्कालीन परिस्थितियों में अपने लिए अनुकूलतम प्रकार से करना चाहता है। एक प्रान्त का आदर्श मुख्यमंत्री सदैव उपलब्ध संसाधनों से अपने प्रान्त के निवासियों के लिए अधिकाधिक खुशहाली प्राप्त करने के लिए प्रयत्नशील रहता है, एक कंपनी का अध्यक्ष उसे उपलब्ध संसाधनों से हमेशा अपनी कंपनी के लिए अधिकाधिक संभव लाभ प्राप्त करने की उम्मीद करता है, एक सेनाध्यक्ष उसे उपलब्ध संसाधनों को ध्यान में रखते हुए सदैव अपनी सेना को इस प्रकार गठित करने का प्रयास करता है ताकि उसकी आक्रामक शक्ति अधिकतम हो, एक उत्पादन प्रबंधक सदैव इस दिशा में प्रयास करता है कि उत्पाद की कीमत किस प्रकार यथासंभव कम की जा सकती है। व्यापार अथवा उद्योग में कई ऐसी परिस्थितियाँ आती है जबकि व्यापारी को अपने सीमित संसाधनों को दो या दो से अधिक प्रतिस्पर्धी क्रियाकलापों में इस प्रकार से आवंटित करना होता है जिससे वह लागत को न्यूनतम रखते हुए लाभ को अधिकतम कर सके। रैखिक प्रोगामन का उपयोग सरकारी, व्यापारिक व अन्य विकसित औद्योगिक प्रतिष्ठानों द्वारा अनेक प्रकार की व्यावहारिक समस्याओं का अनुकूलतम हल निकालने के लिए किया जाता है।

परिभाषा (Definition)

रैखिक प्रोगामन एक ऐसी गणितीय प्रविधि है जो उपलब्ध सीमित साधनों का परस्पर प्रतिस्पर्धी क्रियाकलापों में अनुकूलतम प्रकार से आवंटन करने के लिए प्रयुक्त की जाती है जबकि प्रयुक्त सभी चरों के मध्य रेखीय संबंध हो।

15.02 रैखिक प्रोगामन समस्या और उसका गणितीय संरूपण (Linear programming problem and its mathematical formulation)

एक व्यावहारिक उदाहरण की सहायता से रैखिक प्रोगामन समस्या तथा इसके गणितीय संरूपण को समझने का प्रयास करते है।

उदाहरण: एक उत्पादक दो प्रकार के उत्पाद P_1 व P_2 दो मशीनों M_1 व M_2 की सहायता से बनाता है। उत्पाद P_1 की एक इकाई तैयार करने के लिए मशीन M_1 पर 1 घण्टा तथा मशीन M_2 पर 3 घण्टे कार्य करना होता है तथा उत्पाद P_2 की एक इकाई तैयार करने के लिए प्रत्येक मशीन पर 2 घण्टे कार्य करना होता है। यदि P_1 व P_2 के प्रति इकाई लाभ क्रमशः ₹ 60 व ₹ 50 हो तथा मशीन M_1 व M_2 एक सप्ताह में क्रमशः 40 व 60 घण्टे तक कार्य कर सकती हो, तो दोनों उत्पादों की कितनी–कितनी इकाईयाँ बनानी चाहिए, ताकि कुल लाभ अधिकतम हो। इस उदाहरण से यह स्पष्ट है कि

(i) उत्पादक, केवल उत्पाद P_1 या उत्पाद P_2 या दोनों के उचित संयोजनों में उत्पादन कर सकता है। इस प्रकार वह उत्पादन की विभिन्न योजनात्मक संयोजनों से विभिन्न लाभ अर्जित कर सकता है।

(ii) इस समस्या में कुछ अन्य महत्वपूर्ण स्थितियों या व्यवरोधों का भी समावेश है जैसे मशीन M_1 व M_2 एक सप्ताह में क्रमशः 40 व 60 घण्टे तक ही कार्य कर सकती है।

माना कि उत्पादक केवल P_1 प्रकार के उत्पाद बनाने का निश्चय करता है तब वह P_1 प्रकार के केवल 20 इकाई ही बना सकता है तथा इस अवस्था में उसका सकल लाभ $60 \times 20 =$ ₹ 1200 होगा।

माना कि उत्पादक केवल P_2 प्रकार के उत्पाद बनाने का निश्चय करता है तब वह P_2 प्रकार के केवल 20 इकाई ही बना सकता है तथा इस अवस्था में उसका सकल लाभ $50 \times 20 =$ ₹ 1000 होगा।

ऐसी और भी बहुत सारी संभावनाएँ है। अतः हम ज्ञात करने का प्रयास करते हैं कि उत्पादक विभिन्न चयन विधियों के द्वारा विभिन्न उत्पादन संयोजन प्राप्त कर सकता है तथा विभिन्न प्रकार का लाभ अर्जित कर सकता है। अब समस्या यह है कि उत्पादक को अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए किस प्रकार के उत्पाद संयोजन का चयन करना चाहिए? इस प्रश्न का उत्तर प्राप्त करने के लिए हम इस समस्या का गणितीय संरूपण करने का प्रयास करते है।

15.03 समस्या का गणितीय संरूपण (Mathematical formulation of the problem)

माना अनुकूलतम हल के लिए उत्पाद P_1 व P_2 की वांछित निर्माणाधीन इकाईयों की संख्या क्रमशः x व y है। अब समस्या में दिए हुए आँकड़ों को निम्न तालिका के रूप में व्यक्त करते है–

मशीन	उत्पाद		उपलब्धता
	P_1	P_2	
M_1	1 घण्टा	2 घण्टे	40 घण्टे
M_2	3 घण्टे	2 घण्टे	60 घण्टे
लाभ	₹ 60	₹ 50	

चूँकि उत्पाद P_1 व P_2 पर प्रति इकाई लाभ क्रमशः ₹ 60 व ₹ 50 है अतः P_1 प्रकार की x इकाईयाँ तथा P_2 प्रकार की y इकाईयाँ बनाने पर कुल लाभ

$$Z = 60x + 50y$$

इस प्रकार कुल लाभ को चरों x तथा y में एक रेखीय संबंध द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है। उत्पादक कुल लाभ को अधिकतम करना चाहता है अतः उद्देश्य फलन अधिकतम

$$Z = 60x + 50y$$

मशीन M_1 व M_2 के लिए व्यवरोधः यह ज्ञात है कि उत्पाद प्रति इकाई P_1 व P_2 के निर्माण के लिए मशीन M_1 पर क्रमशः 1 व 2 घण्टे कार्य करना होता है। अतः x इकाई P_1 व y इकाई P_2 के निर्माण के लिए मशीन M_1 पर कुल कार्य घण्टे $x+2y$ होंगे। साथ ही मशीन M_1 की कुल उपलब्धता 40 घण्टे की ही है

अतः $$x + 2y \le 40$$

इसी प्रकार मशीन M_2 के लिए $$3x + 2y \le 60$$

ऋणेतर व्यवरोधः चूंकि x तथा y निर्माणाधीन इकाईयों की संख्या है जो कभी भी ऋणात्मक नहीं हो सकती है।

अतः $$x \ge 0,\ y \ge 0$$

अतः प्रदत्त समस्या का गणितीय संरूपण निम्न होगा

अधिकतमीकरण (Maximize) $$Z = 60x + 50y$$

व्यवरोध $$x + 2y \le 40$$
$$3x + 2y \le 60$$

तथा $$x \ge 0, y \ge 0$$

अब हम कुछ पदों को परिभाषित करेंगे जिनका प्रयोग रैखिक प्रोगामन समस्याओं में किया जाता है:

उद्देश्य फलन (Objective function): यदि $c_1, c_2, \ldots, c_n$ अचर तथा $x_1, x_2, \ldots, x_n$ चर हो तो रैखिक फलन $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ जिसका अधिकतमीकरण या न्यूनतमीकरण होना है, **उद्देश्य फलन** कहलाता है।

उपरोक्त उदाहरण में $Z = 60x + 50y$ एक उद्देश्य फलन है। चर x व y **निर्णायक चर** कहलाते हैं।

व्यवरोध (Constraints): किसी रैखिक प्रोगामन समस्या में प्रयुक्त चरों पर लगी हुई शर्तों को समस्या के व्यवरोध कहते हैं। इन्हें एकघातीय समीकरणों या असमिकाओं के रूप में व्यक्त किया जाता है। उपरोक्त उदाहरण में $x + 2y \le 40$ तथा $3x + 2y \le 60$ व्यवरोध है। साथ ही $x \ge 0, y \ge 0$ ऋणेतर व्यवरोध (non-negative restriction) कहलाते हैं।

हलः चरों के ऐसे मानों का समुच्चय जो दिए गए रैखिक प्रोगामन समस्या के व्यवरोधों को सन्तुष्ट करता है, हल कहलाता है।

सुसंगत हल (Feasible solution): चरों के मानों का एक ऐसा समुच्चय जो दिए गए रैखिक प्रोगामन समस्या के सभी व्यवरोधों के अतिरिक्त ऋणेतर व्यवरोधों को भी संतुष्ट करता हो, सुसगंत हल कहलाता है।

इष्टतम हल (Optimal solution): किसी रैखिक प्रोगामन समस्या का इष्टतम हल वह सुसंगत हल है जिसके लिए समस्या के उद्देश्य फलन का मान उच्चतम या निम्नतम होता है।

टिप्पणी: रैखिक प्रोगामन समस्या के 'हल' से तात्पर्य प्रायः इष्टतम हल से ही होता है।

15.04 रैखिक प्रोगामन समस्याओं का हल ज्ञात करने की आलेखीय विधि (Graphical method to solve linear programming problems)

किसी रैखिक प्रोगामन समस्या को हल करने की सबसे आसान विधि आलेखीय विधि है। आलेखीय विधि का उपयोग केवल तभी संभव है जबकि रैखिक प्रोगामन समस्या में केवल दो निर्णायक चर हो।

कोनीय बिन्दु विधि (Corner point method)

यह विधि मूलभूत चरम बिन्दु प्रमेय (Fundamental extreme point theorem) पर आधारित है जिसका कथन निम्न प्रकार है **"किसी रैखिक प्रोगामन समस्या का इष्टतम हल, यदि विद्यमान हो, तो समस्या के सभी सुसंगत हलों के समुच्चय से निर्मित अवमुख बहुभुज के एक चरम (कोनीय) बिन्दु पर होता है।"**

एक रैखिक प्रोगामन समस्या जिसमें दो निर्णायक चर हो, को हल करने के लिए कोनीय बिन्दु विधि द्वारा आलेखीय हल किए जाने की क्रियाविधि निम्न हैं–

1. दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का गणितीय संरूपण कीजिए यदि यह इस रूप में नहीं दी गई हो।
2. व्यवरोधों के रूप में दी गई सभी असमिकाओं को समीकरणों में परिवर्तित करते है तथा उनके आलेख खींचते है। रैखिक समीकरण का आलेख खींचने के लिए समीकरण में $y = 0$ रखकर x- अक्ष पर एक बिन्दु ज्ञात करते है। इसी प्रकार $x = 0$ रखते हुए y- अक्ष पर एक बिन्दु ज्ञात करते है। इन दोनों बिन्दुओं को मिलाने पर समीकरण का आलेख प्राप्त होता है।
3. प्रत्येक असमिका को दर्शाने हेतु क्षेत्र का निर्धारण कीजिये। इस हेतु प्रत्येक असमिका में x तथा y दोनों को शून्य रखते है, यदि असमिका वैध कथन में समानीत होती है तब दी गई असमिका को दर्शाने वाला क्षेत्र वह क्षेत्र होगा जिसमें मूल बिन्दु स्थित है। अन्यथा, दी गई असमिका को दर्शाने वाला क्षेत्र वह क्षेत्र होगा जिसमें मूल बिन्दु स्थित नहीं है।
4. सभी बिन्दुओं को समाहित करने वाला क्षेत्र xy - समतल में प्राप्त करते है जो सभी व्यवरोधों (ऋणेतर व्यवरोध सहित) को एक साथ सन्तुष्ट करता है। इस प्रकार प्राप्त क्षेत्र सुसगंत हल क्षेत्र कहलाता है।
5. इस प्रकार प्राप्त अवमुख बहुभुज के शीर्षों (कोनीय बिन्दुओं) के निर्देशांक ज्ञात करते है।
6. प्रत्येक शीर्ष पर उद्देश्य फलन के मान ज्ञात करते है। वह बिन्दु जहाँ पर उद्देश्य फलन इष्टतम (अधिकतम या न्यूनतम) मान ग्रहण करता है, दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का इष्टतम हल (optimal solution) कहलाता है।

अब हम 15.03 में लिए गए उदाहरण को आलेखीय विधि से हल करते है जहाँ समस्या निम्न है।–

अधिकतम $\quad Z = 60x + 50y$

व्यवरोध $\quad x + 2y \le 40$

$\quad 3x + 2y \le 60$

तथा $\quad x \ge 0, y \ge 0$

सर्वप्रथम व्यवरोधों के रूप में दी गई असमिकाओं को समीकरणों में परिवर्तित करते है।

$$x + 2y = 40 \qquad (1)$$

$$3x + 2y = 60 \qquad (2)$$

समीकरण (1) में $\quad x = 0$ रखने पर $\quad y = 20$

तथा समीकरण (1) में $\quad y = 0$ रखने पर $\quad x = 40$

अतः दो बिन्दु A (40, 0) तथा B (0, 20) प्राप्त होते है। इसी प्रकार समीकरण (2) में क्रमशः $x = 0$ तथा $y = 0$ रखने पर बिन्दु C (0, 30) तथा D (20, 0) प्राप्त होते है। बिन्दुओं A तथा B व C तथा D को मिलाने पर रेखाओं (1) व (2) के आलेख प्राप्त होते है।

$x + 2y = 40$

x	40	0
y	0	20

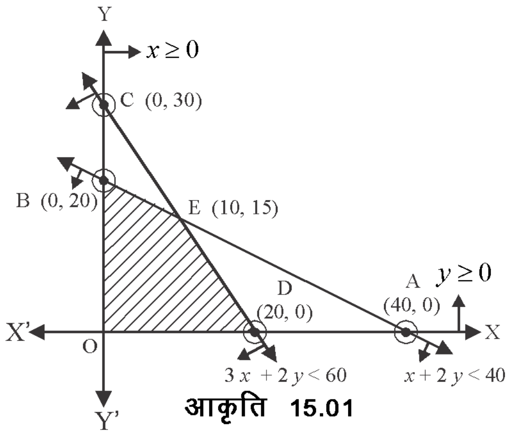
$A(40, 0)$; $B(0, 20)$

$3x + 2y = 60$

x	0	20
y	30	0

$C(0, 30)$; $D(20, 0)$

असमिका $x+2y \le 40$ का क्षेत्र निर्धारित करने के लिए x तथा y को शून्य के बराबर रखने पर असमिका $(0)+2(0) \le 40$ सन्तुष्ट होती है अतः इस असमिका का हल क्षेत्र भी मूल बिन्दु की ओर होगा। इसी प्रकार असमिका $3x+2y \le 60$ में भी x व y को शून्य के बराबर रखकर जाँच करने पर $3(0)+2(0)=0 \le 60$ सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र भी मूल बिन्दु की ओर होगा।



आकृति 15.01

छायांकित क्षेत्र ODEB उन सभी संभव हलों का समुच्चय है जो दोनों व्यवरोधों तथा ऋणेत्तर व्यवरोध को एक साथ सन्तुष्ट करते हैं। इस क्षेत्र के बाहर स्थित कोई भी बिन्दु संभावित हल नहीं हो सकता। अब हमारा अगला चरण क्षेत्र ODEB के उन अनगिनत सुसंगत हलों में से एक ऐसे हल को चुनना है, जिससे हमें इष्टतम हल प्राप्त हो सके। सुसंगत हलों के समुच्चय का निरीक्षण करने पर यह स्पष्ट है कि कोई भी ऐसा बिन्दु जो छायांकित क्षेत्र के अन्दर का बिन्दु है, अर्थात् सीमा रेखाओं पर स्थित नहीं है, इष्टतम हल प्रदान नहीं करता है।

उदाहरण के लिए यदि हम क्षेत्र के अन्दर कोई बिन्दु (4,4) ले तो इस बिन्दु पर उद्देश्य फलन का मान $Z = 60\times4+50\times4 = 240+200 = 440$ प्राप्त होता है जबकि छायांकित क्षेत्र के कोनीय बिन्दुओं D(20, 0) E (10, 15) तथा B (0, 20) पर उद्देश्य फलन के मान क्रमशः 1200, 1350 तथा 1000 प्राप्त होते है जो बिन्दु (4,4) पर प्राप्त मान से अधिक ही है। अतः इष्टतम हल प्रदान करने वाला बिन्दु छायांकित क्षेत्र ODEB की सीमा पर स्थित कोई बिन्दु ही होगा। अब सुसंगत हल क्षेत्र ODEB में कोनीय बिन्दुओं O,D,E व B पर उद्देश्य फलन के मानों को सारणीबद्ध किया जाता है।

कोनीय बिन्दु	x-निर्देशांक	y-निर्देशांक	उदद्देश्य फलन $Z = 60x+50y$
O	0	0	$Z_0 = 0$
D	20	0	$Z_D = 1200$
E	10	15	$Z_E = 1350$
B	0	20	$Z_B = 1000$

उपरोक्त तालिका से यह स्पष्ट है कि उद्देश्य फलन का मान बिन्दु E (10, 15) पर सर्वाधिक है अतः कोनीय बिन्दु E के द्वारा प्रदत्त हल ही इष्टतम हल होगा। अधिकतम लाभ के लिए उत्पादक को उत्पाद P_1 की 10 तथा उत्पाद P_2 की 15 इकाईयों का निर्माण करना चाहिए।

टिप्पणीः (i) यदि किसी रैखिक प्रोगामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र परिबद्ध हो अर्थात् यह एक अवमुख बहुभुज बनाता हो तब अवमुख बहुभुज के कोनीय बिन्दुओं में से किसी एक बिन्दु पर उद्देश्य फलन का मान अधिकतम (माना M) तथा किसी अन्य बिन्दु पर उद्देश्य फलन का मान न्यूनतम (माना m) प्राप्त होता है।

(ii) कुछ स्थितियों में यदि किसी रैखिक प्रोगामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र परिबद्ध अवमुख बहुभुज नहीं होता है अर्थात् यह किसी भी दिशा में अनन्त विस्तृत किया जा सके, तब सुसंगत हल क्षेत्र अपरिबद्ध कहलाता है। यदि सुसंगत हल क्षेत्र अपरिबद्ध है तो इस हल क्षेत्र के प्रत्येक कोनीय बिन्दु पर उद्देश्य फलन का मान ज्ञात करते है। माना इन बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन के अधिकतम तथा न्यूनतम मान क्रमशः M व m है। अब निम्न दो स्थितियों पर विचार करते हैं–

स्थिति–I: सरल रेखा $Z = ax+by = M$ खींचते है तथा विवृत अर्धतल $ax+by > M$ ज्ञात करते हैं। यदि $ax+by > M$ द्वारा प्रदर्शित विवृत्त अर्धतल तथा अपरिबद्ध सुसंगत क्षेत्र में कोई बिन्दु उभयनिष्ठ नहीं है तब उद्देश्य फलन का अधिकतम मान M है। अन्यथा उद्देश्य फलन का कोई अधिकतम मान नहीं है।

स्थिति–II: सरल रेखा $Z = ax+by = m$ खींचते है तथा $ax+by < m$ द्वारा प्रदर्शित विवृत्त अर्धतल ज्ञात करते है। यदि $ax+by < m$ द्वारा प्रदर्शित विवृत्त अर्धतल तथा अपरिबद्ध सुसंगत क्षेत्र में कोई बिन्दु उभयनिष्ठ नहीं है तब उद्देश्य फलन का निम्नतम मान m हैं। अन्यथा उद्देश्य फलन का कोई निम्नतम मान नहीं है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. निम्न रैखिक प्रोगामन समस्या को आलेखीय विधि से हल कीजिये।

अधिकतम $Z = 5x + 3y$

व्यवरोध $3x + 5y \leq 15$

$5x + 2y \leq 10$

तथा $x \geq 0,\ y \geq 0$

हलः व्यवरोधों के रूप में दी गई सभी असमिकाओं को समीकरणों में परिवर्तित करते हैं।

$$3x + 5y = 15 \qquad (1)$$

$$5x + 2y = 10 \qquad (2)$$

असमिका $3x + 5y \leq 15$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र

रेखा $3x + 5y = 15$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः A (5, 0) तथा B (0, 3) बिन्दुओं पर मिलती है।

$3x + 5y = 15$

x	5	0
y	0	3
	A(5, 0),	B (0, 3)

बिन्दुओं A तथा B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $3(0) + 5(0) = 0 \leq 15$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

असमिका $5x + 2y \leq 10$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र

रेखा $5x + 2y = 10$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः C (2,0) तथा D (0,5) बिन्दुओं पर मिलती है।

$5x + 2y = 10$

x	2	0
y	0	5

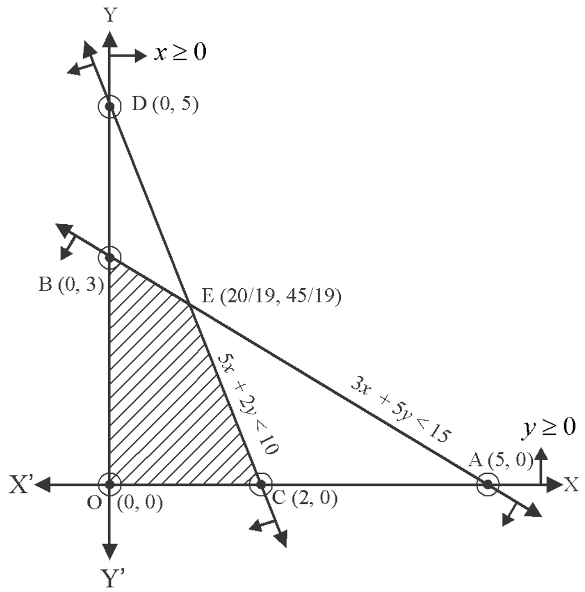
बिन्दुओं C तथा D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु (0,0) को प्रतिस्थापित करने पर $5(0) + 2(0) = 0 \leq 10$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

$x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र

चूंकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिन्दु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है। अतः असमिकाओं $x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र प्रथम पाद है।

छायांकित क्षेत्र OCEB उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है। यह क्षेत्र की दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र है।

छायांकित सुसंगत हल क्षेत्र के कोनीय बिन्दुओं के निर्देशांक 0 (0, 0), C(2, 0), $E(20/19,\ 45/19)$ तथा B(0, 3) है। जहाँ बिन्दु E दोनों रेखाओं $3x + 5y = 15$ तथा $5x + 2y = 10$ के प्रतिच्छेदन से प्राप्त किया जाता है।



आकृति 15.02

इन बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन के मान नीचे सारणी में दिये गये है–

बिन्दु	x निर्देशांक	y निर्देशांक	उद्देश्य फलन $Z = 5x + 3y$
O	0	0	$Z_0 = 5(0) + 3(0) = 0$
C	2	0	$Z_C = 5(2) + 3(0) = 10$
E	20 / 19	45 / 19	$Z_E = 5(20/19) + 3(45/19) = 235/19$
B	0	3	$Z_B = 5(0) + 3(3) = 9$

सारणी से स्पष्ट है कि उद्देश्य फलन का मान बिन्दु $E(20/19,\ 45/19)$ पर अधिकतम है। अतः $x = 20/19, y = 45/19$ दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का इष्टतम हल है तथा अधिकतम मान 235 / 19 है।

उदाहरण-2. निम्न रैखिक प्रोगामन समस्या को आलेखीय विधि से हल कीजिये।

निम्नतम $\qquad Z = 200x + 500y$

व्यवरोध $\qquad x + 2y \geq 10$

$\qquad 3x + 4y \leq 24$

तथा $\qquad x \geq 0,\ y \geq 0$

हलः व्यवरोधों के रूप में दी गई सभी असमिकाओं को समीकरणों में परिवर्तित करते है।

$$x + 2y = 10 \qquad (1)$$

$$3x + 4y = 24 \qquad (2)$$

असमिका $x + 2y \geq 10$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $x + 2y = 10$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः A (10, 0) तथा B (0,5) बिन्दुओं पर मिलती है।

$x + 2y = 10$

x	10	0
y	0	5

A (10, 0) ; B (0, 5)

बिन्दुओं A तथा B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु को प्रतिस्थापित करने पर $(0) + 2(0) = 0 \geq 10$ असमिका सन्तुष्ट नहीं होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु के विपरीत ओर होगा।

असमिका $3x + 4y \leq 24$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –

रेखा $3x + 4y = 24$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः C(8, 0) तथा D (0, 6) बिन्दुओं पर मिलती है।

$3x + 4y = 2y$

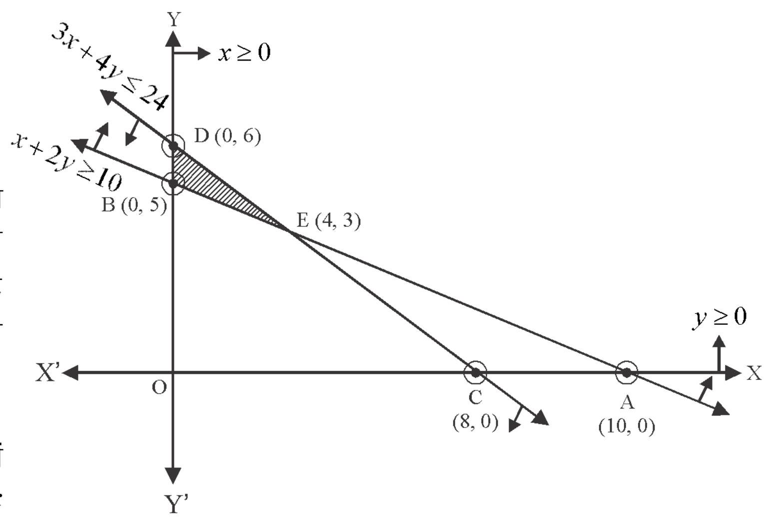
x	8	0
y	0	6

C (8, 0) ; D (0, 6)

बिन्दुओं C तथा D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु को प्रतिस्थापित करने पर $3(0) + 4(0) = 0 \leq 24$ असमिका सन्तुष्ट होती है अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

$x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र

चूंकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिन्दु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है। अतः असमिकाओं $x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र प्रथम पाद है।



आकृति 15.03

छायांकित क्षेत्र BED उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है। यही क्षेत्र दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र है। छायांकित सुसंगत हल क्षेत्र के कोनीय बिन्दुओं के निर्देशांक B(0, 5), E (4, 3) तथा D (0, 6) है। जहाँ बिन्दु E दोनों रेखाओं $3x + 4y = 24$ तथा $x + 2y = 10$ के प्रतिच्छेदन से प्राप्त किया जाता है। इन बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन के मान नीचे सारणी में दिए गए है।

इन बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन के मान नीचे सारणी में दिये गये है–

बिन्दु	**x निर्देशांक**	**y निर्देशांक**	**उद्देश्य फलन $Z = 200x + 500y$**
B	0	5	$Z_B = 200(0) + 500(5) = 2500$
E	4	3	$Z_E = 200(4) + 500(3) = 2300$
D	0	6	$Z_D = 200(0) + 500(6) = 3000$

सारणी से स्पष्ट है कि उद्देश्य फलन का मान बिन्दु E (4, 3) पर निम्नतम है। अतः $x = 4, y = 3$ दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का इष्टतम हल है तथा निम्नतम मान 2300 है।

उदाहरण-3. निम्न रैखिक प्रोगामन समस्या को आलेखीय विधि से हल कीजिये।

अधिकतम $Z = y + \frac{3}{4}x$

व्यवरोध $x - y \geq 0$

$-x/2 + y \leq 1$

तथा $x \geq 0, y \geq 0$

हल: व्यवरोधों के रूप में दी गई सभी असमिकाओं को समीकरणों में परिवर्तित करते है।

$$x - y = 0 \qquad (1)$$

$$-x/2 + y = 1 \qquad (2)$$

असमिका $x - y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $x - y = 0 \Rightarrow x = y$ द्वारा प्राप्त बिन्दु निम्न प्रकार है–

x = y

x	0	1
y	0	1

O (0, 0) ; A (1, 1)

बिन्दुओं O तथा A को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। इस असमिका के दाहिने पक्ष में शून्य होने के कारण हम मूल बिन्दु तथा इस रेखा पर स्थित बिन्दुओं के अतिरिक्त कोई भी बिन्दु इस असमिका में प्रतिस्थापित कर हल क्षेत्र ज्ञात करते हैं।

माना बिन्दु (2, 3) है तब $2 - 3 = -1 \geq 0$ असमिका सन्तुष्ट नहीं होती है तब असमिका का हल क्षेत्र बिन्दु (2, 3) के विपरीत ओर होगा।

असमिका $-x/2 + y \leq 1$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र

असमिका $-x/2 + y = 1$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः B(–2,0) तथा C(0,1) बिन्दुओं पर मिलती है।

$-x/2 + y = 1$

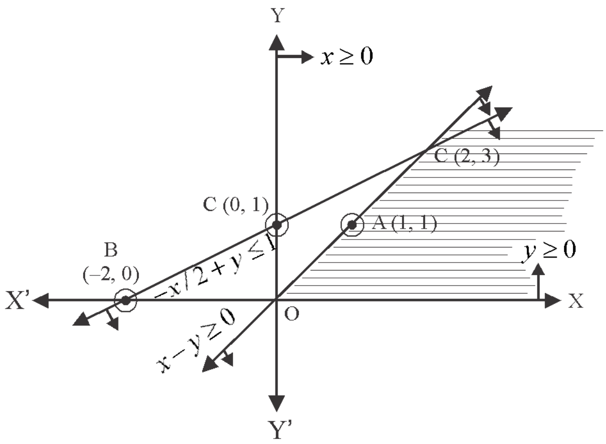
x	–2	0
y	0	1

B(–2, 0) ; C(0, 1)

बिन्दुओं B तथा C को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $-(0)/2+0=0\leq 1$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

$x\geq 0$ **तथा** $y\geq 0$ **द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–**

चूंकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिन्दु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है। अतः असमिकाओं $x\geq 0$ तथा $y\geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र प्रथम पाद है।



आकृति 15.04

इस समस्या में सुसंगत क्षेत्र के बिन्दु को समाहित करते हुये उद्देश्य फलन की रेखा को अनिश्चित बढ़ाया जा सकता है। अतः इस समस्या का कोई परिमित अधिकतम मान नहीं है। ऐसी समस्यायें जिनमें उद्देश्य फलन का मान अनिश्चित बढ़ाया जा सकता हो, वह अपरिबद्ध हल वाली समस्यायें कहलाती है।

उदाहरण-4. निम्न रैखिक प्रोगामन समस्या को आलेखीय विधि से हल कीजिये।

अधिकतम $Z=3x+4y$

व्यवरोध $x+y\leq 3$

$2x+2y\leq 12$

तथा $x\geq 0,\ y\geq 0$

हल: व्यवरोधों के रूप में दी गई सभी असमिकाओं को समीकरणों में परिवर्तित करते है।

$$x+y=3 \qquad (1)$$

$$2x+2y=12 \qquad (2)$$

असमिका $x+y\leq 3$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $x+y=3$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः A (3, 0) तथा B (0, 3) बिन्दुओं पर मिलती है।

x + y = 3

x	3	0
y	0	3

A (3, 0) ; B (0, 3)

बिन्दुओं A तथा B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $0+0=0\leq 3$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

असमिका $2x+2y\geq 12$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $2x+2y=12$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः C(6, 0) तथा D(0, 6) बिन्दुओं पर मिलती है।

2x + 2y = 12

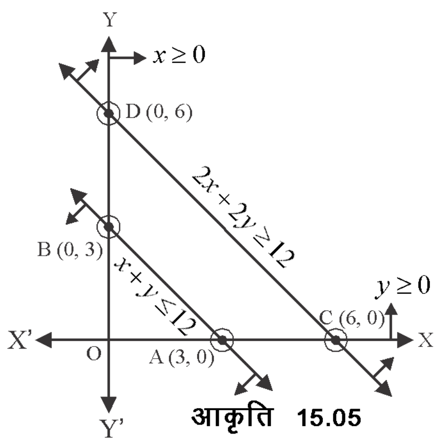
x	6	0
y	0	6

C (6, 0) ; D (0, 6)

बिन्दुओं C तथा D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $2(0)+2(0)=0\not\geq 12$ असमिका सन्तुष्ट नहीं होती है अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु के विपरीत ओर होगा।

$x\geq 0$ तथा $y\geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

चूंकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिन्दु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है। अतः असमिकाओं $x\geq 0$ तथा $y\geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र प्रथम पाद है।



आकृति 15.05

दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या के आलेख से स्पष्ट है कि ऐसा कोई बिन्दु अथवा क्षेत्र नहीं है जो दिये गये सभी व्यवरोधों को सन्तुष्ट करता हो अर्थात् सुसंगत हल क्षेत्र रिक्त है। अतः दी गई समस्या का कोई सुसंगत हल नहीं है।

उदाहरण-5. निम्न रैखिक प्रोगामन समस्या को आलेखीय विधि से हल कीजिये।

अधिकतम $Z = 2x + 3y$

व्यवरोध $4x + 6y \le 60$

$2x + y \le 20$

तथा $x \ge 0,\ y \ge 0$

हल: व्यवरोधों के रूप में दी गई सभी असमिकाओं को समीकरणों में परिवर्तित करते है।

$$4x + 6y = 60 \quad (1)$$

$$2x + y = 20 \quad (2)$$

असमिका $4x + 6y \le 60$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $4x + 6y = 60$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः A(15, 0) तथा B(0,10) बिन्दुओं पर मिलती है।

4x + 6y = 60

x	15	0
y	0	10

A(15, 0) ; B (0, 10)

बिन्दुओं A तथा B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $4(0) + 6(0) = 0 \le 60$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

असमिका $2x + y \le 20$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र

रेखा $2x + y = 20$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः C(10, 0) तथा D(0, 20) बिन्दुओं पर मिलती है।

2x + y = 20

x	10	0
y	0	20

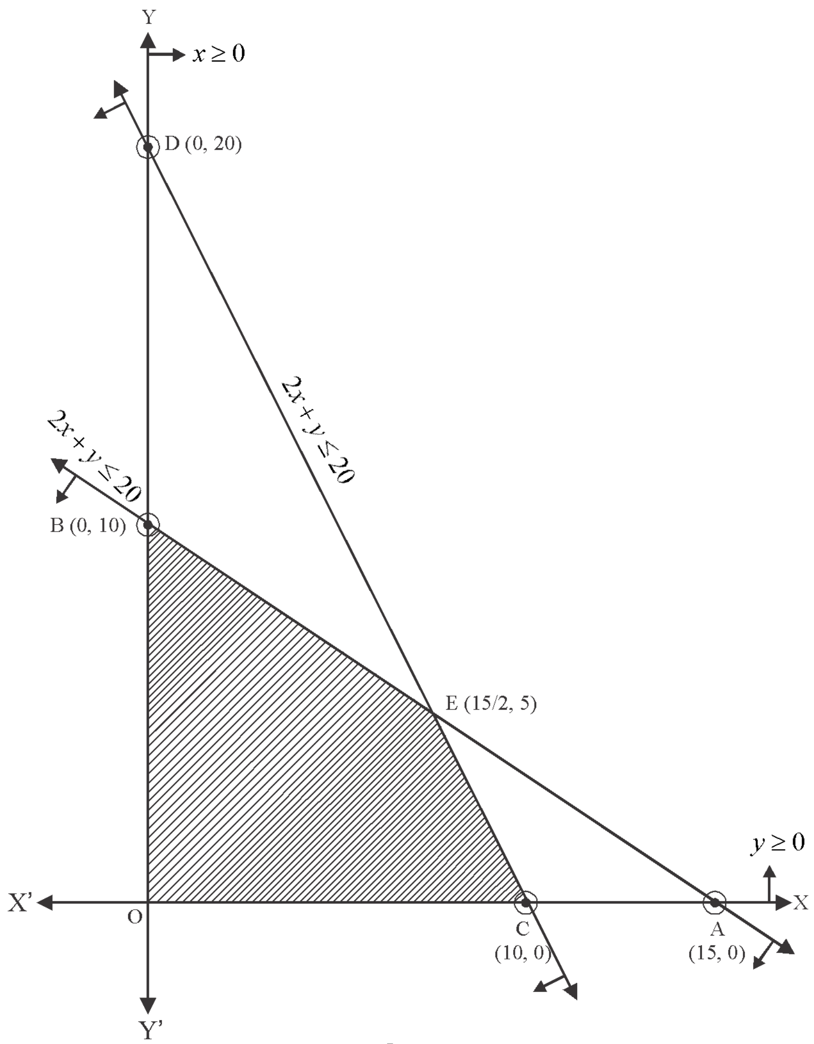
C (10, 0) ; D (0, 20)

बिन्दुओं C तथा D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $2(0) + (0) = 0 \le 20$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

$x \ge 0$ तथा $y \ge 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

चूंकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिन्दु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है अतः असमिकाओं $x \ge 0$ तथा $y \ge 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र प्रथम पाद है।

छायांकित क्षेत्र OCEB उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है। यह क्षेत्र दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र है। छायांकित सुसंगत हल क्षेत्र के कोनीय बिन्दुओं के निर्देशांक O(0, 0), C (10, 0), $E(15/2, 5)$ तथा B (0, 10) है।



आकृति 15.06

जहाँ बिन्दु E को दोनों रेखाओं $2x+y=20$ तथा $4x+6y=60$ के प्रतिच्छेदन से प्राप्त किया गया है। इन बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन के मान नीचे सारणी में दिए गए है–

बिन्दु	x निर्देशांक	y निर्देशांक	उद्देश्य फलन $Z = 2x + 3y$
O	0	0	$Z_O = 2(0) + 3(0) = 0$
C	10	0	$Z_C = 2(10) + 3(0) = 20$
E	$15/2$	5	$Z_E = 2(15/2)+3(5)=30$
B	0	10	$Z_B = 2\ (0) + 3(10) = 30$

सारणी से स्पष्ट है कि उद्देश्य फलन का मान दो कोनीय बिन्दुओं $E(15/2,\ 5)$ तथा $B(0,\ 10)$ पर अधिकतम प्राप्त होता है। उद्देश्य फलन का यही अधिकतम मान बिन्दुओं E तथा B को मिलाने वाले रेखाखण्ड के प्रत्येक बिन्दु पर भी प्राप्त होता है। अतः इस समस्या के अनन्त हल है।

टिप्पणीः इस समस्या के अनन्त हल होने के कारण उद्देश्य फलन रेखा $Z=2x+3y$ का व्यवरोध रेखा $4x+6y=60$ के समान्तर होना है।

प्रश्नमाला 15.1

निम्न रैखिक प्रोगामन समस्याओं को आलेखीय विधि से हल कीजिए।

1. निम्नतम $Z=-3x+4y$
 व्यवरोध $x+2y\le 8$
 $3x+2y\le 12$
 तथा $x\ge 0,\ \ y\ge 0$
2. अधिकतम $Z=3x+4y$
 व्यवरोध $x+y\le 4$
 तथा $x\ge 0,\ \ y\ge 0$
3. निम्नतम $Z=-50x+20y$
 व्यवरोध $2x-y\ge -5$
 $3x+y\ge 3$
 $2x-3y\le 12$
 तथा $x\ge 0,\ \ y\ge 0$
4. निम्नतम $Z=3x+5y$
 व्यवरोध $x+3y\ge 3$
 $x+y\ge 2$
 तथा $x\ge 0,\ \ y\ge 0$
5. निम्नतम और अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।
 जहाँ $Z=3x+9y$
 व्यवरोध $x+3y\le 60$
 $x+y\ge 10$
 तथा $x\ge 0,\ \ y\ge 0$

6. निम्नतम $Z = x + 2y$

व्यवरोध $2x + y \geq 3$

$x + 2y \geq 6$

तथा $x \geq 0, \ y \geq 0$

7. निम्नतम और अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।

जहाँ $Z = 5x + 10y$

व्यवरोध $x + 2y \leq 120$

$x + y \geq 60$

$x - 2y \geq 0$

तथा $x \geq 0, \ y \geq 0$

8. अधिकतम $Z = x + y$

व्यवरोध $x - y \leq -1$

$-x + y \leq 0$

तथा $x \geq 0, \ y \geq 0$

9. निम्नतम $Z = 3x + 2y$

व्यवरोध $x + y \geq 8$

$3x + 5y \leq 15$

तथा $x \geq 0, \ y \geq 0$

10. अधिकतम $Z = -x + 2y$

व्यवरोध $x \geq 3$

$x + y \geq 5$

$x + 2y \geq 6$

तथा $x \geq 0, \ y \geq 0$

15.05 रैखिक प्रोगामन समस्या के विभिन्न प्रकार (Different types of linear programming problem)

इस अनुच्छेद में हम कुछ महत्वपूर्ण प्रकार की रैखिक प्रोगामन समस्याओं जैसे–आहार सम्बन्धी समस्याओं, उत्पादन सम्बन्धी समस्याओं तथा परिवहन समस्याओं का संरूपण तथा हल प्रस्तुत करेंगे।

आहार सम्बन्धी समस्याएँ

इस प्रकार की समस्याओं में हम यह ज्ञात करते है कि विभिन्न प्रकार के संघटको/पोषक तत्वों का समावेश आहार में किस मात्रा में किया जाये जिससे उसमें सभी पोषक तत्वों/संघटकों की न्यूनतम आवश्यक मात्रा कम से कम लागत पर प्राप्त हो।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-6. एक मनुष्य को सन्तुलित भोजन के लिये दो प्रकार के विटामिन (विटामिन A व विटामिन B) की निश्चित मात्राओं में आवश्यकता होती है। ये विटामिन दो भिन्न–भिन्न प्रकार की खाद्य सामग्रियों (F_1 व F_2) में मिलते है। प्रत्येक खाद्य सामग्री की एक इकाई में विद्यमान विटामिनों की इकाइयों की संख्या, सन्तुलित भोजन के लिये उसकी न्यूनतम आवश्यकता व खाद्य सामग्रियों का प्रति इकाई मूल्य निम्नलिखित तालिका में दिया जाता है–

माना अनुकूलतम हल के लिए उत्पाद P_1 व P_2 की वांछित निर्माणाधीन इकाईयों की संख्या क्रमशः x व y है। अब समस्या में दिए हुए आँकड़ों को निम्न तालिका के रूप में व्यक्त करते है–

तालिका

विटामिन	खाद्य सामग्री		दैनिक आवश्यकता
	F_1	F_2	
A	2	4	40
B	3	2	50
प्रति इकाई मूल्य (रू. में)	3	2.5	

दोनों खाद्य सामग्रियों की कितनी–कितनी इकाईयों का प्रयोग किया जाये ताकि न्यूनतम मूल्य में सन्तुलित भोजन के लिए विटामिन की न्यूनतम आवश्यक मात्रा अवश्य प्राप्त हो सके?

हलः माना विटामिनों की न्यूनतम आवश्यक मात्रा की पूर्ति के लिए खाद्य सामग्री F_1 की x इकाई व खाद्य सामग्री F_2 की y इकाई की आवश्कता होती है। तब खाद्य सामग्री F_1 की x इकाई तथा खाद्य सामग्री F_2 की y इकाई का मूल्य क्रमशः ₹ $3x$ तथा ₹ $2.5y$ होगा। अतः मिश्रित खाद्य सामग्री का कुल मूल्य ₹ $3x+2.5y$ होगा जिसका निम्नतम मान ज्ञात करना है।

उद्देश्य फलन निम्नतम $Z=3x+2.5y$

विटामिन A के लिए व्यवरोधः खाद्य सामग्री F_1 व F_2 की प्रति इकाई से क्रमशः 2 व 4 इकाई विटामिन A की प्राप्ति होती है। अतः खाद्य सामग्री F_1 की x इकाई तथा खाद्य सामग्री F_2 की y इकाई से कुल विटामिन A की प्राप्ति $2x+4y$ होगी। निश्चित ही यह मात्रा न्यूनतम आवश्यक मात्रा के बराबर या उससे अधिक होनी चाहिये। अतः $2x+4y \geq 40$

विटामिन B के लिये व्यवरोधः खाद्य सामग्री F_1 व F_2 की प्रति इकाई से क्रमशः 3 व 2 इकाई विटामिन B की प्राप्ति होती है। अतः खाद्य सामग्री F_1 की x इकाई तथा खाद्य सामग्री F_2 की y इकाई से कुल विटामिन B की प्राप्ति $3x+2y$ होगी। निश्चित ही यह मात्रा न्यूनतम आवश्यक मात्रा के बराबर या उससे अधिक होनी चाहिये। अतः $3x+2y \geq 50$

चूँकि आवश्यक खाद्य सामग्री की इकाईयों की संख्या ऋणात्मक नहीं हो सकती है, अतः ऋणेतर व्यवरोध

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

अतः दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का गणितीय संरूपण निम्न होगा–

निम्नतम $Z=3x+2.5y$

व्यवरोध $2x+4y \geq 40$

$3x+2y \geq 50$

तथा $x \geq 0, \quad y \geq 0$

व्यवरोधों के रूप में दी गई सभी असमिकाओं को समीकरणों में परिवर्तित करते है।

$$2x+4y=40 \quad (1)$$

$$3x+2y=50 \quad (2)$$

असमिका $2x+4y \geq 40$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र –

रेखा $2x+4y=40$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः A(20, 0) तथा B(0, 10) बिन्दुओं पर मिलती है।

$2x + 4y = 40$

x	20	0
y	0	10

A(20, 0) ; B (0, 10)

बिन्दुओं A तथा B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $2(0)+4(0)=0 \geq 40$ असमिका सन्तुष्ट नहीं होती है अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु के विपरीत ओर होगा।

असमिका $3x+2y \geq 50$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

असमिका $3x+2y \geq 50$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः $C(50/3, 0)$ तथा D (0, 25) बिन्दुओं पर मिलती है।

$3x + 2y = 50$

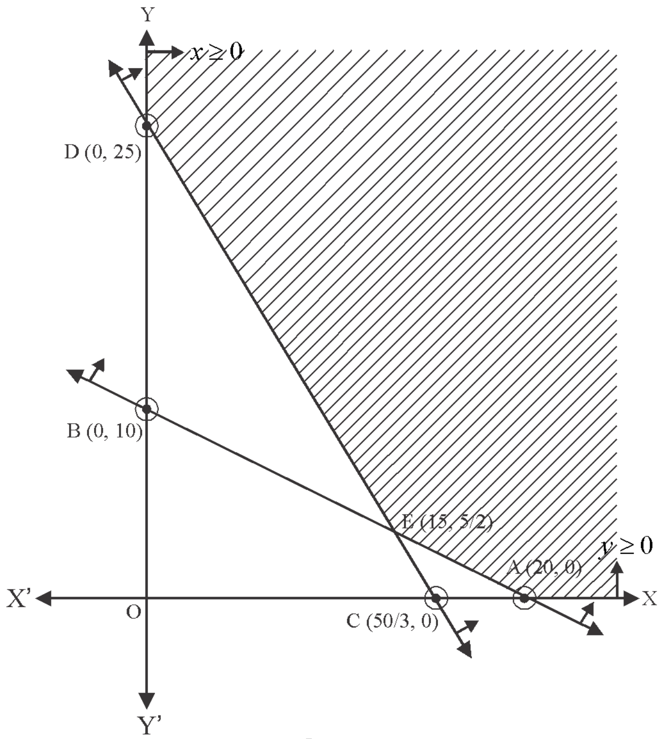
x	50/3	0
y	0	25

$C(50/3, 0)$; D (0, 25)

बिन्दुओं C तथा D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $3(0)+2(0)=0 \geq 50$ असमिका सन्तुष्ट नहीं होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु के विपरीत ओर होगा।

$x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

चूंकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिन्दु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है अतः असमिकाओं $x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र प्रथम पाद है।



आकृति 15.07

छायांकित क्षेत्र AED उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है। यह सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध है। अपरिबद्ध सुसंगत हल क्षेत्र के कोनीय बिन्दुओं के निर्देशांक A (20, 0) ; $E(15, 5/2)$ तथा D (0, 25) है। जहाँ बिन्दु E को दोनों रेखाओं $2x+4y=40$ व $3x+2y=50$ के प्रतिच्छेदन से प्राप्त किया गया है। इन बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन के मान नीचे सारणी में दिए गए है।

बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन के मान नीचे सारणी में दिए गए है–

बिन्दु	**x निर्देशांक**	**y निर्देशांक**	**उद्देश्य फलन $Z = 3x + 2.5y$**
A	20	0	$Z_A = 3(20) + 2.5(0) = 60$
E	15	5 / 2	$Z_E = 3(15) + 2.5\,(5/2) = 51.25$
D	0	25	$Z_D = 3(0) + 2.5\,(25) = 62.5$

सारणी में बिन्दु $E(15, 5/2)$ पर उद्देश्य फलन का मान निम्नतम ₹ 51.25 है। चूँकि सुसंगत हल क्षेत्र अपरिबद्ध है अतः हमें $3x+2.5y<51.25$ का आलेख खींचना पड़ेगा। असमिका $3x+2.5y<51.25$ द्वारा निर्धारित परिणामी खुला अर्धतल, सुसंगत क्षेत्र के साथ कोई उभयनिष्ठ बिन्दु नहीं रखता है। अतः बिन्दु $E(15, 5/2)$ पर दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का निम्नतम मान ₹ 51.25 है। अतः अनुकूलतम हल के लिए खाद्य सामग्री F_1 की 15 इकाई व खाद्य सामग्री F_2 की 2.5 इकाई लेनी चाहिये।

उत्पादन सम्बन्धी समस्याएँ

इस प्रकार की समस्याओं में हमें विभिन्न उत्पादों की संख्या ज्ञात करनी होती है जोकि एक उत्पादक द्वारा उत्पादित कर बेची जाए जबकि उत्पादों की इकाईयों को उत्पादित करने में एक निश्चित जनशक्ति, यांत्रिक समय, प्रत्येक इकाई के उत्पादन में खर्च, श्रमिक समय, गोदाम में उत्पाद भंड़ारण के लिए स्थान आदि को दृष्टिगत रखते हुए अधिकतम लाभ कमाया जा सके।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-7. एक फर्म दो तरह के विद्युत उपकरणों A तथा B का उत्पादन करती है। A तथा B की प्रति इकाई पर लाभ क्रमशः ₹ 20 व ₹ 30 है। उपकरण A की प्रति इकाई में 3 मोटर व 2 ट्रांसफॉर्मर और उपकरण B की प्रति इकाई में 2 मोटर व 4 ट्रांसफॉर्मर लगाने आवश्यक है। एक महीने में कुल 210 मोटर और 300 ट्रांसफॉर्मर प्राप्त किये जा सकते हैं। उपकरण B, जो निर्यात मॉडल है, की प्रत्येक इकाई में वोल्टता स्थिर रखने का एक यन्त्र लगाना आवश्यक है। ऐसे यन्त्र 1 मास में 65 प्राप्त किये जा सकते है। अधिकतम लाभ के लिये रैखिक प्रोगामन समस्या का सूत्रीकरण कीजिए और रेखाचित्र द्वारा इसका हल ज्ञात कीजिये।

हल: माना अधिकतम लाभ के लिए फर्म उपकरणों A तथा B की क्रमशः x तथा y इकाईयों का निर्माण करती है। उपकरणों A तथा B की प्रति इकाई पर लाभ क्रमशः ₹ 20 व ₹ 30 है। अतः उपकरणों A तथा B की क्रमशः x तथा y इकाइयों से प्राप्त लाभ $= 20x + 30y$

अतः उद्देश्य फलन अधिकतम $\quad Z = 20x + 30y$

मोटर के लिये व्यवरोध

उपकरण A की x इकाईयों तथा उपकरण B की y इकाईयों के निर्माण के लिए क्रमशः $3x$ व $2y$ मोटरों की आवश्यकता होगी। एक महीने में कुल 210 मोटर प्राप्त की जा सकती है अतः

$$3x + 2y \le 210$$

ट्रांसफॉर्मर के लिये व्यवरोध

उपकरण A की x इकाइयों तथा उपकरण B की y इकाइयों के निर्माण के लिए क्रमशः $2x$ व $4y$ ट्रांसफॉर्मरों की आवश्यकता होगी। तथा एक महीने में कुल 300 ट्रांसफॉर्मर प्राप्त किये जा सकते है। अतः

$$2x + 4y \le 300$$

वोल्टता स्थिर रखने का यन्त्र केवल उपकरण B में लगाया जाता है तथा ऐसे यंत्र एक मास में 65 प्राप्त किये जा सकते है। अतः $y \le 65$ निर्मित इकाइयों की संख्या कभी भी ऋणात्मक नहीं हो सकती है।

अतः $\quad x \ge 0, \; y \ge 0$

अतः दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का गणितीय संरूपण निम्न है।

अधिकतम $\quad Z = 20x + 30y$

व्यवरोध
$$3x + 2y \le 210$$
$$2x + 4y \le 300$$
$$y \le 65$$

तथा $\quad x \ge 0, \; y \ge 0$

व्यवरोधों के रूप में दी गई सभी असमिकाओं को समीकरणों में परिवर्तित करते है।

$$3x + 2y = 210 \qquad (1)$$
$$2x + 4y = 300 \qquad (2)$$
$$y = 65 \qquad (3)$$

असमिका $3x + 2y \le 210$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $3x + 2y = 210$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः A(70, 0) तथा B(0, 105) बिन्दुओं पर मिलती है।

$3x + 2y = 210$

x	70	0
y	0	105

A (70, 0) ; B (0, 105)

बिन्दुओं A तथा B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $3(0)+2(0)=0\le 210$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

असमिका $2x + 4y \le 300$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $2x+4y=300$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः C(150, 0) तथा D(0, 75) बिन्दुओं पर मिलती है।

2x + 4y = 300

x	150	0
y	0	75

C (150, 0) ; D (0, 75)

बिन्दुओं C तथा D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $2(0)+4(0)=0\le 300$ असमिका सन्तुष्ट होती है अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

असमिका $y \le 65$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $0x+y=65$ बिन्दुओं E (5, 65) तथा F(10, 65) पर मिलती है।

0x + y = 65

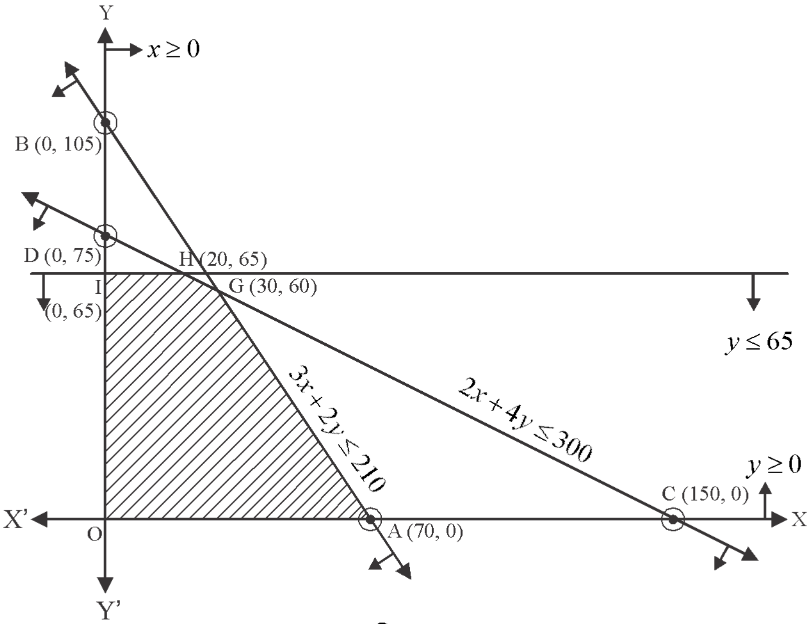
x	5	10
y	65	65

E (5, 65) ; F (10, 65)

बिन्दुओं E तथा F को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $0\le 65$ असमिका सन्तुष्ट होती है अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

$x \ge 0$ तथा $y \ge 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

चूंकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिन्दु दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है। अतः असमिकाओं $x\ge 0$ तथा $y\ge 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र प्रथम पाद है।



आकृति 15.08

छायांकित क्षेत्र OAGHI उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है। यह क्षेत्र दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र है। छायांकित सुसंगत हल क्षेत्र के कोनीय बिन्दुओं के निर्देशांक O(0,0), A(70,0), G(30, 60), H (20, 65) तथा I(0, 65) है। जहाँ बिन्दुओं G तथा H को क्रमशः रेखाओं $2x+4y=300$ व $3x+2y=210$ तथा रेखाओं $y=65$ व $2x+4y=300$ के प्रतिच्छेदन से प्राप्त किये जाते है। इन बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन के मान नीचे सारणी में दिए गए है।

बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन के मान नीचे सारणी में दिए गए है–

बिन्दु	x निर्देशांक	y निर्देशांक	उद्देश्य फलन $Z = 20x + 30y$
O	0	0	$Z_O = 20(0) + 30(0) = 0$
A	70	0	$Z_A = 20(70) + 30(0) = 1400$
G	30	60	$Z_G = 20(30) + 30(60) = 2400$
H	20	65	$Z_H = 20(20) + 30(65) = 2350$
I	0	65	$Z_I = 20(0) + 30(65) = 1950$

सारणी से स्पष्ट है कि उद्देश्य फलन का मान बिन्दु G(30, 60) पर अधिकतम है। अतः अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिये उपकरण A की 30 तथा उपकरण B की 60 इकाइयों का निर्माण किया जाना चाहिए जिससे अधिकतम लाभ ₹ 2400 प्राप्त हो सके।

परिवहन सम्बन्धी समस्याएँ–

इस प्रकार की समस्याओं में हमें वस्तुओं को विभिन्न संयंत्रों या कारखानों से विभिन्न स्थानों पर स्थित विभिन्न बाजारों में प्रत्येक बाजार की मांग तथा प्रत्येक संयंत्र या कारखाने के लिए आपूर्ति को ध्यान में रखते हुए परिवहन प्रारूप ज्ञात करना होता है ताकि परिवहन लागत न्यूनतम हो।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-8. P व Q दो स्थानों पर कारखाने स्थापित है। इन कारखानों से A, B तथा C पर स्थित तीन ड़िपों में वस्तुएँ भेजी जाती है। इन डिपों की साप्ताहिक आवश्यकताएँ क्रमशः 5, 5 व 4 इकाईयों की है। जबकि P तथा Q कारखानों की उत्पादन क्षमता क्रमशः 8 व 6 इकाईयाँ है। प्रति इकाई परिवहन लागत नीचे सारणीबद्ध है।

को / से	लागत (₹ में)		
	A	B	C
P	16	10	15
Q	10	12	10

वस्तुओ की कितनी इकाईयाँ प्रत्येक कारखाने से प्रत्येक डिपो को भिजवाई जानी चाहिए जिससे परिवहन लागत न्यूनतम हो। समस्या का गणितीय संरूपण करते हुए हल कीजिये।

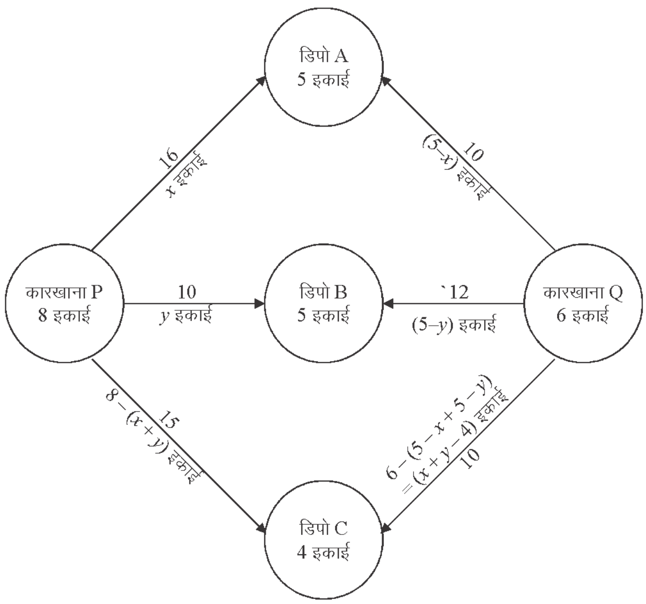
हलः इस समस्या को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है।

माना P पर स्थित कारखाना, A तथा B पर स्थित ड़िपो को क्रमशः वस्तुओं की x तथा y इकाइयाँ भेजता है। चूँकि कारखाने P की उत्पादन क्षमता 8 इकाई की है अतः शेष $(8-x-y)$ इकाइयाँ डिपो C को भेजी जायेगी। चूँकि आवश्यकताएँ कभी भी ऋणात्मक नहीं होती है अतः

$$x \geq 0,\quad y \geq 0 \quad \text{तथा} \quad 8-x-y \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad x \geq 0,\quad y \geq 0 \quad \text{तथा} \quad x+y \leq 8$$

A पर स्थित डिपो की साप्ताहिक आवश्यकता 5 इकाई की है तथा कारखाने P से वस्तु की x इकाई का परिवहन कर दिया गया है अतः शेष $(5-x)$ इकाईयों का परिवहन कारखाने Q से किया जाना है। इसी प्रकार B पर स्थित डिपो को कारखाने Q से $(5-y)$ इकाइयों का परिवहन किया जायेगा। परन्तु कारखाने Q की उत्पादन क्षमता केवल 6 इकाइयों की है अतः



आकृति 15.09

शेष $6-(5-x+5-y)=(x+y-4)$ इकाइयों का परिवहन डिपो C को किया जाएगा। चूँकि डिपो A, B तथा C की आवश्यकताएँ ऋणात्मक नहीं हो सकती है,

अतः $5-x \geq 0, \quad 5-y \geq 0$ तथा $x+y-4 \geq 0$

$\Rightarrow$ $x \leq 5, \quad y \leq 5$ तथा $x+y \geq 4$

कारखाने P से डिपो A, B व C के लिये परिवहन लागत क्रमशः $16x$, $10y$ तथा $15(8-x-y)$ है। इसी प्रकार कारखाने Q से डिपो A, B व C के लिये परिवहन लागत क्रमशः $10(5-x)$, $12(5-y)$ तथा $10(x+y-4)$ है। अतः कुल परिवहन लागत निम्न है–

$$Z = 16x+10y+15(8-x-y)+10(5-x)+12(5-y)+10(x+y-4)$$
$$Z = x-7y+190$$

अतः दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का गणितीय संरूपण निम्न है–

निम्नतम $Z = x-7y+190$

व्यवरोध
$$x+y \leq 8$$
$$x+y \geq 4$$
$$x \leq 5$$
$$y \leq 5$$

तथा $x \geq 0, \quad y \geq 0$

व्यवरोधों के रूप में दी गई सभी असमिकाओं को समीकरणों में परिवर्तित करते है।

$$x+y=8 \qquad (1)$$
$$x+y=4 \qquad (2)$$
$$x=5 \qquad (3)$$
$$y=5 \qquad (4)$$

असमिका $x+y \leq 8$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $x+y=8$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः A (8, 0) तथा B (0, 8) बिन्दुओं पर मिलती है।

x + y = 8

x	8	0
y	0	8

A (8, 0) ; B (0, 8)

बिन्दुओं A तथा B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $(0)+(0) \leq 8$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

असमिका $x+y \geq 4$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $x+y=4$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः C(4, 0) तथा D(0, 4) बिन्दुओं पर मिलती है।

x + y = 4

x	4	0
y	0	4

C(4, 0) ; D(0, 4)

बिन्दुओं C तथा D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $(0)+(0)=0 \geq 4$ असमिका सन्तुष्ट नहीं होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु के विपरीत ओर होगा।

असमिका $x \leq 5$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $x + 0y = 5$ बिन्दुओं E (5, 5) तथा F(5, 10) पर मिलती है।

x + 0y = 5

x	5	5
y	5	10

E(5, 5) ; F(5, 10)

बिन्दुओं E व F को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $0 \leq 5$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

असमिका $y \leq 5$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $0x + y = 5$ बिन्दुओं G(5, 5) तथा H(10, 5) पर मिलती है।

0x + y = 5

x	5	10
y	5	5

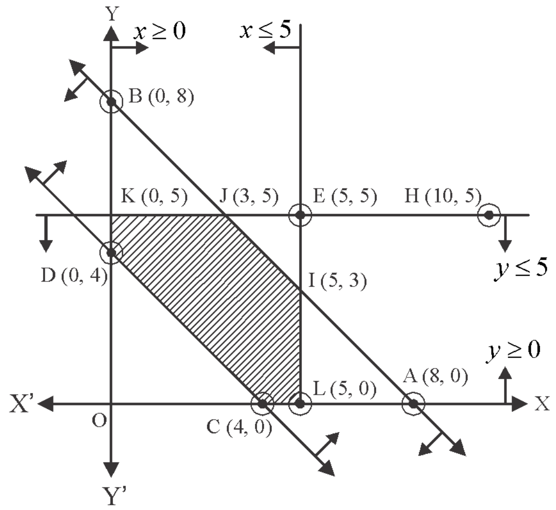
G(5, 5) ; H(10, 5)

बिन्दुओं G व H को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $0 \leq 5$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

$x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र

चूंकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिन्दु दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है। अतः असमिकाओं $x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र प्रथम पाद है।

छायांकित क्षेत्र CLIJKD उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है। यह क्षेत्र दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र है। छायांकित सुसंगत हल क्षेत्र के कोनीय बिन्दुओं के निर्देशांक C(4, 0); L(5, 0); I(5, 3); J(3, 5); K(0, 5) व D(0, 4) है। जहाँ बिन्दुओं I तथा J क्रमशः रेखाओं $x = 5$ व $x + y = 8$ तथा रेखाओं $y = 5$ व $x + y = 8$ के प्रतिच्छेदन से प्राप्त किए जाते है। इन बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन के मान नीचे सारणी में दिए गए है।



आकृति 15.10

बिन्दु	x निर्देशांक	y निर्देशांक	उद्देश्य फलन $Z = x - 7y + 190$
C	4	0	$Z_C = (4) - 7\,(0) + 190 = 194$
L	5	0	$Z_L = (5) - 7(0) + 190 = 195$
I	5	3	$Z_I = (5) - 7(3) + 190 = 174$
J	3	5	$Z_J = (3) - 7(5) + 190 = 158$
K	0	5	$Z_K = (0) - 7(5) + 190 = 155$
D	0	4	$Z_D = (0) - 7(4) + 190 = 162$

सारणी से स्पष्ट है कि उद्देश्य फलन का मान बिन्दु K(0, 5) पर निम्नतम प्राप्त होता है।

अतः इष्टतम परिवहन नीति कारखाने P व Q से डिपो A,B व C को क्रमशः 0, 5 व 3 इकाईयाँ तथा 5, 0 व 1 इकाई भिजवाने की होगी तथा इस अवस्था में न्यूनतम लागत ₹ 155 होगी।

प्रश्नमाला 15.2

1. एक आहार विज्ञानी दो प्रकार के भोज्यों को इस प्रकार मिलाना चाहती है कि प्राप्त मिश्रण में विटामिन A की कम से कम 8 इकाई तथा विटामिन C की कम से कम 10 इकाई विद्यमान हो। भोज्य I में विटामिन A, 2 इकाई प्रति किलोग्राम तथा विटामिन C, 1 इकाई प्रति किलोग्राम विद्यमान है जबकि भोज्य II में विटामिन A, 1 इकाई प्रति किलोग्राम में तथा विटामिन C, 2 इकाई प्रति किलोग्राम विद्यमान है। भोज्य I व II को प्रति किलोग्राम खरीदने की लागत क्रमशः ₹ 5 व ₹ 7 है। इस प्रकार के मिश्रण की निम्नतम लागत ज्ञात कीजिये। समस्या का गणितीय संरूपण करते हुए हल कीजिए।
2. एक गृहिणी दो प्रकार के भोज्यों X तथा Y को एक साथ इस प्रकार मिलाना चाहती है कि मिश्रण में विटामिन A, B तथा C की क्रमशः कम से कम 10, 12 तथा 8 इकाइयाँ विद्यमान हो। एक किलोग्राम भोज्य में विटामिन संयोजन निम्न प्रकार है–

	विटामिन A	विटामिन B	विटामिन C
भोज्य X	1	2	3
भोज्य Y	2	2	1

भोज्य X तथा Y के एक किलोग्राम की कीमत क्रमशः ₹ 6 व ₹ 10 है। इस प्रकार के भोज्य मिश्रण की न्यूनतम कीमत ज्ञात कीजिये।

3. एक प्रकार के केक को बनाने के लिए 300 ग्राम आटा तथा 15 ग्राम वसा की आवश्यकता होती है, जबकि दूसरे प्रकार के केक को बनाने के लिए 150 ग्राम आटा तथा 30 ग्राम वसा की आवश्यकता होती है। यह मानते हुए कि केकों को बनाने के लिये अन्य सामग्री की कमी नहीं है, 7.5 किलोग्राम आटे तथा 600 ग्राम वसा से बनाये जा सकने वाले केकों की अधिकतम संख्या ज्ञात कीजिये। समस्या का गणितीय संरूपण करते हुए आलेखीय विधि से हल कीजिये।
4. एक निर्माता औद्योगिक यंत्रों के लिए नट और बोल्ट का उत्पादन करता है। एक पैकेट नटों के उत्पादन के लिए यंत्र A पर 1 घण्टा तथा यंत्र B पर 3 घण्टे काम करना पड़ता है जबकि एक पैकेट बोल्टों के उत्पादन के लिए यंत्र A पर 3 घण्टे तथा यंत्र B पर 1 घण्टा काम करना पड़ता है। निर्माता नटों तथा बोल्टों के प्रति पैकेट पर लाभ क्रमशः ₹ 2.50 तथा ₹ 1 कमाता है। यदि वह प्रतिदिन अपने यंत्रों को अधिकतम 12 घण्टे संचालित करता हो तो प्रत्येक (नट और बोल्ट) के कितने पैकेट उत्पादित किए जाने चाहिए ताकि वह अधिकतम लाभ अर्जित कर सके। समस्या का गणितीय संरूपण कर हल कीजिये।
5. एक व्यापारी पंखे तथा सिलाई मशीनें खरीदना चाहता है। उसके पास निवेश करने के लिए केवल ₹ 5760 है तथा अधिकतम 20 वस्तुओं को रखने के लिए ही स्थान उपलब्ध है। एक पंखे तथा सिलाई मशीन की कीमत क्रमशः ₹ 360 व ₹ 240 है। वह एक पंखे तथा एक सिलाई मशीन को बेचने पर क्रमशः ₹ 22 व ₹ 18 लाभ कमाता है। यह मानते हुए कि व्यापारी जितनी वस्तुएँ खरीदता है वे सभी वस्तुएँ वह बेच सकता है अधिकतम लाभ अर्जित करने के लिए उसे कितने पंखे तथा सिलाई मशीने खरीदनी चाहिए। समस्या का गणितीय संरूपण कर हल कीजिए।
6. एक कारखाना दो प्रकार के पेचों A तथा B का उत्पादन करता है। प्रत्येक के उत्पादन के लिए दो प्रकार के यंत्रों – स्वचालित तथा हस्तचालित की आवश्यकता होती है। एक पैकेट पेचों A के उत्पादन में 4 मिनट स्वचालित तथा 6 मिनट हस्तचालित मशीन तथा एक पैकेट पेचों B के उत्पादन में 6 मिनट स्वचालित तथा 3 मिनट हस्तचालित मशीन का कार्य होता है। प्रत्येक मशीन किसी भी दिन के लिये अधिकतम 4 घण्टे कार्य के लिए उपलब्ध है। निर्माता पेच A के प्रत्येक पैकेट पर 70 पैसे तथा पेच B के प्रत्येक पैकेट पर 1 रू. का लाभ कमाता है। यह मानते हुए कि कारखाने में निर्मित सभी पेचों के पैकेट बिक जाते है, निर्माता को प्रतिदिन प्रत्येक प्रकार के कितने पैकेट बनाने चाहिये जिसेस अधिकतम लाभ अर्जित हो सके।
7. एक फर्म प्लाईवुड के अनूठे स्मृति चिन्ह का निर्माण करती है। A प्रकार के प्रत्येक स्मृति चिन्ह के निर्माण में 5 मिनट काटने तथा 10 मिनट जोड़ने में लगते है। B प्रकार के प्रत्येक स्मृति चिन्ह के निर्माण में 8 मिनट काटने तथा 8 मिनट जोड़ने में लगते है। काटने तथा जोड़ने के लिये कुल समय क्रमशः 3 घण्टे 20 मिनट तथा 4 घण्टे उपलब्ध है। फर्म को प्रत्येक A प्रकार के स्मृति चिन्ह पर ₹ 5 तथा प्रत्येक B प्रकार के स्मृति चिन्ह पर ₹ 6 का लाभ होता है। अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए फर्म को प्रत्येक प्रकार के कितने–कितने स्मृति चिन्हों का निर्माण करना चाहिये।
8. एक किसान के पास दो प्रकार के उर्वरक F_1 व F_2 है। उर्वरक F_1 में 10% नाइट्रोजन तथा 6% फॉस्फोरिक अम्ल है। जबकि उर्वरक F_2 में 5% नाइट्रोजन तथा 10% फॉस्फोरिक अम्ल है। मिट्टी की स्थितियों का परीक्षण करने के बाद किसान पाता है कि उसे अपनी फसल के लिए कम से कम 14 किलोग्राम नाइट्रोजन तथा कम से कम 14 किलोग्राम फॉस्फोरिक अम्ल की आवश्यकता है। यदि उर्वरक F_1 की कीमत 60 पैसे प्रति किलोग्राम तथा उर्वरक F_2 की कीमत 40 पैसे प्रति किलोग्राम हो तो न्यूनतम मूल्य पर वांछित पोषक तत्वों की आवश्यकता को ध्यान में रखते हुए प्रत्येक उर्वरक की कितनी किलोग्राम मात्रा उपयोग में लाई जानी चाहिये।

9. एक व्यापारी दो प्रकार के निजी कम्प्यूटर – एक डेस्कटॉप प्रतिरूप तथा एक पोर्टेबल प्रतिरूप जिनकी कीमतें क्रमशः ₹ 25,000 तथा ₹ 40,000 होगी, बेचने की योजना बनाता है। वह अनुमान लगाता है कि कम्प्यूटरों की कुल मासिक मांग 250 इकाइयों से अधिक नहीं होगी। प्रत्येक प्रकार के कम्प्यूटरों की इकाइयों की संख्या ज्ञात कीजिये जिसे व्यापारी अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए भण्ड़ारण करें यदि उसके पास निवेश करने के लिए ₹ 70 लाख से अधिक नहीं है तथा यदि व्यापारी का डेस्कटॉप प्रतिरूप पर लाभ ₹ 4500 तथा पोर्टेबल प्रतिरूप पर लाभ ₹ 5000 हो।

10. दो अन्न भण्ड़ारों A तथा B की भण्डारण क्षमता क्रमशः 100 क्विण्टल तथा 50 क्विण्टल है। उन्हें तीन राशन की दुकानों D, E तथा F पर अन्न उपलब्ध करवाना है, जिनकी आवश्यकताएँ क्रमशः 60, 50 तथा 40 क्विण्टल है। भण्डारों से दुकानों को प्रति क्विण्टल परिवहन लागत निम्न सारणी में दी गई है :

से / को	प्रति क्विण्टल परिवहन लागत (₹में)	
	A	**B**
D	6	4
E	3	2
F	2.50	3

परिवहन लागत के निम्नतमीकरण के लिये आपूर्ति का परिवहन कैसे किया जाए?

विविध उदाहरण

उदाहरण-9. एक फर्म दो प्रकार के चमड़े के बेल्ट A प्रकार व B प्रकार के बनाती है। बेल्ट A सर्वोत्तम श्रेणी का है तथा बेल्ट B निम्न श्रेणी का है। A व B प्रकार के प्रत्येक बेल्ट से प्राप्त लाभ क्रमशः ₹ 2 व ₹ 1.50 है। A प्रकार के एक बेल्ट को बनाने में B प्रकार के बेल्ट की अपेक्षा दुगुना समय लगता है। यदि सभी बेल्ट B प्रकार के हो तो फर्म प्रतिदिन 1000 बेल्ट बना सकती है। परन्तु 800 बेल्ट प्रतिदिन (A तथा B दोनों को शामिल करते हुए) के लिए ही चमड़ा उपलब्ध है। बेल्ट A में एक फैन्सी बकल की आवश्यकता है तथा केवल 400 फैन्सी बकल प्रतिदिन उपलब्ध है। B प्रकार के बेल्ट के लिए केवल 700 बकल प्रतिदिन उपलब्ध है। अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए फर्म को दोनों प्रकार के कितने बेल्ट बनाने चाहिए?

हलः माना फर्म A प्रकार के x तथा B प्रकार के y बेल्ट बनाती है। A व B प्रकार के प्रत्येक बेल्ट से प्राप्त लाभ क्रमशः ₹2 व ₹ 1.50 है। अतः उद्देश्य फलन

अधिकतम $$Z = 2x + 1.50y$$

यदि सभी बेल्ट B प्रकार के हो तो फर्म प्रतिदिन 1000 बेल्ट बना सकती है। अतः B प्रकार के y बेल्टों को बनाने में लगा

समय $= \dfrac{y}{1000}$

चूंकि A प्रकार के बेल्ट को बनाने में B प्रकार के बेल्ट की अपेक्षा दुगुना समय लगता है अतः A प्रकार के x बेल्टों को बनाने

में लगा समय $= \dfrac{x}{500}$

$$\frac{x}{500} + \frac{y}{1000} \le 1 \quad \Rightarrow \quad 2x + y \le 1000$$

चमड़े की आपूर्ति केवल 800 बेल्ट प्रतिदिन के लिए ही पर्याप्त है। अतः

$$x + y \le 800$$

चूँकि A प्रकार के बेल्टों के लिए 400 तथा B प्रकार के बेल्टों के लिए 700 बकल उपलब्ध है।

अतः $$x \le 400, \qquad y \le 700$$

बनाए गए बेल्टों की संख्या कभी भी ऋणात्मक नहीं हो सकती है।

अतः $$x \ge 0, \qquad y \ge 0$$

दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का गणितीय संरूपण निम्न है–

अधिकतम	$Z = 2x + 1.50y$
व्यवरोध	$2x + y \le 1000$
	$x + y \le 800$
	$x \le 400$
	$y \le 700$
तथा	$x, \ y \ge 0$

व्यवरोधों के रूप में दी गई सभी असमिकाओं को समीकरणों में परिवर्तित करते है।

$$2x + y = 1000 \qquad (1)$$

$$x + y = 800 \qquad (2)$$

$$x = 400 \qquad (3)$$

$$y = 700 \qquad (4)$$

असमिका $2x + y \le 1000$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $2x + y = 1000$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः A (500, 0) तथा B(0, 1000) बिन्दुओं पर मिलती है।

2x + y = 1000

x	500	0
y	0	1000

A (500, 0) ; B (0, 1000)

बिन्दुओं A तथा B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $2(0) + (0) = 0 \le 1000$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

असमिका $x + y \le 800$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $x + y = 800$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः C(800, 0) तथा D (0, 800) बिन्दुओं पर मिलती है।

x + y = 800

x	800	0
y	0	800

C (800, 0) ; D(0, 800)

बिन्दुओं C तथा D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $0 + 0 = 0 \le 800$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

असमिका $x \le 400$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $x + 0y = 400$ बिन्दुओं E(400, 10) तथा F(400, 20) बिन्दुओं पर मिलती है।

x + 0y = 400

x	400	400
y	10	20

E (400, 10) ; F(400, 20)

बिन्दुओं E तथा F को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है असमिका में मूल बिन्प्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $0 \le 400$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

असमिका $y \le 700$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $0x + y = 700$ बिन्दुओं G (10, 700) तथा H(20, 700) पर मिलती है।

$0x + y = 700$

x	10	20
y	700	700

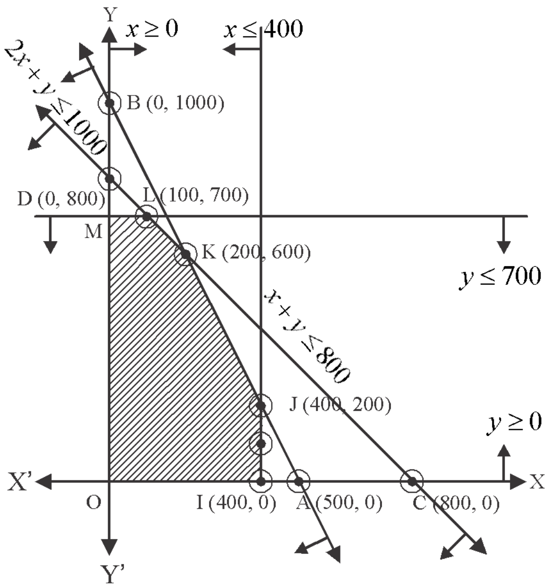
G (10, 700) ; H(20, 700)

बिन्दुओं G तथा H को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $0 \le 700$ असमिका सन्तुष्ट होती हैं। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

$x \ge 0$ तथा $y \ge 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

चूंकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिन्दु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है अतः असमिकाओं $x \ge 0$ तथा $y \ge 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र प्रथम पाद है।

छायांकित क्षेत्र O I J K L M उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है। यह क्षेत्र दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र है। इस हल क्षेत्र के कोनीय बिन्दुओं के निर्देशांक O (0, 0), I (400, 0) J (400, 200), K (200, 600), L (100, 700), M (0, 700) है। जहाँ बिन्दुओं J, K व L को क्रमशः रेखाओं $x = 400$ व $2x + y = 1000$; $2x + y = 1000$ व $x + y = 800$ तथा $y = 700$ व $x + y = 800$ के प्रतिच्छेदन से प्राप्त किए जाते है।



आकृति 15.11

इन बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन के मान नीचे सारणी में दिए गए है।

बिन्दु	x निर्देशांक	y निर्देशांक	उद्देश्य फलन $Z = 2x + 1.50y$
O	0	0	$Z_O = (2)(0) + (1.50)(0) = 0$
I	400	0	$Z_I = (2)(400) + (1.50)(0) = 800$
J	400	200	$Z_J = (2)(400) + (1.50)(200) = 1100$
K	200	600	$Z_K = (2)(200) + (1.50)(600) = 1300$
L	100	700	$Z_L = 2(100) + (1.50)(700) = 1250$
M	0	700	$Z_M = (2)(0) + (1.50)(700) = 1050$

सारणी से स्पष्ट है कि उद्देश्य फलन का मान बिन्दु K(200, 600) पर अधिकतम है। अतः फर्म को A प्रकार के 200 तथा B प्रकार के 600 बेल्टों का निर्माण करना चाहिए ताकि अधिकतम लाभ ₹ 1300 प्राप्त हो सके।

उदाहरण-10. पुरानी मुर्गियाँ ₹ 2 प्रति मुर्गी के हिसाब से खरीदी जा सकती है, जबकि नई का मूल्य ₹ 5 प्रति मुर्गी है। पुरानी मुर्गियाँ तीन अण्डे तथा नई मुर्गियाँ पाँच अण्ड़े प्रति सप्ताह देती है। एक अण्डे का मूल्य 30 पैसे है। एक मुर्गी का प्रति सप्ताह खाने का खर्च ₹ 1 है। यदि एक व्यक्ति के पास मुर्गियों को खरीदने के लिए केवल ₹ 80 हो तो उसे प्रत्येक प्रकार की कितनी मुर्गियाँ खरीदनी चाहिए ताकि उसे ₹ 6 से अधिक का लाभ मिल सके। यह मानते हुए कि वह व्यक्ति 20 से अधिक मुर्गियाँ मकान में नहीं रख सकता, रैखिक प्रोगामन समस्या का संरूपण कर आलेखीय विधि से हल कीजिए।

हलः माना व्यक्ति x नई मुर्गियाँ तथा y पुरानी मुर्गियाँ खरीदता है।

चूँकि प्रत्येक नई मुर्गी 5 अण्डे प्रति सप्ताह देती है जिससे कुल ₹ 30×5 = ₹ 1.50 प्राप्त होते है जबकि एक मुर्गी को एक सप्ताह खिलाने का खर्च ₹ 1 है।

अतः एक नई मुर्गी से प्राप्त शुद्ध लाभ = ₹ $(1.50 - 1)$ = ₹ .50

इसी प्रकार प्रत्येक पुरानी मुर्गी से प्राप्त शुद्ध लाभ = ₹ $(0.30 \times 3 - 1)$ = ₹ (-0.10)

अतः उद्देश्य फलन अधिकतम $Z = (.50)x - (.10)y$ नई तथा पुरानी मुर्गी का मूल्य क्रमशः ₹ 5 तथा ₹ 2 प्रति मुर्गी है तथा व्यक्ति के पास मुर्गियों को खरीदने के लिए केवल ₹ 80 उपलब्ध है अतः $5x + 2y \le 80$ पुनः व्यक्ति 20 से अधिक मुर्गियाँ मकान eaughaj [kl drkgSvr % $x + y \le 20$ तथा व्यक्ति ₹ 6 से अधिक का लाभ कमाना चाहता है अतः $0.5x - 0.1y \ge 6$ खरीदी गई मुर्गियों की संख्या कभी भी ऋणात्मक नहीं हो सकती है अतः $x \ge 0, \ y \ge 0$

दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का गणितीय संरूपण निम्न है–

अधिकतम $Z = (\cdot 50)x - (\cdot 10)y$

व्यवरोध $5x + 2y \le 80$

$x + y \le 20$

$0 \cdot 5x - 0 \cdot 1y \ge 6$

तथा $x \ge 0, \ y \ge 0$

चूंकि व्यक्ति को लाभ ₹ 6 से अधिक प्राप्त करना है परन्तु उद्देश्य फलन का मान अधिकतम करना है अतः व्यवरोध $0 \cdot 5x - 0 \cdot 1y \ge 6$ जोड़े जाने की आवश्यकता नहीं है।

परिवर्तित समस्या का रूप निम्न है–

अधिकतम $Z = (.50)x - (.10)y$

व्यवरोध $5x + 2y \le 80$

$x + y \le 20$

तथा $x \ge 0, \ y \ge 0$

व्यवरोधों के रूप में दी गई सभी असमिकाओं को समीकरणों में परिवर्तित करते है।

$$5x + 2y = 80 \qquad (1)$$

$$x + y = 20 \qquad (2)$$

असमिका 5x + 2y ≤ 80 द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र

रेखा $5x + 2y = 80$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः A (16, 0) तथा B (0, 40) बिन्दुओं पर मिलती है।

5x + 2y = 80

x	16	0
y	0	40

A (16, 0) ; B (0, 40)

बिन्दुओं A तथा B को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते हैं। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $5(0) + 2(0) = 0 \le 80$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

असमिका $x + y \le 20$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

रेखा $x + y = 20$ निर्देशी अक्षों को क्रमशः C(20, 0) तथा D(0, 20) बिन्दुओं पर मिलती है।

x + y = 20

x	20	0
y	0	20

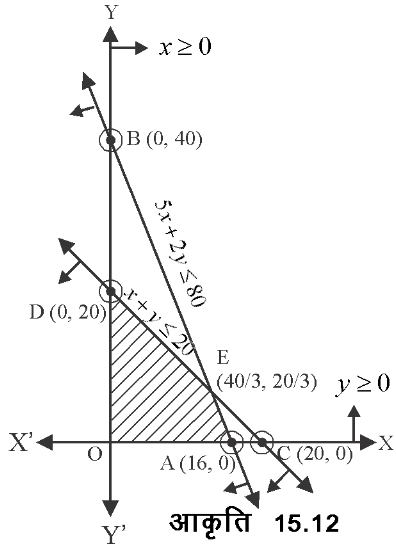
C (20, 0) ; D (0, 20)

बिन्दुओं C तथा D को अंकित कर रेखा का आलेख खींचते है। असमिका में मूल बिन्दु (0, 0) को प्रतिस्थापित करने पर $0 + 0 = 0 \le 20$ असमिका सन्तुष्ट होती है। अतः इस असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु की ओर होगा।

$x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र–

चूंकि प्रथम पाद का प्रत्येक बिन्दु इन दोनों असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है अतः असमिकाओं $x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र प्रथम पाद है।

छायांकित क्षेत्र OAED उपरोक्त असमिकाओं का उभयनिष्ठ क्षेत्र प्रदर्शित करता है। यह क्षेत्र दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र है। इस हल क्षेत्र के कोनीय बिन्दुओं के निर्देशांक 0(0, 0), A (16, 0), $E(40/3,\ 20/3)$ तथा D (0, 20) है। जहाँ बिन्दु E को रेखाओं $x+y=20$ तथा $5x+2y=80$ के प्रतिच्छेदन से प्राप्त किया जाता है। इन बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन के मान नीचे सारणी में दिए गए है।



आकृति 15.12

इन बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन के मान नीचे सारणी में दिए गए है।

बिन्दु	x निर्देशांक	y निर्देशांक	उद्देश्य फलन $Z = (.50)\,x - (.10)\,y$
0	0	0	$Z_O = (\cdot 50)\,(0) - (\cdot 10)\,(0) = 0$
A	16	0	$Z_A (\cdot 50)\,(16) - (\cdot 10)\,(0) = 8$
E	40 / 3	20 / 3	$Z_E = (\cdot 50)\,(40/3) - (\cdot 10)\,(20/3) = 6$
D	0	20	$Z_D = (\cdot 50)\,(0) = (\cdot 10)\,(20) = -2$

उपरोक्त सारणी से स्पष्ट है कि उद्देश्य फलन का मान कोनीय बिन्दु A (16, 0) पर सर्वाधिक है। अतः अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए व्यक्ति को 16 नई मुर्गियाँ खरीदनी चाहिए। ताकि उसे अधिकतम लाभ ₹ 8 प्राप्त हो सके।

विविध प्रश्नमाला—15

निम्न रैखिक प्रोगामन समस्याओं को आलेखीय विधि से हल कीजिये–

1. अधिकतम $Z = 4x + y$
   व्यवरोध $x + y \leq 50$
   $3x + y \leq 90$
   तथा $x \geq 0,\ y \geq 0$
2. निम्नतम $Z = 3x + 2y$
   व्यवरोध $x + y \geq 8$
   $3x + 5y \leq 15$
   तथा $x \geq 0,\ y \leq 15$
3. निम्नतम तथा अधिकतम $Z = x + 2y$
   व्यवरोध $x + 2y \geq 100$
   $2x - y \leq 0$
   $2x + y \leq 200$
   तथा $x \geq 0,\ y \geq 0$
4. अधिकतम $Z = 3x + 2y$
   व्यवरोध $x + 2y \leq 10$
   $3x + y \leq 15$
   तथा $x \geq 0,\ y \geq 0$

5. एक बीमार व्यक्ति के भोजन में कम से कम 4000 इकाई विटामिन, 50 इकाई खनिज तथा 1400 इकाई कैलोरी का संयोजन होना चाहिये। दो खाद्य सामग्री A तथा B क्रमशः ₹ 4 तथा ₹ 3 प्रति इकाई की कीमत पर उपलब्ध है। यदि खाद्य सामग्री A की एक इकाई में 200 इकाई विटामिन, 1 इकाई खनिज तथा 40 कैलोरी तथा खाद्य सामग्री B की एक इकाई में 100 इकाई विटामिन, 2 इकाई खनिज तथा 40 कैलोरी हो, तो न्यूनतम लागत प्राप्त करने के लिए किस प्रकार से खाद्य सामग्री का संयोजन उपयोग करना चाहिए?
6. एक भोज्य पदार्थ में कम से कम 80 इकाई विटामिन A तथा कम से कम 100 इकाई खनिज है। दो प्रकार की खाद्य सामग्री F_1 तथा F_2 उपलब्ध है। खाद्य सामग्री F_1 की कीमत ₹ 4 प्रति इकाइ तथा F_2 की कीमत ₹ 6 प्रति इकाई है। खाद्य सामग्री F_1 की एक इकाई में 3 इकाई विटामिन A तथा 4 इकाई खनिज हैं जबकि F_2 की एक इकाई में 6 इकाई विटामिन A तथा 3 इकाई खनिज है। इसे एक रैखिक प्रोगामन समस्या के रूप में सूत्रबद्ध कीजिये। उस भोज्य पदार्थ का न्यूनतम मूल्य भी ज्ञात कीजिए जिसमें इन दोनों खाद्य सामग्रीयों का मिश्रण है।
7. एक फर्नीचर निर्माता दो उत्पाद– कुर्सी तथा टेबिल बनाता है। ये उत्पाद दो यंत्रों A तथा B पर बनाए जाते है। एक कुर्सी को बनाने में यंत्र A पर 2 घण्टे तथा यंत्र B पर 6 घण्टे लगते है। एक टेबल को बनाने में यंत्र A पर 4 घण्टे तथा यंत्र B पर 2 घण्टे लगते है। यंत्रों A तथा B पर क्रमशः 16 घण्टे तथा 30 घण्टे प्रतिदिन समय उपलब्ध है। निर्माता को एक कुर्सी तथा एक टेबल से प्राप्त लाभ क्रमशः ₹ 3 व ₹ 5 है। निर्माता को अधिकतम लाभ प्राप्त करने हेतु प्रत्येक उत्पाद का दैनिक उत्पादन कितना करना चाहिए।
8. एक फर्म सिरदर्द की दो प्रकारों– प्रकारों A तथा प्रकार B की गोलियों का निर्माण करती है। प्रकार A की गोली में 2 ग्रेन एस्प्रिन, 5 ग्रेन बाईकार्बोनेट तथा 1 ग्रेन कोड़ीन है जबकि प्रकार B की गोली में 1 ग्रेन एस्प्रिन, 8 ग्रेन बाईकार्बोनेट तथा 6 ग्रेन कोड़ीन है। उपयोगकर्ताओं के द्वारा यह पाया गया है कि तुरंत प्रभाव के लिये कम से कम 12 ग्रेन एस्प्रिन, 74 ग्रेन बाईकार्बोनेट तथा 24 ग्रेन कोड़ीन की आवश्यकता है। एक मरीज को तुरन्त राहत प्राप्त करने के लिए कम से कम कितनी गोलियाँ लेनी चाहिए?
9. एक ईंट निर्माता के पास क्रमशः 30,000 तथा 20,000 ईंटों की भण्ड़ारण क्षमता वाले 2 डिपो A तथा B है। वह तीन बिल्ड़रों P, Q व R से क्रमशः 15,000, 20,000 तथा 15,000 ईंटों के आदेश प्राप्त करता है। 1000 ईंटों को डिपों से बिल्डरों तक भिजवाने में परिवहन लागत नीचे सारणी में दी गई है–

से/को	P	Q	R
A	40	20	30
B	20	60	40

परिवहन लागत को न्यूनतम रखते हुए निर्माता आदेशों को किस प्रकार भिजवा पायेगा?

10. असमिका निकाय $x + y \leq 3$

$y \leq 6$

तथा $x, y \leq 0$

द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र है–

(A) प्रथम पाद में अपरिबद्ध (B) प्रथम व द्वितीय पादों में अपरिबद्ध

(C) प्रथम पाद में परिबद्ध (D) इनमें से कोई नहीं

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. रैखिक प्रोगामन एक ऐसी गणितीय प्रविधि है जो उपलब्ध सीमित साधनों का परस्पर प्रतिस्पर्धी क्रियाकलापों में अनुकूलतम प्रकार से आवंटन करने के लिए प्रयुक्त की जाती है जबकि प्रयुक्त सभी चरों के मध्य रेखीय सम्बन्ध हो।
2. चरों के ऐसे मानों का समुच्चय जो रैखिक प्रोगामन समस्या के व्यवरोधों को सन्तुष्ट करता है, रैखिक प्रोगामन समस्या का एक हल कहलाता है।
3. किसी रैखिक प्रोगामन समस्या का वह हल जो समस्या के ऋणेत्तर व्यवरोधों को भी सन्तुष्ट करता है, सुसंगत हल कहलाता है। किसी रैखिक प्रोगामन समस्या के सभी सुसंगत हलों का समुच्चय सुंसगत हल क्षेत्र कहलाता है।

4. एक सुसंगत हल जो रैखिक प्रोगामन समस्या के उद्देश्य फलन को इष्टतम (अधिकतम या न्यूनतम) करता है, इष्टतम हल कहलाता है।
5. किसी रैखिक प्रोगामन समस्या को हल करने की आलेखीय विधि तभी उपयोग में ली जाती है जबकि उस समस्या में केवल दो निर्णायक चर हों।
6. आलेखीय विधि मूलभूत चरम बिन्दु प्रमेय पर आधारित है जिसका कथन निम्न प्रकार है– **"किसी रैखिक प्रोगामन समस्या का अनुकूलतम हल यदि विद्यमान हो तो समस्या के सभी सुसंगत हलों के समुच्च्य से निर्मित अवमुख बहुभुज के एक चरम (कोनीय) बिन्दु पर होता है।"**
7. किसी रैखिक प्रोगामन समस्या को हल करने के लिए कोनीय बिन्दु विधि निम्न पदों में क्रियान्वित होती है–
   (i) दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या को गणितीय सूत्रित कीजिये यदि यह गणितीय रूप में नहीं दी गई हो।
   (ii) व्यवरोधों के रूप में दी गई सभी असमिकाओं को समीकरणों में परिवर्तित करते हैं तथा उनके आलेख खींचते हैं।
   (iii) प्रत्येक असमिका को दर्शाने हेतु क्षेत्र का निर्धारण करते है।
   (iv) सभी बिन्दुओं को समाहित करने वाला क्षेत्र xy समतल में प्राप्त करते है जो सभी व्यवरोधो (ऋणेत्तर व्यवरोध सहित) को एक साथ सन्तुष्ट करता है। इस प्रकार प्राप्त क्षेत्र सुसंगत हल क्षेत्र कहलाता है।
   (v) इस प्रकार प्राप्त अवमुख बहुभुज के शीर्षो (कोनीय बिन्दुओं) के निर्देशांक ज्ञात करते है।
   (vi) प्रत्येक शीर्ष पर उद्देश्य फलन का मान ज्ञात करते है। वह बिन्दु जहाँ पर उद्देश्य फलन इष्टतम (अधिकतम या न्यूनतम) मान ग्रहण करता है, दी गई रैखिक प्रोगामन समस्या का इष्टतम हल कहलाता हैं।
8. यदि किसी रैखिक प्रोगामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र परिबद्ध हो अर्थात् यह एक अवमुख बहुभुज बनाता हो तब इस अवमुख समुच्चय के कोनीय बिन्दुओं में से किसी एक बिन्दु पर उद्देश्य फलन का मान अधिकतम (माना M) तथा किसी अन्य बिन्दु पर उद्देश्य फलन का मान न्यूनतम (माना m) प्राप्त होता है।
9. कुछ स्थितियों में यदि किसी रैखिक प्रोगामन समस्या का सुसंगत हल क्षेत्र परिबद्ध अवमुख बहुभुज नहीं होता है अर्थात् यह किसी भी दिशा में अनन्त विस्तृत किया जा सके, तब सुसंगत हल क्षेत्र अपरिबद्ध कहलाता है। यदि सुसंगत हल क्षेत्र अपरिबद्ध है तो इस हल क्षेत्र के प्रत्येक कोनीय बिन्दु पर उद्देश्य फलन का मान ज्ञात करते है। माना इन बिन्दुओं पर उद्देश्य फलन के अधिकतम तथा न्यूनतम मान क्रमशः M व m है। अब निम्न दो स्थितियों पर विचार करते हैं।

   स्थिति–I: सरल रेखा $Z = ax + by = M$ खींचते है। तथा विवृत अर्धतल $ax + by > M$ ज्ञात करते है। यदि $ax + by > M$ द्वारा प्रदर्शित विवृत्त अर्धतल तथा अपरिबद्ध सुसंगत क्षेत्र में कोई बिन्दु उभयनिष्ठ नहीं है तब उद्देश्य फलन का अधिकतम मान M है। अन्यथा उद्देश्य फलन का कोई अधिकतम मान नहीं हैं।

   स्थिति–II: सरल रेखा $Z = ax + by = m$ खींचते है तथा $ax + by < m$ द्वारा प्रदर्शित विवृत्त अर्धतल ज्ञात करते है। यदि $ax + by < m$ द्वारा प्रदर्शित विवृत्त अर्धतल तथा अपरिबद्ध सुसंगत क्षेत्र में कोई बिन्दु उभयनिष्ठ नहीं है तब उद्देश्य फलन का निम्नतम मान m है। अन्यथा उदृदेश्य फलन का कोई निम्नतम मान नहीं है।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 15.1

1. बिन्दु $(4, 0)$ पर निम्नतम $Z = -12$
2. बिन्दु $(0, 4)$ पर अधिकतम $Z = 16$
3. दिए गए व्यवरोधों के लिए उद्देश्य फलन का कोई निम्नतम मान विद्यमान नहीं है।
4. बिन्दु $(3/2,\ 1/2)$ पर निम्नतम $Z = 7$
5. बिन्दु $(5, 5)$ पर निम्नतम $Z = 60$ तथा बिन्दुओं $(15, 15)$ व $(0, 20)$ पर अधिकतम $z = 120$
6. बिन्दुओं $(6, 0)$ तथा $(0, 3)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड़ पर स्थित सभी बिन्दुओं पर निम्नतम $Z = 6$
7. बिन्दु $(60, 0)$ पर निम्नतम $Z = 300$ बिन्दुओं $(120, 0)$ और $(60, 30)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड पर स्थित सभी बिन्दुओं पर अधिकतम $Z = 600$
8. दिए गए व्यवरोधों के लिए उद्देश्य फलन का कोई अधिकतम मान विद्यमान नहीं है।
9. दिए गए व्यवरोधों के लिए समस्या का सुसंगत हल विद्यमान नहीं है।
10. दिए गए व्यवरोधों के लिए उद्देश्य फलन का कोई अधिकतम मान विद्यमान नहीं है।

प्रश्नमाला 15.2

1. निम्नतम $Z = 5x + 7y$

व्यवरोध $2x + y \geq 8$

$x + 2y \geq 10$

तथा $x \geq 0,\ y \geq 0$

आहार विज्ञानी के लिये इष्टतम नीति भोज्य I की 2 किलोग्राम तथा भोज्य II की 4 किलोग्राम से मिश्रण बनाने की होगी जिससे निम्नतम लागत ₹ 38 प्राप्त होगी

2. निम्नतम $Z = 6x + 10y$

व्यवरोध $x + 2y \geq 10$

$2x + 2y \geq 12$

$3x + y \geq 8$

तथा $x \geq 0,\ y \geq 0$

गृहिणी के लिये इष्टतम नीति भोज्य I की 2 किलोग्राम तथा भोज्य II की 4 किलोग्राम से मिश्रण बनाने की होगी जिससे निम्नतम लागत ₹ 52 प्राप्त होगी।

3. 20, 10

4. अधिकतम $Z = 2.50x + y$

व्यवरोध $x + 3y \leq 12$

$3x + y \leq 12$

तथा $x \geq 0,\ y \geq 0$

निर्माता के लिये इष्टतम उत्पादन नीति प्रत्येक (नट और बोल्ट) के 3 पैकिट प्रतिदिन उत्पादन करने की होगी जिससे अधिकतम लाभ ₹ 10.50 प्राप्त हो सके।

5. अधिकतम $Z = 22x + 18y$

व्यवरोध $x + y \leq 20$

$360x + 240y \leq 5760$

तथा $x \geq 0,\ y \geq 0$

व्यापारी 8 पंखे तथा 12 सिलाई मशीनों का क्रय करना चाहेगा ताकि उसे अधिकतम लाभ ₹ 392 प्राप्त हो सके।

6. अधिकतम $Z = 0.7x + y$

व्यवरोध $4x + 6y \leq 240$

$6x + 3y \leq 240$

तथा $x \geq 0,\ y \geq 0$

निर्माता को पेच A के 30 पैकेट तथा पेच B के 20 पैकेट बनाने चाहिये ताकि उसे अधिकतम लाभ ₹ 41 प्राप्त हो सके।

7. अधिकतम $Z = 5x + 6y$

व्यवरोध $5x + 8y \leq 200$

$10x + 8y \leq 240$

तथा $x \geq 0,\ y \geq 0$

फर्म को A प्रकार के 8 तथा B प्रकार के 20 स्मृति चिन्हों का निर्माण करना चाहिए ताकि अधिकतम लाभ ₹ 160 प्राप्त हो सके।

8. निम्नतम $Z = (.60)x + (.40)y$

व्यवरोध $\frac{10x}{100} + \frac{5y}{100} \le 14$

$\frac{6x}{100} + \frac{10y}{100} \le 14$

तथा $x \ge 0,\ y \ge 0$

उर्वरक F_1 की 100 किलोग्राम तथा उर्वरक F_2 की 80 किलोग्राम मात्रा उपयोग में ली जानी चाहिए।

न्यूनतम मूल्य = ₹ 92

9. अधिकतम $Z = 4500x + 5000y$

व्यवरोध $25000x + 40000y \le 7000000$

$x + y \le 250$

तथा $x \ge 0,\ y \ge 0$

व्यापारी 200 डेस्कटॉप प्रतिरूप तथा 50 पोर्टेबल प्रतिरूपों का भण्डारण करेगा ताकि उसे अधिकतम लाभ ₹ 1150000 प्राप्त हो सके।

10. माना भंड़ार A, राशन की दुकानों D तथा E को क्रमशः x तथा y क्विण्टल अन्न उपलब्ध करवाता है।

निम्नतम $Z = 6x + 3y + 5/2(100 - x - y) + 4(60 - x) + 2(50 - y) + 3(x + y - 60)$

व्यवरोध $x + y \le 100$

$x \le 60$

$y \le 50$

$x + y \ge 60$

तथा $x \ge 0,\ y \ge 0$

भण्डार A से D, E व F को क्रमशः 10, 50 व 40 क्विण्टल

भण्डार B से D, E व F को क्रमशः 50, 0 व 0 क्विण्टल।

विविध प्रश्नमाला–15

1. बिन्दु (30, 0) पर अधिकतम $Z = 120$

2. समस्या का सुसंगत हल विद्यमान नहीं है।

3. बिन्दुओं (0, 50) तथा (20, 40) को मिलाने वाले रेखाखण्ड पर स्थित सभी बिन्दुओं पर निम्नतम $Z = 100$
(0, 200) पर अधिकतम $Z = 400$

4. बिन्दु (4, 3) पर अधिकतम $Z = 18$

5. खाद्य सामग्री A की 5 इकाईयाँ खाद्य सामग्री B की 30 इकाईयाँ

6. माना x व y क्रमशः खाद्य सामग्री F_1 तथा F_2 की इकाईयों को निरूपित करते है तब

निम्नतम $Z = 4x + 6y$

व्यवरोध $3x + 6y \ge 80$

$4x + 3y \ge 100$

तथा $x \ge 0,\ y \ge 0$

निम्नतम मूल्य = ₹ 104

7. 22 / 5 कुर्सियाँ तथा 9 / 5 टेबलें अधिकतम लाभ = ₹ 22.2

8. आकार A की 2 गोलियाँ आकार B की 8 गोलियाँ

9. निर्माता को डिपो A से बिल्डरों P, Q व R को क्रमशः 0, 20000, 10000 ईंटों की आपूर्ति करनी चाहिए। डिपों B से बिल्डरों P, Q व R को क्रमशः 15000, 0, 5000 ईंटों की आपूर्ति करनी चाहिए।

10. (C)

16

प्रायिकता एवं प्रायिकता बंटन
(Probability and Probability Distribution)

16.01 भूमिका (Introduction)

पूर्व कक्षा में हम प्रायिकता को किसी यादृच्छिक परीक्षण की घटनाओं के घटित होने अथवा घटित नहीं होने की अनिश्चितता के आंकिक माप के रूप में पढ़ चुके है। साथ ही समसंभाव्य परिणामों की अवस्था में प्रायिकता के अभिगृहितीय दृष्टिकोण तथा चिरसम्मत सिद्धान्त का भी अध्ययन किया जा चुका है।

इस अध्याय में किसी घटना की सप्रतिबंध प्रायिकता (जब एक घटना घटित हो चुकी हो तथा दूसरी घटना घटित हो रही हो) का अध्ययन करेंगे। सप्रतिबंध प्रायिकता की अवधारणा की सहायता से स्वतंत्र घटनाओं, प्रायिकता के गुणन नियम, प्रतिलोम प्रायिकता ज्ञात करने के लिए बेज प्रमेय के बारे में समझेंगे। इस अध्याय के उत्तरार्द्ध में यादृच्छिक चर तथा इसके प्रायिकता बंटन व किसी प्रायिकता बंटन के माध्य व प्रसरण के बारे में भी अध्ययन करेंगे। अन्त में एक महत्वपूर्ण असंतत प्रायिकता बंटन (द्विपद बंटन) का अध्ययन करेंगे।

16.02 सप्रतिबंध प्रायिकता (Conditional Probability)

सप्रतिबंध प्रायिकता की अवधारणा को समझने के लिए एक ऐसे यादृच्छिक परीक्षण पर विचार करते है जिसके परिणाम समसंभाव्य है।

दो न्याय्य सिक्कों को उछालने के परीक्षण पर विचार करते हैं जिसका प्रतिदर्श समष्टि निम्न है:

$S=\{HH, HT, TH, TT\}$, जहाँ H = चित, T = पट।

चूंकि दोनों सिक्के न्याय्य है अतः हम प्रतिदर्श समष्टि के प्रत्येक प्रतिदर्श बिन्दु की प्रायिकता $1/4$ निर्दिष्ट कर सकते है। माना A घटना "कम से कम एक चित प्रकट होना" तथा B घटना "प्रथम सिक्के पर पट प्रदर्शित होना" को निरूपित करते है।

तब $$A=\{HT, TH, HH\},\ B=\{TH, TT\}$$

अतः $$P(A)=P(\{HT\})+P(\{TH\})+P(\{HH\})$$
$$=1/4+1/4+1/4=3/4$$

तथा $$P(B)=P(\{TH\})+P(\{TT\})$$
$$=1/4+1/4=1/2$$

साथ ही $$A\cap B=\{TH\}$$

अतः $$P(A\cap B)=P(\{TH\})=1/4$$

अब माना हमें घटना A की प्रायिकता ज्ञात करनी है जबकि घटना B घटित हो चुकी हो। घटना B के घटित होने की जानकारी होने पर यह निश्चित है कि घटना A की प्रायिकता ज्ञात करने के लिए उन प्रतिदर्श बिन्दुओं पर विचार नहीं किया जायेगा जिनमें पहले सिक्के पर पट नहीं है। अतः घटना B का वह प्रतिदर्श बिन्दु जो घटना A के भी अनुकूल है; TH है।

B को प्रतिदर्श समष्टि मानते हुए घटना A की प्रायिकता $=1/2$ या घटना A के घटित होने की प्रायिकता जबकि घटना B घटित हो चुकी हो $=1/2$

घटना A की यह प्रायिकता सप्रतिबंध प्रायिकता कहलाती है तथा इसे $P(A/B)$ से निरूपित करते हैं।

अर्थात् $$P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{1}{2}$$

घटना A की सप्रतिबंध प्रायिकता $P(A/B)$ को निम्न प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है।

$$P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{(A\cap B)\text{ के अनुकूल प्रतिदर्श बिन्दुओं की संख्या}}{B\text{ के अनुकूल प्रतिदर्श बिन्दुओं की संख्या}}$$

$$=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

अंश व हर को प्रतिदर्श समष्टि के अवयवों की कुल संख्या से विभाजित करने पर $P(A/B)$ को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है

$$P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

जो केवल तभी वैध है जबकि $P(B)\neq 0$

परिभाषाः यदि किसी यादृच्छिक परीक्षण के प्रतिदर्श समष्टि से संबंधित A तथा B दो घटनाएँ हो, तो घटना B के घटित होने की जानकारी होने पर घटना A की सप्रतिबंध प्रायिकता निम्न सूत्र से ज्ञात की जाती हैः

$$P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)};\ P(B)\neq 0$$

इसी प्रकार घटना A के घटित होने की जानकारी होने पर घटना B की सप्रतिबंध प्रायिकता निम्न सूत्र से ज्ञात की जा सकती है

$$P\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)};\ P(A)\neq 0$$

16.3 सप्रतिबंध प्रायिकता के गुणधर्म (Properties of conditional probability)

माना A तथा B किसी प्रतिदर्श समष्टि S की दो घटनाएँ है तब

(i) $$P\left(\frac{S}{B}\right)=P\left(\frac{B}{B}\right)=1$$

हम जानते है कि $$P\left(\frac{S}{B}\right)=\frac{P(S\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$$

पुनः $$P\left(\frac{B}{B}\right)=\frac{P(B\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$$

अतः $$P\left(\frac{S}{B}\right)=P\left(\frac{B}{B}\right)=1$$

(ii) $$P\left(\frac{\bar{A}}{B}\right)=1-P\left(\frac{A}{B}\right)$$

गुण (i) से $$P\left(\frac{S}{B}\right)=1$$

$$\Rightarrow \qquad P\left(\frac{A \cup \bar{A}}{B}\right) = 1 \qquad [\because S = A \cup \bar{A}]$$

$$\Rightarrow \qquad P\left(\frac{A}{B}\right) + P\left(\frac{\bar{A}}{B}\right) = 1 \qquad [\because A \text{ तथा } \bar{A} \text{ परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं}]$$

अतः
$$P\left(\frac{\bar{A}}{B}\right) = 1 - P\left(\frac{A}{B}\right).$$

(iii) यदि प्रतिदर्श समष्टि S की A तथा B कोई दो घटनाएँ हो तथा F एक अन्य घटना इस प्रकार से हो कि $P(F) \neq 0$ तब

(a)
$$P\left(\frac{A \cup B}{F}\right) = P\left(\frac{A}{F}\right) + P\left(\frac{B}{F}\right) - P\left(\frac{A \cap B}{F}\right)$$

तथा यदि A व B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हो, तो

(b)
$$P\left(\frac{A \cup B}{F}\right) = P\left(\frac{A}{F}\right) + P\left(\frac{B}{F}\right)$$

हम जानते है कि

$$P\left(\frac{A \cup B}{F}\right) = \frac{P[(A \cup B) \cap F]}{P(F)}$$

$$= \frac{P[(A \cap F) \cup (B \cap F)]}{P(F)}$$

$$= \frac{P(A \cap F) + P(B \cap F) - P(A \cap B \cap F)}{P(F)}$$

$$= \frac{P(A \cap F)}{P(F)} + \frac{P(B \cap F)}{P(F)} - \frac{P[(A \cap B) \cap F]}{P(F)}$$

$$= P\left(\frac{A}{F}\right) + P\left(\frac{B}{F}\right) - P\left(\frac{A \cap B}{F}\right).$$

विशेष स्थितिः यदि A तथा B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हो, तो $P\left(\frac{A \cap B}{F}\right) = 0$

अतः
$$P\left(\frac{A \cup B}{F}\right) = P\left(\frac{A}{F}\right) + P\left(\frac{B}{F}\right).$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. यदि $P(A) = 6/11$, $P(B) = 5/11$ और $P(A \cup B) = 7/11$ हो, तो ज्ञात कीजिए।

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A/B)$ (iii) $P(B/A)$

हलः (i) हम जानते है कि $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\Rightarrow \qquad P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$= \frac{6}{11} + \frac{5}{11} - \frac{7}{11} = \frac{4}{11}$$

(ii) $$P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{4/11}{5/11}=\frac{4}{5}$$

(iii) $$P\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{4/11}{6/11}=\frac{2}{3}$$

उदाहरण-2. एक प्रशिक्षक के पास 300 सत्य/असत्य प्रकार के आसान प्रश्न, 200 सत्य/असत्य प्रकार के कठिन प्रश्न, 500 बहु-विकल्पीय प्रकार के आसान प्रश्न तथा 400 बहु-विकल्पीय प्रकार के कठिन प्रश्नों का संग्रह है। यदि प्रश्नों के संग्रह में से एक प्रश्न यादृच्छया चुना जाए तो इस प्रश्न के आसान होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि यह ज्ञात है कि यह प्रश्न बहु-विकल्पीय प्रश्न है?

हल: माना A घटना 'चुने गए प्रश्न का आसान प्रश्न होना' और B घटना 'चुने गए प्रश्न का बहु-विकल्पीय प्रश्न होना' को निरूपित करते है। हमें $P(A/B)$ ज्ञात करना है।

$$n(A)=300+500=800,\ n(B)=500+400=900$$

समुच्चय $A\cap B$ में चुने गए प्रश्न का आसान बहु-विकल्पीय प्रश्न होना प्रदर्शित करता है।

अतः $$n(A\cap B)=500$$

अभीष्ट प्रायिकता $$=P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{500}{900}=\frac{5}{9}.$$

उदाहरण-3. एक सिक्के को तीन बार उछाला गया है। निम्न प्रत्येक अवस्था में $P(A/B)$ ज्ञात कीजिए।

(i) A : तीसरी उछाल पर चित, B : पहली दोनों उछालों पर चित

(ii) A : कम से कम दो चित, B : अधिकतम दो चित

(iii) A : अधिकतम दो पट B : कम से कम एक पट

हल: एक सिक्के को तीन बार उछालने के परीक्षण में प्रतिदर्श समष्टि निम्न है:

$$S=\{HHH,\ HHT,\ HTH,\ THH,\ HTT,\ THT,\ TTH,\ TTT\}$$

(i) $A=\{HHH,\ HTH,\ THH,\ TTH\},\ B=\{HHH,\ HHT\}$

तब $$A\cap B=\{HHH\}$$

$$\Rightarrow\quad n(A)=4,\ n(B)=2,\ n(A\cap B)=1$$

अतः $$P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{1}{2}.$$

(ii) $A=\{HHH,\ HHT,\ HTH,\ THH\},\ B=\{HHT,\ HTH,\ THH,\ HTT,\ THT,\ TTH,\ TTT\}$

तब $$A\cap B=\{HHT,\ HTH,\ THH\}$$

$$\Rightarrow\quad n(A)=4,\ n(B)=7,\ n(A\cap B)=3$$

अतः $$P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{3}{7}.$$

(iii) $A=\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH\}$,

$B=\{HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

तब $$A\cap B=\{HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH\}$$

$\Rightarrow$ $$n(A)=7,\ n(B)=7,\ n(A\cap B)=6$$

अतः $$P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{6}{7}.$$

उदाहरण-4. एक काले तथा एक लाल पासे को क्रम में उछाला गया है। तब (i) पासों पर प्राप्त अंकों का योग 9 से अधिक होने की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए, यदि यह ज्ञात है कि काले पासे पर अंक 5 प्रकट हुआ है।

(ii) पासों पर प्राप्त अंकों का योग 8 होने की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए, यदि यह ज्ञात है कि लाल पासे पर प्रकट अंक 4 से कम है।

हल: (i) माना A घटना 'पासों पर प्राप्त अंकों का योग 9 से अधिक होना' तथा B घटना 'काले पासे पर अंक 5 का प्रकट होना' को निरूपित करते है। हमें $P(A/B)$ ज्ञात करना है।

तब $A=\{(5, 5), (6, 4), (4, 6), (6, 5), (5, 6), (6, 6)\}$, $B=\{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)\}$

$$A\cap B=\{(5, 5), (5, 6)\}$$

$\Rightarrow$ $$n(A)=6,\ n(B)=6,\ n(A\cap B)=2$$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $$=P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

(ii) माना A घटना 'पासों पर प्राप्त अंकों का योग 8 होना' तथा B घटना' लाल पासें पर प्रकट अंक का 4 से कम होना' को निरूपित करते है। हमें $P(A/B)$ ज्ञात करना है।

तब $A=\{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$

$B=\{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3),$

$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$

$$A\cap B=\{(6, 2), (5, 3)\}$$

$\Rightarrow$ $$n(A)=5,\ n(B)=18,\ n(A\cap B)=2$$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $$=P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}.$$

उदाहरण-5. एक पासे को तीन बार उछाला गया है इस प्रयोग से संबंधित घटनाओं A व B को निम्न प्रकार परिभाषित किया गया है:

A : तीसरी उछाल पर अंक 4 का प्रकट होना, B : पहली दो उछालों पर क्रमशः 6 तथा 5 प्रकट होना।

इस अवस्था में $P(A/B)$ ज्ञात कीजिए।

हल: एक पासे को तीन बार उछालने के परीक्षण से संबद्ध प्रतिदर्श समष्टि में प्रतिदर्श बिन्दुओं की कुल संख्या $=6\times6\times6=216$

तब $A=\{(1, 1, 4), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (1, 4, 4), (1, 5, 4), (1, 6, 4)$

$(2, 1, 4), (2, 2, 4), (2, 3, 4), (2, 4, 4), (2, 5, 4), (2, 6, 4)$

$(3, 1, 4), (3, 2, 4), (3, 3, 4), (3, 4, 4), (3, 5, 4), (3, 6, 4)$

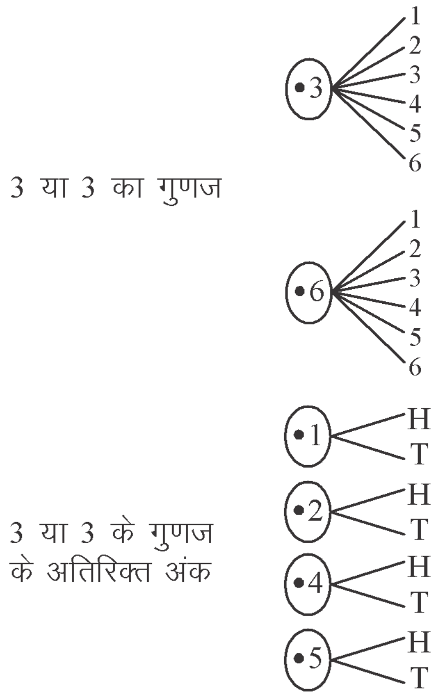
$(4, 1, 4), (4, 2, 4), (4, 3, 4), (4, 4, 4), (4, 5, 4), (4, 6, 4)$

$$(5, 1, 4), (5, 2, 4), (5, 3, 4), (5, 4, 4), (5, 5, 4), (5, 6, 4)$$
$$(6, 1, 4), (6, 2, 4), (6, 3, 4), (6, 4, 4), (6, 5, 4), (6, 6, 4)\}$$
$$B = \{(6, 5, 1), (6, 5, 2), (6, 5, 3), (6, 5, 4), (6, 5, 5), (6, 5, 6)\}$$
$$A \cap B = \{(6, 5, 4)\}$$
$$\Rightarrow \quad n(A) = 36,\ n(B) = 6,\ n(A \cap B) = 1$$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $= P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{6}.$

उदाहरण-6. एक पासे को उछालने के परीक्षण पर विचार कीजिए। यदि पासे पर प्राप्त अंक 3 या 3 का गुणज हो, तो पासे को पुनः उछाला जाता है तथा यदि प्राप्त अंक 3 या 3 के गुणज के अतिरिक्त हो तो एक सिक्के को उछाला जाता है। यदि घटना 'कम से कम एक पासे पर 3 प्रकट होना' का घटित होना दिया गया है तो घटना 'सिक्के पर पट आना' की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: उपर्युक्त परीक्षण के परिणामों को निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है



आकृति 16.01

इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि निम्न है:

$$S = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4)$$
$$(6, 5), (6, 6), (1, H), (1, T), (2, H), (2, T), (4, H), (4, T), (5, H), (5, T)\}$$

माना A घटना 'सिक्के पर पट आना' तथा B घटना 'कम से कम एक पासे पर 3 प्रकट होना' को निरूपित करते है।

तब $\quad A = \{(1, T), (2, T), (4, T), (5, T)\};\ B = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (6, 3)\}$

$$A \cap B = \phi$$
$$\Rightarrow \quad n(A) = 4,\ n(B) = 7,\ n(A \cap B) = \phi$$

अभीष्ट प्रायिकता $= P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{0}{7} = 0$

प्रश्नमाला 16.1

1. यदि $P(A)=7/13,\ P(B)=9/13$ और $P(A\cap B)=4/13$ हो तो $P(A/B)$ ज्ञात कीजिए।

2. यदि $P(B)=0.5$ और $P(A\cap B)=0.32$ हो तो $P(A/B)$ ज्ञात कीजिए।

3. यदि $2P(A)=P(B)=5/13$ और $P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{2}{5}$ हो तो $P(A\cup B)$ ज्ञात कीजिए।

4. यदि $P(A)=0.6,\ P(B)=0.3$ और $P(A\cap B)=0.2$ हो तो $P\left(\frac{A}{B}\right)$ तथा $P\left(\frac{B}{A}\right)$ ज्ञात कीजिए।

5. यदि $P(A)=0.8,\ P(B)=0.5$ और $P\left(\frac{B}{A}\right)=0.4$ हो तो ज्ञात कीजिए।

   (i) $P(A\cap B)$ (ii) $P\left(\frac{A}{B}\right)$ (iii) $P(A\cup B)$

6. एक परिवार में दो बच्चे हैं। यदि यह ज्ञात हो कि दोनों बच्चों में से कम से कम एक बच्चा लडका है तो दोनों बच्चों के लड़का होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

7. दो सिक्कों को एक बार उछाला गया हैं इस प्रयोग से संबंधित घटनाओं A व B को निम्न प्रकार परिभाषित किया गया है, तो $P(A/B)$ ज्ञात कीजिए।
   (i) A : एक सिक्के पर पट प्रकट होता है ; B : एक सिक्के पर चित प्रकट होता है।
   (ii) A : कोई पट प्रकट नहीं होता है ; B : कोई चित प्रकट नहीं होता है।

8. एक पारिवारिक चित्र में माता, पिता व पुत्र यादृच्छया सीधी रेखा में खड़े है। इससे सम्बद्ध घटनाओं A व B को निम्न प्रकार परिभाषित किया गया है, तो $P(A/B)$ ज्ञात कीजिए। यदि
   A : पुत्र एक सिरे पर खड़ा है,
   B : पिता मध्य में खड़े है

9. एक न्याय्य पासे की उछाला गया है। घटनाओं $A=\{1,3,5\}$, $B=\{2,3\}$ व $C=\{2,3,4,5\}$ के लिए निम्नलिखित ज्ञात कीजिए।

   (i) $P\left(\frac{A}{B}\right)$ व $P\left(\frac{B}{A}\right)$ (ii) $P\left(\frac{A}{C}\right)$ व $P\left(\frac{C}{A}\right)$ (iii) $P\left(\frac{A\cup B}{C}\right)$ व $P\left(\frac{A\cap B}{C}\right)$

10. यह दिया गया है कि दो पासों को फेंकने पर प्राप्त अंक भिन्न-भिन्न है। दोनों पासों पर प्राप्त अंकों का योग 4 होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

11. एक बक्से में दस कार्ड 1 से 10 तक अंक लिख कर रखे गए और उन्हें अच्छी तरह मिलाया गया। इस बक्से में से एक कार्ड यादृच्छया निकाला गया। यदि यह ज्ञात हो कि निकाले गए कार्ड पर अंक 3 से अधिक है, तो इस अंक के सम होने की क्या प्रायिकता है?

12. एक विद्यालय में 1000 विद्यार्थी है, जिनमें से 430 लड़कियाँ है। यह ज्ञात है कि 430 में से 10% लड़कियाँ कक्षा XII में पढ़ती है। क्या प्रायिकता है कि एक यादृच्छता चुना गया विद्यार्थी कक्षा XII में पढ़ता है यदि यह ज्ञात है कि चुना गया विद्यार्थी लड़की है?

13. एक पासे को दो बार उछाला गया तथा प्रकट हुए अंकों का योग 6 पाया गया। अंक 4 के कम से कम एक बार प्रकट होने की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

14. एक सिक्के को उछालने के परीक्षण पर विचार कीजिए। यदि सिक्के पर चित प्रकट हो, तो सिक्के को पुनः उछाले परन्तु यदि सिक्के पर पट प्रकट हो तो एक पासे को फेंके। यदि घटना 'कम से कम एक पट प्रकट होना' का घटित होना दिया गया है तो घटना' पासे पर 4 से बड़ा अंक प्रकट होना' की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

16.04 प्रायिकता का गुणन नियम (Multiplication theorem on probability)

माना एक प्रतिदर्श समष्टि S की दो घटनाएँ A तथा B है। तब समुच्चय $A \cap B$ घटनाओं A तथा B के युगपत घटित होने को प्रदर्शित करता है। घटना $A \cap B$ को AB से भी निरूपित किया जाता है।

हम जानते है कि घटना A की सप्रतिबंध प्रायिकता

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)};\ P(B) \neq 0$$

$\Rightarrow$
$$P(A \cap B) = P(B)P\left(\frac{A}{B}\right) \tag{i}$$

पुनः
$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)};\ P(A) \neq 0$$

या
$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad [\because B \cap A = A \cap B]$$

अतः
$$P(A \cap B) = P(A)P\left(\frac{B}{A}\right) \tag{ii}$$

(i) व (ii) से
$$P(A \cap B) = P(A)P\left(\frac{B}{A}\right) = P(B)P\left(\frac{A}{B}\right),\ \text{जहाँ } P(A) \neq 0 \text{ व } P(B) \neq 0$$

यही प्रायिकता का गुणन नियम कहलाता है।

टिप्पणीः माना A, B व C किसी प्रतिदर्श समष्टि की घटनाएँ है तो

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P\frac{B}{A}P\frac{C}{A \cap B}$$
$$= P(A)P\left(\frac{B}{A}\right)P\left(\frac{C}{AB}\right)$$

अर्थात् प्रायिकता के गुणन नियम का विस्तार तीन या तीन से अधिक घटनाओं के लिए भी किया जा सकता है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-7. एक थैलें में 10 सफेद और 15 काली गेंदे है। दो गेंदे एक के बाद एक निकाली जाती है और पहली गेंद दूसरी के निकालने से पहले वापस नहीं रखी जाती है, तब पहली गेंद के सफेद तथा दूसरी गेंद के काली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हलः माना A ''पहली सफेद गेंद के निकलने'' की घटना है तथा B ''दूसरी काली गेंद के निकलने'' की घटना है।

हमें $(A \cap B)$ ज्ञात करना है।

अतः $P(A) = P$ (पहली सफेद गेंद का निकलना) $= \frac{^{10}C_1}{^{25}C_1} = \frac{10}{25}$

दिया गया है कि पहली गेंद दूसरी के निकालने से पहले वापस नहीं रखी जाती है अतः अब थैले में 9 सफेद तथा 15 काली गेंदे रह गई है। इसलिए, दूसरी काली गेंद के निकलने की प्रायिकता जबकि पहली गेंद का सफेद होना हमें ज्ञात है यह घटना B की सप्रतिबंध प्रायिकता $P(B/A)$ ही है।

$\therefore$
$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{^{15}C_1}{^{24}C_1} = \frac{15}{24}$$

प्रायिकता के गुणन नियम से
$$P(A \cap B) = P(A)P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{10}{25} \times \frac{15}{24} = \frac{1}{4}.$$

उदाहरण-8. 52 पत्तों की अच्छी तरह फेंटी गई ताश की गड्डी में से एक-एक करके तीन पत्ते बिना प्रतिस्थापन के निकाले गए। इनमें से पहले दो पत्तों का बादशाह तथा तीसरे पत्ते का बेगम होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: माना K 'निकाले गए पत्ते का बादशाह होना' तथा Q 'निकाले गए पत्ते का बेगम होना' की घटना को निरूपित करते हे हमें $P(KKQ)$ ज्ञात करना है।

अब $P(K) = P$ (पहली बार में निकाले गए पत्ते का बादशाह होना) $= 4/52$

पहले पत्ते के निकाले जाने के बाद अब गड्डी में 51 पत्ते शेष है जिनमें 3 बादशाह है।

अतः $P\left(\frac{K}{K}\right) = P$ (दूसरी बार में निकाले गए पत्ते का बादशाह होना जबकि यह ज्ञात है कि पहले बादशाह निकाला जा चुका है) $= \frac{3}{51}$

दो पत्तों के निकाले जाने के बाद अब गड्डी में 50 पत्ते शेष है।

अब $P\left(\frac{Q}{KK}\right) = P$ (तीसरी बाद में निकाले गए पत्ते का बेगम होना जबकि यह ज्ञात है कि 2 बादशाह निकाले जा चुके है) $= \frac{4}{50}$

प्रायिकता के गुणन नियम से

$$P(KKQ) = P(K)P\left(\frac{K}{K}\right)P\left(\frac{Q}{KK}\right)$$

$$= \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{4}{50} = \frac{2}{5525}.$$

16.05 स्वतंत्र घटनाएँ (Independent events)

यदि A तथा B दो घटनाएँ इस प्रकार की हों कि किसी एक घटना का घटित होना दूसरी घटना के घटित होने पर कोई प्रभाव नहीं डालती हो तो वे घटनाएँ स्वतंत्र घटनाएँ कहलाती है।

दो घटनाओं A तथा B को स्वतंत्र घटनाएँ कहते है

यदि $$P\left(\frac{A}{B}\right) = P(A) \text{ जबकि } P(B) \neq 0$$

तथा $$P\left(\frac{B}{A}\right) = P(B) \text{ जबकि } P(A) \neq 0$$

प्रायिकता के गुणन प्रमेय से

$$P(A \cap B) = P(A)P\left(\frac{B}{A}\right)$$

यदि A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हो तो

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

टिप्पणी: तीन घटनाएँ A, B व C स्वतंत्र घटनाएँ कहलाती है यदि और केवल यदि

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

व $$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

यदि उपर्युक्त में से कम से कम एक भी शर्त सत्य नहीं होती है तो दी गई घटनाओं को स्वतंत्र नहीं कहा जा सकता है।

उदाहरणार्थ: एक अनभिनत पासे को दो बार उछाला गया है। मानाकि A तथा B क्रमशः घटनाओं 'पहली उछाल पर विषम संख्या प्राप्त होना 'और' दूसरी उछाल पर विषम संख्या प्राप्त होना' को निरूपित करते है तब हमें इन घटनाओं के स्वातंत्र्य का परीक्षण करना है।

एक पासे को दो बार उछालने पर निर्मित प्रतिदर्श समष्टि

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6) \\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6) \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6) \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6) \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow \qquad n(S) = 36$

पहली उछाल पर विषम संख्या प्राप्त होने का अर्थ है कि पहली उछाल पर विषम संख्या तथा दूसरी उछाल पर कोई भी संख्या प्राप्त हो तब

$$n(A) = 18$$

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

इसी प्रकार $\qquad P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

तथा $\qquad P(A \cap B) = P$ (दोनों उछालों पर विषम अंक प्राप्त होना) $= \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

[(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5) इस परीक्षण से संबंधित प्रतिदर्श बिन्दु है।]

स्पष्टतः $\qquad P(A \cap B) = 1/4 = 1/2 \times 1/2 = P(A)P(B)$

अतः घटनाएँ A व B स्वतंत्र घटनाएँ है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-9. घटनाएँ A तथा B इस प्रकार की है कि $P(A) = 1/2,\ P(B) = 7/12$ तथा P(A – नहीं या B – नहीं) $= 1/4$ तब क्या A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ है?

हल: दिया है $\qquad P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{7}{12},\ P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{1}{4}$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow \qquad P(\overline{A \cap B}) = \frac{1}{4} \qquad \left[\because P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B})\right]$

$\Rightarrow \qquad 1 - P(A \cap B) = \frac{1}{4} \qquad \left[\because P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)\right]$

$\Rightarrow \qquad P(A \cap B) = 1 - 1/4 = 3/4$

साथ ही $\qquad P(A)P(B) = 1/2 \times 7/12 = 7/24$

$\because \qquad P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$

अतः A तथा B स्वतंत्र घटनाएं नहीं हैं।

उदाहरण-10. एक न्याय्य सिक्के और एक अनभिनत पासे को उछाला गया हैं माना A घटना 'सिक्के पर चित प्रकट होना' तथा B घटना 'पासे पर अंक 3 प्रकट होना' को निरूपित करते है। निरीक्षण कीजिए कि घटनाएँ A और B स्वतंत्र है या नहीं।

हल: इस प्रयोग से सम्बद्ध प्रतिदर्श समष्टि निम्न है–

$$S=\{(H,1),(H,2),(H,3),(H,4),(H,5),(H,6),(T,1),(T,2),(T,3),(T,4),(T,5),(T,6)\}$$

तथा $A=\{(H,1),(H,2),(H,3),(H,4),(H,5),(H,6)\}$, $B=\{(H,3),(T,3)\}$

$\therefore$ $$A\cap B=\{(H,3)\}$$

$$P(A)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2},\quad P(B)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6},\quad P(A\cap B)=\frac{1}{12}$$

स्पष्टतया $$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

अतः घटनाएँ A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं।

उदाहरण-11. एक पासे पर अंक 1, 2, 3 लाल रंग से तथा 4, 5, 6 हरे रंग से लिखे गए है। इस पासे को उछाला गया है। माना A घटना 'अंक सम है' तथा B घटना 'अंक लाल है' को निरूपित करते है। क्या घटनाएँ A तथा B स्वतंत्र है?

हल: एक पासे को एक बार उछालने पर प्राप्त प्रतिदर्श समष्टि $=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

तब $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{1, 2, 3\}$ तथा $A\cap B=\{2\}$

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\quad P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\quad P(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

स्पष्टतया $$P(A\cap B)=\frac{1}{6}\neq P(A).P(B).$$

अतः घटनाएँ A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ नहीं हैं।

उदाहरण-12. एक पासे को एक बार उछाला गया है। माना A घटना 'पासे पर प्राप्त अंक के 3 का गुणज होना' तथा B घटना 'पासे पर प्राप्त अंक सम होना' को निरूपित करते है। क्या घटनाएँ A तथा B स्वतंत्र है?

हल: एक पासे को एक बार उछालने पर प्राप्त प्रतिदर्श समष्टि $=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

तब $A=\{3, 6\}$, $B=\{2, 4, 6\}$ तथा $A\cap B=\{6\}$

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\quad P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\quad P(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

स्पष्टतया $$P(A\cap B)=\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=P(A)P(B)$$

अतः घटनाएँ A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं।

उदाहरण-13. घटनाएँ A तथा B इस प्रकार की है कि $P(A)=1/2$, $P(A\cup B)=3/5$ तथा $P(B)=r$ तब r ज्ञात कीजिए। यदि

(i) ये घटनाएँ परस्पर अपवर्जी है।

(ii) ये घटनाएँ स्वतंत्र है।

हल: (i) यदि घटनाएँ A तथा B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हो, तो

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

$$3/5 = 1/2 + r \quad \Rightarrow \quad r = 1/10$$

(ii) यदि घटनाएँ A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हो, तो

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = (1/2)r$$

दिया है $\qquad P(A \cup B) = 3/5$

$\Rightarrow \qquad P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 3/5$

$\Rightarrow \qquad 1/2 + r - P(A \cap B) = 3/5$

$\Rightarrow \qquad 1/2 + r - (1/2)r = 3/5$

$\Rightarrow \qquad 1/2 + (1/2)r = 3/5$

$\Rightarrow \qquad r/2 = 3/5 - 1/2$

$\Rightarrow \qquad r = 1/5$

उदाहरण-14. तीन सिक्कों को उछाला गया है। माना A घटना 'तीन चित या तीन पट प्राप्त होना'; B घटना' कम से कम दो चित प्राप्त होना' तथा C घटना 'अधिकतम दो चित प्राप्त होना' को निरूपित करते है। ज्ञात कीजिए कि निम्न युग्मों (A, B), (A, C) तथा (B, C) में से कौन-कौन से स्वतंत्र घटनाएँ है? कौन-कौन से युग्म आश्रित घटनाएँ है?

हल: तीन सिक्कों को उछालने के परीक्षण से प्राप्त प्रतिदर्श समष्टि निम्न है:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

तब $\qquad A = \{HHH, TTT\},\ B = \{HHT, HTH, THH, HHH\}$

तथा $\qquad C = \{TTT, TTH, THT, HTT, THH, HTH, HHT\}$

इस अवस्था में

$$A \cap B = \{HHH\},\ A \cap C = \{TTT\} \text{ तथा } B \cap C = \{HHT, HTH, THH\}$$

$$P(A) = 2/8 = 1/4, \quad P(B) = 4/8 = 1/2, \quad P(C) = 7/8$$

$$P(A \cap B) = 1/8, \quad P(A \cap C) = 1/8, \quad P(B \cap C) = 3/8$$

स्पष्टतया $\qquad P(A \cap B) = P(A)P(B) = 1/4 \times 1/2 = 1/8$

इसी प्रकार $\qquad P(A \cap C) \neq P(A)P(C)$

तथा $\qquad P(B \cap C) \neq P(B)P(C)$

अतः A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ है जबकि A व C तथा B व C आश्रित घटनाएँ हैं।

उदाहरण-15. यदि किसी यादृच्छिक प्रयोग से सम्बद्ध A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ है तो सिद्ध कीजिए:

(i) $\bar{A}$ तथा B स्वतन्त्र घटनाएँ है।

(ii) A तथा $\bar{B}$ स्वतन्त्र घटनाएँ है

(iii) $\bar{A}$ तथा $\bar{B}$ भी स्वतन्त्र घटनाएँ है।

हल: दिया है कि A तथा B स्वतन्त्र घटनाएँ है अतः

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

वेन आरेख से स्पष्ट है कि $A \cap B$ तथा $\bar{A} \cap B$ परस्पर अपवर्जी घटनाएँ इस प्रकार से है कि

$$(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) = B$$

प्रायिकता के योग प्रमेय से

$$P(B) = (A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

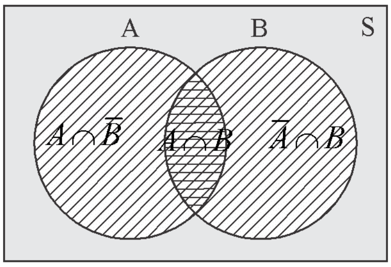
$$\Rightarrow \quad P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(B) - P(A)P(B) \qquad [\because P(A \cap B) = P(A)P(B)]$$

$$= P(B)[1 - P(A)]$$

$$= P(B)P(\bar{A})$$

$$= P(\bar{A})P(B)$$



आकृति 16.02

अतः $\bar{A}$ तथा B स्वतन्त्र घटनाएँ हैं।

(ii) वेन आरेख से स्पष्ट है कि $A \cap B$ तथा $A \cap \bar{B}$ परस्पर अपवर्जी घटनाएँ इस प्रकार है कि

$$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$$

प्रायिकता के योग प्रमेय से

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

$$\Rightarrow \quad P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) - P(A)P(B)$$

$$= P(A)[1 - P(B)]$$

$$= P(A)P(\bar{B})$$

अतः A तथा $\bar{B}$ स्वतन्त्र घटनाएँ है।

(iii)

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B})$$

$$= 1 - P(A \cup B)$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$

$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A)P(B)]$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B)$$

$$= [1 - P(A)] - P(B)[1 - P(A)]$$

$$= [1 - P(A)][1 - P(B)]$$

$$= P(\bar{A})P(\bar{B})$$

अतः $\bar{A}$ तथा $\bar{B}$ स्वतन्त्र घटनाएँ हैं।

उदाहरण-16. यदि A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हो तो कम से कम एक घटना के घटित होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: P (कम से कम एक घटना का घटित होना) $= P(A \cup B)$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \qquad [\because \text{ घटनाएँ A तथा B स्वतन्त्र है।}]$$

$$= P(A) + P(B)[1 - P(A)]$$

$$= P(A) + P(B)P(\bar{A}) \qquad [\because P(A) + P(\bar{A}) = 1]$$

$$= 1 - P(\bar{A}) + P(B)P(\bar{A})$$

$$= 1 - P(\bar{A})[1 - P(B)]$$

$$= 1 - P(\bar{A})P(\bar{B})$$

प्रश्नमाला 16.2

1. यदि दो घटनाएँ A तथा B इस प्रकार से है कि $P(A) = 1/4,\ P(B) = 1/2$ तथा $P(A \cap B) = 1/8$ तो $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ ज्ञात कीजिए।
2. यदि $P(A) = 0.4,\ P(B) = p$ व $P(A \cup B) = 0.6$ तथा A और B स्वतन्त्र घटनाएँ है तब p का मान ज्ञात कीजिए।
3. यदि A और B स्वतन्त्र घटनाएँ है तथा $P(A) = 0.3$ व $P(B) = 0.4$ तब ज्ञात कीजिए।

   (i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A \cup B)$ (iii) $P\left(\frac{A}{B}\right)$ (iv) $P\left(\frac{B}{A}\right)$
4. यदि A और B स्वतंत्र घटनाएँ है जहाँ $P(A) = 0.3,\ P(B) = 0.6$ तब ज्ञात कीजिए।

   (i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A \cap \bar{B})$ (iii) $P(A \cup B)$ (iv) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$
5. एक थैले में 5 सफेद, 7 लाल और 8 काली गेंदे है। यदि चार गेंदों को एक-एक कर बिना प्रतिस्थापन के निकाला जाए तो सभी गेंदों के सफेद होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
6. यदि एक पासे को तीन बार उछाला जाये तो कम से कम एक बार विषम संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
7. 52 पत्तों की गड्डी में से यादृच्छया बिना प्रतिस्थापित किये दो पत्ते निकाले गए है। इन दोनों पत्तों के काले रंग का होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
8. दो सिक्कों को उछाला गया है। दो चित आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए जबकि यह ज्ञात है कि कम से कम एक चित आ चुका है।
9. एक छात्रावास में 60% विद्यार्थी हिन्दी का, 40% अंग्रेजी का और 20% दोनों अखबार पढ़ते है। एक छात्रा को यादृच्छया चुना जाता है।
   (i) प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह न तो हिन्दी और न ही अंग्रेजी का अखबार पढ़ती है।
   (ii) यदि वह हिन्दी का अखबार पढ़ती है तो उसके अंग्रेजी का अखबार भी पढ़ने वाली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
   (iii) यदि वह अंग्रेजी का अखबार पढती है तो उसके हिन्दी का अखबार भी पढने वाली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
10. A, किसी पुस्तक की 90% समस्याओं को तथा B, उसी पुस्तक की 70% समस्याओं को हल कर सकता है। पुस्तक से यादृच्छया चयनित किसी समस्या को उनमें से कम से कम एक के द्वारा हल किए जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
11. तीन विद्यार्थियों को गणित की एक समस्या को हल करने के लिए दिया गया। इन विद्यार्थियों के द्वारा समस्या को हल करने की प्रायिकता क्रमशः 1/2, 1/3 व 1/4 है। समस्या के हल हो जाने की क्या प्रायिकता है?
12. एक थैले में 5 सफेद तथा 3 काली गेंदे है। थैले में से 4 गेंदें उत्तरोतर बिना प्रतिस्थापन के निकाली जाती है। इन गेंदों के एकान्तरतः विभिन्न रंगों के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

13. , d fo' kSkl eL; kd kS A और B द्वारा स्वतंत्र रूप से हल करने की प्रायिकताएँ क्रमशः 1/2 व 1/3 हैं। यदि दोनों स्वतंत्र रूप से समस्या को हल करने का प्रयास करते है तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि
   (i) समस्या हल हो जाती है।
   (ii) उनमें से तथ्यतः कोई एक समस्या हल कर लेता है।

16.06 एक प्रतिदर्श समष्टि का विभाजन (Partition of a sample space)

घटनाओं $E_1, E_2, \ldots, E_n$ का समुच्चय प्रतिदर्श समष्टि S के विभाजन को निरूपित करता है यदिः

(i) $E_i \cap E_j = \phi,\ i = j,\ i,\ j = 1,\ 2,\ 3, \ldots, n$

(ii) $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n = S$ तथा

(iii) $P(E_i) > 0$, प्रत्येक $i = 1,\ 2, \ldots, n$

के लिए दूसरे शब्दों में घटनाएं $E_1, E_2, \ldots, E_n$ प्रतिदर्श समष्टि S के विभाजन को निरूपित करती हैं। यदि वे युग्मतः असंयुक्त हैं; समग्र हैं तथा उनकी प्रायिकता शून्येतर है।

उदाहरणार्थः माना कोई घटना E और उसकी पूरक घटना E' प्रतिदर्श समष्टि S का विभाजन है, क्योंकि

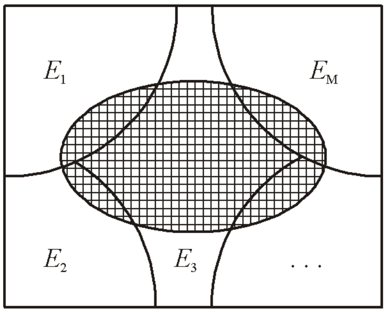
$$E \cap E' = \phi \text{ और } E \cup E' = S.$$

16.07 संपूर्ण प्रायिकता का प्रमेय (Theorem of total probability)

कथनः माना $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ प्रतिदर्श समष्टि S का एक विभाजन है और प्रत्येक घटना $E_1, E_2, \ldots, E_n$ की प्रायिकता शून्येतर है। मान लीजिए A प्रतिदर्श समष्टि के संगत एक घटना है, तब

$$P(A) = P(E_1) P\left(\frac{A}{E_1}\right) + P(E_2) P\left(\frac{A}{E_2}\right) + \ldots + P(E_n) P\left(\frac{A}{E_n}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P(E_j) P\left(\frac{A}{E_j}\right)$$



आकृति 16.03

प्रमाणः दिया है $E_1, E_2, \ldots, E_n$ प्रतिदर्श समष्टि S का एक विभाजन है।

$\therefore \quad S = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n \qquad (1)$

और $\quad E_i \cap E_j = \phi \ \forall\ i \neq j,\ i,\ j = 1, 2, \ldots, n$

ज्ञात है कि किसी घटना A के लिए

$$A = A \cap S$$

$$= A \cap (E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n)$$

$$= (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup \ldots \cup (A \cap E_n)$$

$\because \quad A \cap E_i$ और $A \cap E_j$ क्रमशः समुच्चयों E_i और E_j के उपसमुच्चय हैं जो $i \neq j$ के लिए असंयुक्त हैं।

$\therefore \quad i \neq j,\ i,\ j = 1,\ 2, \ldots, n$ के लिए $A \cap E_i$ और $A \cap E_j$ भी असंयुक्त हैं।

$\therefore \quad P(A) = P\left[(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup \ldots \cup (A \cap E_n)\right]$

$$= P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + \ldots + P(A \cap E_n)$$

अब $\quad P(A \cap E_i) = P(E_i) P\left(\frac{A}{E_i}\right), \qquad \left[\because\ P(E_i) \neq 0\ \forall\ i = 1,\ 2, \ldots, n\right]$

प्रायिकता के गुणन नियम से

$$P(A)=P(E_1)P\left(\frac{A}{E_1}\right)+P(E_2)P\left(\frac{A}{E_2}\right)+\ldots+P(E_n)P\left(\frac{A}{E_n}\right)$$

या
$$P(A)=\sum_{j=1}^{n}P(E_j)P\left(\frac{A}{E_j}\right).$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-17. किसी कक्षा के दो तिहाई विद्यार्थी लड़के है तथा शेष लड़कियाँ है। किसी लड़की के प्रथम श्रेणी प्राप्त करने की प्रायिकता 0.25 व लड़के के प्रथम श्रेणी प्राप्त करने की प्रायिकता 0.28 है। तब यादृच्छया चुने गए किसी विद्यार्थी के प्रथम श्रेणी प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हलः माना E_1 घटना 'किसी कक्षा में से लड़के का चयन करना', E_2 घटना 'किसी कक्षा में से लड़की का चयन करना' तथा A घटना 'विद्यार्थी को प्रथम श्रेणी प्राप्त होना' को निरूपित करते है।

तब
$$P(E_1)=2/3, P(E_2)=1/3$$

तथा
$$P\left(\frac{A}{E_1}\right)=0.28,\quad P\left(\frac{A}{E_2}\right)=0.25$$

संपूर्ण प्रायिकता प्रमेय से
$$P(A)=P(E_1)P\left(\frac{A}{E_1}\right)+P(E_2)P\left(\frac{A}{E_2}\right)=\frac{2}{3}\times0.28+\frac{1}{3}\times0.25=0.27$$

16.08 बेज प्रमेय (Baye's Theorem)

गणितज्ञ जॉन बेज ने प्रतिलोम प्रायिकता ज्ञात करने की समस्या का समाधान सप्रतिबन्ध प्रायिकता में उपयोग द्वारा किया है। उनके द्वारा बनाया गया सूत्र 'बेज प्रमेय' के नाम से जाना जाता है।

कथनः यदि $E_1, E_2, \ldots, E_n$ अरिक्त घटनाएं हैं, जो कि प्रतिदर्श समष्टि S के विभाजन का निर्माण करती हैं अर्थात् $E_1, E_2, \ldots, E_n$, युग्मतः असंयुक्त हैं और $E_1\cup E_2\cup,\ldots,\cup E_n=S$ और A कोई ऐसी घटना है कि जिसकी प्रायिकता शून्येतर है, तो

$$P\left(\frac{E_i}{A}\right)=\frac{P(E_i)P\left(\frac{A}{E_i}\right)}{\sum_{j=1}^{n}P(E_j)P\left(\frac{A}{E_j}\right)},\quad i=1,\ 2,3,\ldots,n$$

प्रमाणः हम जानते हैं कि

$$P\left(\frac{E_i}{A}\right)=\frac{P(A\cap E_i)}{P(A)}=\frac{P(E_i)P\left(\frac{A}{E_i}\right)}{P(A)}$$ (प्रायिकता के गुणन नियम से)

$$=\frac{P(E_i)P\left(\frac{A}{E_i}\right)}{\sum_{j=1}^{n}P(E_j)P\left(\frac{A}{E_j}\right)}$$ (सम्पूर्ण प्रायिकता के नियम से)

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-18. एक बोल्ट बनाने के कारखाने में मशीने (यंत्र) A, B और C, कुल उत्पादन का क्रमशः 25%, 35% और 40% बोल्ट बनाती है। इन मशीनो के उत्पादन का क्रमशः 5, 4 और 2 प्रतिशत त्रूटिपूर्ण है। बोल्टों के कुल उत्पादन में से एक बोल्ट यादृच्छया निकाला जाता है और वह त्रुटिपूर्ण पाया जाता है। इसकी क्या प्रयिकता है कि यह बोल्ट मशीन B द्वारा बनाया गया है?

हलः माना घटनाएं B_1, B_2 तथा B_3 निम्न प्रकार हैं–

B_1 : बोल्ट मशीन A द्वारा बनाया गया है

B_2 : बोल्ट मशीन B द्वारा बनाया गया है

B_3 : बोल्ट मशीन C द्वारा बनाया गया है

घटनाएं B_1, B_2, B_3 परस्पर अपवर्जी और परिपूर्ण हैं।

माना घटना E निम्न प्रकार है:

E : बोल्ट खराब हैं।

घटना E घटनाओं B_1 या B_2 या B_3 के साथ घटित होती है।

दिया है: $$P(B_1) = 25\% = \frac{25}{100} = 0\cdot25$$

$$P(B_2) = 35\% = \frac{35}{100} = 0\cdot35$$

और $$P(B_3) = 4\% = \frac{40}{100} = 0\cdot40$$

पुनः $P\left(\frac{E}{B_1}\right) =$ बोल्ट के खराब होने की प्रायिकता जबकि वह मशीन B द्वारा निर्मित है

$$= 5\% = \frac{5}{100} = 0\cdot05$$

इसी प्रकार, $$P\left(\frac{E}{B_2}\right) = 0\cdot04,\ P\left(\frac{E}{B_3}\right) = 0\cdot02$$

बेज प्रमेय द्वारा, $$P\left(\frac{B_2}{E}\right) = \frac{P(B_2)P\left(\frac{E}{B_2}\right)}{P(B_1)P\left(\frac{E}{B_1}\right) + P(B_2)P\left(\frac{E}{B_2}\right) + P(E_3)P\left(\frac{E}{B_3}\right)}$$

$$= \frac{0\cdot35 \times 0\cdot04}{0\cdot25 \times 0\cdot05 + 0\cdot35 \times 0\cdot04 + 0\cdot40 \times 0\cdot02}$$

$$= \frac{0\cdot0140}{0\cdot0345} = \frac{28}{69}$$

उदाहरण-19. तीन सर्वसम डिब्बे I, II और III दिए गए हैं। जहाँ प्रत्येक डिब्बे में दो सिक्के है। डिब्बे I में दोनो सिक्के सोने के है, डिब्बे II में दोनों सिक्के चाँदी के है और डिब्बे III में एक सोने और एक चाँदी का सिक्का है। एक व्यक्ति यादृच्छया एक डिब्बा चुनता है और उसमें से एक सिक्का निकालता है। यदि निकाला गया सिक्का सोने का है तो इस बात की क्या प्रायिकता है कि डिब्बे में दूसरा सिक्का भी सोने का है?

हल: माना डिब्बे I, II, III को क्रमश: E_1, E_2, E_3 से निरूपित करते हैं।

तब $$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$$

माना घटना A ''निकाला गया सिक्का सोने का है'' को दर्शाती है।
तब डिब्बे I से सोने का सिक्का निकालने की प्रायिकता,

$$P\left(\frac{A}{E_1}\right) = \frac{2}{2} = 1$$

डिब्बे II से सोने का एक सिक्का निकालने की प्रायिकता,

$$P\left(\frac{A}{E_2}\right) = 0$$

डिब्बे III से सोने का एक सिक्का निकालने की प्रायिकता,

$$P\left(\frac{A}{E_3}\right) = \frac{1}{2}$$

अब डिब्बे में दूसरा सिक्का भी सोने का होने की प्रायिकता = निकाला गया सोने का सिक्का डिब्बे I की प्रायिकता

$$P\left(\frac{E_1}{A}\right)$$

बेज प्रमेय द्वारा

$$P\left(\frac{E_1}{A}\right) = \frac{P(E_1)P\left(\frac{A}{E_1}\right)}{P(E_1)P\left(\frac{A}{E_1}\right) + P(E_2)P\left(\frac{A}{E_2}\right) + P(E_3)P\left(\frac{A}{E_3}\right)}$$

$$= \frac{1/3 \times 1}{1/3 \times 1 + 1/3 \times 1/2}$$

$$= \frac{1/3}{1/3 + 1/6} = \frac{1/3}{2+1/6} = \frac{1/3}{3/6} = \frac{1}{3} \times \frac{6}{3} = \frac{2}{3}$$

उदाहरण-20. एक व्यक्ति के बारे में ज्ञात है कि वह 4 में से 3 बार सत्य बोलता है। वह एक पासे को उछालता है और बतलाता है कि उस पर आने वाली संख्या 6 है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पासे पर आने वाली संख्या वास्तव में 6 है।

हल: माना E_1 ''व्यक्ति द्वारा पासे को उछालकर, उस पर आने वाली संख्या 6 है'' की घटना है। S_1, पासे पर संख्या 6 आने की घटना और S_2 पासे पर संख्या 6 नहीं आने की घटना है। तब

संख्या 6 आने की घटना की प्रायिकता,

$$P(S_1) = \frac{1}{6}$$

संख्या 6 नहीं आने की घटना की प्रायिकता,

$$P(S_2)=\frac{5}{6}$$

व्यक्ति द्वारा यह बताने पर कि पासे की संख्या 6 आयी है जबकि पासे पर आने वाली संख्या वास्तवक में 6 है, की प्रायिकता

$$=P\left(\frac{E}{S_1}\right)$$

$$=\text{व्यक्ति द्वारा सत्य बोलने की प्रायिकता } =\frac{3}{4}$$

व्यक्ति द्वारा यह बताने पर कि पासे पर संख्या 6 आयी है जबकि पासे पर आने वाली संख्या वास्तव में 6 नहीं है, की प्रायिकता

$$=P\left(\frac{E}{S_2}\right)$$

$$=\text{व्यक्ति द्वारा सत्य नहीं बोलने की प्रायिकता}$$

$$=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

अब, बेज प्रमेय द्वारा

व्यक्ति द्वारा यह बताने की प्रायिकता कि संख्या 6 प्रकट हुई है, जब वास्तव में संख्या 6 है

$$=P\left(\frac{S_1}{E}\right)=\frac{P(S_1)P\left(\frac{E}{S_1}\right)}{P(S_1)P\left(\frac{E}{S_1}\right)+P(S_2)P\left(\frac{E}{S_2}\right)}$$

$$=\frac{1/6\times 3/4}{1/6\times 3/4+5/6\times 1/4}=\frac{3/24}{3/24+5/24}=\frac{3/24}{8/24}$$

$$=\frac{3}{24}\times\frac{24}{8}=\frac{3}{8}$$

अतः अभष्ट प्रायिकता $3/8$ है।

उदाहरण-21. मानाकि एक एच. आई. वी. परीक्षण की विश्वसनीयता निम्नलिखित प्रकार से निर्दिष्ट की गई है। एच. आई. वी. पोजिटिव व्यक्तियों के लिए परीक्षण 90% पता लगाने में और 10% पता न लगाने में सक्षम है। एच. आई. वी. से स्वतंत्र व्यक्तियों के लिए परीक्षण, 99% सही पता लगाता है यानि एच. आई. वी. नेगेटिव बताता है जबकि 1% परीक्षित व्यक्तियो के लिए एच. आई.वी. पोजिटिव बताता है। एक बड़ी जनसंख्या, जिसमें 0·1% व्यक्ति एच. आई. वी. ग्रसित है, में से एक व्यक्ति यादृच्छया चुना जाता है और उस का परीक्षण किया जाने पर रोगविज्ञानी एच. आई. वी. की उपस्थिति बताता हैं क्या प्रायिकता है कि वह व्यक्ति वास्तव में एच.आई.वी. ग्रस्त है?

हलः माना,

$E=$ चुने हुए व्यक्ति के वास्वत में एच.आई.वी. पोजीटिव होने की घटना

$A=$ व्यक्ति के एच.आई.वी. परीक्षण में पोजीटिव होने की घटना

$E'=$ चुने हुए व्यक्ति के एच.आई.वी. पोजीटिव न होने की घटना

स्पष्टतया $\{E,E'\}$ जनसंख्या में सभी व्यक्ति के प्रतिदर्श समष्टि का एक विभाजन है।

दिया है:
$$P(E)=0\cdot 1\%=\frac{0\cdot 1}{100}=0\cdot 001$$

$$P(E')=1-P(E)=1-0\cdot 001=0\cdot 999$$

व्यक्ति के परीक्षण में एच.आई.वी. पोजीटिव दर्शाना जबकि दिया गया है कि वह वास्तव में एच.आई.वी. पोजीटिव है

$$P\left(\frac{A}{E}\right) = 90\% = \frac{9}{10} = 0\cdot 9$$

व्यक्ति के परीक्षण में एच.आई.वी. पोजीटिव दर्शाना जबकि दिया गया है कि वह वास्तव में एच.आई.वी. पोजीटिव नहीं है

$$P\left(\frac{A}{E'}\right) = 1\% = \frac{1}{100} = 0\cdot 01$$

अब बेज प्रमेय द्वारा

$$P\left(\frac{E}{A}\right) = \frac{P(E)P\left(\frac{A}{E}\right)}{P(E)P\left(\frac{A}{E}\right) + P(E')P\left(\frac{A}{E'}\right)}$$

$$\therefore \quad P\left(\frac{E}{A}\right) = \frac{0\cdot 001 \times 0\cdot 9}{0\cdot 001 \times 0\cdot 9 + 0\cdot 999 \times 0\cdot 01}$$

$$= \frac{90}{1089} = 0\cdot 083 \text{ (लगभग)।}$$

अतः एक यदृच्छया चुने गये व्यक्ति के वास्तव में एच.आई.वी. पोजीटिव होने की प्रायिकता जबकि उसका एच.आई.वी. पोजीटिव $0\cdot 083$ है।

प्रश्नमाला 16.3

1. दो थेले I व II दिए गए है। थैले I में 3 लाल और 4 काली गेंदे है जबकि II थैले में 5 लाल और 6 काली गेंदे है। किसी एक थैले में से यादृच्छया एक गेंद निकाली गई है जो कि लाल है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि यह गेंद II थैले से निकाली गई है?
2. एक डॉक्टर को एक रोगी को देखने आना है। पहले के अनुभवों से यह ज्ञात है कि उसके ट्रेन, बस, स्कूटर या किसी अन्य वाहन से आने की प्रायिकताएँ $\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ या $\frac{2}{5}$ है। यदि वह ट्रेन, बस या स्कूटर से आता है तो उसके देर से आने की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ या $\frac{1}{12}$ है परन्तु किसी अन्य वाहन से आने पर उसे देर नहीं होती है। यदि वह देर से आया, तो उसके ट्रेन से आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
3. प्रथम थेले में 3 लाल और 4 काली गेंदे है जबकि द्वितीय थैले में 4 लाल और 5 काली गेंद है। एक गेंद प्रथम थैले से द्वितीय थैले में स्थानांतरित की जाती है और तब एक गेंद को द्वितीय थैले से निकाला जाता है। निकाली गई गेंद लाल रंग की प्राप्त होती है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि स्थानांतरित गेंद काली है?
4. एक थेले में 4 लाल और 4 काली गेंदे है और एक अन्य थैले में 2 लाल और 6 काली गेंदे है। इन दोनों थैलो में से एक थैले को यादृच्छया चुना जाता है और उसमें से एक गेंद निकाली जाती है जोकि लाल है। इस बात की प्रायिकता है कि गेंद पहले थैले से निकाली गई है?
5. तीन सिक्के दिए गए हैं एक सिक्के के दोनों और चित है। दूसरा सिक्का अभिनत है जिसमें चित 75% बार प्रकट होता है और तीसरा सिक्का अनभिनत है। तीनों सिक्को में से एक सिक्के को यादृच्छया चुना गया और उसे उछाला गया। यदि सिक्के पर चित प्रकट हो तो इस बात की क्या प्रायिकता है कि वह दोनों चित वाला सिक्का है?
6. किसी विशेष रोग के सही निदान के लिए रक्त की जाँच 99% असरदार है, जब वास्तव में रोगी उस रोग से ग्रस्त होता है। किन्तु 0·5% बार किसी स्वस्थ व्यक्ति की रक्त जाँच करने पर निदान गलत सूचना देता है यानी व्यक्ति को रोग से ग्रसित बताता है। यदि किसी जनसंख्या में 0·1% व्यक्ति उस रोग से ग्रस्त है तो क्या प्रायिकता है कि कोई यादृच्छया चुना गया व्यक्ति उस रोग से ग्रस्त होगा यदि उसके रक्त की जाँच में यह बताया जाता है कि उसे यह रोग है?

7. ; g Kkr gSfd , d egkfo| ky; d sNk=kaes s60% छात्रावास में रहते हैं और 40% छात्रावास में नहीं रहते है। पूर्ववर्ती वर्ष के परिणाम सूचित करते हैं कि छात्रावास में रहने वाले छात्रो में से 30% तथा छात्रावास में नहीं रहने वाले छात्रो में से 20% छात्रों ने A ग्रेड़ लिया। वर्ष के अन्त में महाविद्यालय के एक छात्र को यादृच्छया चुना गया और यह पाया गया कि उसे A ग्रेड़ मिला है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि वह छात्र छात्रावास में रहने वाला है?

8. एक बीमा कंपनी ने 2000 स्कूटर चालकों, 4000 कार चालकों और 6000 ट्रक चालकों का बीमा किया। स्कूटर चालक, कार चालक तथा ट्रक चालक से दुर्घटना होने की प्रायिकताएँ क्रमशः 0·01, 0·03 व 0·15 है। बीमित व्यक्तियों में से एक दुर्घटनाग्रस्त हो जाता है। उस व्यक्ति के स्कूटर चालक होने की प्रायिकता क्या है?

9. एक बहुविकल्पी प्रश्न का उत्तर देने मे ंएक विद्यार्थी या तो प्रश्न का उत्तर जानता है या वह अनुमान लगाता है। माना कि विद्यार्थी के प्रश्न के उत्तर ज्ञात होने की प्रायिकता 3 / 4 तथा अनुमान लगाने की प्रायिकता 1 / 4 है। यह मानते हुए कि विद्यार्थी के प्रश्न के उत्तर का अनुमान लगाने पर सही उत्तर देने की प्रायिकता 1 / 4 है, इस बात की क्या प्रायिकता है कि विद्यार्थी प्रश्न का उत्तर जानता है यदि यह ज्ञात है कि उसने सही उत्तर दिया है?

10. कल्पना कीजिए कि 5% पुरुषों और 0·25% महिलाओं के बाल सफेद हैं। एक सफेद बालों वाले व्यक्ति को यादृच्छया चुना गया है। इस व्यक्ति के पुरुष होने की क्या प्रायिकता है? यह मानते हुए कि पुरुषों तथा महिलाओं की संख्या समान है।

11. दो दल एक निगम के निदेशक मंड़ल में स्थान पाने की प्रतिस्पर्धा में है। पहले तथा दूसरे दल के जीतने की प्रायिकताएँ क्रमशः 0·6 व 0·4 है। इसके अतिरिक्त यदि पहला दल जीतता है तो एक नये उत्पाद के प्रारम्भ होने की प्रायिकता 0·7 है और यदि दूसरा दल जीतता है तो इस बात की संगत प्रायिकता 0·3 है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि नया उत्पाद दूसरे दल द्वारा प्रारंभ किया गया था।

12. माना कोई लड़की एक पासा उछालती है। यदि उसे 5 या 6 का अंक प्राप्त होता है तो वह सिक्के को तीन बार उछालती है और चितों की संख्या नोट करती है यदि उसे 1, 2, 3 या 4 का अंक प्राप्त होता है तो वह एक सिक्के को एक बार उछालती है और यह नोट करती हैं कि उस पर चित या पट प्राप्त हुआ। यदि उसे तथ्यतः एक चित प्राप्त होता हो तो उसके द्वारा उछाले गए पासे पर 1, 2, 3 या 4 प्राप्त होने की क्या प्रायिकता है?

13. 52 पत्तों की एक भली भाँति फेंटी गई गड्डी में से एक पत्ता खो जाता है। शेष पत्तों से दो पत्ते निकाले जाते हैं जो ईट के पत्ते है। खो गये पत्ते के ईट का पत्ता होने की क्या प्रायिकता है?

15. एक थैले में 3 लाल और 7 काली गेंदे है। एक-एक करके बिना प्रतिस्थापन के दो गेंदो का यादृच्छया चयन किया गया है। यदि द्वितीय चयनित गेंद लाल प्राप्त होती हो तो क्या प्रायिकता है कि प्रथम चयनित गेंद भी लाल है?

16.09 यादृच्छिक चर और इसके प्रायिकता बंटन (Random variables and its probability distribution)

पूर्व में हम यादृच्छिक परीक्षणों की अवधारणा तथा उनके प्रतिदर्श समष्टि के निर्माण के बारे में पढ़ चुके है। प्रतिदर्श समष्टि किसी यादृच्छिक परीक्षण के सभी संभव परिणामों को समुच्चय होता है। किसी यादृच्छिक परीक्षण के परिणामों का प्रकार संख्यात्मक अथवा असंख्यात्मक हो सकता है।

उदाहरण के लिए सिक्के को उछालने के परीक्षण में परिणाम अंसख्यात्मक (चित अथवा पट) प्राप्त होता है जबकि पासे को फेंकने के परीक्षण में परिणाम संख्यात्मक (1 अथवा 2 अथवा 3 अथवा 4 अथवा 5 अथवा 6) प्राप्त होता है।

इन यादृच्छिक परीक्षणों में से कई परीक्षणों में हम कई बार किसी विशेष परिणाम के इच्छुक नहीं होते बल्कि हमारी रूचि इन परिणामों से संबंधित किसी संख्या में होती है। जैसे–

(i) चार सिक्कों को उछालने के परीक्षण में हमारी रूचि केवल चितों की संख्या में हो सकती है न कि सिक्कों के चित और पट आने के अनुक्रम में

(ii) दो पासों के एक युग्म को फेंकने के परीक्षण में हम केवल दोनों पासों पर प्रकट संख्याओं के योग में इच्छुक हो सकते हैं।

उपर्युक्त परीक्षणों में से प्रत्येक परीक्षण में हमारे पास एक नियम है जिसके अन्तर्गत प्रत्येक परिणाम एक वास्तविक संख्या से सम्बद्ध होता है। यह वास्वतिक संख्या यादृच्छिक परीक्षण के प्रत्येक परिणाम के लिए भिन्न-भिन्न भी हो सकती है तथा इसका मान परीक्षण के परिणामों पर निर्भर करता है अतः इसे यादृच्छिक चर कहते हैं।

परिभाषाः एक यादृचिछक चर वह फलन होता है जिसका प्रान्त किसी यादृच्दिक परीक्षण के परिणामों का समुच्चय (या प्रतिदर्श समष्टि) होता है तथा सहप्रान्त वास्तविक संख्याओं का समुच्चय होता है क्योंकि एक यादृच्छिक चर कोई भी वास्तविक मान ग्रहण कर सकता है।

एकविमीय यादृच्छिक चरों को सामान्यताः X, Y, Z आदि से निरूपित किया जाता है।

उदाहरण के लिए, एक सिक्के को तीन बार अनुक्रम में उछाले जाने के परीक्षण पर विचार करते है जिसका प्रतिदर्श समष्टि निम्न है

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

यदि X प्राप्त चितों की संख्या को व्यक्त करता हो तब X एक यादृच्छिक चर है तथा प्रत्येक परिणाम के लिए X का मान निम्न प्रकार से दिया जाता है:

$$X(HHH) = 3,\ X(HHT) = 2 = X(HTH) = X(THH),$$

$$X(HTT) = 1 = X(THT) = X(TTH),\ X(TTT) = 0$$

टिप्पणीः एक ही प्रतिदर्श समष्टि पर एक से अधिक यादृच्छिक चर परिभाषित किए जा सकते हैं।

यादृच्छिक चर दो प्रकार के होते है:–

(i) विविक्त यादृच्छिक चर

(ii) संतत यादृच्छिक चर

(i) विविक्त यादृच्छिक चरः यदि कोई यादृच्छिक चर या तो परिमित या गणनीय अनन्त मान ग्रहण करता है तो वह चर विविक्त यादृच्छिक चर कहलाता है। जैसे–

(a) किसी कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या

(b) किसी पुस्तक के प्रत्येक पृष्ठ में मुद्रण त्रुटियों की संख्या

(c) किसी कार्यालय में प्राप्त शिकायतों की संख्या

(d 5 लाल व 4 नीली गेंदों से भरे थैले में से निकाली गई लाल गेंदों की संख्या आदि

(ii) संतत यादृच्छिक चरः यदि कोई यादृच्छिक चर किसी निश्चित अन्तराल में सभी मानों को ग्रहण करता है तो वह संतत यादृच्छिक चर कहलाता है। जैसे–

(a) किसी व्यक्ति की ऊँचाई

(b) $X = \{x \in R\ :\ 0 < x < 1\}$ आदि

टिप्पणीः इस अध्याय में यादृच्छिक चर से तात्पर्य विविक्त यादृच्छिक चर से ही लिया जाएगा।

16.10 एक यादृच्छिक चर का प्रायिकता बंटन (Probability distribution of a random variable)

किसी यादृच्छिक चर का प्रायिकता बंटन उस चर द्वारा ग्रहण किए गए सभी संभव मानों तथा इन मानों के संगत प्रायिकताओं का विवरण होता है। यदि एक यादृच्छिक चर विभिन्न मानों $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ को संगत प्रायिकताओं $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ के साथ ग्रहण करता है, तब प्रायिकता बंटन निम्न प्रकार होगा

$$X = x\ :\ x_1 \quad x_2 \quad x_3 \ldots x_n$$

$$P(X)\ :\ p_1 \quad p_2 \quad p_3 \ldots p_n$$

जहाँ $p_i > 0$ तथा $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1;\quad i = 1, 2, \ldots, n$

उदाहरण के लिए, हमे एक सिक्के को दो बार उछालने पर प्राप्त चितों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात करना है। एक सिक्के को दो बार उछालने पर प्राप्त प्रतिदर्श समष्टि निम्न है

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

यादृच्छिक चर X, यदि चितों की संख्या को व्यक्त करता हो तब प्रत्येक परिणाम के लिए X का मान निम्न प्रकार से दिया जाता है:

$$X(HH) = 2,\ X(HT) = 1 = X(TH),\ X(TT) = 0$$

अतः इस परीक्षण में चर X द्वारा ग्रहण किए गए मान क्रमशः 0, 1 व 2 है जिनकी संगत प्रायिकताएँ क्रमशः 1 / 4, 2 / 4 व 1 / 4 है। अतः प्रायिकता बंटन होगा

$X = x$:	0	1	2
$P(X)$:	$1/4$	$2/4$	$1/4$

जहाँ $p_i > 0$ तथा $\sum p_i = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1,$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-22. एक यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन नीचे दिया गया है।

X	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X)$	0	k	$2k$	$2k$	$3k$	k^2	$2k^2$	$7k^2 + k$

ज्ञात कीजिए

(i) k (ii) $P(X < 6)$ (iii) $P(X \geq 6)$ (iv) $P(0 < X < 5)$

हलः (i) प्रायिकता बंटन में सभी प्रायिकताओं का योग सदैव 1 होता है। अतः

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)=1$$

$\Rightarrow$ $0 + k + 2k + 2k + 3k + k^2 + 2k^2 + 7k^2 + k = 1$

$\Rightarrow$ $10k^2 + 9k - 1 = 0$

या $(10k - 1)(k + 1) = 0$

या $10k - 1 = 0$ $[\because k \geq 0]$

$\Rightarrow$ $k = \frac{1}{10}$

(ii) $P(X<6) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$

$\Rightarrow$ $0 + k + 2k + 2k + 3k + k^2$

$\Rightarrow$ $k^2 + 8k$

$\Rightarrow$ $(1/10)^2 + 8(1/10) = \frac{81}{100}$

(iii) $P(X \geq 6) = P(X=6) + P(X=7)$

$\Rightarrow$ $2k^2 + 7k^2 + k$

$\Rightarrow$ $9k^2 + k$

$\Rightarrow$ $9(1/10)^2 + 1/10 = \frac{19}{100}$

(iv) $P(0 < X < 5) = P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$

$\Rightarrow$ $k + 2k + 2k + 3k = 8k$

$\Rightarrow$ $8/10 = 4/5$

उदाहरण-23. ताश के 52 पत्तों की एक भली-भाँति फेंटी गई गड्डी में से तीन पत्ते निकाले गए है। इक्कों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

हलः माना कि तीन पत्ते निकालने में इक्कों की सख्या को X से व्यक्त करते है। यहाँ X एक यादृच्छिक चर है जो 0, 1, 2, और 3 मान ले सकता है।

$$P(X=0)=\text{कोई इक्का प्राप्त नहीं होने की प्रायिकता}=\frac{{}^{48}c_3}{{}^{52}c_3}=\frac{4324}{5525}$$

$$P(X=1)=\text{एक इक्का तथा दो दूसरे पत्ते प्राप्त होने की प्रायिकता}=\frac{{}^{4}c_1\times{}^{48}c_2}{{}^{52}c_3}=\frac{1128}{5525}$$

$$P(X=2)=\text{दो इक्के तथा एक अन्य पत्ता प्राप्त होने की प्रायिकता}=\frac{{}^{4}c_2\times{}^{48}c_1}{{}^{52}c_3}=\frac{72}{5525}$$

$$P(X=3)=\text{तीन इक्के प्राप्त होने की प्रायिकता}=\frac{{}^{4}c_3}{{}^{52}c_3}=\frac{1}{5525}$$

अतः यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन निम्न होगा

X	0	1	2	3
$P(X)$	$\frac{4324}{5525}$	$\frac{1128}{5525}$	$\frac{72}{5525}$	$\frac{1}{5525}$

उदाहरण-24. माना किसी यादृच्छिक चुने गए विद्यालयी दिवस में पढ़ाई के घंटों को X से दर्शाया जाता है। X के मान x लेने की प्रायिकता निम्न है, जहाँ k एक अज्ञात अचर है।

$$P(X=x)=\begin{cases} 0{\cdot}1 & ; \quad \text{यदि } x=0 \\ kx & ; \quad \text{यदि } x=1 \text{ या } 2 \\ k(5-x) & ; \quad \text{यदि } x=3 \text{ या } 4 \\ 0 & ; \quad \text{अन्यथा} \end{cases}$$

(i) k का मान ज्ञात कीजिए।

(ii) इस बात की क्या प्रयिकता है कि आप

(a) कम से कम दो घंटे पढ़ते है?

(b) तथ्यतः दो घंटे पढ़ते हैं?

(c) अधिकतम दो घंटे पढ़ते है?

हलः X का प्रायिकता बंटन है

$$\begin{array}{cccccccc} X & : & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ P(X) & : & 0{\cdot}1 & k & 2k & 2k & k \end{array}$$

(i) दिया गया बंटन प्रायिकता बंटन है अतः

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$$

$$0{\cdot}1+k+2k+2k+k=1$$

$\Rightarrow$ $$6k=0{\cdot}9$$

or $$k=0{\cdot}15$$

(ii) (a) अभीष्ट प्रायिकता

जब $$P(X \geq 2) = P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$$
$$= 2k+2k+k = 5k = 5\times 0{\cdot}15 = 0{\cdot}75.$$

(b) अभीष्ट प्रायिकता

जब $$P(X=2) = 2k = 2\times 0{\cdot}15 = 0{\cdot}30.$$

(c) अभीष्ट प्रायिकता

जब $$P(X \leq 2) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$$
$$= 0{\cdot}1+k+2k = 3k+0{\cdot}1$$
$$= 0{\cdot}1+3\times 0{\cdot}15 = 0{\cdot}55$$

उदाहरण-25. एक सिक्के को इस प्रकार अभिनत किया गया है कि सिक्के पर चित आने की संभावना पट आने की अपेक्षा तीन गुना है। यदि सिक्के को दो बार उछाला जाता हो तो पटों की संख्या के लिए प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

हल: माना सिक्के की एक उछाल में पट प्राप्त करने की प्रायिकता p है। तब चित आने की प्रायिकता $3p$ होगी।
सिक्के की एक उछाल में "चित प्राप्त करना" तथा "पट प्राप्त करना" परस्पर अपवर्जी तथा निश्शेष घटनाएँ है अतः

$$P(H)+P(T)=1$$

$\Rightarrow$ $$3p+p=1$$

या $$p=1/4$$

अतः $$P(H)=\frac{3}{4} \quad \text{व} \quad P(T)=\frac{1}{4}$$

माना सिक्के की दो उछालों में पटों की संख्या को X से निरूपित करते है। तब X; 0, 1 और 2 मान ग्रहण कर सकता है।

$P(X=0)=$ कोई पट प्राप्त नहीं होने की प्रायिकता

= दोनों चित प्राप्त होने की प्रायिकता

= P(HH)

= P(H) P(H) {$\because$ दोनो परीक्षण स्वतंत्र है}

$$=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$$

$P(X=1)=$ एक चित और एक पट प्राप्त होने की प्रायिकता

= P(HT) + P(TH)

= P(H) P(T) + P(T) P(H)

$$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$$

$P(X=2)=$ दोनों पट प्राप्त होने की प्रायिकता

$$= P(TT) = P(T)\,P(T) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

अतः X का प्रायिकता बंटन है

X :	0	1	2
$P(X)$:	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$

16.11 यादृच्छिक चर का माध्य (Mean of a random variable)

कई व्यवहारिक समस्याओं में किसी यादृच्छिक चर के माध्य, माध्यिका व बहुलक इत्यादि को एकल संख्या से निरूपित करना आवश्यक होता है। यहाँ हम यादृच्छिक चर के माध्य के बारे में अध्ययन करेंगे।

माना X एक यादृच्छिक चर है जिसके संभावित मानों $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ के संगत प्रायिकताएँ क्रमशः $p_1, p_2, \ldots, p_n$ है। किसी यादृच्छिक चर X के माध्य को X की प्रत्याशा भी कहते हैं जिसे $E(x)$ से व्यक्त करते हैं।

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

$$= x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$$

अतः किसी यादृच्छिक चर X का माध्य μ चर X के संभावित मानों का भारित समान्तर माध्य होता हैं जबकि प्रत्येक मान को उसकी संगत प्रायिकता से भारित किया गया हो। उदाहरण के लिए, एक पासे को फेंकने के परीक्षण में प्राप्त अंक की प्रत्याशा या माध्य ज्ञात करना है।

एक पासे को फेंकने पर निर्मित प्रतिदर्श समष्टि $=\{1,2,3,4,5,6\}$

तब चर X का प्रायिकता बंटन निम्न होगा–

$X = x$	:	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	:	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

अतः $\mu = E(X) = \sum x_i p_i$

$$= x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 + x_5 p_5 + x_6 p_6$$

$$= 1\times 1/6 + 2\times 1/6 + 3\times 1/6 + 4\times 1/6 + 5\times 1/6 + 6\times 1/6$$

$$= 21/6 = 7/2$$

टिप्पणीः इसका अर्थ यह कदापि नहीं है कि एक पासे को फेंकने के परीक्षण में अंक $7/2$ प्राप्त होता है। यह अंक इंगित करता है कि यदि पासे को दीर्घ अवधि तक उछाला जाए तो खिलाडी को औसत उछाल पर अंक $7/2$ प्राप्त होगा।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-26. तीन सिक्कों को एक साथ उछाला गया है। सिक्कों पर चितों की संख्या को यादृच्छिक चर X मानते हुए X का माध्य ज्ञात कीजिए।

हलः तीन सिक्के को एक साथ उछालने के परीक्षण में सिक्कों पर प्राप्त चितों की संख्या को माना X से निरूपित करते है। तब X; 0, 1, 2 और 3 मान ग्रहण कर सकता है।

$$P(X=0) = P(TTT) = \frac{1}{8}$$

$$P(X=1) = P(\text{HTT या TTH या THT}) = \frac{3}{8}$$

$$P(X=2) = P(\text{HHT या THH या HTH}) = \frac{3}{8}$$

तथा $P(X=3) = P(HHH) = \frac{1}{8}$

चर X का प्रायिकता बंटन निम्न है–

$X = x$	0	1	2	3
$P(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

चर X का माध्य $= \overline{X} = E(X) = \sum x_i p_i$

$$= 0\times 1/8 + 1\times 3/8 + 2\times 3/8 + 3\times 1/8 = 12/8 = 3/2$$

उदाहरण-27. ताश के 52 पत्तों की एक अच्छी प्रकार से फेंटी गई गड्डी में से दो पत्ते उत्तरोत्तर प्रतिस्थापन के साथ निकाले जाते है। इक्कों की संख्या का प्रायिकता बंटन तथा माध्य ज्ञात कीजिए।

हल: माना इक्कों की संख्या एक यादृच्छिक चर X है।

चर X; 0, 1 और 2 मान ग्रहण कर सकता है।

P(X = 0) = कोई इक्का प्राप्त नहीं होने की प्रायिकता

= P(इक्का नहीं और इक्का नहीं) =P (इक्का नहीं) . P (इक्का नहीं)

$= 48/52 \times 48/52 = 144/169$

P(X = 1) = एक इक्का प्राप्त होने की प्रायिकता

= P(इक्का और इक्का नहीं अथवा इक्का नहीं और इक्का)

= P(इक्का) P(इक्का नहीं) + P(इक्का नहीं) P(इक्का)

$= 4/52 \times 48/52 + 48/52 \times 4/52 = 24/169$

P(X = 2) = दोनों इक्के प्राप्त होने की प्रायिकता

=P(इक्का और इक्का)

=P(इक्का) P(इक्का)

$= 4/52 \times 4/52 = 1/169$

चर X का प्रायिकता बंटन निम्न है–

X	:	0	1	2
$P(X)$	:	144/169	24/169	1/169

चर X का माध्य $= \overline{X} = E(X) = \sum x_i p_i$

$= 0 \times 144/169 + 1 \times 24/169 + 2 \times 1/169 = 26/169.$

16.12 यादृच्छिक चर का प्रसरण (Variance of a random variable)

माना X एक यादृच्छिक चर है जिसके संभावित मानों $x_1, x_2, ..., x_n$ के संगत प्रायिकताएँ क्रमशः $p_1, p_2, ..., p_n$ है तब चर X का प्रसरण var(X) या σ_X^2 द्वारा निरूपित किया जाता है।

$$\sigma_X^2 = \text{var}(X) = E(X-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i$$

प्रसरण का धनात्मक वर्गमूल "$+\sqrt{\text{var}(X)}$" मानक विचलन कहलाता है।

$$\sigma_X = +\sqrt{\text{var}(X)} = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i}$$

प्रसरण ज्ञात करने का वैकल्पिक सूत्र

$$\text{var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 + \mu^2 - 2\mu x_i\right) p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i + \sum_{i=1}^{n} \mu^2 p_i - 2\sum_{i=1}^{n} \mu x_i p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i + \mu^2 \sum_{i=1}^{n} p_i - 2\mu \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i + \mu^2 (1) - 2\mu(\mu)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \mu^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \right)^2$$

$$\text{var}(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \qquad \text{जहाँ } E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$$

उदाहरणार्थः एक न्याय्य सिक्के की तीन उछालों पर प्राप्त चितों की संख्या का प्रसरण ज्ञात करना है। एक न्याय्य सिक्के की तीन उछालों के परीक्षण में निर्मित प्रतिदर्श समष्टि S={HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT} है।

माना चर X प्राप्त चितों की संख्या को व्यक्त करता है। तब X का मान 0, 1, 2 या 3 हो सकता है जिनके संगत प्रायिकताएँ क्रमशः $1/8, 3/8, 3/8$ या $1/8$ हैं।

चर X का प्रायिकता बंटन निम्न होगा–

$X = x$	:	0	1	2	3
$P(X)$	:	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

चर X का प्रसरण var (X) $= E(X^2) - [E(X)]^2$

जहाँ $$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4$$

$$= 0 \times 1/8 + 1 \times 3/8 + 2 \times 3/8 + 3 \times 1/8 = 3/2$$

तथा $$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 + x_4^2 p_4$$

$$= (0)^2 \times 1/8 + (1)^2 \times 3/8 + (2)^2 \times 3/8 + (3)^2 \times 1/8$$

$$= 0 + 3/8 + 12/8 + 9/8 = 3$$

अतः $$\text{var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= 3 - (3/2)^2 = 3 - 9/4 = 3/4.$$

उदाहरण-28. दो पासों को एक साथ उछाला गया है। यदि X अंक छः प्राप्त करने की संख्याओं को व्यक्त करता हो तो X का प्रसरण ज्ञात कीजिए।

हलः दो पासों को एक साथ उछालने पर प्राप्त प्रतिदर्श समष्टि निम्न है–

$$X = \begin{Bmatrix} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{Bmatrix}$$

X एक यादृच्छिक चर है जो दो पासों को एक साथ उछालने पर अंक छः प्राप्त करने की संख्याओं को व्यक्त करता है तब X; 0, 1 और 2 मान ग्रहण कर सकता है।

$P(X=0)=$ किसी भी पासे पर अंक छः प्राप्त नहीं होने की प्रायिकता $=25/36$

$P(X=1)=$ एक पासे पर अंक छः प्राप्त होने की प्रायिकता $=10/36$

$P(X=2)=$ दोनों पासों पर अंक छः प्राप्त होने की प्रायिकता $=1/36$

चर X का प्रायिकता बंटन निम्न है–

X	:	0	1	2
$P(X)$	:	$25/36$	$10/36$	$1/36$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 0\times 25/36+1\times 10/36+2\times 1/36=12/36=1/3$$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = (0)^2\times 25/36+(1)^2\times 10/36+(2)^2\times 1/36=14/36=7/18$$

अतः $$\text{var}(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{7}{18}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{18}.$$

उदाहरण-29. प्रथम छः धनपूर्णांकों में से दो संख्याएँ यादृच्छया (बिना प्रतिस्थापन) चुनी जाती है। माना X दोनों संख्याओं में से बड़ी संख्या को व्यक्त करता है। तब X का प्रसरण ज्ञात कीजिए।

हलः इस स्थिति में X; 2, 3, 4, 5, 6 मान ग्रहण कर सकता है।

$P(X=2)=$ दानों संख्याओं में से बड़ी संख्या 2 होने की प्रायिकता

$=P$ (प्रथम चयन में 1 तथा द्वितीय चयन में 2 आना) या (प्रथम चयन में 2 तथा द्वितीय चयन में 1 आना)

$=1/6\times 1/5+1/6\times 1/5=2/30=1/15$

$P(X=3)=$ दोनों संख्याओं में से बड़ी संख्या 3 होने की प्रायिकता

$=P$ (प्रथम चयन में 3 से कम तथा द्वितीय चयन में 3 आना) या (प्रथम चयन में 3 तथा द्वितीय चयन में 3 से कम आना)

$=2/6\times 1/5+1/6\times 2/5=4/30=2/15$

इसी प्रकार $P(X=4)=3/6\times 1/5+1/6\times 3/5=6/30=1/5$

तथा $P(X=5)=4/6\times 1/5+1/6\times 4/5=8/30=4/15$

व $P(X=6)=5/6\times 1/5+1/6\times 5/5=10/30=1/3$

अतः X का प्रायिकता बंटन निम्न हैः–

X	:	2	3	4	5	6
$P(X)$	:	$1/15$	$2/15$	$1/5$	$4/15$	$1/3$

$$E(X)=\sum x_i p_i = 2\times 1/15+3\times 2/15+4\times 1/5+5\times 4/15+6\times 1/3=70/15=14/3$$

$$E(X^2)=\sum x_i^2 p_i=(2)^2\times 1/15+(3)^2\times 2/15+(4)^2\times 1/5+(5)^2\times 4/15+(6)^2\times 1/3$$

$$=4/15+18/15+16/5+100/15+36/3=350/15=70/3$$

$$\text{var}(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$

$$=70/3-(14/3)^2=70/3-196/9=14/9.$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

उदाहरण-30. एक कक्षा में 15 छात्र है जिनकी आयु 14, 17, 15, 14, 21, 17, 19, 20, 16, 18, 20, 17, 16, 19 और 20 वर्ष है। एक छात्र को इस प्रकार चुना गया कि प्रत्येक छात्र के चुने जाने की संभावना समान है तथा चुने गए छात्र की आयु X को लिखा गया। यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन क्या है? X का माध्य, प्रसरण व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

हल: X; 14, 15, 16, 17,18, 19, 20 और 21 मान ग्रहण कर सकता है।

अतः $P(X=14)=2/15,\quad P(X=15)=1/15,\quad P(X=16)=2/15,\quad P(X=17)=3/15,$

$P(X=18)=1/15,\quad P(X=19)=2/15,\quad P(X=20)=3/15,\quad P(X=21)=1/15$

अतः X का प्रायिकता बंटन निम्न है:–

X	:	14	15	16	17	18	19	20	21
$P(X)$	:	2/15	1/15	2/15	3/15	1/15	2/15	3/15	1/15

X का माध्य $=E(X)=\sum x_i p_i$

$$=14\times2/15+15\times1/15+16\times2/15+17\times3/15+18\times1/15+19\times2/15+20\times3/15+21\times1/15$$

$$=263/15=17{\cdot}53$$

$$=E(X^2)=\sum x_i^2 p_i$$

$$=(14)^2\times2/15+(15)^2\times1/15+(16)^2\times2/15+(17)^2\times3/15+(18)^2\times1/15+(19)^2\times2/15+(20)^2\times3/15+(21)^2\times1/15$$

$$=\frac{392}{15}+\frac{225}{15}+\frac{512}{15}+\frac{867}{15}+\frac{324}{15}+\frac{722}{15}+\frac{1200}{15}+\frac{441}{15}=\frac{4683}{15}$$

$$\text{var}(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$

$$=\frac{4683}{15}-\left(\frac{263}{15}\right)^2=\frac{70245-69169}{225}=\frac{1076}{225}$$

मानक विचलन $=+\sqrt{\text{प्रसरण}}=\sqrt{\dfrac{1076}{225}}=2{\cdot}186$

प्रश्नमाला 16.4

1. ज्ञात कीजिए निम्नलिखित प्रायिकता बंटनों में कौनसा एक यादृच्छिक चर X के लिए संभव है।

(i)

X	:	0	1	2
$P(X)$	:	0.4	0.4	0.2

(ii)

X	:	0	1	2
$P(X)$	:	0.6	0.1	0.2

(iii)

X	:	0	1	2	3	4
$P(X)$	:	0.1	0.5	0.2	–.01	0.3

2. दो सिक्कों के युगपत उछाल में चितों की संख्या को यादृच्छिक चर X मानते हुए प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।
3. चार खराब संतरे, 16 अच्छे संतरों में भूलवश मिला दिए गए है। दो संतरों के निकाले में खराब संतरों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।
4. एक कलश में 4 सफेद तथा 3 लाल गेंदे है। तीन गेंदों के यादृच्छया निकाल में लाल गेंदों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।
5. 10 वस्तुओं के ढ़ेर में 3 वस्तुएँ त्रुटिपूर्ण है। इस ढ़ेर में से 4 वस्तुओं का एक प्रतिदर्श यादृच्छया निकाला जाता है। माना प्रतिदर्श में त्रुटिपूर्ण वस्तुओं की संख्या को यादृच्छिक चर X द्वारा निरूपित किया जाता है। ज्ञात कीजिए–

(i) X का प्रायिकता बंटन (ii) $P(X\le1)$ (iii) $P(X<1)$ (iv) $P(0<X<2)$.

6. एक पासे को इस प्रकार भारित किया गया है कि पासे पर सम संख्या आने की संभावना विषम सख्या आने की अपेक्षा दुगुनी हैं। यदि पासे को दो बार उछाला गया है, तब दोनों उछालों में पूर्ण वर्गों को यादृच्छिक चर X मानते हुए प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।
7. एक कलश में 4 सफेद तथा 6 लाल गेंदे है। इस कलश में से चार गेंदे यादृच्छया निकाली जाती है। सफेद गेंदों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।
8. पासों के एक जोड़े को तीन बार उछालने पर द्विकों (doublets) की संख्या का प्रयिकता बंटन ज्ञात कीजिए।
9. पासों के एक युग्म को उछाला जाता है। माना यादृच्छिक चर X, पासों पर प्राप्त अंकों के योग को निरूपित करता है। चर X का माध्य ज्ञात कीजिए।
10. एक अनभिनत पासे को फेंकने पर प्राप्त संख्याओं का प्रसरण ज्ञात कीजिए।
11. एक बैठक में 70% सदस्यों ने किसी प्रस्ताव का पक्ष लिया और 30% सदस्यों ने विरोध किया। बैठक में से एक सदस्य को यादृच्छया चुना गया और माना $X = 0$, यदि उस चयनित सदस्य ने प्रस्ताव का विरोध किया हो तथा $X = 1$, यदि सदस्य प्रस्ताव के पक्ष में हो तब X का माध्य तथा प्रसरण ज्ञात कीजिए।
12. ताश के 52 पत्तों की एक भली-भाँति फेंटी गई गड्डी में से दो पत्ते उत्तरोतर बिना प्रतिस्थापन के निकाले जाते है। बादशाहों की संख्या का माध्य, प्रसरण व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

16.13 बरनौली परीक्षण (Bernoulli trials)

किसी यादृच्छिक प्रयोग के परीक्षणों को बरनौली परीक्षण कहते है यदि वे निम्नलिखित शर्तों को सन्तुष्ट करते है:–

(i) परीक्षणों की संख्या निश्चित (परिमित) होनी चाहिए।
(ii) परीक्षण स्वतंत्र होने चाहिए।
(iii) प्रत्येक परीक्षण के तथ्यतः दो ही परिणाम सफलता या असफलता होने चाहिए।
(iv) प्रत्येक परीक्षण में किसी परिणाम की प्रायिकता समान रहनी चाहिए।

उदाहरण के लिए एक सिक्के को 100 बार उछालने के परीक्षण पर विचार करते है। यह परीक्षण 100 बरनौली परीक्षणों की स्थिति है क्योंकि जब हम एक सिक्के को उछालते हैं या एक पासे को फेंकते हैं या कोई अन्य प्रयोग करते हैं तब यह एक परीक्षण कहलाता हैं। इन बरनौली परीक्षणों में से प्रत्येक परीक्षण का परिणाम सफलता (माना सिक्के की उछाल पर चित आना) या असफलता (पट आना) के रूप में प्राप्त होता है। इन सभी 100 उछालों में सफलता की प्रायिकता (p) एकसमान है। साथ ही सिक्के की उत्तरोतर उछालें स्वतंत्र प्रयोग होती हैं।

16.14 द्विपद बंटन (Binomial distribution)

माना एक यादृच्छिक प्रयोग की n बार पुनरावृत्ति की गई है। अतः यह एक n-बरनौली परीक्षणों वाला प्रयोग है, जहाँ प्रत्येक परीक्षण स्वंतत्र है तथा प्रत्येक परीक्षण में घटना के घटित होने को सफलता को S व घटित नहीं होने को असफलता को F से निरूपित करते है।

माना प्रत्येक परीक्षण में सफलता की प्रायिकता (p) व असफलता की प्रायिकता $(q = 1 - p)$ अचर है।
तब मिश्र प्रायिकता प्रमेय से n-बरनौली परीक्षणों वाले प्रयोग में r सफलताओं तथा शेष $(n-r)$ असफलताओं की प्रायिकता

$$\begin{aligned}P(X=r) &= P(r\text{सफलताए}).P[(n-r)\text{असफलताए}]\\ &= P(\underbrace{SSS...S}_{r\text{ बार}}\ \underbrace{FFF...F}_{(n-r)\text{बार}})\\ &= P(S)P(S)P(S)...P(S)\ \ P(F)P(F)P(F)...P(F)\\ &= ppp....p\ \ qqq...q\end{aligned}$$

$$P(X=r) = p^r q^{n-r}$$

यह संबंध n- बरनौली परीक्षणों वाले प्रयोग में एक विशेष क्रम में r सफलताओं व $(n-r)$ असफलताओं को दर्शाता है। परन्तु n परीक्षणों में से r सफलताएँ ${}^nc_r$ विधियों से प्राप्त की जा सकती है तथा इन प्रत्येक विधियों में प्रायिकता $p^r q^{n-r}$ समान रहती है।

अतः n-बरनौली परीक्षणों में r सफलताओं की प्रायिकता

$$P(X=r) = {}^nc_r p^r q^{n-r}; \quad r = 0,1,2,....,n \text{ तथा } q = 1-p$$

n-बरनौली परीक्षणों वाले एक प्रयोग में सफलताओं संख्या X का बंटन निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

X	0	1	2	...	r	...	n
$P(X)$	${}^nC_0p^0q^{n-0}={}^nC_0q^n$	${}^nc_1p^1q^{n-1}$	${}^nc_2p^2q^{n-2}$	...	${}^nc_rp^rq^{n-r}$	...	${}^nc_np^nq^{n-n}={}^nc_np^n$

उपर्युक्त प्रायिकता बंटन द्विपद बंटन कहलाता है क्योंकि ${}^nc_oq^n, {}^nc_oq^{n-1}p^1, \ldots, {}^nc_np^n$; $(q+p)^n$ के द्विपद प्रसार में उत्तरोत्तर पद है। यहाँ n व p प्राचल है क्योंकि n तथा p के मान ज्ञात होने पर संपूर्ण प्रायिकता बंटन को ज्ञात किया जा सकता है।

एक n-बरनौली परीक्षणों तथा प्रत्येक परीक्षण में सफलता की प्रायिकता p वाले द्विपद बंटन को $B(n,p)$ से व्यक्त किया जाता है।

टिप्पणी: $$\sum_{r=0}^{n}P(X=r)=\sum_{r=o}^{n}{}^nC_rp^rq^{n-r}$$

$$={}^nC_0p^oq^n+{}^nC_1p^1q^{n-1}+\ldots+{}^nC_np^nq^{n-n}=(q+p)^n=1.$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-31. पासों के एक जोड़े को 7 बार फेंका गया है। यदि 'पासों पर प्राप्त अंकों का योग 7 होना' सफलता मानी जाए तो क्या प्रायिकता है

(i) कोई सफलता नहीं (ii) छः सफलताएँ (iii) कम से कम छः सफलताएँ (iv) अधिकतम छः सफलताएँ

हल: माना पासों के एक जोड़े को एक बार फेंकने पर पासों पर प्राप्त अंकों के योग के 7 होने की प्रायिकता p है। तब $p=6/36=1/6$

[$\because$ पासों पर प्राप्त अंकों का योग 7 निम्न छ तरीकों से आ सकता है।]

$$(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$$

$$q=1-p=1-1/6=5/6$$

माना पासों के एक जोड़े की 7 फेंक में सफलताओं की संख्या को X से निरूपित करते है।

तब X प्राचलों $n=7$ तथा $p=1/6$ सहित एक द्विपद चर इस प्रकार से है कि

$$P(X=r)={}^7c_r(1/6)^r(5/6)^{7-r}; \quad r=0,1,2,3,4,5,6,7$$

(i) P (कोई सफलता नहीं) $=P(X=0)$

$$={}^7C_o\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{7-0}=\left(\frac{5}{6}\right)^7$$

(ii) P (छः सफलताएँ) $=P(X=6)$

$$={}^7C_6\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^{7-6}=\frac{35}{6^7}$$

(iii) P (कम से कम छः सफलताएँ) $=P(X\ge 6)$

$$=P(X=6)+P(X=7)$$

$$={}^7C_6\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^{7-6}+{}^7C_7\left(\frac{1}{6}\right)^7\left(\frac{5}{6}\right)^{7-7}$$

$$=7\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}\right)^7=\frac{1}{6^5}$$

(iv) P (अधिकतम छः सफलताएँ) $= P(X \le 6)$

$$= P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)$$

$$= 1 - P(X>6)$$

$$= 1 - P(X=7)$$

$$= 1 - {}^7C_7\left(\frac{1}{6}\right)^7\left(\frac{5}{7}\right)^{7-7} = 1-\left(\frac{1}{6}\right)^7.$$

उदाहरण-32. एक अनभिनत पासे को बार-बार तब तक उछाला जाता है जब तक कि उस पर 6 का अंक तीन बार प्राप्त नहीं हो जाता। इस बात की क्या प्रायिकता है कि पासे पर तीसरा 6 का अंक उसे छठी बार उछालने पर प्राप्त होता है।

हल: एक पासे की एक फेंक में 6 के अंक प्राप्त होने की प्रायिकता माना p है। तब $p=\frac{1}{6}$, $q=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ तीसरा 6 का अंक छठी बार उछालने पर प्राप्त होने का अर्थ यह है कि पहले पाँच उछालों में 6 का अंक दो बार प्राप्त हो तथा छठी उछाल में तीसरा 6 का अंक प्राप्त हो।

अतः अभीष्ट प्रायिकता = P (पहले 5 उछालों में दो 6 के अंक प्राप्त करना) . P(छठी उछाल में 6 का अंक प्राप्त करना)

$$= \left({}^5C_2 p^2 q^{5-2}\right)(p) = {}^5C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3\times\frac{1}{6}$$

$$= \frac{10\times125}{6^6} = \frac{625}{23328}.$$

उदाहरण-33. एक न्याय्य सिक्के को 5 बार उछाला गया है। कम से कम 3 चित प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: एक न्याय्य सिक्के की एक उछाल में चित प्राप्त करने की प्रायिकता माना p है। तब $p=1/2,\ q=1/2$ माना एक सिक्के की 5 उछालों में चितों की संख्या को X से निरूपित करते है। तब X प्राचलों $n=5$ तथा $p=1/2$ के साथ द्विपद चर इस प्रकार से है कि

$$P(X=r) = {}^5C_r\left(\frac{1}{2}\right)^{5-r}\left(\frac{1}{2}\right)^r = {}^5C_r\left(\frac{1}{2}\right)^5;\ \text{जहाँ } r=0,1,2,3,4,5$$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $= P$ (कम से कम 3 चित प्राप्त होना)

$$= P(X\ge3)$$

$$= P(X=3)+(X=4)+(X=5)$$

$$= {}^5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}^5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}^5C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$= \left({}^5C_3+{}^5C_4+{}^5C_5\right)\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{10+5+1}{32}\right) = \frac{1}{2}$$

उदाहरण-34. एक पासे को 6 बार उछाला गया है। यदि 'पासे पर विषम संख्या प्राप्त होना' एक सफलता है तो निम्नलिखित की प्रायिकताएँ क्या होगी?

(i) तथ्यतः 5 सफलताएँ (ii) कम से कम 5 सफलताएँ (iii) अधिकतम 5 सफलताएँ।

हल: एक पासे के एक उछाल में विषम संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता माना p है। तब $p=3/6=1/2$ तथा $q=1-p=1-1/2=1/2$

इन छः परीक्षणों में सफलताओं की संख्या को माना X से व्यक्त करते है तब X प्राचलों $n=6$ व $p=1/2$ सहित द्विपद चर है।

$$P(X=r) = {}^6C_r\left(\frac{1}{2}\right)^{6-r}\left(\frac{1}{2}\right)^r = {}^6C_r\left(\frac{1}{2}\right)^6;\ \text{जहाँ } r=0,1,2,3,4,5,6$$

(i) P (तथ्यत: 5 सफलताएँ) $= P(X=5) = {}^6C_5\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{3}{32}$.

(ii) P (कम से कम 5 सफलताएँ) $= P(X \ge 5) = P(X=5) + P(X=6)$

$$= {}^6C_5\left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}^6C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$= \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \frac{7}{64}.$$

(iii) P (अधिकतम 5 सफलताएँ) $= P(X \le 5)$

$$= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

$$= 1 - P(X > 5)$$

$$= 1 - P(X = 6)$$

$$= 1 - {}^6C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}.$$

उदाहरण-35. एक व्यक्ति के लक्ष्य भेदन की प्रायिकता $1/4$ है। वह कम से कम कितनी बार गोली चलाए कि लक्ष्य को कम से कम एक बार भेदने की प्रायिकता $2/3$ से अधिक हो?

हल: माना कि व्यक्ति n बार गोली चलाता है।

प्रश्नानुसार $p = 1/4$ तथा $q = 1 - p = 1 - 1/4 = 3/4$ माना व्यक्ति के द्वारा लक्ष्य भेदनों की संख्या को X से निरूपित करते है। तब

$$P(X=r) = {}^nC_r\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{n-r} \text{; जहाँ } r = 0, 1, 2, \ldots, n$$

दिया गया है कि P (कम से कम एक बार लक्ष्य भेदन) $> 2/3$

$$P(X \ge 1) > 2/3$$

$$\Rightarrow \quad 1 - P(X=0) > 2/3$$

$$\Rightarrow \quad 1 - {}^nC_0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{n-0} > \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n > \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{3}{4}\right)^n < \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad n = 4, 5, 6, \ldots \quad \left[\because \left(\frac{3}{4}\right)^1 > \frac{1}{3}, \left(\frac{3}{4}\right)^2 > \frac{1}{3}, \left(\frac{3}{4}\right)^3 > \frac{1}{3} \text{ परन्तु} \left(\frac{3}{4}\right)^4 < \frac{1}{3}, \left(\frac{3}{4}\right)^5 < \frac{1}{3}, \ldots\right]$$

अतः व्यक्ति को कम से कम 4 गोली चलानी होगी।

उदाहरण-36. एक व्यक्ति के एक कदम आगे चलने की प्रायिकता 0.4 तथा एक कदम पीछे हटने की प्रायिकता 0.6 है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि ग्यारह कदमों के पश्चात् वह व्यक्ति शुरूआती बिन्दु से एक कदम दूर है?

हल: माना व्यक्ति के एक कदम आगे चलने की प्रायिकता p है तब $p = 0.4,\ q = 1 - p = 1 - 0.4 = 0.6$ माना आगे की दिशा में चले गए कदमों की संख्या को अब X से निरूपित करते हैं। अतः X प्राचलों $n = 11$ तथा $p = 0.4$ के साथ एक द्विपद चर इस प्रकार से है कि

$$P(X = r) = {}^{11}C_r (0.4)^r (0.6)^{11-r} ; r = 0, 1, 2, ...,11$$

चूंकि व्यक्ति शुरूआती बिन्दु से एक कदम दूर है अतः वह ग्यारह कदमों के पश्चात् शुरूआती बिन्दु से या तो एक कदम आगे है या पीछे है। यदि व्यक्ति एक कदम आगे की ओर है तब वह छः कदम आगे व पाँच कदम पीछे चल चुका है। तथा यदि व्यक्ति एक कदम पीछे की ओर है तब वह पाँच कदम आगे व छः कदम पीछे चल चुका है।

अतः $X = 5$ या $X = 6$

अभीष्ट प्रायिकता $= P[(X = 5) \text{ या } (X = 6)]$

$= P(X = 5) + P(X = 6)$ (दोनों घटनाएँ परस्पर अपवर्जी घटनाएँ है।)

$$= {}^{11}c_5 (0{\cdot}4)^5 (0{\cdot}6)^{11-5} + {}^{11}c_6 (0{\cdot}4)^6 (0{\cdot}6)^{11-6}$$

$$= {}^{11}c_5 (0{\cdot}4)^5 (0{\cdot}6)^6 + {}^{11}c_6 (0{\cdot}4)^6 (0{\cdot}6)^5 = 462(0{\cdot}24)^5 .$$

प्रश्नमाला 16.5

1. यदि एक न्याय्य सिक्के को 10 बार उछाला गया हो तो निम्न प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए
   (i) तथ्यतः छः चित (ii) कम से कम छः चित (iii) अधिकतम छः चित
2. एक कलश में 5 सफेद, 7 लाल और 8 काली गेंदे है। यदि चार गेंदे एक-एक करके प्रतिस्थापन सहित निकाली जाती है तो इस बात की क्या प्रायिकता है कि
   (i) सभी सफेद गेंदे हो (ii) केवल तीन गेंदे हो
   (iii) कोई भी सफेद गेंद नही हो (iv) कम से कम तीन सफेद गेंदे हो।
3. एक बाधा दौड़ में एक खिलाड़ी को 10 बाधाएँ पार करनी है। खिलाड़ी के द्वारा प्रत्येक बाधा को पार करने की प्रायिकता $5/6$ है। इस बात की क्या प्रायिकता हैं कि वह 2 से कम बाधाओं को गिरा देगा (पार नहीं कर पाएगा)?
4. पाँच पासों को एक साथ फेंका गया है। यदि एक पासे पर सम अंक आने को सफलता माना जाए तो अधिकतम 3 सफलताओं की प्रयिकता ज्ञात कीजिए।
5. 10% खराब अंड़ों वाले एक ढेर से 10 अंड़े उत्तरोतर प्रतिस्थापन के साथ निकाले गए है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि 10 अंड़ों के प्रतिदर्श में कम से कम एक खराब अंड़ा है।
6. एक व्यक्ति एक लॉटरी के 50 टिकट खरीदता है, जिसमें उसके प्रत्येक में जीतने की प्रायिकता $1/100$ है। इस बात की क्या प्रायिकता हैं कि वह
   (i) कम से कम एक बार (ii) तथ्यतः एक बार (iii) कम से कम दो बार, इनाम जीत लेगा।
7. किसी कारखाने में बने एक बल्ब की 150 दिनों के उपयोग के बाद फ्यूज होने की प्रायिकता 0.05 हैं प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इस प्रकार के 5 बल्बों में से
   (i) एक भी नही (ii) एक से अधिक नहीं (iii) एक से अधिक (iv) कम से कम एक
   150 दिनों के उपयोग के बाद फ्यूज हो जाएंगे।
8. एक बहु-विकल्पीय परीक्षा में 5 प्रश्न है जिनमें प्रत्येक के तीन संभावित उत्तर है जिनमें से केवल एक ही सही उत्तर हैं इसकी क्या प्रायिकता है कि एक विद्यार्थी केवल अनुमान लगा कर चार या अधिक प्रश्नों के सही उत्तर दे देगा?
9. एक सत्य-असत्य प्रकार के 20 प्रश्नों वाली परीक्षा में माना एक विद्यार्थी एक न्याय्य सिक्के को उछालकर प्रत्येक प्रश्न का उत्तर निर्धारित करता है। यदि पासे पर चित प्रकट हो तो वह प्रश्न का उत्तर 'सत्य' देता है और यदि पट प्रकट हो तो 'असत्य' लिखता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह कम से कम 12 प्रश्नो का सही उत्तर देता हैं

10. एक थैले में 10 गेंदे है जिनमें से प्रत्येक पर 0 से 9 तक के अंकों में से एक अंक लिखा है। यदि थैले से 4 गेंदे उत्तरोतर पुनः वापस रखते हुए निकाली जाती है, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि उनमें से किसी भी गेंद पर अंक 0 नहीं लिखा हो?

11. 52 ताश के पत्तों की एक भली-भाँति फेंटी गई गड्डी में से 5 पत्ते उत्तरोतर प्रतिस्थापन सहित निकाले जाते है। इसकी क्या प्रायिकता है कि

(i) सभी 5 पत्ते हुकुम के हो? (ii) केवल 3 पत्तें हुकुम के हो?

(iii) एक भी पत्ता हुकुम का नहीं हो?

12. माना चर X का बंटन $B(6, 1/2)$ द्विपद बंटन है सिद्ध कीजिए कि $X = 3$ अधिकतम प्रायिकता वाला परिणाम है।

13. पासों के एक जोड़े को 4 बार उछाला जाता है। यदि पासों पर प्राप्त अंकों का द्विक होना सफलता मानी जाए तो 2 सफलताओं की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

विविध उदाहरण

उदाहरण-37. A और B एकान्तरतः एक पासे के जोड़े को उछालते है। यदि B के 7 फेंकने से पहले A, 6 फेंकता है तब A जीतता है तथा यदि A के 6 फेंकने से पहले B, 7 फेंकता है तब B जीतता है। यदि A खेलना प्रारंभ करे तो, A के जीतने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: पासों के एक युग्म को फेंकने पर 6 निम्न पाँच तरीकों से प्राप्त किया जा सकता है

$\{(1,5)\ (2,4)\ (3,3)\ (4,2)\ (5,1)\}$ अतः पासों के एक युग्म को फेंकने पर 6 आने की प्रायिकता $= 5/36$

तथा 6 नहीं आने की प्रायिकता $= 1 - 5/36 = 31/36$

इसी प्रकार पासों के एक युग्म को फेंकने पर 7 निम्न छः तरीकों से प्राप्त किया जा सकता है।

$\{(1,6)\ (2,5)\ (3,4)\ (4,3)\ (5,2)(6,1)\}$

अतः पासों के एक युग्म को फेंकने पर 7 आने की प्रायिकता $= 6/36 = 1/6$

तथा 7 नहीं आने की प्रायिकता $= 1 - 1/6 = 5/6$ माना दो घटनाएँ A तथा B इस प्रकार से परिभाषित है कि

A 'पासों के एक युग्म की एक फेंक में 6 आना'

B 'पासों के एक युग्म की एक फेंक में 7 आना'

तब $P(A) = \frac{5}{36},\quad P(\overline{A}) = \frac{31}{36}$

तथा $P(B) = \frac{1}{6}$ व $P(\overline{B}) = \frac{5}{6}$

A	A_W	$A_L B_L A_W$	$A_L B_L A_L B_L A_W$	...
B	$A_L B_W$	$A_L B_L A_L B_W$	$A_L B_L A_L B_L A_L B_W$	...

जहाँ A_W व A_L क्रमशः A के जीतने व नहीं जीतने की घटनाएँ है। इसी प्रकार B_W व B_L क्रमशः B के जीतने व नहीं जीतने की घटनाएँ है।

यदि A खेल आरंभ करता है तो A के जीतने की प्रायिकता

$$P(A_W) + P(A_L B_L A_W) + (A_L B_L A_L B_L A_W) + \ldots$$

$= P$ (प्रथम फेंक में 6 आना) $+ P$(प्रथम फेंक में नही 6 आना तथा द्वितीय फेंक में 7 नहीं आना व तृतीय फेंक में 6 आना)+...

$= P$ (प्रथम फेंक में 6 आना) $+ P$ (प्रथम फेंक में 6 नहीं आना) P (द्वितीय फेंक में 7 नहीं आना)

P (तृतीय फेंक में 6 आना) + . . . (चूंकि दोनों घटनाएँ स्वतंत्र है।)

$$= P(A) + P(\overline{A})P(\overline{B})P(A) + \ldots$$

$$= \frac{5}{36} + \frac{31}{36} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{36} + \ldots$$

$$= \frac{5}{36}\left[1 + \left(\frac{31}{36} \times \frac{5}{6}\right) + \ldots\right]$$

$$= \frac{5}{36} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{31}{36} \times \frac{5}{6}\right)\right]}$$ [अनन्त गुणोत्तर श्रेणी के योग से $S_\infty = \frac{a}{1-r}$]

$$= \frac{5}{36} \frac{36 \times 6}{216 - 155} = \frac{30}{61}.$$

उदाहरण-38. यदि एक द्वितीय क्रम के सारणिक का प्रत्येक अवयव शून्य या एक हो तो सारणिक का मान धनात्मक होने की क्या प्रायिकता है? (यह मानते हुए कि सारणिक के प्रत्येक अवयव को स्वतंत्र रूप से चुना जा सकता है तथा प्रत्येक के चुने जाने की प्रायिकता $1/2$ है।)

हल: माना दिया गया सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,

जहाँ $a_{ij} = 0$ या 1; $\quad i, j = 1, 2$

यह स्पष्ट है कि $\Delta \le 0$ यदि $a_{11} = 0$ या $a_{22} = 0$ अतः ना तो $a_{11} = 0$ ना ही $a_{22} = 0$ $\Rightarrow$ $a_{11} = 1 = a_{22}$ जब $a_{11} = a_{22} = 1$ तब $\Delta = 0$ यदि $a_{12} = a_{21} = 1$ अतः $a_{11} = a_{22} = 1$ तथा $a_{12} \ne 1$, $a_{21} \ne 1$ सारणिक Δ के मानों के लिए निम्न तीन संभावनाएँ हैः–

$$a_{11} = a_{22} = 1, a_{12} = 1, a_{21} = 0$$

$$a_{11} = a_{22} = 1, a_{12} = 0, a_{21} = 1$$

$$a_{11} = a_{22} = 1, a_{12} = 0, a_{21} = 0$$

अभीष्ट प्रायिकता $= P(a_{11} = a_{22} = 1, a_{12} = 1, a_{21} = 0) + P(a_{11} = a_{22} = 1, a_{12} = 0, a_{21} = 1)$

$$+ P(a_{11} = a_{22} = 1, a_{12} = 0, a_{21} = 0)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}.$$

उदाहरण-39. द्विपद बंटन $B(4, 1/3)$ का माध्य ज्ञात कीजिए।

हल: माना X वह यादृच्छिक चर है जिसका प्रायिकता बंटन $B(4, 1/3)$ है।

यहाँ $\quad n = 4, p = 1/3, q = 1 - p = 1 - 1/3 = 2/3$

तथा $\quad P(X = x) = {}^4C_x \left(\frac{2}{3}\right)^{4-x} \left(\frac{1}{3}\right)^x; \; x = 0, 1, 2, 3, 4$

अतः प्रायिकता बंटन निम्न है

$X:$	0	1	2	3	4
$P(x_i):$	${}^4C_0\left(\frac{2}{3}\right)^{4-0}\left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{16}{81}$	${}^4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^{4-1}\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{32}{81}$	${}^4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^{4-2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{24}{81}$	${}^4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^{4-3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{81}$	${}^4C_4\left(\frac{2}{3}\right)^{4-4}\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

माध्य $\mu = E(X) = \sum x_i p_i$

$$= 0\times\frac{16}{81}+1\times\frac{32}{81}+2\times\frac{24}{81}+3\times\frac{8}{81}+4\times\frac{1}{81}$$

$$= \frac{32+48+24+4}{81} = \frac{108}{81} = \frac{4}{3}$$

विविध प्रश्नमाला—16

1. दो घटनाएँ A तथा B परस्पर स्वतंत्र कहलाती है यदि

(क) $P(A)=P(B)$ (ख) $P(A)+P(B)=1$

(ग) $P(\bar{A}\bar{B})=[1-P(A)][1-P(B)]$ (घ) A और B परस्पर अपवर्जी है।

2. पासों के एक जोड़े को उछालने पर प्रत्येक पासे पर सम अभाज्य अंक प्राप्त करने की प्रायिकता निम्नलिखित में से क्या है?

(क) $1/3$ (ख) 0 (ग) $1/36$ (घ) $1/12$

3. यदि A और B ऐसी घटनाएँ है कि $A\subset B$ तथा $P(B)\neq 0$ तब निम्न में से कौनसा कथन सत्य है:

(क) $P\left(\frac{A}{B}\right)<P(A)$ (ख) $P\left(\frac{A}{B}\right)\geq P(A)$ (ग) $P\left(\frac{A}{B}\right)=P\frac{(B)}{(A)}$ (घ) इनमें से कोई नहीं

4. ताश के 52 पत्तों की एक भली-भाँति फेंटी गई गड्डी में से दो पत्ते यादृच्छया निकाले जाते है। माना यादृच्छिक चर X, इक्कों की संख्या को निरूपित करता है, तब X का माध्य ज्ञात कीजिए।

(क) $5/13$ (ख) $1/13$ (ग) $37/221$ (घ) $2/13$

5. एक यादृच्छिक चर X मान 0, 1, 2, 3 ग्रहण करता है। चर X का माध्य 1·3 हैं। यदि $P(X=3)=2P(X=1)$ तथा $P(X=2)=0{\cdot}3$ हो तो $P(X=0)$ है।

(क) 0·2 (ख) 0·4 (ग) 0·3 (घ) 0·1

6. एक छात्रा के धावक होने की प्रायिकता $4/5$ है। 5 छात्राओं में से 4 छात्राओं की धावक होने की प्रायिकता है:

(क) $\left(\frac{4}{5}\right)^4\left(\frac{1}{5}\right)$ (ख) ${}^5C_1\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)$ (ग) ${}^5C_4\left(\frac{4}{5}\right)^4\left(\frac{1}{5}\right)^4$ (घ) इनमें से कोई नहीं

7. एक बक्से में 100 वस्तुएँ है जिसमें से 10 खराब हैं 5 वस्तुओं के नमूने में से, किसी भी वस्तु के खराब नहीं होने की प्रायिकता है:

(क) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ (ख) 10^{-1} (ग) $\frac{9}{10}$ (घ) $\left(\frac{9}{10}\right)^5$

8. एक दंपति के दो बच्चे हैं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए

(i) दोनों बच्चे लड़के हैं, यदि यह ज्ञात है कि बड़ा बच्चा लड़का है।

(ii) दोनों बच्चे लड़कियाँ हैं, यदि यह ज्ञात है कि बड़ा बच्चा लड़की है।

(iii) दोनों बच्चे लड़के हैं, यदि यह ज्ञात है कि कम से कम एक बच्चा लड़का है।

9. 1 से 11 तक के पूर्णांकों में से यादृच्छया दो पूर्णांकों को चुना गया है। दोनों पूर्णांकों के विषम होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि यह ज्ञात है कि दोनों पूर्णांको का योग सम है।
10. एक आवणिक संरचना के दो सहायक निकाय A तथा B है। पूर्ववर्ती निरीक्षण द्वारा निम्न प्रायिकताएँ ज्ञात हैः–

    P (A का असफल होना) = 0·2

    P (केवल B का असफल होना) = 0·15

    P (A तथा B का असफल होना) = 0·15

    ज्ञात कीजिए।

    (i) A के असफल होने की प्रायिकता जबकि B असफल हो चुका हो।

    (ii) केवल A के असफल होने की प्रायिकता।
11. माना A तथा B दो स्वतन्त्र घटनाएँ है। इन दोनों घटनाओं के एक साथ घटित होने की प्रायिकता 1 / 8 तथा दोनों घटनाओं के घटित नहीं होने की प्रायिकता 3 / 8 है। $P(A)$ तथा $P(B)$ ज्ञात कीजिए।
12. अनिल 60% स्थितियों में सत्य कहता है तथा आनन्द 90% स्थितियों में सत्य कहता है। किसी कथन पर उनके एक दूसरे से विरोधाभासी होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
13. तीन व्यक्ति A, B व C बारी–बारी से एक सिक्का उछालते हैं। जिसके पहले चित आता है वही जीतता है। यह मानते हुए कि खेल अनिश्चित काल तक जारी रहता है, यदि A खेलना आरंभ करता हो तो उनकी जीत की प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए।
14. अगले 25 वर्षों में एक व्यक्ति के जीवित रहने की प्रायिकता 4 / 5 है तथा उसकी पत्नि के उन्हीं 25 वर्षों जीवित रहने की प्रायिकता 3 / 4 है। प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए जबकि-

    (i) दोनों 25 वर्ष तक जीवित रहे।

    (ii) दोनों में से कम से कम एक 25 वर्षों तक जीवित रहे।

    (iii) केवल पत्नि 25 वर्ष तक जीवित रहे।
15. बच्चों के तीन समूहों मे क्रमशः 3 लड़कियाँ और 1 लड़का, 2 लड़कियाँ और 2 लड़के तथा 1 लड़की और 3 लड़के हैं। प्रत्येक समूह में से यादृच्छया एक बच्चे का चयन किया जाता है। इस प्रकार चुने गए तीनों बच्चों में 1 लड़की तथा 2 लड़कों के होने कि प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
16. प्रथम थैले में 3 काली और 4 सफेद गेंदे है जबकि द्वितीय थैले में 4 काली और 3 सफेद गेंदे है। एक अनभिनत पासे को उछाला जाता है यदि पासे पर 1 या 3 का अंक प्रकट होता है तब प्रथम थैले में से एक गेंद निकाली जाती है तथा यदि अन्य अंक प्रकट होता है तब द्वितीय थैले में से एक गेंद निकाली जाती है। निकाली गई गेंद के काली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
17. किसी व्यक्ति ने एक निर्माण कार्य का ठेका लिया, वहाँ हड़ताल होने की प्रायिकता 0·65 है। हड़ताल न होने तथा हड़ताल होने की स्थितियों में निर्माण कार्य के समयानुसार पूर्ण होने की प्रायिकताएँ क्रमशः 0·80 तथा 0·32 है। निर्माण कार्य के समयानुसार पूर्ण होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
18. प्रथम थैले में 8 सफेद तथा 7 काली गेंदे है जबकि द्वितीय थैले में 5 सफेद और 4 काली गेंदे है। प्रथम थैले में से एक गेंद का यादृच्छया चयन किया जाता है और उसे द्वितीय थैले की गेंदो के साथ मिला दिया जाता है। तब इसमें से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाली गई गेंद सफेद है।
19. एक परीक्षा में एक बहुविकल्पीय प्रश्न जिसके चार विकल्प है का उत्तर देने में एक विद्यार्थी या तो अनुमान लगाता है या नकल करता है या प्रश्न का उत्तर जानता है। विद्यार्थी के द्वारा अनुमान लगाने तथा नकल करने की प्रायिकताएँ क्रमशः 1/3 व 1/6 है। उसके द्वारा सही उत्तर दिए जाने की प्रायिकता 1/8 है जबकि यह ज्ञात है कि उसने नकल की है। विद्यार्थी के द्वारा प्रश्न का उत्तर जानने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए जबकि यह ज्ञात है कि उसने सही उत्तर दिया है।
20. एक पत्र दो शहरों TATANAGAR या CALCUTTA में से किसी एक शहर से आया हुआ है। पत्र के लिफाफे पर केवल दो क्रमागत अक्षर TA दिखाई देते है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पत्र

    (i) CALCUTTA (ii) TATANAGAR, से आया हुआ है।
21. एक निर्माता के पास तीन यन्त्र संचालक A, B तथा C है। प्रथम संचालक A, 1% त्रुटिपूर्ण वस्तुएँ उत्पादित करता है, जबकि अन्य दो संचालक B तथा C क्रमशः 5% तथा 7% त्रुटिपूर्ण वस्तुएँ उत्पादित करते है। A कार्य पर कुल समय का 50% लगाता है, B कुल समय का 30% तथा C कुल समय का 20% लगाता है। यदि एक त्रुटिपूर्ण वस्तु उत्पादित है तो इसकी क्या प्रायिकता है कि यह यंत्र A से उत्पादित है?

22. किसी यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन P(X) निम्न है, जहाँ k कोई सख्या है:

$$P(X=x)=\begin{cases} k & ; \text{ यदि } x=0 \\ 2k & ; \text{ यदि } x=1 \\ 3k & ; \text{ यदि } x=2 \\ 0 & ; \text{ अन्य था} \end{cases}$$

(i) k का मान ज्ञात कीजिए।

(ii) $P(X<2), P(X\le 2)$ तथा $P(X\ge 2)$ का मान ज्ञात कीजिए।

23. एक यादृच्छिक चर X सभी ऋणेतर पूर्णांक मान ग्रहण कर सकता है तथा चर X की मान r के ग्रहण करने की प्रायिकता α^r के समानुपाती है जहाँ $0<\alpha<1$ तब $P(X=0)$ ज्ञात कीजिए।

24. माना X एक यादृच्छिक चर है जो मान x_1, x_2, x_3, x_4 इस प्रकार ग्रहण करता है कि

$$2P(X=x_1)=3P(X=x_2)=P(X=x_3)=5P(X=x_4)$$

चर X का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

25. एक न्याय्य सिक्के को एक चित अथवा पाँच पट आने तक उछाला जाता है। यदि X, सिक्के की उछालों की संख्या को निरूपित करता हो तो X का माध्य ज्ञात कीजिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. यदि किसी यादृच्दिक परीक्षण के प्रतिदर्श समष्टि से संबंधित A व B दो घटनाएँ हो तो घटना A की सप्रतिबन्ध प्रायिकता जबकि घटना B घटित हो चुकी हो, निम्न प्रकार ज्ञात की जाती है:

$$P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}; \qquad P(B)\neq 0.$$

इसी प्रकार $$P\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}; \qquad P(A)\neq 0$$

2. $0\le P\left(\frac{A}{B}\right)\le 1,\qquad P\left(\frac{\overline{A}}{B}\right)=1-P\left(\frac{A}{B}\right)$

3. यदि प्रतिदर्श समष्टि S की A तथा B कोई दो घटनाएँ हो तथा F एक अन्य घटना इस प्रकार से हो कि $P(F)\neq 0$ तब

$$P\left(\frac{A\cup B}{F}\right)=P\left(\frac{A}{F}\right)+P\left(\frac{B}{F}\right)-P\left(\frac{A\cap B}{F}\right)$$

4. प्रायिकता का गुणन नियम

$$P(A\cap B)=P(A)P\left(\frac{B}{A}\right);\quad P(A)\neq 0 \text{ या } P(A\cap B)=P(B)P\left(\frac{A}{B}\right);\quad P(B)\neq 0$$

5. यदि A तथा B स्वतन्त्र घटनाएँ हो तो

$$P\left(\frac{A}{B}\right)=P(A), P(B)\neq 0;\qquad P\left(\frac{B}{A}\right)=P(B), P(A)\neq 0$$

तथा $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

6. संपूर्ण प्रायिकता का प्रमेय–माना किसी यादृच्छिक प्रयोग से सम्बद्ध प्रतिदर्श समष्टि S है तथा n घटनाएँ $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ परस्पर अपवर्जी तथा निश्शेष घटनाएँ है तथा $P(A_j) \neq 0;\ j = 1, 2, ..., n$

माना E कोई घटना है जो A_1 या A_2 या A_3... या A_n के साथ घटित होती है, तब

$$P(E) = P(A_1)P\left(\frac{E}{A_1}\right) + P(A_2)P\left(\frac{E}{A_2}\right) + ... + P(A_n)P\left(\frac{E}{A_n}\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)P\left(\frac{E}{A_j}\right)$$

7. बेज प्रमेय – माना किसी यादृच्छिक प्रयोग से सम्बद्ध n परस्पर अपवर्जी तथा निश्शेष घटनाएँ है, जहाँ प्रत्येक घटना के घटित होने की प्रायिकता शून्येतर है तथा इस प्रयोग से संबंधित प्रतिदर्श समष्टि S है। माना E कोई घटना है जो A_1 या A_2 या ....A_n के साथ घटित होती है तब

$$P\left(\frac{A_i}{E}\right) = \frac{P(A_i)P\left(\frac{E}{A_i}\right)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P\left(\frac{E}{A_j}\right)}$$

8. एक यादृच्छिक चर किसी यादृच्छिक परीक्षण के प्रतिदर्श समष्टि पर परिभाषित वास्तविक मान फलन होता है।

9. यदि एक यादृच्छिक चर विभिन्न मानों $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ को संगत प्रायिकताओं $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ के साथ ग्रहण करता है तब चर का प्रायिकता बंटन निम्न होगा–

$$\begin{matrix} X = x & : & x_1 & x_2 & x_3 ... x_n \\ P(x) & : & p_1 & p_2 & p_3 ... p_n \end{matrix} \ ; \text{ जहाँ } p_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1;\ \ i = 1, 2, ..., n$$

10. माना X एक यादृच्छिक चर है जिसके संभावित मानों $x_1, x_2, ..., x_n$ के संगत प्रायिकतायें क्रमशः $p_1, p_2, ..., p_n$ है।

(a) चर X के माध्य $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ को μ से निरूपित किया जाता है। किसी यादृच्छिक चर X के माध्य को X की प्रत्याशा भी कहते है जिसे E(X) से व्यक्त करते है।

(b) चर X का प्रसरण

$$= \text{var}(X) = \sigma_x^2 = E(X - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i$$

(c) $\text{var}(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$

(d) ऋणेत्तर संख्या

$$\sigma_x = +\sqrt{\text{var}(x)} = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i}$$

को यादृच्छिक चर X का मानक विचलन कहते हैं।

11. किसी यादृच्छिक प्रयोग के परीक्षणों को बरनौली परीक्षण कहते है यदि वे निम्नलिखित शर्तो को सन्तुष्ट करते हो:

(i) परीक्षणों की संख्या निश्चित (परिमित) होनी चाहिये।

(ii) परीक्षण स्वतन्त्र होने चाहिए।

(iii) प्रत्येक परीक्षण के तथ्यतः दो ही परिणाम सफलता या असफलता होने चाहिए।

(iv) प्रत्येक परीक्षण में किसी परिणाम की प्रायिकता समान रहनी चाहिए।

12. f) i n c&u $B(n, p)$ में r सफलताओं की प्रायिकता

$$P(X = r) = {}^nC_r p^r q^{n-r};\quad r = 0, 1, 2, ..., n \text{ जहाँ } q = 1 - p.$$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 16.1

1. $4/9$ 2. $16/25$ 3. $11/26$ 4. $P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{2}{3}$, $P\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{1}{3}$ 5. (i) $0{\cdot}32$; (ii) $0{\cdot}64$; (iii) $0{\cdot}98$

6. $1/3$ 7. (i) $P\left(\frac{A}{B}\right)=1$ (ii) $P\left(\frac{A}{B}\right)=0$ 8. $P\left(\frac{A}{B}\right)=1$

9. (i) $P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{1}{2}$, $P\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{1}{3}$; (ii) $P\left(\frac{A}{C}\right)=\frac{1}{2}$, $P\left(\frac{C}{A}\right)=\frac{2}{3}$; (iii) $P\left(\frac{A\cup B}{C}\right)=\frac{3}{4}$, $P\left(\frac{A\cap B}{C}\right)=\frac{1}{4}$

10. $1/15$ 11. $4/7$ 12. $0{\cdot}1$ 13. $2/5$ 14. $2/9$

प्रश्नमाला 16.2

1. $3/8$ 2. $1/3$ 3. (i) $0{\cdot}12$; (ii) $0{\cdot}58$; (iii) $0{\cdot}3$; (iv) $0{\cdot}4$ 4. (i) $0{\cdot}18$; (ii) $0{\cdot}12$; (iii) $0{\cdot}72$; (iv) $0{\cdot}28$

5. $1/969$ 6. $7/8$ 7. $25/102$ 8. $1/3$ 9. (i) $1/5$; (ii) $1/3$; (iii) $1/2$

10. $0{\cdot}97$ 11. $3/4$ 12. $1/7$ 13. (i) $2/3$; (ii) $1/2$

प्रश्नमाला 16.3

1. $35/68$ 2. $1/2$ 3. $16/31$ 4. $2/3$ 5. $4/9$ 6. $22/133$ 7. $9/13$

8. $1/52$ 9. $12/13$ 10. $20/21$ 11. $2/9$ 12. $8/11$ 13. $11/50$ 14. $2/9$

प्रश्नमाला 16.4

1. (i)

2.

$X=x$	0	1	2
$P(x)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

3.

$X=x$	0	1	2
$P(x)$	$12/19$	$32/95$	$3/95$

4.

$X=x$	0	1	2	3
$P(x)$	$4/35$	$18/35$	$12/35$	$1/35$

5. (i)

$X=x$	0	1	2	3
$P(x)$	$1/6$	$1/2$	$3/10$	$1/30$

(ii) $2/3$ (iii) $1/6$ (iv) $1/2$

6.

$X=x$	0	1	2
$P(x)$	$4/9$	$4/9$	$1/9$

7.

$X=x$	0	1	2	3	4
$P(x)$	$1/14$	$8/21$	$6/14$	$4/35$	$1/210$

8.

$X=x$	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

9. 7 10. $35/12$ 11. $7/10, 21/100$

12. $\frac{34}{221}$, $\frac{6800}{(221)^2}$, $0{\cdot}37$

प्रश्नमाला 16.5

1. (i) $105/512$; (ii) $193/512$; (iii) $53/64$ 2. (i) $\left(\frac{1}{4}\right)^4$ (ii) $3\left(\frac{1}{4}\right)^3$ (iii) $\left(\frac{3}{4}\right)^4$ (iv) $\frac{13}{4^4}$

3. $\frac{5^{10}}{2\times 6^9}$ 4. $\frac{13}{16}$ 5. $1-\frac{9^{10}}{10^{10}}$ 6. (i) $1-\left(\frac{99}{100}\right)^{50}$ (ii) $\frac{1}{2}\left(\frac{99}{100}\right)^{49}$ (iiii) $1-\frac{149}{100}\left(\frac{99}{100}\right)^{49}$

7. (i) $\left(\frac{19}{20}\right)^5$ (ii) $\frac{6}{5}\left(\frac{19}{20}\right)^4$ (iii) $1-\frac{6}{5}\left(\frac{19}{20}\right)^4$ (iv) $1-\left(\frac{19}{20}\right)^5$ 8. $\frac{11}{243}$

9. $\frac{{}^{20}C_{12}+{}^{20}C_{13}+\ldots+{}^{20}C_{20}}{2^{20}}$ 10. $\left(\frac{9}{10}\right)^4$ 11. (i) $\frac{1}{1024}$; (ii) $\frac{45}{512}$; (iii) $\frac{243}{1024}$

13. $\frac{25}{216}$

विविध प्रश्नमाला—16

1. (ग) 2. (ग) 3. (ख) 4. (घ) 5. (ख) 6. (ग) 7. (घ)

8. (i) $1/2$; (ii) $1/2$; (iii) $1/3$ 9. $3/5$ 10. (i) $1/2$; (ii) 0.05

11. $P(A)=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{1}{4}$ या $P(A)=\frac{1}{4},\ P(B)=\frac{1}{2}$ 12. 0.42 13. $4/7, 2/7, 1/7$

14. (i) $\frac{3}{5}$; (ii) $\frac{19}{20}$; (iii) $\frac{3}{20}$ 15. $\frac{13}{32}$ 16. $\frac{11}{21}$ 17. 0.488 18. $\frac{83}{150}$ 19. $\frac{24}{29}$

20. (i) $\frac{4}{11}$; (ii) $\frac{7}{11}$ 21. $\frac{5}{34}$ 22. (i) $\frac{1}{6}$; (ii) $P(X<2)=\frac{1}{2},\ P(X\le 2)=1,\ P(X\ge 2)=\frac{1}{2}$

23. $(1-\alpha)$ 24.

X :	x_1	x_2	x_3	x_4
$P(X)$:	$\frac{15}{61}$	$\frac{10}{61}$	$\frac{30}{61}$	$\frac{6}{61}$

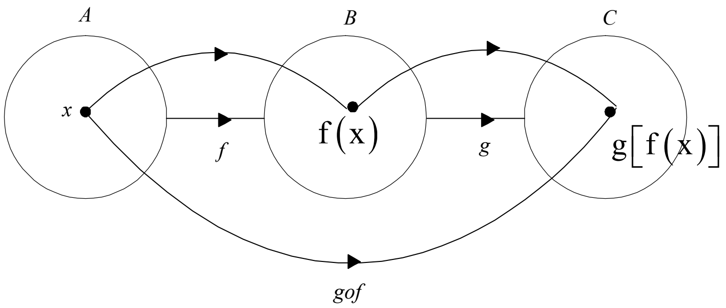
25. 1.9

इस प्रकार हम देखते हैं कि दोनों फलनों f तथा g पर एक साथ विचार करने पर A से C में परिभाषित एक नया फलन प्राप्त होता है। इस फलन को g तथा f का संयुक्त फलन कहते हैं तथा इसे (gof) से निरूपित करते हैं। इसे निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है :

परिभाषा : *यदि $f:A\to B$ तथा $g:B\to C$ दो फलन हों तो फलन $(gof):A\to C$, जो निम्न प्रकार परिभाषित हो*

$$(gof)x = g[f(x)],\quad \forall\ x\in A$$

g तथा f का संयुक्त फलन कहलाता है।



आकृति 1.01

टिप्पणी : (gof) की परिभाषा से स्पष्ट है कि (gof) तभी परिभाषित होगा जब A के प्रत्येक अवयव x के लिए $f(x), g$ के प्रान्त का अवयव हो ताकि इसका g प्रतिबिम्ब ज्ञात किया जा सके।

अतः (gof) फलन परिभाषित होने के लिए फलन f का परिसर, फलन g के प्रान्त का उपसमुच्चय होना आवश्यक है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. *यदि $A=\{1,2,3\}, B=\{4,5\}, C=\{7,8,9\}$ तथा $f:A\to B$ तथा $g:B\to C$ निम्न प्रकार परिभाषित हो :*

$$f(1)=4,\quad f(2)=4,\quad f(3)=5;\quad g(4)=8,\quad g(5)=9$$, तो $g\circ f$ ज्ञात कीजिए।

हल : *तब $(gof):A\to C$ के अर्न्तगत*

$$(gof)(1)=g[f(1)]=g(4)=8$$
$$(gof)(2)=g[f(2)]=g(4)=8$$
$$(gof)(3)=g[f(3)]=g(5)=9$$

$\therefore \qquad (gof)=\{(1,8),(2,8),(3,9)\}$

उदाहरण-2. यदि $f:R\to R, f(x)=\sin x$ तथा $g:R\to R, g(x)=x^2$ तो $g\circ f$ एवं $f\circ g$ ज्ञात कीजिए।

हलः यहाँ पर f का परिसर, g के प्रान्त का उपसमुच्चय है तथा g का परिसर, f के प्रान्त का उपसमुच्चय है। अत : (gof) तथा (fog) दोनों ही परिभाषित हैं।

$$(gof)(x)=g[f(x)]=g(\sin x)=(\sin x)^2=\sin^2 x$$

$$(fog)(x)=f[g(x)]=f(x^2)=\sin x^2$$

यहाँ $\qquad (gof)\neq(fog)$

उदाहरण-3. यदि $f: N \to Z, f(x) = 2x$

तथा $g: Z \to Q, g(x) = (x+1)/2$ हो, तो $f \circ g$ एवं $g \circ f$ ज्ञात कीजिए।

हल : $(gof)(x) = g[f(x)] = g(2x) = (2x+1)/2, \quad \forall x \in N$

इस परिस्थिति में (fog) विद्यमान नहीं है।

1.03 संयुक्त फलन के गुण (Properties of composite of functions)

(i) संयुक्त फलन द्वारा क्रमविनिमेय गुणघर्म का पालन करना आवश्यक नहीं है (The composite of functions is not necessarily commutative)

माना $f: A \to B$ तथा $g: B \to C$ दो फलन हों। तब संयुक्त फलन $(gof): A \to C$ विद्यमान एवं परिभाषित होगा क्योंकि f का परिसर, g के प्रान्त का उपसमुच्चय है। परन्तु इस स्थिति में (fog) विद्यमान नहीं होगा क्योंकि फलन g का परिसर, f के प्रान्त A का उपसमुच्चय नहीं है। अत : यदि $C \not\subset A, (fog)$ विद्यमान नहीं होगा।

यदि $C = A$ हो तो $f: A \to B$ तथा $g: B \to A$

इस स्थिति में $(gof): A \to A$ तथा $(fog): B \to B$ दोनों विद्यमान होंगे परन्तु फिर भी $(gof) \neq (fog)$ क्योंकि दोनों के प्रान्त तथा सहप्रान्त भिन्न हैं।

यदि $A = B = C$ तब $(gof): A \to A$ तथा $(fog): A \to A$ होंगें फिर भी दोनों का बराबर होना आवश्यक नहीं है।

उदाहरणार्थ : यदि $f: R \to R, f(x) = 2x$ तथा $g: R \to R, g(x) = x^2$ हो तो

$(gof): R \to R, (fog): R \to R$ परन्तु

$$(gof)(x) = g[f(x)] = g(2x) = (2x)^2 = 4x^2$$

$$(fog)(x) = f[g(x)] = f(x^2) = 2x^2$$

अत : $(fog) \neq (fog)$

टिप्पणी : विशेष परिस्थिति में ही (gof) तथा (fog) बराबर हो सकते हैं।

उदाहरणार्थः यदि $f: R \to R, f(x) = x^2$

$g: R \to R, g(x) = x^3$ हो, तो

$(gof): R \to R, (fog): R \to R$

तथा $$(gof)(x) = g[f(x)] = g(x^2) = (x^2)^3 = x^6$$

$$(fog)(x) = f[g(x)] = f(x^3) = (x^3)^2 = x^6$$

अत : $(fog) = (gof)$

परन्तु सदैव ऐसा होना आवश्यक नहीं है।

(ii) संयुक्त फलन साहचर्य गुणघर्म का पालन करते हैं (Composite of Functions is Associative)

प्रमेय 1.1 यदि तीन फलन f, g, h इस प्रकार के हों कि संयुक्त फलन $f \circ (g \circ h)$ तथा $(f \circ g) \circ h$ परिभाषित हों तो

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

प्रमाण : माना तीन फलन f, g, h निम्न प्रकार परिभाषित हैं :

$$h : A \to B,\ g : B \to C,\ f : C \to D$$

तब दोनों संयुक्त फलन $fo(goh)$ तथा $(fog)\, oh$, A से D में परिभाषित होंगे।

अर्थात् $\quad fo(goh) : A \to D$ तथा $(fog)\, oh : A \to D$

स्पष्ट है कि दोनों के प्रान्त A तथा सहप्रान्त D हैं। अत : इनकी तुल्यता के लिए हमें सिद्ध करना है कि

$$[fo(goh)](x) = [(fog)\, oh](x),\ \forall\, x \in A$$

माना कि $x \in A,\ y \in B,\ z \in C$ इस प्रकार है कि

$$h(x) = y \text{ तथा } g(y) = z$$

तब

$$[fo(goh)](x) = f[(goh)(x)]$$
$$f[g\{h(x)\}] = f[g(y)] = f(z)$$

$$\therefore \quad [fo(goh)](x) = f(z) \quad (1)$$

पुनः

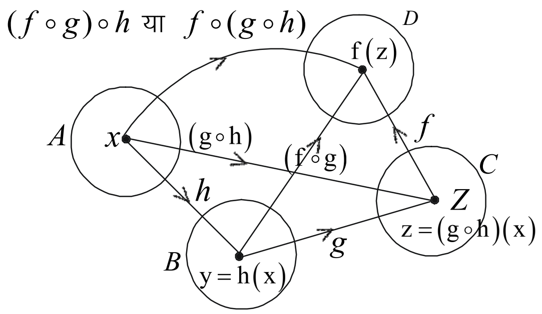
$$[(fog)\, oh](x) = (fog)[h(x)] = (fog)(y)$$
$$= f[g(y)] = f(z) \quad (2)$$

अतः (1) तथा (2) से

$$[fo(goh)](x) = [(fog)oh](x),\ \forall\, x \in A$$

$$\therefore \quad fo(goh) = (fog)oh$$

निम्न आकृति द्वारा इसे प्रदर्शित किया जा सकता है।



आकृति 1.02

(iii) दो एकैकी आच्छादक फलनों का संयुक्त फलन भी एकैकी आच्छादक होता है। (The composite of two bijections is a bijection)

प्रमेय 1.2 यदि f और g इस प्रकार के दो एकैकी आच्छादक फलन हों कि (gof) परिभाषित किया जा सके तो (gof) भी एकैकी आच्छादक होगा।

प्रमाण : माना $f : A \to B$ तथा $g : B \to C$ दो एकैकी आच्छादक फलन हों। तब संयुक्त फलन (gof) समुच्चय A से समुच्चय C में परिभाषित किया जा सकता है। अर्थात्

$$(gof) : A \to C$$

सिद्ध करना है कि (gof) एकैकी आच्छादक है।

एकैकी : माना $a_1, a_2 \in A$ इस प्रकार हैं कि

$$(gof)(a_1) = (gof)(a_2)$$

$\Rightarrow$ $$g[f(a_1)] = g[f(a_2)]$$

$\Rightarrow$ $$f(a_1) = f(a_2) \qquad [\because g \text{ एकैकी है}]$$

$\Rightarrow$ $$a_1 = a_2 \qquad [\because f \text{ एकैकी है}]$$

$\therefore$ (gof) एकैकी है।

आच्छादक : यदि $c \in C$ तब

$c \in C \Rightarrow \exists\, b \in B$ इस प्रकार है कि $g(b) = c$ [$\because g$ आच्छादक है]

पुन : $b \in B \Rightarrow \exists\, a \in A$ इस प्रकार है कि $f(a) = b$ [$\because f$ आच्छादक है।]

इस प्रकार $c \in C \Rightarrow \exists\, a \in A$ इस प्रकार है कि

$$(gof)(a) = g[f(a)] = g(b) = c$$

अर्थात् C का प्रत्येक अवयव A के किसी न किसी अवयव का प्रतिबिम्ब है दूसरे शब्दों में C के प्रत्येक अवयव का पूर्व–प्रतिबिम्ब A में विद्यमान है। अत : (gof) आच्छादक है।

अत : (gof) एकैकी आच्छादक फलन है।

प्रमेय 1.3 यदि $f : A \to B$ हो तो $foI_A = I_B of = f$, जहां I_A तथा I_B समुच्चय A तथा B में परिभाषित तत्समक फलन है। अर्थात् किसी फलन को तत्समक फलन से संयुक्त करने पर वही फलन प्राप्त होता है।

प्रमाण : $\because$ $I_A : A \to A$ तथा $f : A \to B$ $\qquad \therefore$ $(foI_A) : A \to B$

माना $x \in A$ तब

$$(foI_A)(x) = f[I_A(x)] = f(x) \qquad [\because I_A(x) = x, \forall\, x \in A]$$

$\therefore$ $$foI_A = f \qquad (1)$$

पुन : $f : A \to B$ तथा $I_B : B \to B$ $\qquad \therefore$ $(I_B of) : A \to B$

माना $z \in A$ तथा $f(x) = y$, जहाँ $y \in B$

$\therefore$ $$(I_B of)(x) = I_B[f(x)] = I_B(y) = y \qquad [\because I_B(y) = y, \forall y \in B]$$

$$= f(x) \qquad (2)$$

(1) व (2) से $\qquad (I_B of) = f = (f \circ I_A)$.

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-4. यदि $f : R \to R, f(x) = x^3$ तथा $g : R \to R, g(x) = 3x - 1$ तब $(gof)(x)$ तथा $(fog)(x)$ का मान ज्ञात कीजिए। यह भी सिद्ध कीजिए कि $fog \neq gof$.

हल : स्पष्टत : $(gof) : R \to R$ तथा $(fog) : R \to R$

$$(gof)(x) = g[f(x)] = g(x^3) = 3x^3 - 1$$

पुन : $$(fog)(x) = f[g(x)] = f(3x-1) = (3x-1)^3$$

$\because$ $$(3x^3 - 1) \neq (3x-1)^3$$

$\therefore$ $$(gof) \neq (fog)$$

उदाहरण-5. यदि $f:R\to R, f(x)=x^2+2$ तथा $g:R\to R, g(x)=\frac{x}{x-1}$ हो, तो (gof) तथा (fog) ज्ञात कीजिए।

हल : स्पष्टत : $(gof):R\to R$ तथा $(fog):R\to R$ दोनों ही विद्यमान हैं।

माना $x\in R$

तब $\quad (gof)(x) = g[f(x)] = g(x^2+2) = \frac{x^2+2}{x^2+2-1} = \frac{x^2+2}{x^2+1}$

तथा $\quad (fog)(x)=f[g(x)]=f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+2=\frac{x^2+2(x-1)^2}{(x-1)^2}$

उदाहरण-6. निम्न तीन फलनों के लिए साहचर्य गुणधर्म का सत्यापन कीजिए :

$$f:N\to Z_0, f(x)=2x; g:\ Z_0\to Q, g(x)=\frac{1}{x} \text{ तथा } h:Q\to R, h(x)=e^x.$$

हल : $\because \quad f:N\to Z_0, g:Z_0\to Q,\ h:Q\to R$

$\because \quad (go\,f):N\to Q$ तथा $(hog):Z_0\to R$ । अब $(hog):Z_0\to R,\ f:N\to Z_0$

$\therefore \quad (hog)of:N\to R$

तथा $h:Q\to R, (go\,f):N\to Q \ \therefore ho(go\,f):N\to R$ इस प्रकार दोनों ही फलन $(hog)of$ तथा $ho(go\,f)$ समुच्चय N से R में परिभाषित हैं। अब हमें दिखाना है कि

$$[(hog)of](x)=[ho(go\,f)](x),\quad \forall\ x\in N$$

अब $\quad [(hog)of](x)=(hog[f(x)])=(hog)(2x)=h[g(2x)]=h\left(\frac{1}{2x}\right)=e^{1/2x} \quad (1)$

तथा $\quad [ho(go\,f)](x)=h[(go\,f)(x)]=h[g(f(x))]$

$$=h[g(2x)]=h\left(\frac{1}{2x}\right)=e^{1/2x} \quad (2)$$

(1) तथा (2) से हम देखते हैं कि

$$[(hog)o\,f](x)=[ho(go\,f)](x).$$

अत: फलन f,g,h की साहचर्यता सत्यापित होती है।

प्रश्नमाला 1.1

1. यदि $f:R\to R$ तथा $g:R\to R$ दो फलन निम्न प्रकार से परिभाषित हो तो $(fog)(x)$ तथा $(gof)(x)$ ज्ञात कीजिए

   (i) $f(x)=2x+3,\ g(x)=x^2+5$ (ii) $f(x)=x^2+8,\ g(x)=3x^3+1$

   (iii) $f(x)=x,\ g(x)=|x|$ (iv) $f(x)=x^2+2x+3, g(x)=3x-4.$

2. यदि $A=\{a,b,c\},\ B=\{u,v,w\}$

   तथा $f:A\to B$ तथा $g:B\to A$ निम्न प्रकार परिभाषित हो

   $$f=\{(a,v),(b,u),(c,w)\}\ ;\ g=\{(u,b),(v,a),(w,c)\}$$

   तो (fog) तथा (gof) ज्ञात कीजिए।

3. यदि $f: R^+ \to R^+$ तथा $g: R^+ \to R^+$ निम्न प्रकार परिभाषित हो

$$f(x) = x^2 \text{ तथा } g(x) = \sqrt{x}$$

तो gof तथा fog ज्ञात कीजिए। क्या ये तुल्य फलन है?

4. यदि $f: R \to R$ तथा $g: R \to R$ दो ऐसे फलन हैं कि $f(x) = 3x + 4$ तथा $g(x) = \frac{1}{3}(x-4)$ तो $(fog)(x)$ तथा $(gof)(x)$ ज्ञात कीजिए तथा $(gog)(1)$ का मान भी ज्ञात कीजिए।

5. यदि f, g, h तीन फलन R से R पर इस प्रकार परिभाषित है कि $f(x) = x^2$, $g(x) = \cos x$ एवं $h(x) = 2x + 3$ तो $\{ho\,(gof)\}\sqrt{2\pi}$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. यदि f तथा g निम्न प्रकार परिभाषित हो तो $(gof)(x)$ ज्ञात कीजिए

(i) $f: R \to R, f(x) = 2x + x^{-2}$ $\qquad g: R \to R, g(x) = x^4 + 2x + 4.$

7. यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $f: R \to R$, $f(x) = x^2 + 3x + 1$

$g: R \to R, g(x) = 2x - 3$ तब ज्ञात कीजिए:

(i) $(fog)(x)$ (ii) $(gof)(x)$ (iii) $(fof)(x)$ (iv) $(gog)(x)$.

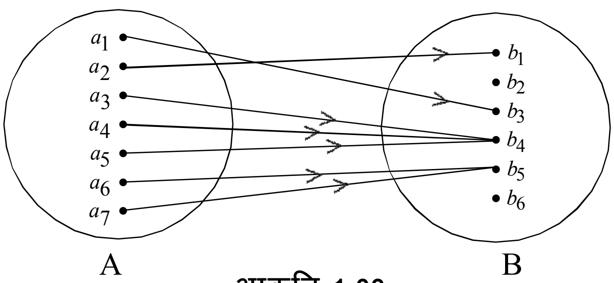
1.04 प्रतिलोम फलन (Inverse function)

(a) एक अवयव का प्रतिलोम (Inverse of an element)

माना कि A और B दो समुच्चय हैं तथा f, A से B में परिभाषित कोई फलन है। अर्थात् $f: A \to B$ हम देख चुके हैं कि यदि f के अन्तर्गत A का कोई अवयव 'a', B के अवयव 'b' से सम्बद्ध है तो b को a का f -प्रतिबिम्ब कहा जाता है तथा इसे $b = f(a)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। अवयव 'a' को फलन f के अन्तर्गत 'b' का पूर्व–प्रतिबिम्ब या प्रतिलोम कहा जाता है तथा इसे $a = f^{-1}(b)$ से व्यक्त किया जाता है।

किसी फलन के अन्तर्गत किसी अवयव का प्रतिलोम एक अवयव हो सकता है, एक से अधिक अवयव हो सकते हैं या कोई भी अवयव नहीं हो सकता है। वास्तव में यह सब फलन के एकैकी, बहु–एकैकी, आच्छादक अथवा अन्तर्क्षेपी होने पर निर्भर करता है।

यदि फलन f को निम्न आकृति द्वारा परिभाषित किया जाए।



आकृति 1.03

तो हम देखते हैं कि $\quad f^{-1}(b_1) = a_2,$

$$f^{-1}(b_2) = \phi,\ f^{-1}(b_3) = a_1,$$

$$f^{-1}(b_4) = \{a_3, a_4, a_5\},\ f^{-1}(b_5) = \{a_6, a_7\},$$

$$f^{-1}(b_6) = \phi.$$

उदाहरणार्थ : यदि $A=\{-1,1,-2,2,3\}, B=\{1,4,6,9\}$ तथा $f:A\to B,\ f(x)=x^2$ द्वारा परिभाषित हो, तो

$$f^{-1}(1)=\{-1,1\},\ f^{-1}(4)=\{-2,2\},\ f^{-1}(6)=\phi \text{ तथा } f^{-1}(9)=\{3\}.$$

उदाहरणार्थ : यदि $f:C\to C,\ f(x)=x^2-1$ हो तो $f^{-1}(-5)$ तथा $f^{-1}(8)$ ज्ञात कीजिए।

हल : माना $f^{-1}(-5)=x$ तब $f(x)=-5$

$\Rightarrow$ $x^2-1=-5 \Rightarrow x^2 \quad 4 \Rightarrow x=\sqrt{-4}$

$\Rightarrow$ $x=\pm 2i$. दोनों ही C में है।

पुन : माना $f^{-1}(8)=x$ तब $f(x)=8.$

$\Rightarrow$ $x^2-1=8 \Rightarrow x^2=9,\ x=\pm 3$ दोनों ही C में हैं।

अत : $f^{-1}(8)=\{-3,3\}$

अर्थात् $f^{-1}(-5)=\{2i,-2i\}$ तथा $f^{-1}(8)=\{-3,3\}$.

(a) प्रतिलोम फलन (Inverse function)

माना A तथा B दो समुच्चय हैं तथा $f:A\to B$ एक फलन है। यदि किसी नियम के अन्तर्गत हम B के अवयवों को A में उनके पूर्व–प्रतिबिम्ब से सम्बद्ध करें तो हम पायेंगे कि B में कुछ अवयव ऐसे होंगें जो A के किसी भी अवयव से सम्बद्ध नहीं है। यह तब होगा जब आच्छादक नहीं है। इसलिए यदि B के सभी अवयवों को A के किसी न किसी अवयव से सम्बद्ध होना है तो f एक आच्छादक फलन होना चाहिये। इसी प्रकार f यदि एक बहु–एकी फलन है तब इस नियम के अनुसार B के कुछ अवयव A के एक से अधिक अवयवों से सम्बद्ध होंगें। अत : B का एक अवयव A के एक और केवल एक अवयव से तभी सम्बद्ध होगा यदि f एक एकैकी फलन हो।

इस प्रकार हम देखते हैं कि यदि $f:A\to B$ एक एकैकी आच्छादक फलन है तब हम B से A में एक नया फलन परिभाषित कर सकते हैं जिसके अन्तर्गत B का प्रत्येक अवयव y, A में अपने पूर्व–प्रतिबिम्ब $f^{-1}(y)$ से सम्बद्ध हो। इस फलन को f का प्रतिलोम फलन कहते हैं तथा इसे f^{-1} द्वारा व्यक्त किया जाता है।

परिभाषा : यदि $f:A\to B$ एक एकैकी आच्छादक फलन हो तो f का प्रतिलोम फलन f^{-1}, B से A में परिभाषित होने वाला वह फलन है जिसके अन्तर्गत प्रत्येक $b\in B$, एक अद्वितीय अवयव $a\in A$ से सम्बद्ध है जहां $f(a)=b$.

अत : $f^{-1}:B\to A,\ f^{-1}(b)=a \Leftrightarrow f(a)=b$

क्रमित युग्मों के रूप में इसे $f^{-1}:\{(b,a)|(a,b)\in f\}$ से निरूपित करते हैं।

टिप्पणी : किसी फलन f का प्रतिलोम फलन f^{-1} तभी परिभाषित होगा जब f एकैकी आच्छादक है।

1.05 प्रतिलोम फलन का प्रान्त एवं परिसर (Domain and range of inverse function)

परिभाषा से स्पष्ट है कि

f^{-1} का प्रान्त $= f$ का परिसर

तथा f^{-1} का परिसर $= f$ का प्रांत

उदाहरणार्थ : यदि $A=\{1,2,3,4\},\ B=\{2,5,10,17\}$ तथा $f(x)=x^2+1$ हो तो

$$f(1)=2,\ f(2)=5,\ f(3)=10,\ f(4)=17$$

$\therefore$ $f=\{(1,2),(2,5),(3,10),(4,17)\}$

स्पष्टत : f एकैकी आच्छादक है। अत : इसका प्रतिलोम फलन $f^{-1}:B\to A$ विद्यमान होगा तथा

$$f^{-1}=\{(2,1),(5,2),(10,3),(17,4)\}.$$

उदाहरणार्थ : माना $f: R \to R, f(x) = 3x+4$, तब यह आसानी से सिद्ध किया जा सकता है कि f एकैकी आच्छादक है।
अतः $f^{-1}: R \to R$ विद्यमान होगा।
माना $x \in R$ (f का प्रान्त) तथा $y \in R$ (f का सहप्रान्त)

माना $\quad f(x) = y, \quad$ अत : $x \quad f^{1} \quad y$

अब $\quad f(x) = y \Rightarrow 3x+4 = y \Rightarrow x = \dfrac{y-4}{3}$

$$\Rightarrow \quad f^{-1}(y) = \frac{y-4}{3}$$

अत : $f^{-1}: R \to R, f^{-1}(x) = \dfrac{x-4}{3}$ से परिभाषित होगा।

1.06 प्रतिलोम फलन के गुणधर्म (Properties of inverse functions)

प्रमेय 1.4 एकैकी आच्छादक फलन का प्रतिलोम अद्वितीय होता है (The inverse of a bijection is unique).
प्रमाण : माना $f: A \to B$ एक एकैकी आच्छादक फलन है तो सिद्ध करना है कि f का एक और केवल एक प्रतिलोम विद्यमान होगा।

यदि संभव हो तो माना $\quad g: B \to A$ तथा $h: B \to A, f$ के दो प्रतिलोम फलन है। माना y, B का कोई अवयव है।

माना $\quad g(y) = x_1$ तथा $h(y) = x_2$

अब $\quad g \quad y \quad x_1 \quad \Rightarrow \quad f \quad x_1 \quad y \qquad [\because g, f$ का प्रतिलोम फलन है]

तथा $\quad h(y) = x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) = y \qquad [\because h, f$ का प्रतिलोम फलन है]

$\therefore \quad f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 \qquad [\because f$ एकैकी है]

अर्थात् $\quad g(y) = h(y), \quad \forall \quad y \in B$

अत : $\quad g = h$

अर्थात् f का प्रतिलोम अद्वितीय है।

प्रमेय 1.5 यदि $f: A \to B$ एकैकी आच्छादक फलन हो तथा $f^{-1}: B \to A, f$ का प्रतिलोम फलन हो तो $fof^{-1} = I_B$ तथा $f^{-1}of = I_A$, जहाँ I_A तथा I_B क्रमश : A तथा B के तत्समक फलन है।

प्रमाण : $\quad f: A \to B \quad$ तथा $\quad f^{-1}: B \to A$

$\therefore \quad (fof^{-1}): B \to B \quad$ तथा $\quad (f^{-1}of): A \to A$

अब प्रत्येक $a \in A$ के लिए एक अद्वितीय $b \in B$ है।

जहाँ $\quad f(a) = b$ या $f^{-1}(b) = a$

$$\therefore \quad (fof^{-1})(b) = f\left[f^{-1}(b)\right] = f(a) = b$$

$$\therefore \quad (fof^{-1})(b) = b, \quad \forall \, b \in B$$

$$\therefore \quad fof^{-1} = I_B$$

इसी प्रकार $\quad (fof^{-1})(a) = f^{-1}[f(a)] = f^{-1}(b) = a$

$$\therefore \quad (fof^{-1})(a) = a, \quad \forall \, a \in A$$

$$\therefore \quad f^{-1}of = I_A .$$

प्रमेय 1.6 एकैकी आच्छादक फलन का प्रतिलोम भी एकैकी आच्छादक होता है (The inverse of a bijection is also a bijection).

प्रमाण : माना $f : A \rightarrow B$ एक एकैकी आच्छादक फलन है तथा $g : B \rightarrow A, f$ का प्रतिलोम फलन है। तो सिद्ध करना है कि g भी एकैकी आच्छादक होगा।

माना कि $a_1, a_2 \in A;\ b_1, b_2 \in B$ ऐसे अवयव है कि

$g(b_1) = a_1$ अर्थात् $f(a_1) = b_1$ [$\because g, f$ का प्रतिलोम फलन है]

तथा $g(b_2) = a_2$ अर्थात् $f(a_2) = b_2$ [$\because g, f$ का प्रतिलोम फलन है]

अब $g(b_1) = g(b_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

$\Rightarrow f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow b_1 = b_2$

$\therefore g$ एकैकी है।

पुन : $a \in A \Rightarrow \exists\, b \in B$ जिसके लिए $f(a) = b$

अब $f(a) = b \Rightarrow g(b) = a$

$\therefore$ $a \in A \Rightarrow \exists\, b \in B$ इस प्रकार कि $g(b) = a$

$\therefore g$ आच्छादक है।

अत : प्रतिलोम फलन g भी एकैकी आच्छादक है।

प्रमेय 1.7 यदि फलन f और g दो ऐसे एकैकी आच्छादक फलन है कि संयुक्त फलन gof परिभाषित हो तो gof का प्रतिलोम फलन विद्यमान होगा तथा

$$(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$$

प्रमाण : माना $f : A \rightarrow B$ तथा $g : B \rightarrow C$ दो एकैकी आच्छादक फलन हैं। दिया गया है कि $(gof) : A \rightarrow C$ परिभाषित है। अतः प्रमेय 1.2 के अनुसार gof भी एकैकी आच्छादक होगा। अतः संयुक्त फलन gof का प्रतिलोम फलन विद्यमान होगा तथा

$$(gof)^{-1} : C \rightarrow A$$

सिद्ध करना है कि $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

अब, $f : A \rightarrow B$ एकैकी आच्छादक है। $\Rightarrow$ $f^{-1} : B \rightarrow A$ विद्यमान है।

पुनः $g : B \rightarrow C$ एकैकी आच्छादक है। $\Rightarrow$ $g^{-1} : C \rightarrow B$ विद्यमान है।

$\therefore$ $(f^{-1}og^{-1}) : C \rightarrow A$ विद्यमान है।

इस प्रकार $(gof)^{-1}$ तथा $(f^{-1}og^{-1})$ के प्रान्त तथा सहप्रान्त समान है।

माना $a \in A, b \in B, c \in C$ ऐसे अवयव हैं कि

$$f(a) = b \quad \text{तथा} \quad g(b) = c$$

$\therefore$ $(gof)(a) = g[f(a)] = g(b) = c$

$\Rightarrow$ $(gof)^{-1}(c) = a$ (1)

पुन : $f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$ (2)

$g(b) = c \Rightarrow g^{-1}(c) = b$ (3)

$\therefore$ $(f^{-1}og^{-1})(c) = f^{-1}\left[g^{-1}(c)\right] = f^{-1}(b)$ [(3) से]

$= a$ [(2) से] (4)

अत : (1) तथा (4) से C के किसी अवयव x के लिए

$$(gof)^{-1}(x) = \left(f^{-1}og^{-1}\right)(x)$$

इससे यह सिद्ध होता है कि

$$(gof)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-7. यदि $f : R \to R, f(x) = x^2 + 5x + 9$ हो, तो $f^{-1}(8)$ तथा $f^{-1}(9)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि $f^{-1}(8) = x \Rightarrow f(x) = 8$

$\Rightarrow$ $x^2 + 5x + 9 = 8 \Rightarrow x^2 + 5x + 1 = 0$

$\Rightarrow$ $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-4}}{2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$

$\therefore$ $f^{-1}(8) = \left\{\frac{1}{2}\left(-5+\sqrt{21}\right), \frac{1}{2}\left(-5-\sqrt{21}\right)\right\}$

पुन : माना कि $f^{-1}(9) = x \quad \Rightarrow \quad f(x) = 9$

$\Rightarrow$ $x^2 + 5x + 9 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 0,\ x = -5$

$\therefore$ $f^{-1}(9) = \{0, -5\}.$

उदाहरण-8. यदि $f : R \to R, f(x) = x^2 + 1$ हो, तो $f^{-1}(-5)$ तथा $f^{-1}(26)$ ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि $f^{-1}(-5) = x$ तब $f(x) = -5$

$\Rightarrow$ $x^2 + 1 = -5 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -6 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-6}$

अब $\sqrt{-6}$ कोई वास्तविक संख्या नहीं है।

$\therefore$ $\pm\sqrt{-6} \notin R$ $\quad\quad \therefore$ $f^{-1}(-5) = \phi$

पुन :माना $f^{-1}(26) = x$ तब $f(x) = 26$

$\Rightarrow$ $x^2 + 1 = 26 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$

$\therefore$ $f^{-1}(26) = \{-5, 5\}$

उदाहरण-9. यदि $f : R \to R, f(x) = x^3 + 2$ हो तो सिद्ध कीजिए कि f एकैकी आच्छादक है। f का प्रतिलोम फलन भी ज्ञात कीजिए।

हल : माना $x_1, x_2 \in R$ तब $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow x_1^3 + 2 = x_2^3 + 2 \quad \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \quad \Rightarrow x_1 = x_2$$

अत : f एकैकी है।

पुन : माना $y \in R$ तब $\exists$ $(y-2)^{1/3} \in R$ इस प्रकार है कि

$$f\left[(y-2)^{1/3}\right] = (y-2) + 2 = y$$

सहप्रान्त के प्रत्येक अवयव का प्रान्त में पूर्व–प्रतिबिम्ब विद्यमान है। अत : फलन आच्छादक है।
अत : f एकैकी आच्छादक फलन है।

क्योंकि f एकैकी आच्छादक फलन है तो $f^{-1}: R \to R$ निम्न प्रकार परिभाषित होगा

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y$$

परन्तु $\quad f(x) = x^3 + 2 \qquad \Rightarrow \qquad x^3 + 2 = y$

$$\Rightarrow \qquad x = (y-2)^{1/3}$$

$\Rightarrow \quad f^{-1}(y) = (y-2)^{1/3} \qquad \Rightarrow \qquad f^{-1}(x) = (x-2)^{1/3}$

अत : $\quad f^{-1}: R \to R, f^{-1}(x) = (x-2)^{1/3}$.

उदाहरण-10. यदि $f:Q \quad Q, f \quad x \quad 2x$ तथा $g:Q \quad Q$, $g(x) = x+2$ हो तो निम्न का सत्यापन कीजिए

$$(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$$

हल : चूंकि f व g दो रैखिक फलन हैं अत : f तथा g एकैकी आच्छादक फलन है। अत : इनके प्रतिलोम f^{-1} तथा g^{-1} विद्यमान है तथा

$$f^{-1} = Q \to Q, \quad f^{-1}(x) = \frac{x}{2}, \qquad \forall\, x \in Q \tag{1}$$

$$g^{-1} = Q \to Q, \quad g^{-1}(x) = x - 2 \quad \forall\, x \in Q \tag{2}$$

हम जानते हैं कि दो एकैकी आच्छादक फलनों का संयुक्त फलन भी एकैकी आच्छादक होता है। अत : $gof \; : Q \quad Q$ भी एकैकी आच्छादक है तथा इसका प्रतिलोम फलन विद्यमान है एवं

$$(gof)^{-1} : Q \to Q \qquad \because \quad (gof)(x) = g[f(x)] = g(2x) = 2x + 2$$

$\therefore$

$$(gof)^{-1}(x) = (x-2)/2 \tag{3}$$

पुन : $\quad (f^{-1}og^{-1}) : Q \to Q$

तथा $\quad (f^{-1}og^{-1})(x) = f^{-1}\left[g^{-1}(x)\right] = f^{-1}(x-2)$ [(2) से]

$= (x-2)/2$ [(1) से (4)]

(3) तथा (4) से $\qquad gof \;\; ^{1} \; x \quad f \; ^{1}og \; ^{1} \; x \;, \quad x \quad Q$

$\therefore \qquad (gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$.

प्रश्नमाला 1.2

1. यदि $A = \{1,2,3,4\}, B = \{a,b,c\}$ हो तो A से B में चार एकैकी आच्छादक फलन परिभाषित कीजिए तथा उनके प्रतिलोम फलन भी ज्ञात कीजिए।
2. यदि $f: R \to R, f(x) = x^3 - 3$ हो तो सिद्ध कीजिए कि f^{-1} विद्यमान होगा तथा f^{-1} का सूत्र भी ज्ञात कीजिए और $f^{-1}(24)$ तथा $f^{-1}(5)$ के मान ज्ञात कीजिए।
3. यदि $f: R \to R$ निम्न प्रकार परिभाषित है :

   $(i)\;\; f(x) = 2x - 3 \qquad\qquad (ii)\;\; f(x) = x^3 + 5.$

   तो सिद्ध कीजिए कि दोनों स्थितियों में f एकैकी आच्छादक है और f^{-1} भी ज्ञात कीजिए।
4. यदि $A = \{1,2,3,4\}, B = \{3,5,7,9\}, C = \{7,23,47,79\}$ तथा $f: A \to B,\; f(x) = 2x+1, g: B \to C, g(x) = x^2 - 2$ हो, तो $(gof)^{-1}$ और $f^{-1}og^{-1}$ को क्रमित युग्मों के रूप में लिखिये।

5. यदि $f: R \to R, f(x) = ax + b, a \neq 0$ से परिभाषित हो तो सिद्ध कीजिए कि f एकैकी आच्छादक फलन है। f^{-1} का सूत्र भी ज्ञात कीजिए।

6. यदि $f: R \to R, f(x) = \cos(x+2)$ हो, तो कि क्या f^{-1} विद्यमान है?

7. f^{-1} ज्ञात कीजिए (यदि विद्यमान हो) जबकि $f: A \to B$, जहाँ

(i) $A = \{0, -1, -3, 2\}, B = \{-9, -3, 0, 6\}, f(x) = 3x.$

(ii) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, B = \{0, 1, 9, 25, 49, 81\}, f(x) = x^2.$

(iii) $A = B = R,\ f(x) = x^3.$

1.07 द्विआधारी संक्रिया (Binary operation)

माना S एक अरिक्त समुच्चय है। $S \times S$ से S में परिभाषित किसी फलन को S में एक द्विआधारी संक्रिया कहते हैं। अर्थात् समुच्चय S में परिभाषित कोई द्विआधारी संक्रिया एक ऐसा नियम है जिसके आधार पर S के अवयवों के प्रत्येक क्रमित युग्म (a, b) के लिए S का एक अद्वितीय अवयव प्राप्त किया जा सकता है। सामान्यत : द्विआधारी संक्रिया को $, o$ अथवा $\oplus$ चिह्नों से निरूपित किया जाता है। संक्रिया के अन्तर्गत $(a, b) \in S \times S$ से सम्बद्ध होने वाले अवयव को $a * b$ से व्यक्त करते हैं।

परिभाषा : किसी समुच्चय S पर परिभाषित कोई द्विआधारी संक्रिया $*$ एक ऐसा नियम है जिसके आधार पर S के किन्हीं दो अवयवों के लिए S का ही एक अद्वितीय अवयव प्राप्त किया जा सके।

अर्थात् $\qquad a \in S, b \in S \ \Rightarrow \ a * b \in S, \ \forall a, b \in S$

उदाहरणार्थ 1. पूर्णांकों का योग $(+)$, व्यवकलन $(-)$ और गुणन $(\times)$ पूर्णांकों के समुच्चय Z में द्विआधारी संक्रियाएँ हैं जो Z के किन्हीं दो अवयवों a, b को क्रमश : Z के अद्वितीय अवयव $(a+b), (a-b)$ तथा ab से सम्बद्ध करती है।

2. किसी समुच्चय S के घात समुच्चय (Power set), $P(S)$ में समुच्चयों का संघ $(\cup)$ तथा सर्वनिष्ठ $(\cap)$ द्विआधारी संक्रियाएं हैं क्योंकि

$$A \in P(S),\ B \in P(S) \Rightarrow A \cup B \in P(S) \text{ तथा } A \cap B \in P(S)$$

3. परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q में *, जो निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$a \quad b \quad \frac{ab}{2}, \qquad a, b \quad Q$$

Q में एक द्विआधारी संक्रिया है क्योंकि $a \in Q, b \in Q \Rightarrow ab/2 \in Q$

4. वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में $*$, जहां $*$ निम्न प्रकार परिभाषित हो :

$$a * b = a + b - ab, \qquad \forall\ a, b \in R$$

R में एक द्विआधारी संक्रिया है। क्योंकि

$$a \in R,\ b \in R \Rightarrow (a + b - ab) \in R$$

5. प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N में योग तथा गुणन एक द्विआधारी संक्रिया है क्योंकि

$$a \in N,\ b \in N \Rightarrow (a+b) \in N,\ \forall\ a, b \in N$$
$$a \in N,\ b \in N \Rightarrow (a \cdot b) \in N,\ \forall\ a, b \in N$$

परन्तु N में व्यवकलन तथा विभाजन द्विआधारी संक्रिया नहीं है।

6. विभाजन, किसी भी समुच्चय Z, Q, R, C, N में एक द्विआधारी संक्रिया नहीं है परन्तु यह Q_0, R_0 तथा C_0 पर द्विआधारी संक्रिया है।

7. माना S, A में परिभाषित सभी फलनों का समुच्चय हो तो "संयुक्त फलन" S में एक द्विआधारी संक्रिया है क्योंकि

$$f, g \in S \Rightarrow f: A \to A,\ g: A \to A$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

$\Rightarrow \qquad (gof): A \to A$

1.08 द्विआधारी संक्रिया के प्रकार (Types of binary operations)

(i) क्रमविनिमेयता (Commutativity)

माना S एक अरिक्त समुच्चय है जिसमें एक द्विआधारी संक्रिया $*$ परिभाषित है। यदि $a, b \in S$ तब हम जानते हैं कि $(a,b) \neq (b,a)$ जब तक $a = b$ न हो। अत : यह आवश्यक नहीं है कि $*$ के अन्तर्गत (a,b) तथा (b,a) के प्रतिबिम्ब समान हो। दूसरे शब्दों में यह सदैव आवश्यक नहीं है कि

$$a*b = b*a, \qquad \forall\, a,b, \in S$$

यदि $a*b = b*a,\ \forall\, a,b, \in S$ तब S में $*$ संक्रिया **क्रमविनिमेय संक्रिया** कहलाती है।

परिभाषा : किसी समुच्चय S में परिभाषित कोई द्विआधारी संक्रिया एक क्रमविनिमेय संक्रिया कहलाती है यदि $a*b = b*a,\ \forall\, a,b, \in S.$

उदाहरणार्थ 1. वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में योग तथा गुणन क्रमविनिमेय संक्रियाएँ हैं परन्तु व्यवकलन क्रमविनिमेय नहीं है।

2. किसी समुच्चय S के घात समुच्चय $P(S)$ में समुच्चयों का संघ $(\cup)$ तथा सर्वनिष्ठ $(\cap)$ क्रमविनिमेय संक्रियाएँ है परन्तु समुच्चयों का अन्तर क्रमविनिमेय नहीं है।

(ii) साहचर्यता (Associativity)

माना कि किसी अरिक्त समुच्चय में कोई द्विआधारी संक्रिया $*$ परिभाषित है। माना $a,b,c, \in S$. यदि हम $a*b*c$ पर विचार करें तो हम देखते हैं कि चूंकि द्विआधारी संक्रिया S के किन्हीं दो अवयवों के लिए ही परिभाषित है परन्तु यहाँ S के तीन अवयव विद्यमान हैं।

अत : हमें $a*(b*c)$ अथवा $(a*b)*c$ पर विचार करना चाहिए। यह आवश्यक नहीं कि

$a*(b*c) = (a*b)*c,\ \forall\ a, b, c \in S$ सदैव सत्य हो। यदि $a*(b*c) = (a*b)*c, \forall\, a,b,c \in S$ तब संक्रिया $*$ को साहचर्य संक्रिया कहते हैं।

परिभाषा : किसी समुच्चय S में परिभाषित संक्रिया $*$ साहचर्य संक्रिया कहलाती है यदि $a \quad b \quad c \qquad a \quad b \quad c, \quad a,b,c \quad S.$

उदाहरणार्थ 1. पूर्णांकों के समुच्चय Z में योग तथा गुणन की संक्रियाएँ साहचर्य हैं परन्तु व्यवकलन की नहीं क्योंकि

$$a \quad b \quad c \qquad a \quad b \quad c, \qquad a,b,c \quad Z$$

$$a \quad b \ c \qquad a \ b \quad c, \qquad \forall\, a,b,c \in Z$$

परन्तु $\qquad a-(b-c) \neq (a-b)-c$

2. किसी समुच्चय S के घात समुच्चय $P(S)$ में समुच्चयों का संघ तथा सर्वनिष्ठ साहचर्य संक्रियाएँ हैं क्योंकि किन्ही $A, B, C \in P(S)$ के लिए

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

तथा $\qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$

3. यदि A कोई अरिक्त समुच्चय हो तथा S, A में परिभाषित सभी फलनों का समुच्चय हो तब S में परिभाषित संक्रिया "संयुक्त फलन" एक साहचर्य संक्रिया है क्योंकि

$$(fog)\, oh = fo(goh), \forall\ f, g, h \in S.$$

(iii) द्विआधारी संक्रिया का तत्समक अवयव (Identity element for a binary operation)

माना कि $*$, समुच्चय S में एक द्विआधारी संक्रिया है। यदि S में एक ऐसा अवयव e विद्यमान है कि

$$a \quad e \quad e \quad a \quad a, \forall\, a \in S,$$

तो अवयव e को S में $*$ संक्रिया के लिए तत्समक अवयव कहते हैं।

उदाहरणार्थ 1. पूर्णांकों के समुच्चय Z में 0 और 1 क्रमश : योग एवं गुणन संक्रियाओं के तत्समक अवयव हैं क्योंकि $a \in Z$ के लिए $\quad 0+a=a+0=a$

तथा $\quad 1\cdot a = a\cdot 1 = a$

2. प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N में योग संक्रिया के लिए तत्समक अवयव विद्यमान नहीं है परन्तु गुणन संक्रिया के लिए 1 तत्समक अवयव है।

3. घात समुच्चय $P(S)$ में S एवं ϕ क्रमश : सर्वनिष्ठ एवं संघ संक्रियाओं के तत्समक अवयव है क्योंकि प्रत्येक $A \in P(S)$ के लिए

$$A \cap S = S \cap A = A \qquad \text{तथा} \qquad A \cup \phi = \phi \cup A = A.$$

4. परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q में एक द्विआधारी संक्रिया $*$ निम्न प्रकार परिभाषित की गई है :

$$a*b=\frac{ab}{2},\ \forall\ a,b\in Q$$

इस प्रक्रिया के लिए $2 \in Q$ तत्समक अवयव है क्योंकि प्रत्येक $a \in Q$ के लिए

$$2*a=\frac{2\cdot a}{2}=a \quad \text{तथा} \quad a*2=\frac{a\cdot 2}{2}=a.$$

प्रमेय 1.8 यदि किसी समुच्चय में एक द्विआधारी संक्रिया का तत्समक अवयव विद्यमान हो तो वह अद्वितीय होता है।

प्रमाण : यदि संभव हो तो माना कि समुच्चय S में संक्रिया $*$ के लिए e तथा e' दो तत्समक अवयव विद्यमान हैं।

$$e*e'=e'=e'*e \qquad [\because e, S \text{ में तत्समक है तथा } e'\in S] \qquad (1)$$

पुन : $$e'*e'=e=e*e' \qquad [\because e', S \text{ में तत्समक है तथा } e\in S] \qquad (2)$$

(1) तथा (2) से $\qquad e=e'$

अत : किसी संक्रिया का तत्समक अवयव, यदि विद्यमान हो, तो अद्वितीय होता है।

(iv) प्रतिलोम अवयव (Inverse element)

माना कि $*$, समुच्चय S में एक द्विआधारी संक्रिया है और e इसका तत्समक अवयव है। माना $a \in S$. यदि समुच्चय S में कोई ऐसा अवयव b विद्यमान हो कि

$$a*b=b*a=e$$

तब b को a का प्रतिलोम अवयव कहते हैं तथा इसे a^{-1} से निरूपित करते हैं।

यदि किसी अवयव a का प्रतिलोम अवयव S में विद्यमान हो तो a, व्युत्क्रमणीय अवयव (Invertible element) कहलाता है। अत :

$$a \in S \text{ व्युत्क्रमणीय है} \quad \Leftrightarrow \quad a^{-1}\in S$$

टिप्पणी– माना कि समुच्चय S में $*$ द्विआधारी संक्रिया के लिए e तत्समक अवयव है तब $e*e=e*e=e$. अर्थात् यदि किसी समुच्चय में किसी संक्रिया के लिए तत्समक अवयव विद्यमान हो तो वह व्युत्क्रमणीय होता है तथा तत्समक अवयव का प्रतिलोम तत्समक अवयव ही होता है।

उदाहरणार्थ 1. पूर्णांकों के समुच्चय Z में, प्रत्येक पूर्णांक a के लिए $(-a)\in Z$, योग संक्रिया के लिए प्रतिलोम अवयव है क्योंकि

$a+(-a)=(-a)+a=0$ (तत्समक)

अत : Z का प्रत्येक अवयव योग संक्रिया के लिए व्युत्क्रमणीय है।

2. परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q में प्रत्येक अशून्य संख्या गुणन संक्रिया के लिए व्युत्क्रमणीय है तथा

$$a\in Q\ (a\neq 0) \Rightarrow a^{-1}=1/a \quad \text{क्योंकि} \quad a\cdot(1/a)=(1/a)\cdot a=1$$

3. घनात्मक परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q^+ में एक द्विआधारी संक्रिया निम्न प्रकार परिभाषित की गई है :

$$a*b=ab/2, \qquad \forall\ a,b\in Q^+$$

हम देख चुके हैं कि इस संक्रिया का तत्समक अवयव 2 है। इस संक्रिया के सापेक्ष $a \in Q^+$ का प्रतिलोम $(4/a) \in Q^+$ है क्योंकि

$$\frac{4}{a} * a = \frac{(4/a)\times a}{2} = 2 \text{ (तत्समक) तथा } \qquad a * \frac{4}{a} = \frac{a \times (4/a)}{2} = 2 \text{ (तत्समक)}$$

प्रमेय 1.9 एक साहचर्य संक्रिया के सापेक्ष किसी व्युत्क्रमणीय अवयव का प्रतिलोम अद्वितीय होता है।

प्रमाण – माना कि $*$, समुच्चय S में एक साहचर्य द्विआधारी संक्रिया है जिसका तत्समक अवयव e है। माना कि a, S का एक व्युत्क्रमणीय अवयव है। यदि संभव हो तो माना कि S में b तथा c, a के दो प्रतिलोम अवयव है।

अब $\qquad b*(a*c) = b*e = b \qquad [\because c = a^{-1}]$

तथा $\qquad (b*a)*c = e*c = c \qquad [\because b = a^{-1}]$

परन्तु साहचर्य गुणधर्म से $\qquad b*(a*c) = (b*a)*c \quad$ अत : $\quad b = c$

अर्थात् प्रत्येक व्युत्क्रमणीय अवयव का प्रतिलोम अद्वितीय होता है।

1.09 माड्यूलो पद्धति में योग एवं गुणन की संक्रियाएं (Addition and multiplication operations in modulo system)

यदि a तथा b ऐसे पूर्णांक हो कि $(a-b)$ एक धनात्मक पूर्णांक m से विभाज्य हो तो इसे $a \equiv b$ (मॉड m) संकेत से व्यक्त करते है तथा "a सर्वांगसम b माड्यूलों m" या (a is congruent to b modulo m) पढ़ते हैं।

अत : $\qquad a \equiv b$ (मॉड m) $\quad \Leftrightarrow \quad m \mid (a-b)$

उदाहरणार्थ $\qquad 18 \equiv 6$ (मॉड 2) $\qquad \because 18-6=12, 2$ से विभाज्य है

$\qquad -14 \equiv 6$ (मॉड 4) $\qquad \because -14-6=-20, 4$ से विभाज्य है।

पुन : यदि m एक धनात्मक पूर्णांक है तथा a, b दो पूर्णांक हो तो विभाजन फलन विधि (Division algorithm) से अन्य दो पूर्णांक r, q ऐसे विद्यमान होंगें कि

$$a+b = mq + r, \quad 0 \le r < m$$

तब r को a और b के योग माड्यूलों m (Addition modulo m) का समशेष कहते हैं तथा इसे संकेत के रूप में $a+b = r \pmod m$ या $a +_m b = r$ से व्यक्त करते हैं।

अत : $\qquad a +_m b = \begin{cases} a+b, & \text{यदि } a+b < m \\ r, & \text{यदि } a+b \ge m \end{cases}$, जहाँ $r, a+b$ में m का भाग देने पर प्राप्त ऋणेत्तर शेषफल है।

उदाहरणार्थ $\qquad 2 +_4 3 = 1 \qquad [\because 2+3=5=1\times 4+1]$

$\qquad -10 +_4 3 = 1 \qquad [\because -10+3=-7=-2\times 4+1]$

इसी प्रकार यदि m एक धन पूर्णांक है तब किन्हीं दो पूर्णांकों a, b के लिए यदि

$$a \cdot b = mq + r, \qquad 0 \le r < m$$

तो r को a और b के गुणन माड्यूलों m (Multiplication modulo m) का समशेष कहते हैं। इसे संकेत रूप में $a \cdot b = r$ (मॉड m) या $a \times_m b = r$ से व्यक्त करते हैं।

अत : $\qquad a \times_m b = \begin{cases} ab, & \text{यदि } ab < m \\ r, & \text{यदि } ab \ge m \end{cases}$, जहाँ $r, a\,b$ में m का भाग देने पर प्राप्त ऋणेत्तर शेषफल है।

उदाहरणार्थ $\qquad 5 \times_4 3 = 3 \qquad [\because 15 = 4\times 3+3]$

$\qquad 5 \times_3 6 = 0 \qquad [\because 5\times 6 = 30 = 10\times 3+0]$

1.10 परिमित समूह के लिए संक्रिया सारणी (Composition table for a finite set)

यदि दिया गया समुच्चय परिमित (finite) हो तो उस पर परिभाषित किसी द्विआधारी संक्रिया के लिए एक सारणी तैयार की जा सकती है जिसे संक्रिया सारणी (Composition table) कहते हैं। सारणी बनाने की विधि निम्न उदाहरणों से स्पष्ट हो जाएगी।

उदाहरणार्थ 1. $S=\{(1,\omega,\omega^2);\ x\}$ जहां ω, इकाई का काल्पनिक घनमूल है।

$\times$	1	ω	ω^2
1	1	ω	ω^2
ω	ω	ω^2	1
ω^2	ω^2	1	ω

2. $S=\{(0,1,2,3);\ +_4\}$

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

इस प्रकार प्राप्त संक्रिया सारणी से हमें निम्न परिणाम ज्ञात होते हैं :

(i) यदि सारणी मुख्य विकर्ण के सापेक्ष सममित है तो परिभाषित संक्रिया उस समुच्चय में क्रमविनिमेय होती है।

(ii) यदि a_j से प्रारंभ होने वाली पंक्ति सबसे उपरी पंक्ति से संपाती है तथा a_j से प्रारंभ होने वाला स्तंभ सबसे बाई और के स्तम्भ से संपाती है तब a_j, समुच्चय S में संक्रिया का तत्समक अवयव है।

(iii) समुच्चय का कोई अवयव व्युत्क्रमणीय होगा यदि सारणी में उसके संगत पंक्ति तथा स्तम्भ में तत्समक अवयव स्थित हो।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-11. वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में $*$ संक्रिया निम्नानुसार परिभाषित है

$$a*b=a+b-ab,\quad \forall\ a,b\in R \text{ तथा } a\neq 1$$

(i) $*$ की क्रमविनिमेयता तथा साहचर्यता की जांच कीजिए।

(ii) $*$ का तत्समक अवयव, यदि विद्यमान हो, ज्ञात कीजिए।

(iii) $*$ के सापेक्ष R के व्युत्क्रमणीय अवयवों को ज्ञात कीजिए।

हल : (i) यदि $a,b\in R$ हो तो परिभाषानुसार

$$a*b=a+b-ab=b+a-b\cdot a \qquad \text{(संख्याओं के योग तथा गुणन की क्रमविनिमेयता से)}$$
$$=b*a$$

$\therefore$ $*$ एक क्रमविनिमेय संक्रिया है।

पुन : $(a*b)*c=(a+b-ab)*c$

$$=(a+b-ab)+c-(a+b-ab)\cdot c$$
$$=a+b-ab+c-ac-bc+abc$$
$$=a+b+c-bc-ca-ab+abc \qquad (1)$$

तथा $a*(b*c)=a*(b+c-bc)$

$$=a+(b+c-bc)-a\cdot(b+c-bc)$$
$$=a+b+c-bc-ca-ab+abc \qquad (2)$$

(1) तथा (2) से स्पष्ट है कि $(a*b)*c=a*(b*c)$

$\therefore$ $*$ एक साहचर्य संक्रिया है।

(ii) यदि संभव हो तो माना $*$ का तत्समक अवयव e हो तब किसी $a\in R$ के लिए,

$$a*e=a \quad \text{(तत्समक की परिभाषा के अनुसार)}$$

$\Rightarrow \quad a+e-ae=a \quad \Rightarrow \quad e(1-a)=0$

$\Rightarrow \quad e=0\in R$ $\quad [\because a\neq 1]$

$*$ का तत्समक अवयव 0 है।

(iii) माना $a\in R$ यदि संभव हो तो माना कि a का प्रतिलोम अवयव x है,
तब परिभाषा के अनुसार

$a*x=0$ (तत्समक)

$\Rightarrow \quad a+x-ax=0 \quad \Rightarrow \quad x(a-1)=a$

$\Rightarrow \quad x=\dfrac{a}{a-1}\in R, \quad \because a\neq 1$

$\therefore \quad a\in R\,(a\neq 1)$ व्युत्क्रमणीय है।

उदाहरण-12. यदि $S=\{(a,b)|a,b\in R,\ a\neq 0\}$ तथा S में एक संक्रिया $*$ निम्न प्रकार परिभाषित हो : $(a,b)*(c,d)=(ac,bc+d)$ तब

(i) $*$ की क्रमविनिमेयता तथा साहचर्यता की जांच कीजिए।

(ii) $*$ का तत्समक अवयव, यदि विद्यमान हो, ज्ञात कीजिए।

(iii) $*$ के सापेक्ष S के व्युत्क्रमणीय अवयवों को ज्ञात कीजिए तथा व्युत्क्रमणीय अवयव का प्रतिलोम अवयव ज्ञात कीजिए।

हल : (i) माना $(a,b),(c,d)\in S$

तब $(a,b)*(c,d)=(ac,bc+d)$ तथा $(c,d)*(a,b)=(ca,da+b)$

इस प्रकार $\quad (a,b)*(c,d)\neq(c,d)*(a,b)$

$\therefore$ संक्रिया $*$ क्रमविनिमेय नहीं है।

पुन : माना $(a,b),(c,d),(e,f)\in S$

अब $\quad [(a,b)*(c,d)]*(e,f)=(ac,bc+d)*(e,f)$

$=(ace,(bc+d)e+f)=(ace,bce+de+f) \quad (1)$

तथा $\quad (a,b)*[(c,d)*(e,f)]=(a,b)*(ce,de+f)$
$=(ace,bce+de+f)$

$\therefore$ (1) व (2) से $\quad [(a,b)*(c,d)]*(e,f)=(a,b)*[(c,d)*(e,f)] \quad (2)$

अत : $*$ एक सहचारी संक्रिया है।

(ii) माना S में तत्समक अवयव (x,y) हो, तब $(a,b)\in S$ के लिए

$(a,b)*(x,y)=(a,b)$ [तत्समक की परिभाषा से]

$\Rightarrow \quad (ax,bx+y)=(a,b)$

$\Rightarrow \quad ax=a$ तथा $bx+y=b$

अब $\quad ax=a \quad\Rightarrow\quad x=1$ $\quad [\because a\neq 0]$

तथा $\quad bx+y=b \quad\Rightarrow\quad b+y=b \quad [\because x=1]$

$\Rightarrow \quad y=0$

अत : $\quad (x,y)=(1,0)\in S$

$\therefore$ S का तत्समक अवयव $(1,0)$ है

क्योंकि $(a,b)*(1,0)=(a,b)$ तथा $(1,0)*(a,b)=(a,b)$.

(iii) माना $(a,b)\in S$ और (a,b) का प्रतिलोम अवयव (x,y) हो तब प्रतिलोम की परिभाषा के अनुसार

$$(a,b)*(x,y)=(1,0) \quad [\text{तत्समक}]$$

$$\Rightarrow \quad (ax, bx+y)=(1,0)$$

$$\Rightarrow \quad ax=1,\ bx+y=0$$

$$ax=1,\ \Rightarrow \quad x=(1/a) \quad (a\neq 0)$$

तथा $bx+y=0 \Rightarrow y=(-b/a)$ $(a\neq 0)$

अत: (a,b) का प्रतिलोम $(1/a,-b/a)$ है।

उदाहरण-13. यदि $S=\{A,B,C,D\}$ जहाँ $A=\phi, B=\{a,b\}$ $C=\{a,c\}, D=\{a,b,c\}$ सिद्ध कीजिए कि समुच्चयों का संघ $\bigcup, S$ में एक द्विआधारी संक्रिया है परन्तु समुच्चयों का सर्वनिष्ठ $\bigcap, S$ में द्विआधारी संक्रिया नहीं है।

हल: हम देखते हैं कि

$$A\cup B=\phi\cup\{a,b\}=\{a,b\}=B,\ A\cup C=C, A\cup D=D$$

$$B\cup C=\{a,b\}\cup\{a,c\}=\{a,b,c\}=D$$

$$B\cup D=\{a,b\}\cup\{a,b,c\}=\{a,b,c\}=D,\ C\cup D=D$$

इस प्रकार में $\cup, S$ एक द्विआधारी संक्रिया है पुन : $B\cap C=\{a,b\}\cap\{a,c\}=\{a\}\notin S$ अत : $\cap, S$ में द्विआधारी संक्रिया नहीं है।

प्रश्नमाला 1.3

1. कारण सहित बताइए कि $*$ की निम्न परिभाषाओं में से कौनसी उनके सम्मुख दिए गए समुच्चय में एक द्विआधारी संक्रिया है और कौन सी नहीं
   (i) $a*b=a, N$ में
   (ii) $a*b=a+b-3, N$ में
   (iii) $a*b=a+3b, N$ में
   (iv) $a*b=a/b, Q$ में
   (v) $a*b=a-b, R$ में।
2. निम्न में से प्रत्येक के लिए ज्ञात कीजिए कि संक्रिया $*$ क्रमविनिमेय तथा साहचर्य है या नहीं
   (i) N में $*$ जहां $a*b=2^{ab}$
   (ii) N में $*$ जहां $a*b=a+b+a^2b$
   (iii) Z में $*$ जहां $a*b=a-b$
   (iv) Q में $*$ जहां $a*b=ab+1$
   (v) R में $*$ जहां $a*b=a+b-7$
3. यदि पूर्णांकों के समुच्चय Z में एक संक्रिया $*, a*b=a+b+1, \forall a,b\in Z$ द्वारा परिभाषित हो तो सिद्ध कीजिए कि $*$, क्रमविनिमेय तथा साहचर्य है। इसका तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए। किसी पूर्णांक का प्रतिलोम भी ज्ञात कीजिए।
4. समुच्चय $R-\{1\}$ पर एक द्विआधारी संक्रिया निम्न प्रकार परिभाषित है :
   $$a*b=a+b-ab,\quad \forall\, a,b\in R-\{1\}$$
   सिद्ध कीजिए कि $*$ क्रमविनिमेय तथा सहचार्य है। तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए तथा किसी अवयव a का प्रतिलोम भी ज्ञात कीजिए।
5. समुच्चय R_0 में चार फलन निम्न प्रकार परिभाषित है :
   $$f_1(x)=x,\ f_2(x)=-x,\ f_3(x)=1/x,\ f_4(x)=-1/x$$
   'फलनों का संयुक्त' संक्रिया के लिए f_1, f_2, f_3, f_4 की संक्रिया सारणी बनाइए। तत्समक अवयव तथा प्रत्येक अवयव का प्रतिलोम भी ज्ञात कीजिए।

विविध प्रश्नमाला–1

1. यदि $f:R\to R, f(x)=2x-3;\ g:R\to R, g(x)=x^3+5$ हो तब $(fog)^{-1}(x)$ का मान होगा

(क) $\left(\frac{x+7}{2}\right)^{1/3}$ (ख) $\left(x-\frac{7}{2}\right)^{1/3}$ (ग) $\left(\frac{x-2}{7}\right)^{1/3}$ (घ) $\left(\frac{x-7}{2}\right)^{1/3}$.

2. यदि $f(x)=\frac{x}{1-x}=\frac{1}{y}$, तो $f(y)$ का मान होगा

(क) x (ख) $x-1$ (ग) $x+1$ (घ) $1-x$.

3. यदि $f(x)=\frac{x-3}{x+1}$ हो तो $f\left[f\{f(x)\}\right]$ बराबर है

(क) x (ख) $1/x$ (ग) $-x$ (घ) $-1/x$.

4. यदि $f(x)=\cos(\log x)$ हो तो $f(x)\cdot f(y)-\frac{1}{2}\left[f(x/y)+f(x\cdot y)\right]$ बराबर है

(क) -1 (ख) 0 (ग) 1/2 (घ) -2.

5. यदि $f:R\to R, f(x)=2x+1$ और $g:R\to R, g(x)=x^3$, तो $(gof)^{-1}(27)$ बराबर है

(क) 2 (ख) 1 (ग) -1 (घ) 0.

6. यदि $f:R\to R$ तथा $g:R\to R$, जहां $f(x)=2x+3$ तथा $g(x)=x^2+1$ तब $(gof)(2)$ का मान है

(क) 38 (ख) 42 (ग) 46 (घ) 50.

7. यदि समुच्चय Q_0 पर एक संक्रिया $*, a*b=ab/2,\ \forall\, a,b\in Q_0$ द्वारा परिभाषित की जाये तो इस संक्रिया का तत्समक अवयव है

(क) 1 (ख) 0 (ग) 2 (घ) 3.

8. वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में एक द्विआधारी संक्रिया $a*b=1+ab,\ \forall a,b\in R$ द्वारा परिभाषित है। तब संक्रिया $*$ है

(क) क्रमविनिमेय पर साहचर्य नहीं (ख) साहचर्य पर क्रमविनिमेय नहीं
(ग) न साहचर्य न क्रमविनिमेय (घ) साहचर्य तथा क्रमविनिमेय।

9. पूर्णांकों के समुच्चय Z में व्यवकलन (subtraction) एक ऐसी संक्रिया है जो

(क) क्रमविनिमेय तथा साहचर्य है। (ख) साहचर्य परन्तु क्रमविनिमेय नहीं
(ग) न क्रमविनिमेय न साहचर्य (घ) क्रमविनिमेय पर साहचर्य नहीं।

10. पूर्णांकों के समुच्च्य Z में एक संक्रिया $*$, $a*b=a+b-ab,\ \forall a,b\in Z$ द्वारा परिभाषित है। इस संक्रिया के सापेक्ष किसी अवयव $a(\neq 1)$ का प्रतिलोम है

(क) $\frac{a}{a-1}$ (ख) $\frac{a}{1-a}$ (ग) $\frac{a-1}{a}$ (घ) $\frac{1}{a}$

11. R में परिभाषित निम्न में से कौन सी संक्रिया क्रमविनिमेय है

(क) $a*b=a^2b$ (ख) $a*b=a^b$ (ग) $a*b=a-b+ab$ (घ) $a*b=a+b+a^2b$

12. निम्न तीन फलनों के लिए संयुक्त फलन संक्रिया के लिए साहचर्य नियम का सत्यापन कीजिए

$$f:N\to Z_0,\ f(x)=2x\ ;\ g:Z_0\to Q,\ g(x)=1/x\ ;\ h:Q\to R,\ h(x)=e^x$$

13. यदि $f:R^+\to R^+$ तथा $g:R^+\to R^+$ निम्न प्रकार परिभाषित हो

$f(x)=x^2, g(x)=\sqrt{x}$ तो gof तथा fog ज्ञात कीजिए। क्या ये फलन तुल्य है?

14. यदि $f:R\to R, f(x)=\cos(x+2)$ हो तो ज्ञात कीजिए कि f प्रतिलोमी फलन है या नहीं कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

15. यदि $A=\{-1,1\}$ तथा A में परिभाषित दो फलन f तथा g है जहां $f(x)=x^2$, $g(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, तो सिद्ध कीजिए कि g^{-1} विद्यमान है जबकि f^{-1} नहीं। g^{-1} भी ज्ञात कीजिए।

16. यदि $f:R\to R$ तथा $g:R\to R$ ऐसे फलन है कि $f(x)=3x+4$ तथा $g(x)=\frac{(x-4)}{3}$ तो $(fog)(x)$ तथा $(gof)(x)$ ज्ञात कीजिए। साथ ही $(gog)(1)$ का मान भी ज्ञात कीजिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. यदि f तथा g दो फलन हों तो उनका संयुक्त फलन gof तभी परिभाषित होगा जब f का परिसर, g के प्रान्त का उपसमुच्चय हो।
2. संयुक्त फलन द्वारा क्रमविनिमेय गुणधर्म का पालन करना आवश्यक नहीं है।
3. संयुक्त फलन साहचर्य नियम का पालन करता है अर्थात् $(fog)oh = fo(goh)$
4. दो एकैकी आच्छादक फलनों का संयुक्त फलन भी एकैकी आच्छादक होता है।
5. एकैकी आच्छादक फलन का प्रतिलोम अद्वितीय होता है।
6. एकैकी आच्छादक फलन का प्रलिोम भी एकैकी आच्छादक होता है।
7. $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$
8. किसी समुच्चय A में एक द्विआधारी संक्रिया $A\times A$ से A में परिभाषित फलन है।
9. समुच्चय S में संक्रिया $*$ के लिए यदि कोई ऐसा अवयव e विद्यमान हो कि $a*e=e*a=a,\ \forall\, a\in S$ तो e को संक्रिया $*$ का तत्समक अवयव कहते हैं।
10. S में $*$ संक्रिया के लिए किसी अवयव a का प्रतिलोम S में विद्यमान ऐसा अवयव b है जहाँ $a*b=b*a=e$.
11. अवयव a के प्रतिलोम को a^{-1} से निरूपित किया जाता है।
12. किसी समुच्चय S में $*$ संक्रिया के लिए किसी अवयव का प्रतिलोम तभी होगा जब S में $*$ संक्रिया के लिए तत्समक अवयव विद्यमान हो।
13. यदि किसी समुच्चय S में $*$ संक्रिया के लिए
$$a*(b*c)=(a*b)*c,\ \forall\, a,b,c\in S$$
हो तो $*$ संक्रिया साहचर्य कहलाती है।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 1.1

1. $(i)\ (gof)(x) = 4x^2 + 12x + 14, (fog)(x) = 2x^2 + 13$ $(ii)\ (gof)(x) = 3(x^2+8)^3 + 1, (fog)(x) = 9x^6 + 6x^3 + 9$

$(iii)\ (gof)(x) = |x|, (fog)(x) = |x|$ $(iv)(gof)(x) = 3x^2 + 6x - 13, (fog)(x) = 9x^2 - 18x + 5$

2. $fog = \{(u,u),(v,v),(w,w)\};\ gof = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$

3. $(fog)(x) = x, (gof) = x,$ हाँ तुल्य फलन है।

4. $(fog)(x) = x, (gof) = x, (gog)(1) = -5/3$

5. 5

6. $(i)\ (gof)(x) = (2x + x^{-2})^4 + 2(2x + x^{-2}) + 4$

7. $(i)\ (fog)(x) = 4x^2 - 6x + 1$ $(ii)\ (gof)(x) = 2x^2 + 6x - 1$

$(iii)(fog)(x) = (x)^4 + 6x^3 + 14x^2 + 15x + 5$ $(iv)\ (gog)(x) = 4x - 9$

प्रश्नमाला 1.2

1. $f_1 = \{(1,a),(2,b),(3,c),(4,d)\};\ f_1^{-1} = \{(a,1),(b,2),(c,3),(d,4)\}$

$f_2 = \{(1,a),(2,c),(3,b),(4,d)\};\ f_2^{-1} = \{(a,1),(c,2),(b,3),(d,4)\}$

$f_3 = \{(1,d),(3,b),(2,a)(4,c)\};\ f_3^{-1} = \{(d,1),(b,3),(a,2),(c,4)\}$

$f_4 = \{(1,a),(3,a),(2,b)(4,c)\};\ f_4^{-1} = \{(a,1),(a,3),(b,2),(c,4)\}$

2. $f^{-1}(x) = (3+x)^{1/3}, f^{-1}(24) = 3, f^{-1}(5) = 2$

3. $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2}, f^{-1}(x) = (x-5)^{1/3}$

4. $(gof)^{-1} = \{(7,1),(23,2),(47,3),(79,4)\} = f^{-1}og^{-1}$

5. $f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$

6. नहीं

7. $(i)\ f^{-1} = \{(-9,-3),(-3,-1),(0,0),(6,2)\}$ $(ii)\ f^{-1}$ विद्यमान नहीं है। $(iii)\ f^{-1}(x) = x^{1/3}$

प्रश्नमाला 1.3

1. (i) हाँ (ii) नहीं (iii) हाँ (iv) नहीं (v) हाँ

1. (i) क्रमविनिमेय परन्तु सहचारी नहीं (ii) न क्रमविनिमेय न सहचारी
(iii) न क्रमविनिमेय न सहचारी (iv) क्रमविनिमेय पर सहचारी नहीं
(v) क्रमविनिमेय एवं सहचारी

3. $e = -1,\ a^{-1} = -(a+2)$

4. $e = 0,\ a^{-1} = \dfrac{a}{a-1}$

विविध प्रश्नमाला—1

1. (घ) 2. (घ) 3. (क) 4. (ख) 5. (ख) 6. (घ) 7. (ग)

8. (क) 9. (ग) 10. (क) 11. (ग) 13. $(fog)(x) = (gof)(x) = x$ 14. नहीं

15. $g^{-1}(x) = \dfrac{2}{\pi}\sin^{-1}x$

16. $(fog)(x) = (gof)(x) = x;\ (gog)(1) = \dfrac{-5}{3}$