भौतिकी

भाग 2

कक्षा 11 के लिए पाठ्यपुस्तक

माध्यमिक शिक्षा बोर्ड, राजस्थान, अजमेर

प्रकाशक

राजस्थान राज्य पाठ्यपुस्तक मण्डल, जयपुर

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

विषय-सूची

अध्याय 12

ऊष्मागतिकी

अध्याय 13

अणुगति सिद्धांत

अध्याय 14

दोलन

अध्याय 15

तरंगें

अध्याय 10

तरलों के यांत्रिकी गुण

10.1 भूमिका

इस अध्याय में हम द्रवों तथा गैसों के कुछ सामान्य भौतिक गुणों का अध्ययन करेंगे। द्रव तथा गैस प्रवाहित होती हैं अत: तरल कहलाती है। मूल रूप में इस गुण के आधार पर हम द्रवों एवं गैसों का ठोसों से विभेद करते हैं।

हमारे चारों ओर हर स्थान पर तरल हैं। पृथ्वी के ऊपर वायु का आवरण है और इसके पृष्ठ का दो-तिहाई भाग जल से आच्छादित है। जल केवल हमारे जीवन के अस्तित्व के लिए ही आवश्यक नहीं है वरन् सभी स्तनपायी जंतुओं के शरीर का अधिकांश भाग जल है। पौधों सहित सभी सजीवों में होने वाली समस्त प्रक्रियाओं में तरलों की परोक्ष भूमिका होती है। अत: तरलों के व्यवहार व गुणों को समझना बहुत महत्त्वपूर्ण है।

तरल ठोसों से कैसे भिन्न हैं? द्रवों तथा गैसों में क्या-क्या समानता है? ठोसों के विपरीत तरल की अपनी कोई निश्चित आकृति नहीं होती। ठोसों एवं द्रवों का निश्चित आयतन होता है जबकि गैस पात्र के कुल आयतन को भर देती है। पिछले अध्याय में हमने पढ़ा है कि प्रतिबल द्वारा ठोसों के आयतन में परिवर्तन किया जा सकता है। ठोस, द्रव अथवा गैस का आयतन इस पर लगने वाले प्रतिबल अथवा दाब पर निर्भर है। जब हम ठोस या द्रव के निश्चित आयतन की बात करते हैं, तब हमारा तात्पर्य वायुमंडलीय दाब के अधीन आयतन से होता है। गैसों की तुलना में बाह्य दाबांतर से ठोस या द्रव के आयतन में परिवर्तन बहुत कम होता है। दूसरे शब्दों में गैसों की अपेक्षा ठोस एवं द्रवों की संपीड्यता काफी कम होती है।

अपरूपण (विरूपण) प्रतिबल ठोस के आयतन में परिवर्तन किए बिना उसकी आकृति बदल सकता है। तरलों का मूल गुण यह है कि वह विरूपण प्रतिबल का बहुत ही न्यून प्रतिरोध करते हैं। फलत: थोड़े से विरूपण प्रतिबल लगाने से भी उनकी आकृति बदल जाती है। ठोसों की अपेक्षा तरलों का अपरूपक प्रतिबल लगभग दस लाखवाँ कम होता है।

10.2 दाब

जब एक नुकीली सुई हमारी त्वचा में दाब लगाकर रखी जाती है, तो वह त्वचा को बेध देती है। परन्तु किसी अधिक संपर्क क्षेत्र की वस्तु (जैसे चम्मच का

पिछला भाग) को उतने ही बल से दबाएँ तो हमारी त्वचा अपरिवर्तित रहती है। यदि किसी व्यक्ति की छाती पर कोई हाथी अपना पैर रख दे तो उसकी पसलियाँ टूट जाएँगी। सर्कस में यह करतब दिखाने वाले की छाती पर मजबूत लकड़ी का तख्ता रखा जाता है अतः वह इस दुर्घटना से बच जाता है। दैनिक जीवन के इस प्रकार के अनुभवों से हमें विश्वास हो जाता है कि बल के साथ-साथ जिस क्षेत्र पर वह बल आरोपित किया जाता है उसका क्षेत्रफल भी महत्त्वपूर्ण होता है। वह क्षेत्र जिस पर बल कार्य कर रहा है जितना छोटा होगा उसका प्रतिघात उतना ही अधिक होगा। यह संकल्पना 'दाब' कहलाती है।

जब कोई पिण्ड किसी शांत तरल में डूबा हुआ है, तो तरल उस पिण्ड पर बल आरोपित करता है। यह बल सदैव पिण्ड के पृष्ठों के अभिलंबवत् होता है। ऐसा इसलिए है कि, यदि बल का अवयव पिण्ड के पृष्ठ के समांतर होता है तो न्यूटन के तृतीय नियमानुसार, पिण्ड भी अपने सतह के समांतर तरल पर बल आरोपित करता है। यह बल तरल को पृष्ठ के समांतर बहने के लिए बाध्य करता है। यह संभव नहीं है, क्योंकि तरल विश्रामावस्था में है। अतः विरामावस्था में तरल द्वारा लगने वाला बल पिण्ड के संपर्क पृष्ठ के अभिलंब ही आरोपित हो सकता है। इसे चित्र 10.1(a) में दर्शाया गया है।

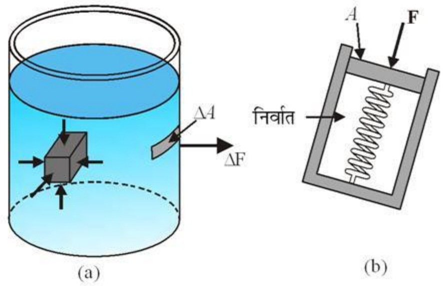
तरल द्वारा किसी बिंदु पर कार्यरत इस अभिलंब बल को मापा जा सकता है। ऐसा ही एक दाब मापक युक्ति के आदर्श रूप को चित्र 10.1(b) में दर्शाया गया है। इस युक्ति में एक निर्वातित चैम्बर होता है, जिससे एक कमानी जुड़ी होती है। इस कमानी का अंशांकन पहले से ही इसके पिस्टन पर लगे बल को मापने के लिए कर लिया जाता है। इस युक्ति को तरल के अंदर के किसी बिंदु पर रखा जाता है। पिस्टन पर तरल द्वारा आरोपित बल को कमानी द्वारा पिस्टन पर आरोपित बल से संतुलित करके तरल द्वारा पिस्टन पर आरोपित बल को माप लेते हैं। यदि तरल द्वारा A क्षेत्रफल के पिस्टन पर आरोपित अभिलंब बल का परिमाण F है, तो **औसत दाब** P_{av} को बल तथा क्षेत्रफल के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है

अतः

$$P_{av} = \frac{F}{A} \qquad (10.1)$$

सैद्धांतिक रूप में पिस्टन के क्षेत्रफल को मनमाने ढंग से छोटा किया जा सकता है। तब सीमित अर्थों में दाब को इस प्रकार परिभाषित करते हैं :

$$P = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \qquad (10.2)$$



चित्र 10.1 (a) बीकर के द्रव में डूबे पिण्ड अथवा उसकी दीवारों पर द्रव द्वारा आरोपित बल पिण्ड के पृष्ठ के हर बिंदु के लंबवत् कार्य करता है। (b) दाब मापने के लिए युक्ति का आदर्श रूप।

दाब एक अदिश राशि है। यहाँ हम आपको यह याद दिलाना चाहते हैं कि समीकरणों (10.1) तथा (10.2) के अंश में दृष्टिगोचर होने वाली राशि संबंधित क्षेत्र के अभिलंबवत् बल का अवयव है न कि (सदिश) बल। इसकी विमाएँ $[ML^{-1}T^{-2}]$ हैं। दाब का मात्रक $N\ m^{-2}$ है। फ्रांसीसी वैज्ञानिक ब्लेजी पास्कल (1623-1662) ने तरल दाब क्षेत्र में पुरोगामी अध्ययन किया। इसलिए उनके सम्मान में दाब के SI मात्रक का नाम पास्कल (pascal, प्रतीक Pa) रखा गया है। दाब का एक अन्य सामान्य मात्रक वायुमण्डल (atmosphere, प्रतीक atm) अर्थात् समुद्र तल पर वायुमंडल द्वारा आरोपित दाब, है ($1\ atm = 1.013 \times 10^5\ Pa$)।

तरलों का वर्णन करने के लिए घनत्व (ρ) एक ऐसी भौतिक राशि है जिसके विषय में चर्चा करना अनिवार्य है। V आयतन वाले m संहति के किसी तरल का घनत्व

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad (10.3)$$

घनत्व की विमाएँ $[ML^{-3}]$ हैं। इसका SI मात्रक $kg\ m^{-3}$ है। यह एक धनात्मक अदिश राशि है। द्रव असंपीड्य होते हैं, अतः किसी द्रव का घनत्व सभी दाबों पर लगभग अचर रहता है। इसके विपरित, गैसें दाब में परिवर्तन के साथ घनत्व में अत्यधिक परिवर्तन दर्शाती हैं।

4 °C (277 K) पर जल का घनत्व $1.0 \times 10^3\ kg\ m^{-3}$ है। किसी पदार्थ का आपेक्षिक घनत्व (विशिष्ट गुरुत्व) उस

पदार्थ के घनत्व तथा जल के 4 °C पर घनत्व का अनुपात होता है। यह विमाहीन धनात्मक अदिश भौतिक राशि है। उदाहरण के लिए ऐलुमिनियम का आपेक्षिक घनत्व 2.7 है। जबकि इसका घनत्व 2.7×10^3 kg m^{-3} है। सारणी 10.1 में कुछ सामान्य तरलों के घनत्व दर्शाए गए हैं।

सारणी 10.1 कुछ सामान्य तरलों के घनत्व मानक ताप तथा वायुमंडलीय दाब (STP) पर*

तरल	घनत्व ρ (kg m^{-3})
जल	1.00×10^3
समुद्र जल	1.03×10^3
पारा	13.6×10^3
ऐथिल एल्कोहॉल	0.806×10^3
संपूर्ण रक्त	1.06×10^3
वायु	1.29
ऑक्सीजन	1.43
हाइड्रोजन	9.0×10^{-2}
अंतरातारकीय आकाश	$\approx 10^{-20}$

उदाहरण 10.1 दो उर्वस्थितियाँ (फीमर) जिनमें प्रत्येक की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल 10 cm² है, 40 kg संहति के मानव शरीर के ऊपरी भाग को सँभालती हैं। उर्वस्थितियों द्वारा सहन किए जाने वाले औसत दाब का आकलन कीजिए।

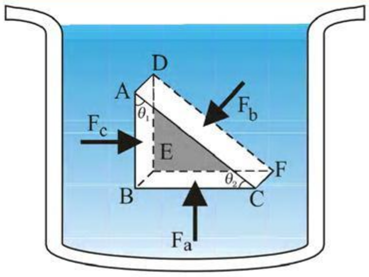
हल उर्वस्थियों की कुल अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल $A = 2 \times 10$ cm² $= 20 \times 10^{-4}$ m²। उर्वस्थियों पर कार्यरत बल F = 40 kg wt = 400 N (g = 10 m s^{-2} लेने पर)। यह बल ऊर्ध्वाधर नीचे की दिशा में कार्य करता है, अतः यह उर्वस्थियों पर अभिलंबवत् लगता है। इसीलिए औसत दाब

$$P_{av} = \frac{F}{A} = 2 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$$

10.2.1 पास्कल का नियम

फ्रांसीसी वैज्ञानिक ब्लेज पास्कल ने पाया कि यदि सभी बिंदु एक ही ऊँचाई पर हों तो विराम स्थिति के तरल के सभी बिंदुओं पर दाब समान होगा। इस सत्य को भली भाँति सरल रूप में दर्शाया जा सकता है।

* STP का अर्थ मानक ताप 0 °C तथा दाब 1 atm है।



चित्र 10.2 *पास्कल के नियम का परीक्षण। ABC-DEF विराम स्थिति के किसी तरल के अभ्यन्तर का कोई अवयव है। यह अवयव इतना छोटा है कि गुरुत्व के प्रभाव की उपेक्षा की जा सकती है, परन्तु स्पष्टता के लिए इसे प्रवर्धित दर्शाया गया है।*

चित्र 10.2 में विराम स्थिति के किसी तरल के अभ्यन्तर में कोई अवयव दर्शाया गया है। यह अवयव ABC-DEF एक समकोण प्रिज़्म के रूप में है। प्रिज़्मीय अवयव आकार में बहुत छोटा है इसलिए इसका प्रत्येक बिंदु तरल के पृष्ठ के समान गहराई पर माना जा सकता है और इसलिए प्रत्येक बिंदु पर गुरुत्व का प्रभाव समान होगा। परन्तु इस सिद्धान्त को स्पष्ट करने के लिए हमने इस अवयव को बड़ा करके दर्शाया है। इस अवयव पर आपतित बल शेष तरल के कारण है और जैसा कि ऊपर दर्शाया गया है तरल के कारण आरोपित बल पृष्ठों के अभिलंब कार्य करते हैं। अतः चित्र में दर्शाये अनुसार तरल द्वारा इस अवयव पर आरोपित दाबों P_a, P_b तथा P_c के तदनरूपी बल F_a, F_b तथा F_c क्रमशः फलकों BEFC, ADFC तथा ADEB पर अभिलंबवत् आपतित होते हैं जैसा कि चित्र 10.2 में दर्शाया गया है। फलकों BEFC, ADFC तथा ADEB को A_a, A_b तथा A_c से क्रमशः व्यक्त करते हैं। तब

$F_b \sin\theta = F_c$, $F_b \cos\theta = F_a$ (साम्यावस्था से)

$A_b \sin\theta = A_c$, $A_b \cos\theta = A_a$ (ज्यामिति से)

इस प्रकार

$$\frac{F_b}{A_b} = \frac{F_c}{A_c} = \frac{F_a}{A_a}; \quad P_b = P_c = P_a \qquad (10.4)$$

अतः विरामावस्था में द्रव के अभ्यन्तर में सभी दिशाओं में दाब समान रूप से कार्य करता है। हमें यह पुनः याद दिलाता है कि अन्य प्रकार के प्रतिबलों की भाँति ही दाब सदिश नहीं है। इसे कोई दिशा नहीं दी जा सकती। विरामावस्था में दाब, तरल के भीतर के किसी क्षेत्रफल (अथवा परिबद्ध तरल) पर अभिलंबवत् होता है चाहे क्षेत्रफल किसी भी अवस्थिति में हो।

तरल के एक अवयव की कल्पना करो जो एक समान अनुप्रस्थ काट वाले छड़ के समरूप है। यह छड़ साम्य अवस्था में है। इसके दोनों सिरों पर कार्यरत क्षैतिज बल साम्य अवस्था में होने चाहिए। अर्थात् दोनों सिरों पर समान दाब होना चाहिए। इससे सिद्ध होता है कि साम्य अवस्था में क्षैतिज तल में द्रव के सभी बिंदुओं पर समान दाब है। माना कि द्रव के विभिन्न भागों पर समान दाब नहीं है, तब द्रव पर नेट बल के कारण वह बहेगा। अत: बहाव की अनुपस्थिति में तरल में प्रत्येक स्थान पर समान दाब होना चाहिए। ज्ञातव्य है दाबांतर में वायु के बहाव के कारण पवन बहती है।

10.2.2 गहराई के साथ दाब में परिवर्तन

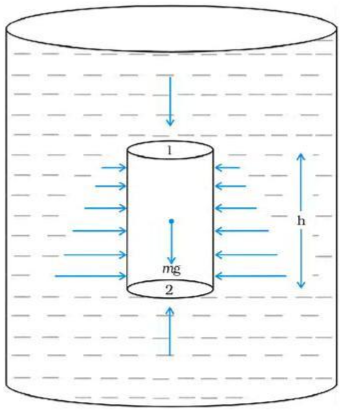
एक पात्र में द्रव की विरामावस्था पर विचार करें। चित्र 10.3 में बिंदु 1 बिंदु 2 से h ऊँचाई पर है। बिंदु 1 व 2 पर दाब क्रमश: P_1 तथा P_2 हैं। A आधार क्षेत्रफल तथा h ऊँचाई के तरल के एक बेलनाकार अवयव को लें। चूँकि तरल विरामावस्था में है अत: परिणामी क्षैतिज बल शून्य होना चाहिए। परिणामी ऊर्ध्वाधर दिशा में कार्यरत बल तरल अवयव के भार के तुल्य होना चाहिए। नीचे की ओर कार्य करने वाला ऊपरी सिरे पर तरल के दाब द्वारा बल (P_1A) तथा पैंदी पर ऊपर की ओर कार्य करने वाला बल (P_2A) है। यदि बेलन में तरल का भार mg है तो

$$(P_2 - P_1)\, A = mg \qquad (10.5)$$

अब यदि ρ तरल का घनत्व है तो उसकी संहति

$m = \rho V = \rho h A$ होगी, इसलिए

$$P_2 - P_1 = \rho g h \qquad (10.6)$$



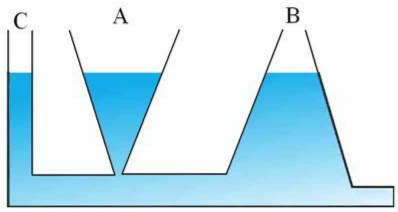
चित्र 10.3 *तरल के ऊर्ध्वाधर बेलनी स्तंभ पर दाब के द्वारा गुरुत्व का प्रभाव दिखाया गया है।*

बिन्दु 1 व 2 में दाबांतर उनके बीच ऊर्ध्वाधर दूरी h, तरल के घनत्व ρ तथा गुरुत्वीय जनित त्वरण g पर निर्भर है। यदि विचारणीय बिंदु 1 को तरल (माना पानी) के शीर्ष फलक पर स्थानांतरित कर दिया जाए जो वायुमण्डल के लिए खुला है तो P_1 को वायुमंडलीय दाब (P_a) द्वारा तथा P_2 को P से प्रतिस्थापित किया जा सकता है। तब समीकरण (10.6) से

$$P = P_a + \rho g h \qquad (10.7)$$

इस प्रकार, वायुमण्डल के लिए खुले पृष्ठ के नीचे दाब P वायुमण्डलीय दाब की अपेक्षा $\rho g h$ परिमाण से अधिक होगा। h गहराई पर स्थित किसी बिंदु पर अतिरिक्त दाब $P - P_a$ उस बिंदु पर **गेज़ दाब** कहलाता है।

निरपेक्ष (परम) दाब के समीकरण (10.7) में बेलन का क्षेत्रफल नहीं आ रहा। अत:, दाब परिकलन के लिए तरल के स्तंभ की ऊँचाई महत्त्वपूर्ण है न कि पात्र की आकृति, आधार या अनुप्रस्थ काट। समान क्षैतिज तल (समान गहराई) के सभी बिंदुओं पर द्रव का दाब समान होता है। **द्रवस्थैतिक विरोधोक्ति** के उदाहरण से इस परिणाम को भलीभांति समझा जा सकता है। A, B तथा C विभिन्न आकृतियों के पात्र लें (चित्र 10.4)। पैंदी में एक क्षैतिज पाइप द्वारा इनको जोड़ा जाता है। पानी भरने पर इन तीनों पात्रों में उसका तल समान रहता है यद्यपि इनमें पानी भिन्न-भिन्न मात्रा में होता है। यह इसलिए है कि इनकी तली पर दाब समान रहता है।



चित्र 10.4 *द्रवस्थैतिक विरोधोक्ति की व्याख्या। तीन पात्रों A, B और C में समान ऊँचाई तक जल भरा है परन्तु सभी में जल का परिमाण भिन्न-भिन्न है।*

उदाहरण 10.2 किसी झील के पृष्ठ से 10 m गहराई पर किसी तैराक पर दाब ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ $h = 10$ m तथा $\rho = 1000$ kg m^{-3}

$g = 10$ m s^{-2} लें

समीकरण (10.7) से,

$$P = P_a + \rho g h$$

$= 1.01 \times 10^5$ Pa $+ 1000$ kg m$^{-3} \times 10$ m s$^{-2} \times 10$ m

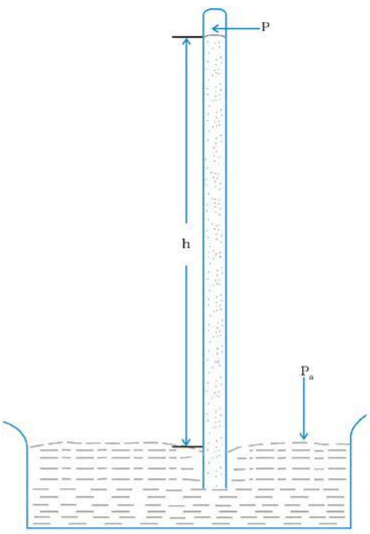
$= 2.01 \times 10^5$ Pa

≈ 2 atm

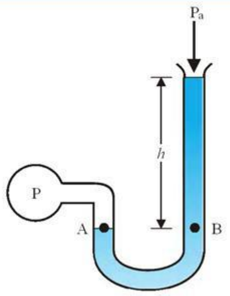
यह दाब खुले पृष्ठ के दाब की तुलना में 100% अधिक है। 1 km गहराई पर दाब में वृद्धि 100 atm होती है। पनडुब्बियों की संरचना इतने अधिक दाबों को सह सकने की क्षमता को ध्यान में रखकर की जाती है। ◀

10.2.3 वायुमण्डलीय दाब तथा गेज दाब

किसी बिंदु पर वायुमण्डलीय दाब उस बिंदु के एकांक अनुप्रस्थ काट वाले क्षेत्रफल पर उस बिंदु से वायुमण्डल के शीर्ष तक की वायु के स्तंभ के भार के बराबर होता है। समुद्र तल पर यह 1.013×10^5 Pa है (1 atm)। वायुमण्डलीय दाब की यथार्थ माप के लिए सर्वप्रथम इटली के वैज्ञानिक इवेंगलिस्टा टॉरिसेली (1608-1647) ने एक युक्ति की रचना की तथा वायुमण्डल दाब को मापा। जैसा कि चित्र 10.5 (a) में दर्शाया गया है, एक सिरे से बंद लंबी काँच की नली लेकर उसमें पारा भरा गया और फिर उसे पारे से आंशिक भरे पात्र में ऊर्ध्वाधर उलटा खड़ा किया गया। इस युक्ति को पारे का बैरोमीटर कहते हैं। नली में पारे से ऊपर का स्थान पारे की वाष्प जिसका दाब P बहुत अल्प होता है, भरा रहता है, यह दाब इतना कम होता है कि इसे नगण्य मान सकते हैं। स्तंभ के अन्दर बिंदु A पर दाब समान तल वाले बिंदु B पर दाब के तुल्य होना चाहिए।



(a) पारद वायुदाब मापी



(b) खुली-नली मैनोमीटर (दाबांतर मापी)

चित्र 10.5 दाब मापने की दो युक्तियाँ।

B पर दाब = वायुमण्डल दाब P_a

$$P_a = \rho g h \tag{10.8}$$

जहाँ ρ पारे का घनत्व तथा h नली में पारे के स्तंभ की ऊँचाई है।

प्रयोग में पाया गया कि समुद्र तल पर बैरोमीटर में पारे के स्तंभ की ऊँचाई 76 cm के लगभग होती है जो एक वायुमण्डलीय दाब (1 atm) के तुल्य है। समीकरण (10.8) में ρ का मान भरकर भी इसे प्राप्त किया जा सकता है। सामान्यत: दाब का वर्णन cm अथवा mm (पारा स्तंभ) के पदों में किया जाता है। 1 mm (Hg) दाब का तुल्यांकी दाब 1 टॉर (torr) कहलाता है (टॉरिसेली के सम्मान में)।

1 torr = 133 Pa

औषध विज्ञान तथा शरीर क्रिया विज्ञान (फ़िजिओलॉजी) में दाब के मात्रक के रूप में mm (Hg) तथा टॉर (torr) का उपयोग किया जाता है। मौसम विज्ञान में दाब का सामान्य मात्रक बार (bar) तथा मिलिबार (millibar) लिया जाता है।

1 bar = 10^5 Pa

दाबांतर को मापने के लिए खुली-नली मैनोमीटर एक लाभप्रद उपकरण है। इस युक्ति में एक U आकार की नली होती है जिसमें उपयुक्त द्रव भरा होता है अर्थात् कम दाबांतर मापने के लिए कम घनत्व का द्रव (जैसे तेल) तथा अधिक दाबांतर के लिए अधिक घनत्व का द्रव (जैसे पारा) भरा जाता है। नली का एक सिरा वायुमंडल में खुला छोड़ दिया जाता है तथा दूसरा सिरा जिस निकाय का दाब ज्ञात करना है, उससे जोड़ दिया जाता है। [देखिए चित्र 10.5 (b)]। बिंदु A पर दाब बिंदु B पर दाब के बराबर है। जिस दाब को हम सामान्यत: मापते हैं वह वास्तव में प्रमापी अथवा गेज़ दाब होता है। यह $P - P_a$ के बराबर होता है जो समीकरण (10.8) द्वारा दिया जाता है तथा मैनोमीटर की ऊँचाई h के अनुपाती होता है।

U नली में भरे द्रव के तलों में दोनों ओर समान दाब होता है। दाब तथा ताप के विस्तृत परिसर में द्रव के घनत्व में बहुत कम परिवर्तन होता है। हम प्रस्तुत विवेचन के लिए इसे स्थिर मान सकते हैं। दूसरी ओर दाब तथा ताप परिवर्तन के साथ गैसों के घनत्व में बहुत अधिक परिवर्तन परिलक्षित होता है। अतः गैसों की तुलना में विपरीत द्रवों को अधिकांश रूप से असंपीड्य माना जाता है।

उदाहरण 10.3 समुद्र तल पर वायुमंडल का घनत्व 1.29 kg/m^3 है। यह मानते हुए कि ऊँचाई के साथ घनत्व में कोई परिवर्तन नहीं होता, ज्ञात कीजिए कि वायुमंडल का विस्तार कितनी ऊँचाई तक है?

हल : हम समीकरण (10.8) का उपयोग करते हैं

ρgh = 1.29 kg m^{-3} × 9.8 m s^{-2} × h m = 1.01 × 10^5 Pa

h = 7989 m ≈ 8 km

वास्तव में, ऊँचाई के साथ वायु के घनत्व में कमी होती जाती है। ऐसा ही गुरुत्वीय त्वरण g के साथ भी होता है। वायुमण्डलीय आवरण का विस्तार घटते दाब के साथ लगभग 100 km ऊँचाई तक है। हमें यह ध्यान रखना चाहिए कि समुद्र तल पर वायुमंडलीय दाब सदैव ही 760 mm (Hg) नहीं होता। इसमें 10 mm (Hg) अथवा अधिक की कमी तूफान के आने की सूचक होती है।

उदाहरण 10.4 समुद्र के नीचे 1000 m गहराई पर (a) परम दाब कितना है? (b) गेज़ दाब कितना है? (c) इस गहराई पर पनडुब्बी की 20 cm × 20 cm क्षेत्रफल वाली खिड़की (जिसके आंतरिक भाग का दाब समुद्र तल पर वायुमण्डलीय दाब के बराबर रखा गया है) पर आरोपित बल का आकलन कीजिए। (समुद्र जल का घनत्व 1.03 × 10^3 kg m^{-3}, g = 10m s^{-2})

हल : यहाँ h = 1000 m तथा ρ = 1.03 × 10^3 kg m^{-3}

(a) समीकरण (10.7) से परम दाब

$P = P_a + \rho gh$
= 1.01 × 10^5 Pa + 1.03 × 10^3 kg m^{-3} × 10 m s^{-2} × 1000 m
= 104.01 × 10^5 Pa
≈ 104 atm

(b) गेज़ दाब = $P - P_a = \rho gh \approx P_g$

P_g = 1.03 × 10^3 kg m^{-3} × 10 m s^{-2} × 1000 m
= 103 × 10^5 Pa
≈ 103 atm

(c) पनडुब्बी के बाहर दाब $P = P_a + \rho gh$ और अंदर दाब P_a है। इसलिए खिड़की पर आपतित कुल दाब गेज़ दाब $P_g = \rho gh$ है। चूँकि खिड़की का क्षेत्रफल A = 0.04 m^2 है अतः आपतित बल

$F = P_g A$ = 103 × 10^5 Pa × 0.04 m^2 = 4.12 × 10^5 N

आर्किमिडीज का सिद्धांत

ऐसा प्रतीत होता है कि तरल में रखे किसी पिण्ड को तरल आंशिक सहारा प्रदान करता है। विराम स्थिति के किसी तरल में जब किसी पिण्ड को पूर्ण या आंशिक रूप से डुबोया जाता है तो तरल पिण्ड के सम्पर्क पृष्ठ पर दाब डालता है। पिण्ड के निचले पृष्ठ पर ऊपरी पृष्ठ की अपेक्षा दाब अधिक होता है क्योंकि तरल में दाब गहराई बढ़ने के साथ-साथ बढ़ता है। सभी बलों का परिणामी बल उपरमुखी बल है जिसे उत्प्लावन बल कहते हैं। माना कि किसी तरल में एक बेलनाकार पिण्ड को डुबोया जाता है। पिण्ड की तली पर ऊर्ध्वमुखी बल उसके शीर्ष पर लगने वाले अधोमुखी बल से अधिक है। तरल पिण्ड पर एक परिणामी बल या उत्प्लावन बल $(P_2 - P_1)A$ लगाता है। समीकरण (10.4) में हमने देखा कि $(P_2 - P_1)A = \rho ghA$। hA पिण्ड का आयतन है तथा ρhA तरल के तुल्य आयतन का भार है। $(P_2 - P_1)A = mg$ । इस प्रकार आरोपित ऊर्ध्वबल विस्थापित तरल के भार के बराबर है।

यह परिणाम पिण्ड की आकृति पर निर्भर नहीं करता है, यह सभी आकृति के पिण्डों के लिए सत्य है। बेलनाकार पिण्ड केवल सुविधा के लिए लिया गया था। यह आर्किमिडीज का सिद्धांत है। पूर्ण डूबे पिण्ड द्वारा विस्थापित तरल का आयतन उसके अपने आयतन के तुल्य होता है। यदि डूबे हुए पिण्ड का घनत्व तरल के घनत्व से अधिक है तो पिण्ड डूब जाएगा क्योंकि पिण्ड का भार ऊर्ध्वमुखी प्रणोद से अधिक होगा। यदि ठोस का घनत्व तरल से कम है वह आंशिक रूप से डूबा हुआ तैरेगा। डूबे हुए भाग के आयतन का आकलन करने के लिए माना कि पिण्ड का कुल आयतन V_s है तथा इसका अंश आयतन V_p तरल में डूबा है। तो ऊर्ध्वमुखी बल जो विस्थापित तरल के भार $\rho g V_p$ के तुल्य है, पिण्ड के भार के तुल्य होना चाहिए। $\rho_s g V_s = \rho g V_p$ अथवा $\rho_s / \rho_l = V_p / V_s$ तैरते पिण्ड का आभासी भार शून्य है।

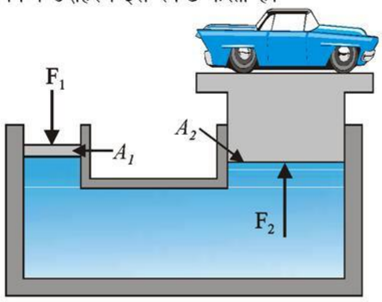
संक्षिप्त में यह सिद्धांत है 'किसी तरल में (आंशिक या पूर्ण रूप से) डूबे पिण्ड के भार में कमी पिण्ड द्वारा विस्थापित तरल के भार के तुल्य होती है।'

10.2.4 द्रव चालित मशीन

आइये अब हम देखते हैं कि पात्र में रखे तरल पर जब दाब परिवर्तन करते हैं तो क्या होता है? एक क्षैतिज बेलन पर विचार करें जिसमें पिस्टन लगा है तथा उसके विभिन्न बिंदुओं पर तीन ऊर्ध्व ट्यूब लगी हैं। ऊर्ध्व ट्यूब में द्रव स्तंभ की ऊँचाई क्षैतिज बेलन में तरल का दाब दर्शाती है। यह सभी ऊर्ध्व ट्यूबों में अनिवार्यत: समान होती है। यदि पिस्टन को धकेलते हैं तो सभी ट्यूबों में तरल का स्तर उठ जाता है, तथा पुन: यह सभी में समान हो जाता है।

यह दर्शाता है कि जब बेलन पर दाब बढ़ाया जाता है तो यह पूर्ण तरल से समान रूप में वितरित हो जाता है। हम कह सकते हैं कि ***पात्र में रखे तरल के किसी भाग पर जब बाह्य दाब आपतित होता है, तो यह बिना ह्रास के सभी दिशाओं में समान रूप से संचरित हो जाता है।*** तरल दाब के संचरण के लिए यह **"पास्कल का नियम"** है तथा दैनिक जीवन में इसके कई उपयोग हैं।

कई युक्तियाँ जैसे **द्रव चालित उत्थापक** और **द्रव चालित ब्रेक** इस नियम पर आधारित हैं। इन युक्तियों में दाब संचरण के लिए तरलों का उपयोग किया जाता है। चित्र 10.6 के अनुसार द्रव चालित उत्थापक में तरल द्वारा भरे स्थान से विलगित दो पिस्टन हैं। अनुप्रस्थ काट A_1 का छोटा पिस्टन द्रव पर सीधा बल F_1 आरोपित करता है। $P = \frac{F_1}{A_1}$ दाब पूर्ण द्रव में संचरित होता है तथा अनुप्रस्थ काट A_2 के बड़े बेलन जिसमें पिस्टन लगा है पर ऊर्ध्वमुखी बल $P \times A_2$ के रूप में प्राप्त होता है। अतएव, पिस्टन अधिक बल को संतुलित (जैसे प्लेटफॉर्म पर रखे कार या ट्रक के अधिक भार) कर सकता है $F_2 = PA_2 = \frac{F_1 A_2}{A_1}$। A_1 पर बल बदलकर प्लेटफॉर्म को ऊपर या नीचे लाया जा सकता है। इस प्रकार प्रयुक्त बल $\frac{A_2}{A_1}$ गुणक से बढ़ जाता है। यह गुणक युक्ति का **यांत्रिक लाभ** कहलाता है। निम्न उदाहरण इसे स्पष्ट करता है।



चित्र 10.6 द्रव चालित उत्थापक, भारी बोझ उठाने की एक युक्ति के कार्य करने के सिद्धांत की व्याख्या का योजनाबद्ध आरेख।

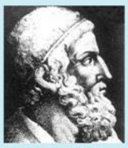
उदाहरण 10.5 भिन्न-भिन्न अनुप्रस्थ काट वाली दो पिचकारियों में (बिना सुई के) पानी भरा है और इन्हें पानी से भरी रबर नली से कसकर जोड़ दिया गया है। छोटे तथा बड़े पिस्टन के व्यास क्रमश: 1 cm तथा 3 cm हैं। (a) जब छोटे पिस्टन पर 10 N का बल लगाया जाता है तो बड़े पिस्टन पर लगे बल का आकलन कीजिए। (b) यदि छोटे पिस्टन को 6 cm अंदर धक्का दिया जाता है तो बड़ा पिस्टन कितना बाहर चलेगा?

हल : (a) चूँकि बिना ह्रास के दाब संपूर्ण द्रव में संचरित होता है,

$$F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1 = \frac{\pi (3/2 \times 10^{-2}\,\text{m})^2}{\pi (1/2 \times 10^{-2}\,\text{m})^2} \times 10\,\text{N}$$

$$= 90\ \text{N}$$

(b) पानी पूरा असंपीड्य माना जाता है। छोटे पिस्टन के अन्दर चलने से तुल्य आयतन बड़े पिस्टन द्वारा बाहर की ओर चलने को बाध्य करता है।



आर्किमिडीज (287-212 ई. पू.)
ग्रीस के दार्शनिक, गणितज्ञ, वैज्ञानिक तथा अभियंता थे। उन्होंने गुलेल की खोज की तथा घिरनियों एवं उत्तोलकों के संयोजन से भारी बोझों के संचालन के लिए एक तंत्र का आविष्कार किया। उनके अपने देश साइराक्यूज के राजा हीरो II ने आर्किमिडीज को सोने का ठोस मुकुट देकर यह कहा कि मुकुट को बिना तोड़े ही वह यह निर्धारित करें कि मुकुट शुद्ध सोने का बना है, अथवा उसमें कोई सस्ती धातु; जैसे–चाँदी मिलाई गई है। पानी से लबालब भरे टब में लेटते समय उन्होंने अपने भार में आंशिक कमी अनुभव की, जिससे उन्हें अपनी समस्या का हल मिल गया। जिसे पाकर आर्किमिडीज इतने उत्तेजित हो गए कि, दंतकथा के अनुसार, टब से बाहर निकलकर, साइराक्यूज की गलियों में "यूरेका" – यूरेका (अर्थात् "मैंने पा लिया" – "मैंने पा लिया") चिल्लाते हुए दौड़ पड़े। उस समय वह यह भी भूल गए कि उनके शरीर पर कोई वस्त्र नहीं है।

$$L_1 A_1 = L_2 A_2$$

$$L_2 = \frac{A_1}{A_2} L_1 = \frac{\pi(1/2 \times 10^{-2}\,m)^2}{\pi(3/2 \times 10^{-2}\,m)^2} \times 6 \times 10^{-2}\,m$$

$$\cong 0.67 \times 10^{-2}\,m = 0.67\,cm$$

नोट : दोनों पिस्टनों के लिए वायुमण्डलीय दाब उभयनिष्ठ है अत: इसे छोड़ दिया गया है।

उदाहरण 10.6 एक कार उत्थापक में छोटे पिस्टन जिसकी त्रिज्या 5 cm है पर F_1 बल संपीड्य वायु लगाती है। यह दाब 15 cm त्रिज्या वाले दूसरे पिस्टन पर संचरित होता है (चित्र 10.6)। यदि उठाई जाने वाली कार की संहति 1350 kg हो तो F_1 का आकलन कीजिए। इस कार्य को संपन्न करने के लिए आवश्यक दाब क्या है? ($g = 9.8\ ms^{-2}$)

हल : क्योंकि संपूर्ण तरल में दाब बिना ह्रास के संचरित होता है।

$$F_1 = \frac{A_1}{A_2} F_2 = \frac{\pi(5 \times 10^{-2}\,m)^2}{\pi(15 \times 10^{-2}\,m)^2}(1350\ N \times 9.8\ m\,s^{-2})$$

$$= 1470\ N$$

$$\approx 1.5 \times 10^3\ N$$

इस बल के संगत वायु दाब

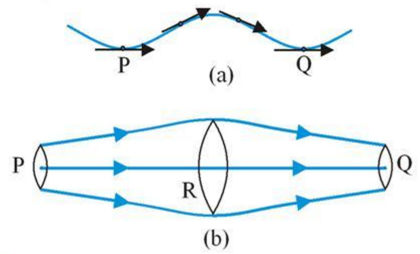
$$P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{1.5 \times 10^3\,N}{\pi(5 \times 10^{-2})^2\,m} = 1.9 \times 10^5\,Pa$$

यह वायुमण्डलीय दाब का लगभग दुगुना है।

मोटर कार में द्रव चालित ब्रेक भी इसी सिद्धांत पर कार्य करते हैं। जब हम अपने पैर से थोड़ा सा बल पैडल पर लगाते हैं तो पिस्टन मास्टर बेलन के अंदर जाता है और उत्पन्न दाब ब्रेक तेल द्वारा पिस्टन के बड़े क्षेत्रफल पर संचरित होता है। पिस्टन पर एक बड़ा बल कार्य करता है। इसके नीचे की ओर ढकेले जाने पर ब्रेक शू फैल कर ब्रेक लाइन को दबाता है। इस प्रकार पैडल पर थोड़ा सा बल पहिए पर अधिक बल मंदन उत्पन्न करता है। इस निकाय का एक प्रमुख लाभ यह है कि पैडल को दबाने से उत्पन्न दाब चारों पहियों से संलग्न बेलनों में समान रूप से संचरित होता है जिससे ब्रेकों का प्रभाव सभी पहियों पर बराबर पड़ता है।

10.3 धारारेखी प्रभाव

अब तक हमने विराम तरलों के बारे में अध्ययन किया। तरल प्रवाह के अध्ययन को तरल गतिकी कहते हैं। जब हम पानी की टोटी को धीरे से खोलते हैं तो आरंभ में पानी उर्मिहीन गति से बहता है। लेकिन जब पानी की गति बढ़ती है तो वह अपनी उर्मिहीन गति को छोड़ देता है। तरलों की गति का अध्ययन करने में हम अपना ध्यान केंद्रित करेंगे कि किसी स्थान पर किसी क्षण विशेष पर, तरल के विभिन्न कणों पर क्या हो रहा है। किसी तरल का प्रवाह **अपरिवर्ती** प्रवाह कहलाता है, यदि किसी स्थान से गुज़रने वाले तरल के प्रत्येक कण का वेग समय में अचर रहता है। इसका अर्थ यह नहीं है कि स्थान के विभिन्न बिंदुओं पर वेग समान है। जैसे-जैसे कोई विशिष्ट कण एक बिंदु से दूसरे बिंदु की ओर अग्रसर होता है, इसका वेग बदल सकता है, अर्थात् किसी दूसरे बिंदु पर कण का वेग भिन्न हो सकता है। परन्तु दूसरे बिंदु से गुज़रने पर कण ठीक वैसा ही व्यवहार करता है जैसा कि वहाँ से ठीक पहले गुजरने वाले कण ने किया। प्रत्येक कण निष्कोण पथ पर चलता है और कणों के पथ एक दूसरे को नहीं काटते।



चित्र 10.7 धारारेखाओं का अर्थ (a) किसी तरल का प्ररूपी प्रपथ (b) धारारेखी प्रभाव का क्षेत्र।

किसी तरल अपरिवर्ती प्रवाह में जिस पथ पर कण गमन करता है उसे **धारारेखा** कहते हैं। किसी बिंदु पर तरल कण का वेग सदैव ही धारारेखा के उसी बिंदु पर खींची गई स्पर्श रेखा के अनुदिश होता है जो धारारेखा प्रवाह को परिभाषित करता है। जैसा कि चित्र 10.7 (a) में दर्शाया गया है, किसी कण के पथ को लेते है। वक्र यह दर्शाता है कि तरल का कण समय के साथ किस प्रकार गति करता है। वक्र PQ तरल प्रवाह का स्थायी प्रतिचित्र है जो यह दर्शाता है कि तरल किस प्रकार धारारेखा में प्रवाहित होता है। कोई भी दो धारारेखाएँ एक दूसरे को नहीं काटतीं यदि वह ऐसा करती हैं (अर्थात् काटती हैं) तो किसी बिंदु पर तरल का प्रवाह स्थिर नहीं होता तथा एक तरल कण

किसी भी दिशा में गति करने लगेगा और प्रवाह अपरिवर्ती नहीं रहेगा। इसलिए अपरिवर्ती प्रवाह में प्रवाह का मानचित्र समय में स्थिर रहता है। हम निकटवर्ती धारारेखाओं को कैसे खींचते हैं? यदि हम प्रत्येक प्रभावित कण की धारारेखा को प्रदर्शित करने की इच्छा रखते हैं तो हम रेखाओं के सांतत्य में सिमट जाएँगे। तरल प्रवाह की दिशा में लंबवत समतलों पर विचार कीजिए अर्थात चित्र 10.7 (b) में तीन बिंदु P, R तथा Q पर। इन समतल खंडों का चुनाव इस प्रकार किया जाता है कि इनकी सीमाएँ धारारेखाओं के समान समूह द्वारा निर्धारित हो जाएँ। इसका अर्थ है कि P, R तथा Q पर दर्शाये गये लंबवत समतल पृष्ठों से प्रवाहित होने वाले तरल कणों की संख्या समान है। इस प्रकार यदि P, R, तथा Q पर तरल कणों के वेग परिमाण क्रमश: v_P, v_R तथा v_Q हैं तथा इन तलों के क्षेत्रफल क्रमश: A_P, A_R और A_Q हैं तो छोटे से समय अंतराल Δt में A_p से गुज़रने वाले तरल की संहति $\rho_P A_P v_P \Delta t$ है। इसी प्रकार A_R से होकर प्रवाहित तरल की संहति $\Delta m_R = \rho_R A_R v_R \Delta t$ और $\Delta m_Q = \rho_Q A_Q v_Q \Delta t$ होगी। सभी मामलों में तरल के बाहर निकलने की संहति उस स्थान में आने वाले तरल की संहति के बराबर होगी।

अतएव,

$$\rho_P A_P v_P \Delta t = \rho_R A_R v_R \Delta t = \rho_Q A_Q v_Q \Delta t \qquad (10.9)$$

असंपीड्य तरल के प्रवाह के लिए

$$\rho_P = \rho_R = \rho_Q$$

तब समीकरण (10.9)

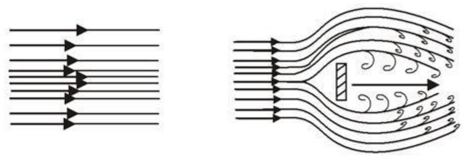
$$A_P v_P = A_R v_R = A_Q v_Q \qquad (10.10)$$

में बदल जाता है। जिसे **सांतत्य-समीकरण** कहते हैं तथा असंपीड्य तरल प्रभाव में यह संहति संरक्षण का कथन है। सामान्यत: Av = स्थिरांक (10.11)

Av आयतन अभिवाह या प्रवाह दर देता है। यह नली प्रवाह में सर्वत्र स्थिर रहता है अत: संकरे स्थानों पर जहाँ धारा रेखाएँ पास-पास हैं वहाँ वेग बढ़ जाता है तथा इसका विलोमत: चित्र 10.7b से स्पष्ट है कि $A_R > A_Q$ या $v_R < v_Q$ R से Q को प्रवाहित तरल त्वरित होता है। क्षैतिज पाइप में यह तरल दाब में परिवर्तन से संबद्ध है।

तरल के कम वेग से धारा प्रवाह प्राप्त होता है। एक सीमांत मान के पश्चात जिसे क्रांतिक वेग कहते हैं, यह धारा प्रवाह **प्रक्षुब्द्ध प्रवाह** में बदल जाता है। जब एक तेज़ प्रवाही धारा चट्टान से टकराती है तो हम देख सकते हैं कि कैसे छोटे-छोटे फेन (foam) भँवर जैसे बनते हैं जिन्हें दूध-धारा (white water rapids) कहते हैं।

चित्र 10.8 कुछ प्ररूपी प्रवाह की धारारेखाएँ दर्शायी गई हैं। उदाहरण के लिए चित्र 10.8(a) में स्तरीय प्रवाह दर्शाया गया है जहाँ तरल के विभिन्न बिंदुओं पर वेगों के परिमाण भिन्न-भिन्न हो सकते हैं, परन्तु उनकी दिशाएँ एक दूसरे से समानांतर हैं। चित्र 10.8 (b) में प्रक्षुब्ध प्रवाह आलेखित किया गया है।



(a) (b)

चित्र 10.8 (a) तरल प्रवाह की कुछ धारारेखाएँ (b) प्रवाह के लंबवत् रखी चपटी प्लेट से टकराता वायु जेट। यह प्रक्षुब्ध प्रवाह का एक उदाहरण है।

10.4 बर्नूली का सिद्धांत

तरल प्रवाह एक जटिल परिघटना है। परन्तु ऊर्जा संरक्षण का उपयोग करते हुए हम अपरिवर्ती अथवा धारा-प्रवाह के कुछ विशिष्ट गुणों को प्राप्त कर सकते हैं।

परिवर्ती अनुप्रस्थ काट के पाइप में तरल प्रवाह पर विचार कीजिए। माना कि पाइप परिवर्ती ऊँचाइयों पर है जैसा कि चित्र 10.9 में दर्शाया गया है। अब माना कि पाइप में एक असंपीड्य तरल अपरिवर्ती प्रवाह से प्रवाहित है। सांतत्य समीकरण के अनुसार इसके वेग में परिवर्तन होना चाहिए। त्वरण उत्पन्न

डेनियल बर्नूली (1700-1782)

स्विटज़रलैंड के एक वैज्ञानिक तथा गणितज्ञ थे जिन्होंने लिओनार्ड ऑयलर के साथ मिलकर गणित का फ्रेंच अकादमी पुरस्कार दस बार जीतने का कीर्तिमान स्थापित किया। उन्होंने चिकित्सा शास्त्र का भी अध्ययन किया तथा कुछ समय के लिए वे बैस्ले, स्विटज़रलैंड में शरीर रचना विज्ञान तथा वनस्पति शास्त्र के प्रोफेसर के पद पर भी रहे। उनका अत्यधिक सुविख्यात कार्य द्रवगतिकी, एक विषय जिसे उन्होंने स्वयं एकल सिद्धांत: ऊर्जा संरक्षण से विकसित किया, के क्षेत्र में है। उनके कार्यों में कैलकुलस, प्रायिकता, कंपायमान डोरी का सिद्धांत, तथा अनुप्रयुक्त गणित सम्मिलित हैं। उन्हें गणितीय भौतिकी का संस्थापक कहा जाता है।

करने के लिए एक बल की आवश्यकता है जो इसे घेरे हुए तरल से उत्पन्न होता है। भिन्न-भिन्न भागों में दाब भिन्न होना चाहिए। पाइप के दो बिंदुओं के बीच दाबांतर का संबंध वेग परिवर्तन (गति ऊर्जा परिवर्तन) तथा उन्नयन (ऊँचाई) में परिवर्तन (स्थिति ऊर्जा में परिवर्तन) दोनों में प्रदर्शित करने वाला सामान्य व्यंजक, बर्नूली का समीकरण है। इस संबंध को स्विस भौतिकविद् डेनियल बर्नूली ने विकसित किया था।

दो क्षेत्रों 1 (अर्थात् BC) तथा 2 (अर्थात् DE) क्षेत्रों में प्रवाह को लें। आरंभ में B तथा D के बीच तरल को लें। अत्यंत अल्प अंतराल Δt में यह तरल प्रवाहित होगा। माना कि B पर चाल v_1 तथा D पर v_2 हैं। तब B पर तरल $v_1\Delta t$, C की ओर प्रवाहित होगा ($v_1\Delta t$ इतना छोटा है कि हम BC का समान अनुप्रस्थ काट ले सकते हैं)। इसी समय अंतराल Δt में तरल जो आरंभ में D पर है E की ओर प्रवाहित होगा तथा $v_2\Delta t$ दूरी तय करेगा। दो क्षेत्रों के बाँधने वाले A_1, A_2 क्षेत्रफल वाले समतल फलकों पर, जैसा दिखाया गया है, दाब P_1, P_2 कार्य करते हैं। बाएँ सिरे (BC) पर तरल पर किया गया कार्य $W_1 = P_1A_1(v_1\Delta t) = P_1\Delta V$ है। क्योंकि दोनों क्षेत्रों से समान आयतन का तरल प्रवाहित होता है (सांतत्य समीकरण से) दूसरे सिरे (DE) पर तरल द्वारा किया गया कार्य $W_2 = P_2A_2(v_2\Delta t) = P_2\Delta V$ है। अथवा तरल पर किया गया कार्य $-P_2\Delta V$ है। अत: द्रव पर किया गया कुल कार्य

$$W_1 - W_2 = (P_1 - P_2)\,\Delta V \text{ है।}$$

इस कार्य का कुछ भाग तरल की गतिज ऊर्जा परिवर्तित करने में चला जाता है, तथा शेष भाग तरल की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा परिवर्तित करने में चला जाता है। यदि पाइप प्रवाहित तरल का घनत्व ρ तथा $\Delta m = \rho A_1 v_1 \Delta t = \rho\Delta V$ की संहति Δt समय में पाइप से प्रवाहित है तो गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन

$$\Delta U = \rho g \Delta V\,(h_2 - h_1)$$

गतिज ऊर्जा में परिवर्तन

$$\Delta K = \left(\frac{1}{2}\right)\rho\,\Delta V\,(v_2^2 - v_1^2)$$

तरल के इस आयतन पर हम कार्य-ऊर्जा प्रमेय (अध्याय 6) का उपयोग कर सकते हैं जिससे हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है।

$$(P_1 - P_2)\,\Delta V = \left(\frac{1}{2}\right)\rho\Delta V(v_2^2 - v_1^2) + \rho g\Delta V(h_2 - h_1)$$

प्रत्येक पद को ΔV से विभाजित करने पर

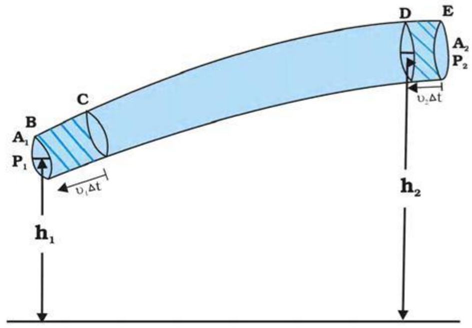
$$(P_1 - P_2) = \left(\frac{1}{2}\right)\rho\,(v_2^2 - v_1^2) + \rho g\,(h_2 - h_1)$$

उपरोक्त पदों को पुन: व्यवस्थित करने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$P_1 + \left(\frac{1}{2}\right)\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \left(\frac{1}{2}\right)\rho v_2^2 + \rho g h_2 \qquad (10.12)$$

यह **बर्नूली समीकरण** है। चूंकि पाइपलाइन की लंबाई में 1 व 2 किन्हीं दो स्थितियों को दर्शाते हैं अत: हम सामान्य रूप में व्यक्त कर सकते हैं कि

$$P + \left(\frac{1}{2}\right)\rho v^2 + \rho g h = \text{स्थिरांक} \qquad (10.13)$$



चित्र 10.9 *परिवर्ती अनुप्रस्थकाट के किसी पाइप में किसी आदर्श तरल का प्रवाह, $v_1\Delta t$ लंबाई के खंड में भरा तरल समय Δt में $v_2\Delta t$ लंबाई के खंड तक गति कर लेता है।*

दूसरे शब्दों में, बर्नूली के कथन को हम निम्न प्रकार लिख सकते हैं: "जब हम किसी धारा रेखा के अनुदिश गति करते हैं, तो दाब P प्रति एकांक आयतन गतिज ऊर्जा $\left(\frac{\rho v^2}{2}\right)$ तथा प्रति एकांक आयतन गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा (ρgh) का योग अचर रहता है।"

नोट करें कि ऊर्जा संरक्षण के नियम का उपयोग करते समय यह माना गया है कि घर्षण के कारण कोई ऊर्जा क्षति नहीं होती। परन्तु वास्तव में, जब तरल प्रवाह होता है, तो आंतरिक घर्षण के कारण कुछ ऊर्जा की हानि हो जाती है। इसकी व्युत्पत्ति तरल की विभिन्न सतहों के भिन्न-भिन्न वेगों से प्रवाह के कारण होती है। यह सतहें एक दूसरे पर घर्षण बल लगाती

हैं और परिणामस्वरूप ऊर्जा का ह्रास होता है। तरलों के इस गुण को श्यानता कहते हैं जिसकी विस्तार से व्याख्या बाद के खंड में की गई है। तरल की क्षय गतिज ऊर्जा ऊष्मा ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है। अतः बर्नूली का समीकरण शून्य श्यानता अथवा असान्य तरलों पर लागू होता है। बर्नूली प्रमेय पर एक और प्रतिबंध है कि यह असंपीड्य तरलों पर ही लागू होता है, क्योंकि तरलों की प्रत्यास्थ ऊर्जा को नहीं लिया गया है। वास्तव में इसके कई उपयोग हैं जो कम श्यानता तथा असंपीड्य तरलों की बहुत सी घटनाओं की व्याख्या कर सकते हैं। अस्थिर अथवा विक्षोभ प्रवाह में भी बर्नूली समीकरण काम नहीं आता क्योंकि इसमें वेग तथा दाब समय में लगातार अस्थिर रहते हैं।

जब तरल विरामावस्था में होता है अर्थात् प्रत्येक स्थान पर इसके कणों का वेग शून्य है, बर्नूली समीकरण निम्न प्रकार हो जाता है:

$$P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2$$

$$(P_1 - P_2) = \rho g\,(h_2 - h_1)$$

जो समीकरण (10.6) के ही समान है।

10.4.1 चाल का बहिर्वाह : टोरिसेली का नियम

बहिर्वाह शब्द का अर्थ है तरल का बहिर्गमन। टोरिसेली ने यह पता लगाया कि किसी खुली टंकी से तरल के बहिर्वाह की चाल को मुक्त रूप से गिरते पिण्ड की चाल के सूत्र के समरूप सूत्र द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है। ρ घनत्व के द्रव से भरी किसी ऐसी टंकी पर विचार कीजिए जिसमें टंकी की तली से y_1 ऊँचाई पर एक छोटा छिद्र है (देखिए चित्र 10.10)। द्रव के ऊपर, जिसका पृष्ठ y_2 ऊँचाई पर है, वायु है जिसका दाब P है। सांतत्य समीकरण (समीकरण 10.9) से

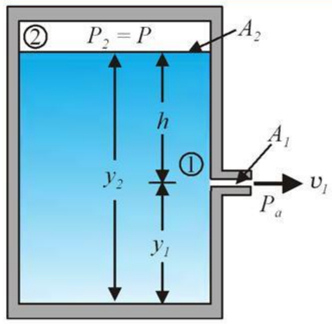
$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

यदि टंकी की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल A_2 छिद्र की अनुप्रस्थ का क्षेत्रफल A_1 की तुलना में काफी अधिक है ($A_2 >> A_1$), तब हम शीर्ष भाग पर तरल को सन्निकटतः विराम में मान सकते हैं, अर्थात् $v_2 = 0$। तब बिंदु 1 तथा 2 पर बर्नूली का समीकरण लागू करते हुए तथा यह लेते हुए कि छिद्र पर दाब P_1 वायुमण्डलीय दाब के बराबर है, अर्थात् $P_1 = P_a$, समीकरण (10.12) से हमें यह संबंध प्राप्त होता है।

$$P_a + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P + \rho g y_2$$

$y_2 - y_1 = h$ लेने पर



चित्र 10.10 टॉरिसेली नियम। पात्र के पार्श्व से बहिर्वाह की चाल v_1 बर्नूली समीकरण द्वारा प्राप्त होती है। यदि पात्र का शीर्ष भाग खुला है तथा वायुमण्डल के संपर्क में है तब $v_1 = \sqrt{2gh}$

$$v_1 = \sqrt{2g\,h + \frac{2(P-P_a)}{\rho}} \qquad (10.14)$$

जब $P >> P_a$ है तथा $2\,g\,h$ की उपेक्षा की जा सकती है, तब बहिर्वाह की चाल का निर्धारण पात्र-दाब द्वारा किया जाता है। ऐसी ही स्थिति रॉकेट-नोदन में होती है। इसके विपरीत यदि टंकी का ऊपरी भाग खुला होने के कारण वायुमण्डल के संपर्क में है तो $P = P_a$ तब

$$v_1 = \sqrt{2g\,h} \qquad (10.15)$$

यह किसी मुक्त रूप से गिरते पिण्ड की चाल है। समीकरण (10.14) को **टॉरिसेली का सिद्धांत** कहते हैं।

10.4.2 वेंटुरीमापी

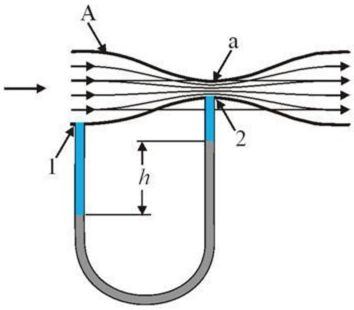
वेंटुरीमापी किसी असंपीड्य तरल में प्रवाह-वेगों को मापने की एक युक्ति है। इसमें एक चौड़े व्यास वाली नली होती है जिसके मध्य में छोटा संकीर्णन होता है जैसा (चित्र 10.11) में दर्शाया गया है। इसमें U-नली के रूप में एक मैनोमीटर, जिसकी एक भुजा चौड़ी गर्दन के बिंदु तथा दूसरी संकुचित गर्दन से जुड़ी होती है जैसा कि (चित्र 10.11) में दर्शाया गया है। मैनोमीटर में ρ_m घनत्व का द्रव भरा होता है। इस युक्ति द्वारा नली की चौड़ी गर्दन जिसका क्षेत्रफल A है, से प्रवाहित द्रव की चाल v_1 मापनी होती है। संकुचित भाग पर, समीकरण (10.10) से,

चाल $v_2 = \frac{A}{a} v_1$ । तब बर्नूली समीकरण का उपयोग करके हमें प्राप्त होता है :

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 (A/a)^2$$

जिससे

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left[\left(\frac{A}{a}\right)^2 - 1\right] \quad (10.16)$$



चित्र 10.11 वेंटुरीमापी का व्यवस्था आरेख।

यह दाबांतर U नली की संकुचित भुजा में दूसरी भुजा की तुलना में तरल के उच्चतर स्तर का कारण है। भुजाओं की ऊँचाई में अंतर h दाबांतर की माप है।

$$P_1 - P_2 = \rho_m g h = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left[\left(\frac{A}{a}\right)^2 - 1\right]$$

जिससे चौड़ी गर्दन पर तरल का वेग

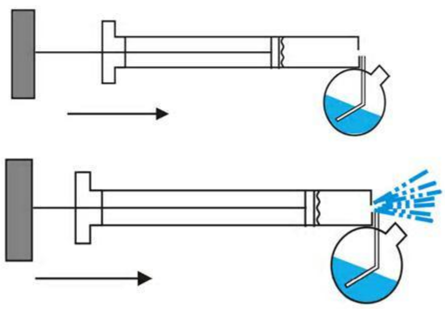
$$v_1 = \sqrt{\left(\frac{2\rho_m g h}{\rho}\right)} \left(\left(\frac{A}{a}\right)^2 - 1\right)^{-1/2} \quad (10.17)$$

इस सिद्धांत के बहुत से अनुप्रयोग हैं। मोटर वाहन अथवा स्वचालित वाहन में कार्बूरेटर में वेंटुरीवाहिका (नोज़ल) होती है जिसमें से तीव्र गति से वायु प्रवाहित होती है। संकरी गर्दन पर दाब कम होता है इसलिए पैट्रोल (गैसोलीन) भीतर की ओर चैम्बर में चूस लिया जाता है ताकि दहन के लिए वायु तथा ईंधन का सही मिश्रण प्राप्त हो सके। फिल्टर पम्प या चूषित्र, बुनसन बर्नर, कणित्र तथा स्प्रेयर (देखिए चित्र 10.12) इत्र के लिए अथवा कीटनाशकों के छिड़काव के लिए प्रयोग में लाये जाने वाले इसी सिद्धांत पर कार्य करते हैं।

उदाहरण 10.7 रक्त वेग : किसी मूर्च्छित कुत्ते की बड़ी धमनी में रक्त का प्रवाह किसी वेंटुरीमापी से होकर परिवर्तित किया जाता है। इस युक्ति के चौड़े भाग की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल धमनी की अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल, $A = 8\ mm^2$ के बराबर है। युक्ति के संकरे भाग का क्षेत्रफल $a = 4\ mm^2$ है। धमनी में दाब ह्रास 24 Pa है। धमनी रक्त के प्रवाह की चाल क्या है?

हल सारणी 10.1 से रक्त का घनत्व $1.06 \times 10^3\ kg\ m^{-3}$ लेते हैं। क्षेत्रफलों का अनुपात $\left(\frac{A}{a}\right) = 2$ है। समीकरण (10.17) का उपयोग करके

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \times 24 Pa}{1060\ kg\ m^{-3} \times (2^2 - 1)}} = 0.125\ m\ s^{-1}$$



चित्र 10.12 स्प्रेगन। पिस्टन उच्च ताप पर वायु निकालता है जिसके फलस्वरूप पात्र की गर्दन पर दाब कम हो जाता है।

10.4.3 रक्त प्रवाह और हार्ट अटैक (दिल का दौरा)

धमनी में बर्नूली सिद्धांत से रक्त प्रवाह को समझने में सहायता मिलती है। इसकी भीतरी दीवार पर प्लाक (Pluque) का जमाव होने के कारण धमनी भीतर से संकीर्ण हो जाती है। इन संकरी धमनियों से रक्त प्रवाहित कराने के लिए हृदय की गतिविधि पर अधिक बोझ पड़ जाता है। इस क्षेत्र में रक्त के प्रवाह की चाल बढ़ जाती है और भीतरी दाब घट जाता है तथा बाह्य दाब के कारण धमनी दब जाती है। हृदय इस धमनी को खोलने के लिए रक्त को धक्का देता है। जैसे ही रक्त इसे

खोलकर बाहर की ओर तीव्र गति से प्रवाहित होता है, आंतरिक दाब पुन: गिर जाता है, और धमनी पुन: दब जाती है। इससे हार्ट अटैक हो सकता है।

10.4.4 गतिक उत्थापक (लिफ्ट)

किसी पिण्ड पर गतिक उत्थापक एक बल है। जैसे निम्न के तरल में गति के कारण वायुयान के पंख पर, जलपर्णी या एक घूमती गेंद पर। कई खेल जैसे क्रिकेट, टेनिस, बेसबॉल या गोलक में हम देखते हैं कि वायु में जाती हुई बॉल अपने परवलीय पथ से हट जाती है। इस हटाव को आंशिक रूप से बर्नूली सिद्धांत से समझाया जा सकता है।

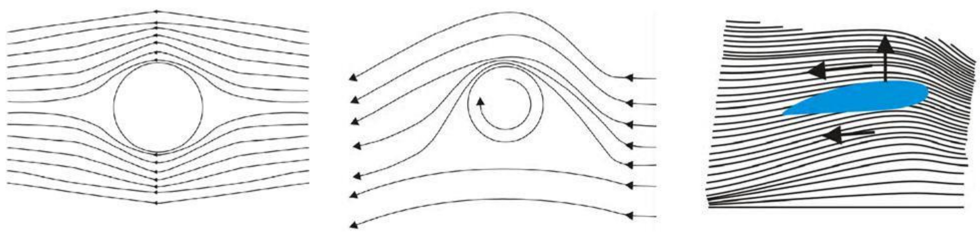
(i) **बिना घूमे गेंद का चलना** : तरल के सापेक्ष बिना घूमती गतिमान गेंद के चारों ओर चित्र 10.13(a) में धारारेखाएँ प्रदर्शित हैं। धारारेखाओं की सममिती से यह स्पष्ट है कि तरल में गेंद के ऊपर तथा नीचे संगत बिंदुओं पर उसका वेग समान है, जिससे दाबांतर शून्य होता है। अत: गेंद पर वायु कोई ऊर्ध्वमुखी अथवा अधोमुखी बल नहीं लगाती।

(ii) **घूमती हुई गेंद की चाल** : चक्रण करती हुई गेंद अपने साथ वायु को घसीटती है। यदि फलक खुरदुरा हो तो अधिक वायु घसीटी जाएगी। किसी घूमती हुई गतिमान गेंद की धारारेखाएँ [चित्र 10.13(b)] दर्शायी गई हैं। गेंद आगे की ओर चलती है तथा इसके सापेक्ष वायु पीछे की ओर चलती है। इसलिए, गेंद के ऊपर वायु का वेग बढ़ जाता है और नीचे घट जाता है।

वेगों में अंतर के कारण ऊपरी तथा निचले पृष्ठों पर दाबांतर उत्पन्न हो जाते हैं जिससे गेंद पर एक नेट ऊर्ध्वमुखी बल कार्य करता है। प्रचक्रण के कारण उत्पन्न इस गतिक उत्थापक को **मेगनस प्रभाव** (Magnus Effect) कहते हैं।

वायुयान के पंख या ऐयरोफॉयल पर उत्थापक : जब ऐयरोफॉयल वायु में क्षैतिज दिशा में चलता है तो चित्र 10.13 (c) में दिखाए अनुसार विशिष्ट आकार के ठोस ऐयरोफॉयल पर गतिक उत्थापक ऊपर की ओर लगता है। चित्र 10.13 (c) के अनुसार वायुयान के पंख की अनुप्रस्थ काट ऐयरोफॉयल जैसी प्रतीत होती है जिसके परित: धारारेखाएँ प्रदर्शित हैं। जब ऐयरोफॉइल हवा के विपरीत चलता है तब पंखों का तरल प्रवाह के सापेक्ष दिक्‌विन्यास धारारेखाओं को पंख के ऊपर-नीचे की अपेक्षा समीप कर देता है। प्रवाह की गति शीर्ष पर अधिक और नीचे कम होती है। इसके कारण ऊर्ध्वमुखी बल से पंख पर गतिक उत्थापक उत्पन्न होता है और यह वायुयान के भार को संतुलित करता है। निम्न उदाहरण इसे दर्शाता है।

> ***उदाहरण 10.8*** किसी पूर्णत: भारित बोइंग विमान की संहति 3.3×10^5 kg है। इसका कुल पंख क्षेत्रफल 500 m^2। यह एक निश्चित ऊँचाई पर 960 km/h की चाल से उड़ रहा है। (a) पंख के ऊपरी तथा निचले पृष्ठों के बीच दाबांतर आकलित कीजिए। (b) निचले पृष्ठ की तुलना में ऊपरी पृष्ठ पर वायु की चाल में आंशिक वृद्धि आकलित कीजिए। [वायु का घनत्व $\rho = 1.2$ kg m^{-3}]



(a) (b) (c)

चित्र 10.13 *(a) अघूर्णी गतिमान गोले के समीप तरल (b) एक घूमते गतिमान गोले के निकट से गुज़रने वाले तरल का धाराप्रवाह (c) ऐयरोफॉयल के समीप से गुज़रने वाली वायु में धारारेखाएँ।*

हल (a) दाबान्तर से ऊर्ध्वमुखी बल से संतुलित बोइंग विमान का भार है

$\Delta P \times A = 3.3 \times 10^5 \text{ kg} \times 9.8$

$\Delta P = (3.3 \times 10^5 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m s}^{-2}) / 500 \text{ m}^2$

$= 6.5 \times 10^3 \text{ Nm}^{-2}$

(b) समीकरण (10.12) में हम वायुयान के ऊपरी पृष्ठ तथा निचले पृष्ठ की ऊँचाइयों के थोड़े अंतर की उपेक्षा कर देते हैं। तब इनके बीच दाबांतर

$$\Delta P = \frac{\rho}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

यहाँ v_2 वायु की ऊपरी पृष्ठ के ऊपर चाल तथा v_1 वायु की निचले पृष्ठ के नीचे चाल है।

$$(v_2 - v_1) = \frac{2\Delta P}{\rho(v_2 + v_1)}$$

औसत चाल

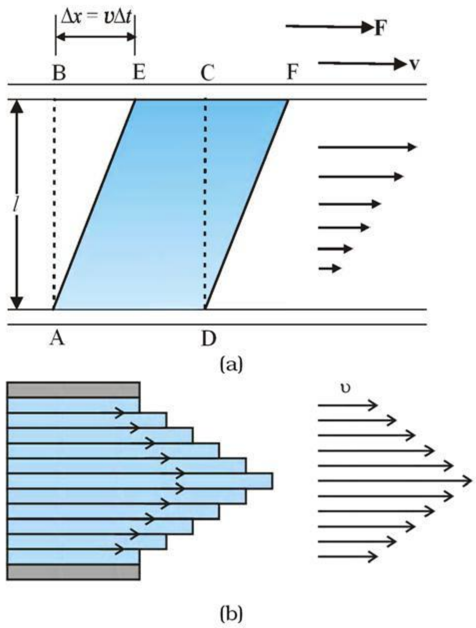
$v_{av} = (v_2 + v_1)/2 = 960 \text{ km/h} = 267 \text{ m s}^{-1}$ लेने पर

$$(v_2 - v_1)/v_{av} = \frac{\Delta P}{\rho v_{av}^2} \approx 0.08$$

पंखों के ऊपर वायु की चाल पंखों के नीचे वायु की चाल की तुलना में केवल 8 % अधिक होनी चाहिए। ◀

10.5 श्यानता

सभी तरल आदर्श तरल नहीं होते तथा वह गति में कुछ प्रतिरोध डालते हैं। तरल गति में इस प्रतिरोध को आंतरिक घर्षण के रूप में देखा जा सकता है जो ठोसों में पृष्ठ पर गति से उत्पन्न घर्षण जैसा होता है। इसे श्यानता कहते हैं। जब द्रव की सतहों में सापेक्ष गति होती है तब यह बल उपस्थित होता है। चित्र 10.14 (a) में दर्शाये अनुसार यदि काँच की दो प्लेटों के बीच एक द्रव जैसे तेल को लेते हैं, निचली प्लेट को स्थिर रखा जाए जबकि ऊपरी प्लेट को समान गति से निचली प्लेट की अपेक्षा चलाते हैं। यदि तेल को शहद से विस्थापित कर दें तो उसी वेग से प्लेट को चलाने के लिए अधिक बल की आवश्यकता होगी। इससे हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि तेल की तुलना में शहद की श्यानता अधिक है। पृष्ठ के संपर्क में तरल का वेग पृष्ठ के वेग के समान होता है। अत:, द्रव की ऊपरी सतह के संपर्क में द्रव **v** वेग से चलता है और निचली स्थिर सतह के संपर्क में तरल की सतह स्थिर होगी। निचली स्थिर सतह से (शून्य वेग) जैसे-जैसे ऊपर जाते हैं सतहों का वेग समान रूप से बढ़ता जाता है तथा सबसे ऊपरी सतह का वेग **v** होता है। किसी भी द्रव सतह के लिए, इससे ऊपर की सतह इसे आगे की ओर खींचती है जबकि नीचे की सतह पीछे की ओर खींचती है। इसके कारण सतहों के बीच में बल उत्पन्न हो जाता है। इस प्रकार के प्रवाह को परत प्रवाह कहते हैं। जैसे मेज़ पर रखी चपटी किताब पर क्षैतिज बल लगाने पर उसके पन्ने फिसलते हैं इसी प्रकार द्रव की परतें एक दूसरे पर फिसलती हैं। किसी पाइप या ट्यूब में जब एक तरल बहता है तो ट्यूब के अक्ष के अनुदिश द्रव की परत का वेग अधिकतम होता है और शनै: शनै: जैसे हम दीवारों की ओर चलते हैं यह कम होता जाता है और अंत में शून्य हो जाता है [चित्र 10.14 (b)]। एक ट्यूब में बेलनाकार पृष्ठ पर वेग स्थिर रहता है।



चित्र 10.14 *(a) दो समांतर काँच की प्लेटों के बीच रखे द्रव की एक परत जिसमें काँच की निचली प्लेट स्थिर है तथा ऊपरी प्लेट* **v** *वेग से दाहिनी ओर गतिमान है। (b) पाइप में श्यान प्रवाह के लिए वेग वितरण।*

इस गति के कारण द्रव के एक भाग जो किसी समय ABCD के रूप में था कुछ समय अंतराल (Δt) में AEFD का स्वरूप ले लेता है। इस समय अंतराल में द्रव में एक अवरूपण विकृति $\Delta x/l$ उत्पन्न हो जाती है। चूँकि प्रवाहित द्रव में समय के बढ़ने के अनुसार विकृति बढ़ती जाती है। ठोसों के विपरीत प्रयोगों द्वारा पाया गया है कि प्रतिबल विकृति की अपेक्षा 'विकृति परिवर्तन की दर' या 'विकृति दर' अर्थात् $\Delta x/(l\,\Delta t)$

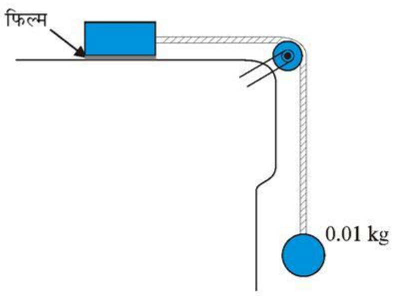
या v/l द्वारा प्रतिबल को प्राप्त किया जाता है। श्यानता गुणांक (उच्चारण 'इटा') की परिभाषा अवरूपण प्रतिबल तथा विकृतिदर के रूप में की जाती है,

$$\eta = \frac{F/A}{v/l} = \frac{Fl}{vA} \qquad (10.18)$$

श्यानता का SI मात्र प्वाज (Pl) है। इसके दूसरे मात्रक $N\,s\,m^{-2}$ या Pa s हैं। श्यानता की विमाएँ $[ML^{-1}T^{-1}]$ हैं। आमतौर पर पतले द्रवों जैसे पानी, एल्कोहल आदि गाढ़े तरलों जैसे कोलतार, रक्त, ग्लिसरीन आदि की अपेक्षा कम श्यान होते हैं। कुछ सामान्य तरलों के श्यानता गुणांक सारणी 10.2 में सूचीबद्ध हैं। हम रक्त तथा जल के विषय में दो तथ्यों को बताते हैं, जो आपके लिए रोचक हो सकते हैं। सारणी 10.2 में इंगित सूचना के आधार पर जल की तुलना में रक्त अधिक गाढ़ा (अधिक श्यान) है। साथ ही रक्त की आपेक्षिक श्यानता $(\eta/\eta_{जल})$ ताप-परिसर 0°C से 37°C के बीच अचर रहती है।

द्रव की श्यानता ताप बढ़ने पर घटती है, जबकि गैसों की श्यानता ताप बढ़ने पर बढ़ती है।

उदाहरण 10.9 $0.10\,m^2$ क्षेत्रफल की कोई धातु की प्लेट किसी डोरी की सहायता से जो एक आदर्श घिरनी (जिसे संहति रहित, तथा घर्षण रहित माना गया है) के ऊपर से होकर जाती है, 0.010 kg संहति से चित्र 10.15 की भांति जुड़ी है। कोई द्रव जिसकी फिल्म 0.30 mm मोटाई की है, मेज़ तथा प्लेट के बीच रखी हुई है। मुक्त किए जाने पर प्लेट $0.085\,m\,s^{-1}$ की अचर चाल से दाईं ओर गति करने लगती है। द्रव का श्यानता गुणांक ज्ञात कीजिए।



चित्र 10.15 द्रव के श्यानता गुणांक का मापन।

हल डोरी में तनाव के कारण धातु की प्लेट दाईं ओर गति करती है। डोरी में यह तनाव T परिमाण में डोरी से निलम्बित पिण्ड के भार mg के बराबर है। अत: अवरूपण

$F = T = mg = 0.010\,kg \times 9.8\,m\,s^{-2} = 9.8 \times 10^{-2}\,N$

द्रव पर अवरूपण प्रतिबल $= F/A = \dfrac{9.8 \times 10^{-2}}{0.10}$

विकृति दर $= \dfrac{v}{l} = \dfrac{0.085}{0.030}$

$$\eta = \frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति दर}}$$

$$= \frac{(9.8 \times 10^{-2}\,N)(0.30 \times 10^{-3}\,m)}{(0.085\,m\,s^{-1})(0.10\,m^2)}$$

$= 3.45 \times 10^{-3}$ Pa s

सारणी 10.2 कुछ तरलों की श्यानता

तरल	T(°C)	श्यानता (mPl)
जल	20	1.0
	100	0.3
रक्त	37	2.7
मशीन का तेल	16	113
	38	34
ग्लिसरीन	20	830
शहद		200
वायु	0	0.017
	40	0.019

10.5.1 स्टोक का नियम

सामान्यत: जब एक पिण्ड किसी तरल से गिरता है तो वह अपने संपर्क में तरल की परतों को भी खींचता है। तरल की विभिन्न परतों में आपेक्ष गति उत्पन्न हो जाती है और परिणामस्वरूप पिण्ड एक परिणामी मंदक बल अनुभव करता है। स्वतंत्रतापूर्वक गिरती हुई पानी की बूंदें तथा दोलन गति करता हुआ लोलक ऐसी गति के कुछ सामान्य उदाहरण हैं। यह देखा गया है कि श्यानता बल पिण्ड की गति के अनुपाती तथा उसकी दिशा के विपरीत कार्य करता है। दूसरी अन्य राशियाँ जिस पर बल F निर्भर है तरल की श्यानता η तथा गोल की त्रिज्या a है। एक अंग्रेज़ी वैज्ञानिक सर जॉर्ज जी. स्टोक्स (1819-1903) ने श्यान कर्षण बल F निम्न संबंध द्वारा निरूपित किया है:

$$F = 6\pi\eta a v \qquad (10.19)$$

इसे स्टोक का नियम कहते हैं। हम स्टोक के नियम की व्युत्पत्ति नहीं करेंगे।

अवमंदन बल का यह नियम एक रोचक उदाहरण है जो वेग के अनुपाती है। किसी श्यान माध्यम में गिरते पिण्ड का अध्ययन करके हम इसका महत्त्व ज्ञात कर सकते हैं। हम वायु में गिरती एक वर्षा की बूँद पर ध्यान केंद्रित करते हैं। आरंभ में यह गुरुत्व बल के कारण त्वरित होती है। जैसे-जैसे इसका वेग बढ़ता जाता है, मंदक श्यान बल भी बढ़ता जाता है। अंत में जब इस पर कार्यरत श्यान बल तथा उत्प्लावन बल, गुरुत्व बल के तुल्य हो जाता है, तो नेट बल तथा त्वरण शून्य हो जाता है। तब वर्षा की बूँद अचर वेग से नीचे की ओर गिरती है। साम्य अवस्था में **सीमांत वेग** v_t निम्न द्वारा दिया जाता है :

$$6\pi\eta a v_t = (4\pi/3)\, a^3 (\rho-\sigma) g$$

जहाँ ρ तथा σ बूँद तथा तरल के क्रमश: संहति घनत्व हैं। हमें प्राप्त होता है :

$$v_t = 2a^2 (\rho-\sigma) g / (9\eta) \qquad (10.20)$$

अत: सीमांत वेग v_t गोले के आकार के वर्ग के ऊपर निर्भर करता है तथा माध्यम के श्यानता के व्युत्क्रमानुपाती होता है।

इस संदर्भ में आप उदाहरण 6.2 पर पुन: ध्यान दे सकते हैं।

उदाहरण 10.10 2.0 mm त्रिज्या वाली एक ताँबे की गेंद 20°C पर 6.5 cm s^{-1} सीमांत वेग से तेल के टंक में गिर रही है। 20°C पर तेल की श्यानता का आकलन कीजिए। तेल का घनत्व 1.5×10^3 kg m^{-3} तथा ताँबे का घनत्व 8.9×10^3 kg m^{-3} है।

हल यहाँ $v_t = 6.5 \times 10^{-2}$ m s^{-1}, $a = 2 \times 10^{-3}$ m, $g = 9.8$ m s^{-2}, $\rho = 8.9 \times 10^3$ kg m^{-3}, $\sigma = 1.5 \times 10^3$ kg m^{-3}। समीकरण (10.20) से

$$\eta = \frac{2}{9} \times \frac{(2\times10^{-3})\,\mathrm{m}^2 \times 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}}{6.5\times10^{-2}\,\mathrm{m\,s^{-1}}} \times 7.4 \times 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$$

$$= 9.9 \times 10^{-1}\ \mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}$$

10.6 रेनल्ड्स संख्या

प्रवाह की दर अधिक होने पर प्रवाह रेखीय (स्तरीय) न रहकर विक्षुब्ध हो जाता है। विक्षुब्ध प्रवाह में किसी बिंदु पर तरल का वेग द्रुत तथा यादृच्छिक रूप से समय में बदलता रहता है। कुछ वृत्तीय गतियाँ जिन्हें भँवर कहते हैं, भी उत्पन्न होती हैं। तीव्र गति से प्रवाहित किसी तरल के मार्ग में कोई बाधा रख देने पर प्रवाह विक्षुब्ध हो जाता है जिसे [चित्र 10.8 (b)] में दिखाया गया है। जलती लकड़ियों से धुएँ का ऊपर उठना तथा महासागर धाराएँ विक्षुब्ध प्रवाह हैं। तारों का टिमटिमाना वायुमण्डलीय विक्षोभ का ही परिणाम है। कारों और वायुयान द्वारा वायु में तथा पश्चवर्ती क्षोभ एवं बोट से पानी में विक्षुब्ध प्रवाह होता है।

ऑस्बेर्न रेनल्ड्स (1842-1912) ने यह प्रेक्षण किया कि लघु दरों पर प्रवाहित होने वाले श्यान तरलों के लिए प्रक्षुब्ध (विक्षुब्ध) प्रवाह की संभावना कम होती है। उन्होंने एक विमाहीन अंक को परिभाषित किया, जिसके मान से हमें एक प्रवाह विक्षुब्ध होगा अथवा नहीं का स्थूल बोध होता है। इस अंक को **रेनल्ड्स संख्या** R_e कहते हैं।

$$R_e = \rho v d/\eta \qquad (10.21)$$

जहाँ ρ तरल का घनत्व तथा v तरल के प्रवाह की चाल है। प्राचल d नलिका का व्यास है, R_e विमाहीन अंक है अत: यह मात्रकों के किसी भी निकाय में वही रहता है। यह देखा गया है कि यदि R_e का मान 1000 से कम है तो प्रवाह स्तरीय होता है। $R_e > 2000$ के लिए विक्षुब्ध प्रवाह होता है। R_e का मान 1000 तथा 2000 के बीच है तो प्रवाह परिवर्ती हो जाता है। ज्यामितीय रूप से समान प्रवाह में R_e का क्रांतिक मान समान मान (क्रांतिक रेनल्ड्स संख्या) होता है। इस पर प्रवाह विक्षुब्ध हो जाता है। उदाहरण के लिए तेल तथा जल जिनके घनत्व तथा श्यानता भिन्न हैं, यदि दो सर्वसम आकृति तथा अनुप्रस्थ काट की नलियों में प्रवाहित करें तो R_e के लगभग समान मानों पर प्रवाह विक्षुब्ध हो जाता है। इस सत्य का उपयोग करते हुए हम प्रयोगशाला में एक लघुस्तरीय मॉडल स्थापित करके तरल प्रवाह के अभिलक्षणों का अध्ययन कर सकते हैं। इस तथ्य से हमें जहाजों, पनडुब्बियों, रेस में उपयोग होने वाली कारों तथा वायुयानों की अभिकल्पना करने में सहायता मिलती है।

R_e को हम निम्न प्रकार से भी लिख सकते हैं:

$$R_e = \rho v^2 / (\eta v/d) = \rho A v^2 / (\eta A v/d) \qquad (10.22)$$

= जड़त्वीय बल/श्यानता बल

इस प्रकार R_e अंक जड़त्वीय बल (जड़त्व के कारण बल अर्थात् प्रवाही तरल के द्रव्यमान अथवा प्रवाह मार्ग में अवरोध का जड़त्व) तथा श्यान बल का अनुपात होता है।

विक्षोभ के कारण गतिज ऊर्जा क्षय प्राय: ऊष्मा के रूप में होता है। रेस के लिए उपयोग होने वाली कारें तथा वायुयान इतनी यथार्थतापूर्वक संरचित किए जाते हैं कि विक्षोभ न्यूनतम हो। इस प्रकार के वाहनों की अभिकल्पना में प्रयोग तथा जाँच एवं भूल विधि सम्मिलित होती है। इसके विपरीत विक्षोभ (घर्षण की भांति) कभी-कभी वांछित होता है। विक्षोभ मिश्रण प्रोत्साहित करता है तथा संहति, संवेग तथा ऊर्जा के स्थानांतर

की दर में वृद्धि कर देता है। रसोइघरों में उपयोग होने वाले मिक्सर के ब्लेड विक्षुब्ध प्रवाह प्रेरित करते हैं तथा गाढ़ा मिल्क शेक बनाने के साथ-साथ अंडे का समांगी (एकसमान) संरचना का घोल प्रदान करते हैं।

उदाहरण 10.11 1.25 cm व्यास की किसी जल टोंटी से प्रवाहित होने वाले जल की दर 0.48 L/min है। जल का श्यानता गुणांक 10^{-3} Pa s है। कुछ समय पश्चात् प्रवाह की दर बढ़कर 3 L/min. हो जाती है। दोनों प्रवाहों के लिए अभिलक्षण बताइये।

हल मान लीजिए प्रवाह की चाल υ है तथा टोंटी का व्यास d = 1.25 cm है। टोंटी से प्रति सेकंड बाहर निकलने वाले जल का आयतन

$$Q = \upsilon \times \pi d^2 / 4$$
$$\upsilon = 4\,Q /\ d^2$$

तब हम रेनल्ड्स संख्या का अनुमान इस प्रकार लगा सकते हैं,

$$R_e = 4\,\rho\, Q / \pi\, d\, \eta$$
$$= 4 \times 10^3 \mathrm{kg\,m^{-3}} \times Q/(3.14 \times 1.25 \times 10^{-2}\mathrm{m} \times 10^{-3}\mathrm{Pa\,s})$$
$$= 1.019 \times 10^8\ \mathrm{m^{-3}\,s}\ Q$$

चूंकि आरंभ में

$$Q = 0.48\ \mathrm{L / min} = 8\ \mathrm{cm^3 / s} = 8 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^3\,s^{-1}},$$

हम प्राप्त करते हैं,

$$R_e = 815$$

चूंकि यह 1000 से कम है अत: प्रवाह स्तरीय होगा।

कुछ समय पश्चात् जब

$$Q = 3\ \mathrm{L / min} = 50\ \mathrm{cm^3 / s} = 5 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^3\,s^{-1}},$$

हम प्राप्त करते हैं,

$$R_e = 5095$$

यह प्रवाह विक्षुब्ध होगा। स्तरीय प्रवाह से विक्षुब्ध प्रवाह में पारगमन को निर्धारित करने के लिए आप अपने वाश बेसिन पर एक प्रयोग कर सकते हैं। ◀

10.7 पृष्ठ तनाव

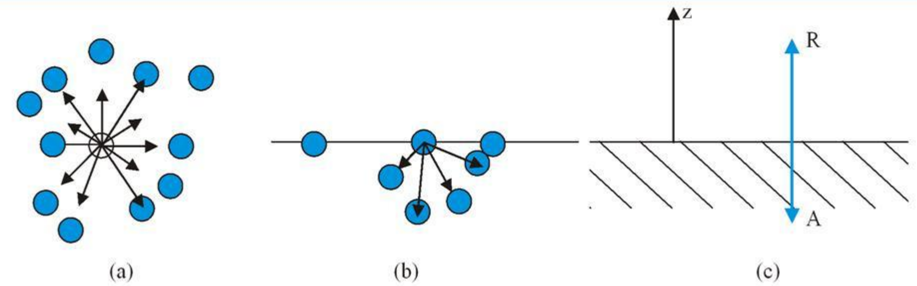
आपने देखा होगा कि तेल तथा जल आपस में नहीं मिलते; जल आपको और मुझे गीला कर देता है परन्तु बतख को नहीं; पारा काँच से नहीं चिपकता किन्तु जल चिपक जाता है; गुरुत्व बल की उपस्थिति में भी तेल रुई की बत्ती से ऊपर चढ़ जाता है। रस तथा पानी पेड़ के शीर्ष की पत्तियों तक ऊपर उठ जाता है, रंग के ब्रुश के बाल सूखे होने पर और पानी में डुबोने पर भी एक दूसरे से नहीं चिपकते लेकिन जब उसके बाहर होते हैं तो एक उत्तम नोक बनाते हैं। ये और ऐसे ही अनेक अनुभव द्रवों की स्वतंत्र सतहों से संबंधित हैं। द्रवों की कोई निश्चित आकृति नहीं होती, परन्तु उनका अपना एक निश्चित आयतन होता है। जब उन्हें किसी पात्र में उड़ेलते हैं तो उनका एक स्वतंत्र पृष्ठ होगा। इन पृष्ठों की कुछ अतिरिक्त ऊर्जा होती है। इस परिघटना को पृष्ठ तनाव कहते हैं। यह केवल द्रवों में हो सकती है क्योंकि गैसों के कोई स्वतंत्र पृष्ठ नहीं होते। अब हम इस परिघटना को समझने का प्रयत्न करते हैं।

10.7.1 पृष्ठीय ऊर्जा

कोई द्रव अपने अणुओं के बीच आकर्षण के कारण स्थायी है। द्रव के भीतर एक अणु लीजिए। अंतरापरमाणुक दूरियाँ इस प्रकार की होती हैं कि यह अपने घेरने वाले सभी परमाणुओं की ओर आकर्षित होता है [चित्र 10.16(a)]। इस आकर्षण के परिणामस्वरूप अणुओं के लिए ऋणात्मक स्थितिज ऊर्जा उत्पन्न होती है। स्थितिज ऊर्जा का परिमाण इस बात पर निर्भर है कि इस चुने हुए अणु के चारों ओर अणु विन्यास किस प्रकार वितरित है तथा उनकी संख्या क्या है। परन्तु सभी अणुओं की औसत स्थितिज ऊर्जा समान होती है। यह इस तथ्य से स्पष्ट है कि इस प्रकार के अणुओं के किसी संचयन (द्रव) को लेने की अपेक्षा उन्हें एक दूसरे से दूर बिखेरने (वाष्पन या वाष्पीकृत करने) के लिए ऊर्जा की आवश्यकता होती है। यह वाष्पन ऊर्जा काफी अधिक होती है। पानी के लिए यह ऊर्जा 40 kJ/mol के आसपास होती है।

अब द्रव के पृष्ठ के समीप किसी अणु पर हम विचार करते हैं [चित्र 10.16(b)]। द्रव के भीतर के अणु की तुलना में द्रव के आधे अणु ही इस अणु को घेरते हैं। इन अणुओं के कारण कुछ ऋणात्मक स्थितिज ऊर्जा होती है। परन्तु स्पष्ट रूप से यह द्रव के भीतर के अणु से अपेक्षाकृत कम होती है अर्थात् जो पूर्णरूप से अंदर है। यह लगभग बाद वाले के अपेक्षा आधी होती है। इस प्रकार किसी द्रव के पृष्ठ के अणु की ऊर्जा द्रव के भीतरी अणुओं की ऊर्जा से कुछ अधिक होती है। अत: कोई द्रव बाह्य स्थितियों के अनुसार, कम से कम अनुमत पृष्ठ क्षेत्रफल करने का प्रयास करता है। पृष्ठ के क्षेत्रफल में वृद्धि करने के लिए ऊर्जा खर्च करनी पड़ती है। अधिकांश पृष्ठीय परिघटनाओं को हम इसी तथ्य के पदों में समझ सकते हैं। किसी अणु को पृष्ठ पर रखने में कितनी ऊर्जा आवश्यक होती है? जैसा कि ऊपर वर्णन किया जा चुका है यह लगभग अणु को पूर्ण रूप से द्रव से बाहर निकालने की ऊर्जा के आधी होती है अर्थात् वाष्पन की ऊष्मा की आधी ऊर्जा चाहिए।

अंत में देखें पृष्ठ क्या है? चूँकि द्रव अनियमित गतिशील

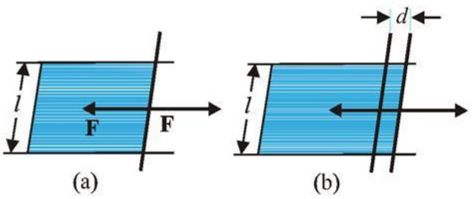


चित्र 10.16 किसी द्रव में पृष्ठ पर अणुओं का व्यवस्था आरेख तथा बलों का संतुलन (a) किसी द्रव के भीतर अणु। अणु पर अन्य अणुओं के कारण बलों को दर्शाया गया है। तीरों की दिशाएँ आकर्षण अथवा प्रतिकर्षण को दर्शाती हैं। (b) यही घटनाएँ द्रव के पृष्ठ के लिए। (c) आकर्षी (A) तथा प्रतिकर्षी (R) बलों की संतुलन।

अणुओं से बना है अत: पूर्ण रूप से स्पष्ट पृष्ठ नहीं हो सकता। [चित्र 10.16(c)] द्रव अणुओं का घनत्व $z = 0$ पर कुछ ही अणु आकार की दूरी पर तेज़ी से घटकर शून्य हो जाता है।

10.7.2 पृष्ठीय ऊर्जा तथा पृष्ठ तनाव

अन्य सभी कारकों, जैसे आयतन आदि को स्थिर रखते हुए जैसा हमने पहले विचार किया है कि द्रव के पृष्ठ के साथ ऊर्जा संबद्ध होती है और अधिक पृष्ठ उत्पन्न करना चाहें तो हमें और अधिक ऊर्जा खर्च करनी होगी। इस तथ्य को ठीक प्रकार समझने के लिए द्रव की एक ऐसी क्षैतिज फिल्म पर विचार कीजिए जो किसी ऐसी छड़ पर समाप्त होती है जो समांतर निर्देशकों पर सरकने के लिए स्वतंत्र है [चित्र (10.17)]।



चित्र 10.17 किसी फिल्म को तानना। (a) संतुलन में कोई फिल्म (b) किसी अतिरिक्त दूरी तक तानित फिल्म।

मान लीजिए साम्यावस्था में हम चित्र में दर्शाये अनुसार छड़ को किसी छोटी दूरी d तक हटाते हैं। चूंकि फिल्म का क्षेत्रफल (अथवा पृष्ठ का क्षेत्रफल) बढ़ गया है अत: अब निकाय में अधिक ऊर्जा होगी। इसका अर्थ है कि आंतरिक बल के विपरीत कार्य किया गया है। माना यह आंतरिक बल $\mathbf{F}$ है तो आरोपित बल द्वारा किया गया कार्य $\mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = Fd$ है। ऊर्जा संरक्षण के अनुसार यह अब फिल्म में संचित अतिरिक्त आंतरिक ऊर्जा है। माना कि फिल्म की प्रति एकांक क्षेत्रफल पृष्ठ ऊर्जा S है, और अतिरिक्त क्षेत्रफल $2dl$ है। किसी फिल्म के दो पार्श्व होते हैं जिनके बीच में द्रव होता है अत: फिल्म के दो पृष्ठ होते हैं। अत: अतिरिक्त ऊर्जा

$$S(2dl) = Fd \qquad (10.23)$$

अथवा $$S = Fd/2dl = F/2l \qquad (10.24)$$

राशि S पृष्ठ तनाव का परिमाण है। यह द्रव के प्रति एकांक क्षेत्रफल की पृष्ठीय ऊर्जा है। यह चालित छड़ की प्रति एकांक लंबाई पर तरल द्वारा आरोपित बल है।

अभी तक हमने केवल एक द्रव के पृष्ठ की चर्चा की है। अधिक सामान्य रूप से हमें तरल के द्रवों या ठोस पृष्ठों पर विचार करना चाहिए। इन स्थितियों में पृष्ठीय ऊर्जा पृष्ठ के दोनों ओर के पदार्थों पर निर्भर होती है। उदाहरणस्वरूप यदि पदार्थों के अणु आपस में एक दूसरे को आकर्षित करते हैं तो पृष्ठीय ऊर्जा कम हो जाएगी परन्तु यदि वह एक दूसरे को प्रतिकर्षित करते हैं तो पृष्ठीय ऊर्जा बढ़ जाएगी। इस प्रकार और अधिक उपयुक्त रूप से हम कह सकते हैं कि पृष्ठीय ऊर्जा दोनों पदार्थों के मध्य अंतरापृष्ठ की ऊर्जा है तथा यह दोनों पर ही निर्भर है।

उपरोक्त चर्चा के आधार पर निम्नलिखित प्रेक्षण प्राप्त करते हैं :

(i) पृष्ठ तनाव द्रव तथा अन्य किसी पदार्थ के बीच अंतरापृष्ठ

के तल में प्रति एकांक लंबाई पर कार्यरत बल (अथवा प्रति एकांक क्षेत्रफल की पृष्ठीय ऊर्जा) है। यह द्रव के भीतर के अणुओं की तुलना में अंतरापृष्ठ के अणुओं की अतिरिक्त ऊर्जा है।

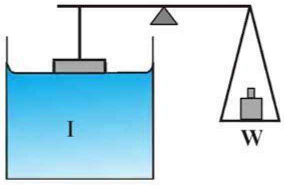
(ii) अंतरापृष्ठ के किसी भी बिंदु पर हम पृष्ठ तल (सीमा के अतिरिक्त) में एक रेखा खींच सकते हैं तथा इस रेखा की प्रति एकांक लंबाई पर रेखा के लंबवत् परिमाण में समान तथा दिशा में विपरीत पृष्ठ तनाव बलों S की कल्पना कर सकते हैं। यह रेखा साम्यावस्था में है और अधिक स्पष्टता के लिए पृष्ठ पर परमाणुओं अथवा अणुओं की एक रेखा की कल्पना कीजिए। इस रेखा के बाईं ओर परमाणु रेखा को अपनी ओर खींचते हैं तथा जो इस रेखा के दाईं ओर हैं वह इसे अपनी ओर खींचते हैं। तनाव की स्थिति में यह परमाणुओं की रेखा साम्यावस्था में होती है। यदि वास्तव में, रेखा अंतरापृष्ठ की सीमांत रेखा को निर्दिष्ट करती है जैसा कि चित्र 10.16 (a) तथा (b) में दर्शाया गया है तो केवल अंदर की ओर प्रति एकांक लंबाई में लगने वाला बल S है।

सारणी 10.3 में विभिन्न द्रवों के लिए पृष्ठ तनाव के मान दिए गए हैं। पृष्ठ तनाव का मान ताप पर निर्भर करता है। श्यानता के समान पृष्ठ तनाव का मान तापवृद्धि के साथ कम होता जाता है।

सारणी 10.3 दिए गए तापों पर कुछ द्रवों के पृष्ठ तनाव तथा वाष्पन ऊष्मा

द्रव	ताप (°C)	पृष्ठ तनाव (N/m)	वाष्पन ऊर्जा (kJ/mol)
हीलियम	-270	0.000239	0.115
ऑक्सीजन	-183	0.0132	7.1
एथानॉल	20	0.0227	40.6
जल	20	0.0727	44.16
पारा	20	0.4355	63.2

यदि ठोस-वायु तथा तरल-वायु पृष्ठीय ऊर्जाओं के योग से तरल तथा ठोस की पृष्ठीय ऊर्जा कम है तो तरल ठोस से चिपकेगा। ठोस तथा द्रव पृष्ठों में ससंजक बल होता है। चित्र 10.18 में उपकरण के आरेख के अनुसार हम इसे सीधे ही माप सकते हैं। एक चपटी क्षैतिज काँच की प्लेट जिसके नीचे किसी पात्र में द्रव भरा है, तुला की एक भुजा कार्य करती है। प्लेट के क्षैतिज निचले किनारे को पानी से थोड़ा ऊपर रखकर, तुला के दूसरी ओर बाट रखकर संतुलित कर लेते हैं। द्रव से भरे पात्र को थोड़ा ऊपर उठाते हैं ताकि यह काँच की प्लेट के क्षैतिज किनारों को छूने भर लगे और पृष्ठ तनाव के कारण प्लेट को नीचे की ओर खींचने लगे। अब दूसरी ओर कुछ बाट रखते हैं जब तक कि प्लेट द्रव से कुछ अलग न हो जाए।



चित्र 10.18 पृष्ठ तनाव मापना।

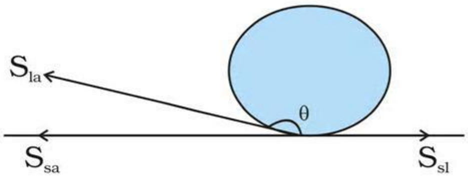
मान लीजिए आवश्यक अतिरिक्त भार W है। तब समीकरण 10.24 तथा वहाँ की गई चर्चा से, द्रव-वायु अंतरापृष्ठ का पृष्ठ तनाव

$$S_{la} = (W/2l) = (mg/2l) \quad (10.25)$$

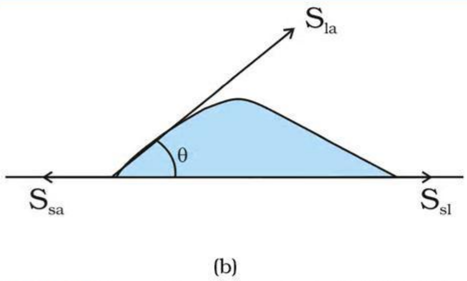
जहाँ m अतिरिक्त संहति तथा l काँच की प्लेट के निचले किनारे की लंबाई है, पादाक्षर (la) इस तथ्य को स्पष्ट करता है कि यहाँ द्रव-वायु अंतरापृष्ठ तनाव सम्मिलित है।

10.7.3 संपर्क कोण

किसी अन्य माध्यम के संपर्क तल के निकट द्रव का पृष्ठ, आमतौर पर वक्रीय होता है। संपर्क बिंदु पर द्रव पृष्ठ पर स्पर्शज्या तथा द्रव के अंदर ठोस पृष्ठ पर स्पर्शज्या के बीच कोण को संपर्क कोण कहते हैं। इसे θ से प्रदर्शित करते हैं। द्रवों तथा ठोसों के विभिन्न युग्मों के अंतरापृष्ठों पर यह भिन्न-भिन्न होता है। संपर्क कोण का मान यह दर्शाता है कि कोई द्रव किसी ठोस के पृष्ठ पर फैलेगा अथवा इस पर बूंदें बनाएगा। उदाहरणस्वरूप जैसा चित्र 10.19 (a) में दर्शाया गया है, कमल के पत्ते पर पानी की बूंदें बनती हैं परन्तु स्वच्छ प्लास्टिक प्लेट पर यह फैल जाती है [चित्र 10.19(b)]।



(a)



चित्र 10.19 अंतरापृष्ठों में तनाव के साथ पानी की बूँदों के विभिन्न आकार (a) कमल के एक पत्ते पर (b) एक स्वच्छ प्लास्टिक प्लेट पर।

अब हम तीन अंतरापृष्ठीय तनावों का तीन अंतरापृष्ठों पर विचार करते हैं। जैसा कि चित्र 10.19(a) तथा (b) में दर्शाया गया है कि हम द्रव-वायु, ठोस-वायु तथा ठोस-द्रव के पृष्ठ तनाव S_{la}, S_{sa}, S_{sl} से दर्शाते हैं। तीनों माध्यमों के पृष्ठों पर लगे बल संपर्क रेखा पर साम्यावस्था में होने चाहिए। चित्र 10.19 (b) से हम निम्न संबंध व्युत्पन्न कर सकते हैं

$$S_{la} \cos\theta + S_{sl} = S_{sa} \qquad (10.26)$$

यदि $S_{sl} > S_{la}$ तो संपर्क कोण बृहद कोण होगा जैसा कि पानी तथा पत्ते का अंतरापृष्ठ। जब θ बृहद कोण है तो द्रव के अणु एक दूसरे की ओर मजबूती से आकर्षित होते हैं तथा ठोस के अणुओं के साथ दुर्बल रूप से। द्रव-ठोस अंतरापृष्ठ को बनाने में बहुत ऊर्जा व्यय होती है, और तब द्रव ठोस को नहीं भिगोता। ऐसा मोम या तेल लगे पृष्ठ पर पानी के साथ होता है एवं पारे के साथ किसी भी तल पर। दूसरी ओर, यदि द्रव के अणु ठोस के अणुओं की ओर अधिक शक्ति से आकर्षित होते हैं, तो यह S_{sl} को कम कर देगा। इसलिए, cos θ बढ़ सकता है या θ कम हो सकता है। तब θ न्यूनकोण होगा, ऐसा पानी के काँच या प्लास्टिक पर होने से होता है या मिट्टी के तेल का किसी भी वस्तु पर (यह केवल फैल जाता है)। साबुन, अपमार्जक तथा रँगने वाली वस्तुएँ, गीले कर्मक हैं। जब इन्हें मिलाया जाता है तो संपर्क कोण छोटा हो जाता है जिससे यह भलीभांति अंदर घुसकर प्रभावी हो जाते हैं। पानी तथा रेशों के बीच संपर्क कोण बड़ा करने के लिए पानी में जल सहकारक को मिलाया जाता है।

10.7.4 बूँद तथा बुलबुले

पृष्ठ तनाव का एक महत्त्व यह भी है कि यदि गुरुत्व बल के प्रभाव की उपेक्षा की जा सके तो द्रव की मुक्त बूँदें तथा बुलबुले गोलाकार होते हैं। आपने इस तथ्य को अवश्य देखा होगा: विशेषकर स्पष्ट रूप से उच्च वेग वाले स्प्रे अथवा जेट से द्रुत बनने वाली छोटी बूँदों में, अथवा अपने बचपन के समय बनाए साबुन के बुलबुलों में। बूँदें तथा बुलबुले गोल ही क्यों होते हैं? साबुन के बुलबुले किस कारण स्थायी हैं? जैसा कि हम बार-बार चर्चा कर रहे हैं कि किसी द्रव-वायु अंतरापृष्ठ में ऊर्जा होती है। अत: किसी दिए गए आयतन के लिए सर्वाधिक स्थायी पृष्ठ वही है जिसका पृष्ठ क्षेत्रफल सबसे कम हो। गोले में यह गुण होता है। हम इस तथ्य को इस पुस्तक में सत्यापित नहीं कर सकते परन्तु आप स्वयं यह जाँच कर सकते हैं कि इस संदर्भ में गोला कम से कम एक घन की तुलना में बेहतर है। अत: यदि गुरुत्व बल तथा अन्य बल (उदाहरणार्थ वायु-प्रतिरोध) निष्प्रभावी हों तो द्रव की बूँदें गोल होती हैं।

पृष्ठ तनाव का एक अन्य रोचक परिणाम यह है कि बूँद के भीतर का दाब बूँद के बाहर के दाब से अधिक होता है। [चित्र 10.20(a)]। मान लीजिए r त्रिज्या की कोई गोल बूँद साम्यावस्था में है। यदि इस बूँद की त्रिज्या में Δr की वृद्धि की जाए, तो बूँद में अतिरिक्त ऊर्जा होगी,

$$[4\pi(r + \Delta r)^2 - 4\pi r^2]\, S_{la} = 8\pi r\, \Delta r\, S_{la} \qquad (10.27)$$

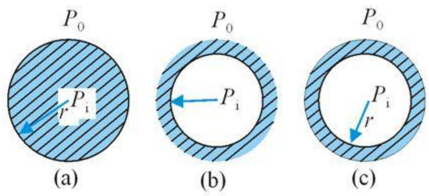
यदि बूँद साम्यावस्था में है तो खर्च की गई यह ऊर्जा बूँद के भीतर तथा बाहर के दाबांतर $(P_i - P_o)$ के प्रभाव में प्रसार के कारण बूँद द्वारा प्राप्त की गई ऊर्जा से संतुलित होती है। यहाँ कृत कार्य

$$W = (P_i - P_o)\, 4\pi r^2 \Delta r \qquad (10.28)$$

जिससे

$$(P_i - P_o) = (2\, S_{la} / r) \qquad (10.29)$$

व्यापक रूप में, किसी द्रव-गैस अंतरापृष्ठ के लिए, उत्तल पार्श्व की ओर दाब का मान अवतल पार्श्व की ओर के दाब के मान से अधिक होता है। उदाहरण के लिए, यदि किसी द्रव के भीतर कोई वायु का बुलबुला है, तो यह वायु का बुलबुला अधिक दाब पर होगा [चित्र 10.20 (b)]।



चित्र 10.20 r त्रिज्या की बूँद, गुहिका तथा बुलबुला।

किसी बुलबुले [चित्र10.20 (c)] की बनावट किसी बूँद अथवा किसी गुहिका से भिन्न होती है। बुलबुले में दो अंतरापृष्ठ

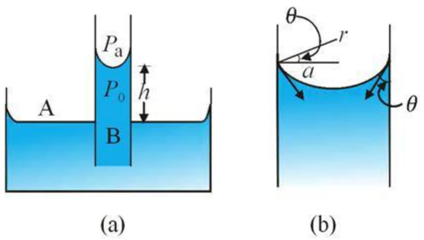
होते हैं। उपरोक्त तर्क के आधार पर किसी बुलबुले के लिए

$(P_i - P_o) = (4\, S_{la} / r)$ (10.30)

कदाचित् इसी कारण साबुन का बुलबुला बनाने के लिए आपको कुछ तेज़ी से फूँकना पड़ता है, परन्तु बहुत अधिक नहीं। अंदर थोड़ा अधिक दाब आवश्यक है।

10.7.5 केशिकीय उन्नयन

एक सुप्रसिद्ध प्रभाव किसी पतली नली में गुरुत्व के विरुद्ध जल का ऊपर उठना (उन्नयन) किसी वक्रित द्रव-वायु अंतरापृष्ठ के दोनों ओर दाब में अंतर होने के परिणामस्वरूप है। लैटिन भाषा में शब्द Capilla का अर्थ है केश अर्थात् बाल। यदि



चित्र 10.21 *केशिकीय उन्नयन (a) जल से भरे खुले बर्तन में डूबी किसी पतली नली का व्यवस्था आरेख। (b) अंतरापृष्ठ के निकट का आवर्धित आरेख।*

कोई नली केश की भाँति पतली हो तो उस नली में उन्नयन बहुत अधिक होगा। इसी तथ्य को देखने के लिए किसी ऐसी वृत्ताकार अनुप्रस्थ काट (त्रिज्या a) की ऊर्ध्वाधर केशनली पर विचार करते हैं जिसका एक सिरा जल से भरे किसी खुले बर्तन में डूबा है (चित्र 10.21)। पानी तथा काँच में संपर्क कोण न्यून होता है। इस प्रकार केशिका में पानी का पृष्ठ अवतल होता है। इसका अर्थ है कि शीर्ष पृष्ठ के दोनों ओर दाबांतर है।

$(P_i - P_o) = (2S/r) = 2S/(a \sec \theta)$

$= (2S/a) \cos \theta$ (10.31)

इस प्रकार, ***नली के भीतर नवचंद्रक (वायु-जल अंतरापृष्ठ) पर जल का दाब वायुमण्डलीय दाब से कम है। चित्र 10.21(a) में दो बिंदुओं A तथा B पर ध्यान केंद्रित कीजिए, इन दोनों पर समान दाब होना चाहिए, अर्थात्***

$P_o + h \rho g = P_i = P_A$ (10.32)

जहाँ ρ जल का घनत्व तथा h को केशिकीय उन्नयन कहते हैं [चित्र 10.21(a)]। समीकरण (10.31) तथा (10.32) का उपयोग करके हम प्राप्त करते हैं

$h \rho g = (P_i - P_o) = (2S \cos \theta)/a$ (10.33)

यहाँ की गई इस विवेचना तथा समीकरण (10.28) एवं (10.29) से यह स्पष्ट हो जाता है कि केशिकीय उन्नयन का कारण पृष्ठ तनाव ही है। a के लघुमानों के लिए यह अधिक होगा। बारीक या अत्यधिक पतली केशिका में प्रतिरूपी तौर से यह कुछ cm की कोटि का होता है। उदाहरण के लिए यदि $a = 0.05$ cm है तो पानी के पृष्ठ तनाव (सारणी 10.3) का उपयोग करके हम पाते हैं

$$h = 2S/(\rho g a)$$

$$= \frac{2 \times (0.073 \text{ Nm}^{-1})}{(10^3 \text{kg m}^{-3})(9.8 \text{ m s}^{-2})(5 \times 10^{-4} \text{m})}$$

$$= 2.98 \times 10^{-2} \text{ m} = 2.98 \text{ cm}$$

ध्यान दीजिए, यदि द्रव-नवचंद्रक (मेनिस्कस) उत्तल है जैसा कि पारे में होता है अर्थात् $\cos \theta$ ऋणात्मक है तो समीकरण (10.32) से यह स्पष्ट है कि केशनली में द्रव का तल नीचे गिर जाता है अर्थात् केशिकीय अपनयन होता है।

10.7.6 अपमार्जक तथा पृष्ठ तनाव

हम अपने ग्रीज़ तथा तेल के दाग-धब्बे लगे गंदे सूती अथवा रेशों से बने कपड़ों को जल में अपमार्जक अथवा साबुन घोलकर, इसमें कपड़ों को डुबोकर तथा हिलाकर साफ़ करते हैं। आइए इस प्रक्रिया को भली भाँति समझें।

जल से धोने पर ग्रीज़ के दाग दूर नहीं होते। इसका कारण यह है कि जल ग्रीज़ लगी धूल को गीला नहीं करता; अर्थात् इन दोनों के बीच संपर्क पृष्ठ का क्षेत्रफल बहुत कम होता है। यदि जल ग्रीज़ को गीला कर सकता होता, तो जल का प्रवाह ग्रीज़ को हटा सकता था। कुछ इसी प्रकार की स्थिति अपमार्जक द्वारा प्राप्त की जाती है। अपमार्जकों के अणु 'हेयरपिन' की आकृति के होते हैं, जिनका एक सिरा जल से आकर्षित रहता है तथा दूसरा सिरा ग्रीज़, तेल अथवा मोम से, और इस प्रकार ये अणु जल-तेल अंतरापृष्ठ बनाने का प्रयास करते हैं। इसके परिणाम को चित्र 10.22 में चित्रों के क्रम के रूप में दर्शाया गया है।

अपनी भाषा में, इसे हम इस प्रकार कहेंगे कि अपमार्जक, जिसके अणु एक सिरे पर जल को तथा दूसरे सिरे पर मान लीजिए तेल को आकर्षित करते हैं जो पानी के साथ मिलकर पृष्ठ तनाव अत्यधिक कम कर देते हैं। यह अंतरापृष्ठ बनाना ऊर्जा की दृष्टि से भी अनुकूल हो सकता है जिनमें अपमार्जक से घिरे गंदगी के गोले पुन: जल से घिरे हों। पृष्ठ क्रियाशील अपमार्जकों अथवा केवल सफ़ाई के लिए ही नहीं वरन् तेल तथा खनिज अयस्कों की प्रतिप्राप्ति में भी महत्त्वपूर्ण होता है।

चित्र 10.22 *अपमार्जक की कार्यप्रणाली – 'अपमार्जक अणु क्या करते हैं' के पदों में।*

उदाहरण 10.12 2.00 mm व्यास की किसी केशनली का निचला सिरा बीकर में भरे जल के पृष्ठ से 8.00 cm नीचे तक डुबोया जाता है। नली के जल में डूबे सिरे पर अर्धगोलीय बुलबुला फुलाने के लिए नली के भीतर आवश्यक दाब ज्ञात कीजिए। प्रयोग के ताप पर जल का पृष्ठ तनाव 7.30×10^{-2} Nm^{-1} है। जल का घनत्व = 1000 kg/m^3, वायुमण्डलीय दाब = 1.01×10^5 Pa तथा $g = 9.80$ m s^{-2}। दाब आधिक्य भी परिकलित कीजिए।

हल किसी तरल के भीतर गैस के बुलबुले के अंदर दाब आधिक्य = $2S/r$, यहाँ S द्रव-गैस अंतरापृष्ठ का पृष्ठतनाव तथा r बुलबुले की त्रिज्या है। यहाँ ध्यान दीजिए, इसमें केवल एक ही द्रव पृष्ठ है। (किसी गैस में द्रव की बूँद के लिए दो द्रव अंतरापृष्ठ होते हैं, अतः उस प्रकरण में दाब आधिक्य = $4S/r$ लागू होता है)। बुलबुले के बाहर दाब P_o = वायुमण्डलीय दाब + 8 cm जल स्तंभ का दाब। अर्थात्

$$P_o = (1.01 \times 10^5 \text{ Pa} + 0.08 \text{ m} \times 1000 \text{ kg m}^{-3} \times 9.80 \text{ m s}^{-2})$$

$$= 1.01784 \times 10^5 \text{ Pa}$$

अतः बुलबुले के भीतर दाब

$$P_i = P_o + 2S/r$$

$$= 1.01784 \times 10^5 \text{ Pa} + (2 \times 7.3 \times 10^{-2} \text{ Pa m}/10^{-3} \text{ m})$$

$$= (1.01784 + 0.00146) \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$= 1.02 \times 10^5 \text{ Pa}$$

चूँकि बुलबुला अर्धगोलीय है, अतः यहाँ केशनली की त्रिज्या को ही बुलबुले की त्रिज्या माना गया है। (उत्तर का निकटन तीन सार्थक अंकों तक किया गया है।) बुलबुले के भीतर दाब आधिक्य 146 Pa है। ◀

सारांश

1. तरलों का मूलभूत गुण यह है कि वह प्रवाहित होते (बहते) हैं। अपनी आकृति में परिवर्तन के प्रति तरलों में कोई प्रतिरोध नहीं होता। अतः पात्र की आकृति तरल की आकृति को निर्धारित करती है।
2. द्रव असंपीड्य होता है तथा इसका अपना स्वतंत्र पृष्ठ होता है। गैस संपीड्य होती है तथा यह फैलकर समस्त उपलब्ध आयतन (स्थान) को भर देती है।
3. यदि किसी तरल द्वारा किसी क्षेत्रफल A पर आरोपित अभिलंब बल F है तो औसत दाब P_{av} को बल तथा क्षेत्रफल के अनुपात के रूप में इस प्रकार परिभाषित किया जाता है :

$$P_{av} = \frac{F}{A}$$

4. दाब का मात्रक पास्कल (Pa) है। यह वास्तव में N m^{-2} ही है। दाब के अन्य सामान्य मात्रक इस प्रकार हैं :
   1 atm = 1.01×10^5 Pa
   1 bar = 10^5 Pa
   1 torr = 133 Pa = 0.133 kPa
   1 mm of Hg = 1 torr = 133 Pa
5. *पास्कल का नियम :* इसके अनुसार विरामावस्था में तरल का दाब उन सभी बिंदुओं पर जो समान ऊँचाई पर स्थित हैं, समान होता है। किसी परिबद्ध तरल पर आरोपित दाब बिना घटे उस तरल के सभी बिंदुओं तथा पात्र की दीवारों पर संचरित हो जाता है।
6. किसी तरल के भीतर दाब गहराई h के साथ इस व्यंजक के अनुसार परिवर्तित होता है
   $P = P_a + \rho gh$
   यहाँ ρ तरल का घनत्व है जिसे एकसमान माना गया है।
7. किसी असमान अनुप्रस्थ काट वाले पाइप में अपरिवर्ती प्रवाहरत, असंपीड्य तरल के प्रत्येक बिंदु से एक सेकंड में प्रवाहित होने वाले आयतन का परिमाण समान रहता है।
   $v A$ = नियतांक (v वेग तथा A अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल)
   असंपीड्य तरलों के बहाव में यह समीकरण संहति संरक्षण के नियम के कारण है।
8. *बर्नूली का सिद्धांत :* इस सिद्धांत के अनुसार जब हम किसी धारा रेखा के अनुदिश गमन करते हैं, तो दाब (P), प्रति एकांक आयतन गतिज ऊर्जा ($\rho v^2/2$), तथा प्रति एकांक आयतन स्थितिज ऊर्जा (ρgy) का योग अचर रहता है
   $P + \rho v^2/2 + \rho gy$ = नियतांक
   यह समीकरण, मूलत: अपरिवर्ती प्रवाहरत, शून्य श्यानता वाले तरल के लिए लागू होने वाला ऊर्जा संरक्षण नियम है। शून्य श्यानता का कोई द्रव नहीं होता अत: उपरोक्त कथन लगभग सत्य है। श्यानता घर्षण की भाँति होती है और वह गतिज ऊर्जा को ऊष्मा ऊर्जा में बदल देती है।
9. यद्यपि तरल में अपरूपण विकृति के लिए अपरूपक प्रतिबल की आवश्यकता नहीं होती, परन्तु जब किसी तरल पर अपरूपण प्रतिबल लगाया जाता है तो उसमें गति आ जाती है, जिसके कारण इसमें एक अपरूपण विकृति उत्पन्न हो जाती है जो समय के बढ़ने के साथ बढ़ती है। अपरूपण प्रतिबल एवं अपरूपण विकृति की समय दर के अनुपात को श्यानता गुणांक η कहते हैं।
   यहाँ प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं जो पाठ्य सामग्री में दिए गए हैं।
10. *स्टोक का नियम :* इस नियम के अनुसार a त्रिज्या का गोला, जो श्यानता η के तरल में, $\mathbf{v}$ वेग से गतिमान है, द्रव की श्यानता के कारण एक श्यान कर्षण बल $\mathbf{F}$ अनुभव करता है जो $\mathbf{F} = -6\pi\eta a\mathbf{v}$ द्वारा व्यक्त किया जा सकता है।
11. किसी तरल के प्रक्षुब्ध प्रवाह का आरंभ एक विमाहीन प्राचल, जिसे *रेनल्ड्स संख्या* कहते हैं, द्वारा निर्धारित किया जाता है।
    $R_e = \rho vd/\eta$
    यहाँ d तरल प्रवाह से संबद्ध कोई प्ररूपी ज्यामितीय लंबाई है तथा अन्य प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।
12. किसी द्रव का पृष्ठ तनाव प्रति एकांक लंबाई पर आरोपित बल (अथवा प्रति एकांक क्षेत्रफल की पृष्ठीय ऊर्जा होता है), जो द्रव तथा सीमांत पृष्ठ के बीच अंतरापृष्ठ के तल में कार्य करता है। यह वह अतिरिक्त ऊर्जा है जो द्रव के अभ्यंतर (आंतरिक) के अणुओं की अपेक्षा इसके अंतरापृष्ठ के अणुओं में होती है।

विचारणीय विषय

1. दाब एक *अदिश राशि* है। दाब की परिभाषा "प्रति एकांक क्षेत्रफल पर आरोपित बल" से हमारे मन में ऐसी धारणा बनती है कि दाब सदिश राशि है जो कि वास्तव में असत्य है। परिभाषा के अंश में जिस 'बल' का प्रयोग किया गया है वह वास्तव में बल का एक घटक है जो पृष्ठ के क्षेत्रफल पर अभिलंबवत् आरोपित होता है। तरलों का वर्णन करते समय कण तथा दृढ़ पिण्ड यांत्रिकी की तुलना में संकल्पनात्मक बदलाव की आवश्यकता होती है। यहाँ हमारी रुचि तरल के उन-उन धर्मों में है जो तरल के एक बिंदु से दूसरे बिंदु में परिवर्तित हो जाते हैं।
2. हमें यह कदापि नहीं सोचना चाहिए कि तरल केवल ठोसों, जैसे किसी पात्र की दीवारें अथवा तरल में डूबा ठोस पदार्थ, पर ही दाब डालते हैं। वास्तव में तरल में हर बिंदु पर दाब होता है। तरल का कोई अवयव (जैसा कि चित्र 10.2 (a)] में दर्शाया गया है, उसके विभिन्न फलकों पर सामान्य दाब आरोपित होने के कारण साम्यावस्था में होता है।
3. दाब के लिए व्यंजक
   $P = P_a + \rho g h$
   तभी सत्य होता है, जब तरल असंपीड्य हो। व्यावहारिक रूप से कहें तो यह द्रवों पर जो अधिकतर असंपीड्य हैं, लागू होता है और इसीलिए एक नियत ऊँचाई के लिए अपरिवर्तनीय रहता है।
4. गेज़ दाब (या प्रमापी दाब) वास्तविक दाब तथा वायुमण्डलीय दाब का अंतर होता है।
   $P - P_a = P_g$
   बहुत सी दाब मापक युक्तियाँ गेज़ दाब ही मापती हैं। इनमें टायरों के दाब गेज़ तथा रक्तचाप गेज़ (स्फाइग्मौमैनोमीटर) सम्मिलित हैं।
5. धारारेखा किसी तरल प्रवाह का मानचित्र होती है। स्थायी प्रवाह में दो धारारेखाएँ एक दूसरे को नहीं काटतीं। यदि ऐसा होता, तो जिस बिंदु पर दो धारारेखाएँ एक दूसरे को काटती हैं वहाँ तरल कण के दो संभव वेग होते।
6. जिन तरलों में श्यान कर्षण होता है उन पर बर्नूली-सिद्धांत लागू नहीं होता। इस प्रकरण में क्षयकारी श्यान बल द्वारा किया गया कार्य भी गणना में लेना चाहिए तथा P_2 [चित्र 10.9] का मान समीकरण (10.12) में दिए गए मान से कम होगा।
7. ताप बढ़ने पर द्रव के परमाणु और अधिक गतिशील हो जाते हैं तथा श्यानता गुणांक η का मान घट जाता है। किसी गैस में ताप बढ़ने पर उसके परमाणुओं की यादृच्छिक गति बढ़ जाती है और η भी बढ़ जाता है।
8. किसी प्रक्षोभ के आरंभ के लिए क्रांतिक रेनल्ड्स संख्या प्रवाह की ज्यामिति के अनुसार 1000 से 10000, के बीच हो सकता है। $1000 < R_e < 2000$ अस्थायी प्रवाह को तथा $R_e < 2000$ प्रक्षुब्ध प्रवाह को परिलक्षित करता है।
9. पृष्ठ पर अणुओं की स्थितिज ऊर्जा अभ्यंतर के अणुओं की स्थितिज ऊर्जा की अपेक्षा अधिक होने के कारण पृष्ठ तनाव होता है। दो पदार्थों जिनमें कम से कम एक तरल है, के अंतरापृष्ठ पर (जो दोनों को पृथक करता है) पृष्ठ ऊर्जा होती है। यह केवल एक तरल का ही गुण नहीं है।

भौतिक राशि	प्रतीक	विमाएँ	मात्रक	टिप्पणी
दाब	P	$[M L^{-1} T^{-2}]$	पास्कल (Pa)	1 atm = 1.013×10^5 Pa, अदिश
घनत्व	ρ	$[M L^{-3}]$	kg m^{-3}	अदिश
आपेक्षिक घनत्व		–	–	$\frac{\rho_{पदार्थ}}{\rho_{जल}}$, अदिश
श्यानता गुणांक	η	$[M L^{-1} T^{-1}]$	Pa s or पोयसुले (Pl)	अदिश
रेनल्ड्स संख्या	R_e	–	–	$R_e = \frac{\rho v d}{\eta}$, अदिश
पृष्ठ तनाव	S	$[M T^{-2}]$	N m^{-1}	अदिश

अभ्यास

10.1 स्पष्ट कीजिए क्यों

(a) मस्तिष्क की अपेक्षा मानव का पैरों पर रक्त चाप अधिक होता है।

(b) 6 km ऊँचाई पर वायुमण्डलीय दाब समुद्र तल पर वायुमण्डलीय दाब का लगभग आधा हो जाता है, यद्यपि वायुमण्डल का विस्तार 100 km से भी अधिक ऊँचाई तक है।

(c) यद्यपि दाब, प्रति एकांक क्षेत्रफल पर लगने वाला बल होता है तथापि द्रवस्थैतिक दाब एक अदिश राशि है।

10.2 स्पष्ट कीजिए क्यों

(a) पारे का काँच के साथ स्पर्श कोण अधिक कोण होता है जबकि जल का काँच के साथ स्पर्श कोण न्यून कोण होता है।

(b) काँच के स्वच्छ समतल पृष्ठ पर जल फैलने का प्रयास करता है जबकि पारा उसी पृष्ठ पर बूँदें बनाने का प्रयास करता है। (दूसरे शब्दों में जल काँच को गीला कर देता है जबकि पारा ऐसा नहीं करता है।)

(c) किसी द्रव का पृष्ठ तनाव पृष्ठ के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता है।

(d) जल में घुले अपमार्जकों के स्पर्श कोणों का मान कम होना चाहिए।

(e) यदि किसी बाह्य बल का प्रभाव न हो, तो द्रव बूँद की आकृति सदैव गोलाकार होती है।

10.3 प्रत्येक प्रकथन के साथ संलग्न सूची में से उपयुक्त शब्द छाँटकर उस प्रकथन के रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए:

(a) व्यापक रूप में द्रवों का पृष्ठ तनाव ताप बढ़ने पर.......... है। (बढ़ता/घटता)

(b) गैसों की श्यानता ताप बढ़ने पर......... है, जबकि द्रवों की श्यानता ताप बढ़ने पर .... है। (बढ़ती/घटती)

(c) दृढ़ता प्रत्यास्थता गुणांक वाले ठोसों के लिए अपरूपण प्रतिबल.............. के अनुक्रमानुपाती होता है, जबकि द्रवों के लिए वह .... के अनुक्रमानुपाती होता है। (अपरूपण विकृति/अपरूपण विकृति की दर)

(d) किसी तरल के अपरिवर्ती प्रवाह में आए किसी संकीर्णन पर प्रवाह की चाल में वृद्धि में .... का अनुसरण होता है। (संहति का संरक्षण/बर्नूली सिद्धांत)

(e) किसी वायु सुरंग में किसी वायुयान के मॉडल में प्रक्षोभ की चाल वास्तविक वायुयान के प्रक्षोभ के लिए क्रांतिक चाल की तुलना में......... होती है। (अधिक/कम)

10.4 निम्नलिखित के कारण स्पष्ट कीजिए :

(a) किसी कागज़ की पट्टी को क्षैतिज रखने के लिए आपको उस कागज़ पर ऊपर की ओर हवा फूँकनी चाहिए, नीचे की ओर नहीं।

(b) जब हम किसी जल टोंटी को अपनी उँगलियों द्वारा बंद करने का प्रयास करते हैं, तो उँगलियों के बीच की खाली जगह से तीव्र जल धाराएँ फूट निकलती हैं।

(c) इंजक्शन लगाते समय डॉक्टर के अँगूठे द्वारा आरोपित दाब की अपेक्षा सुई का आकार दवाई की बहि:प्रवाही धारा को अधिक अच्छा नियंत्रित करता है।

(d) किसी पात्र के बारीक छिद्र से निकलने वाला तरल उस पर पीछे की ओर प्रणोद आरोपित करता है।

(e) कोई प्रचक्रमान क्रिकेट की गेंद वायु में परवलीय प्रपथ का अनुसरण नहीं करती।

10.5 ऊँची एड़ी के जूते पहने 50 kg संहति की कोई बालिका अपने शरीर को 1.0 cm व्यास की एक ही वृत्ताकार एड़ी पर संतुलित किए हुए है। क्षैतिज फर्श पर एड़ी द्वारा आरोपित दाब ज्ञात कीजिए।

10.6 टॉरिसिली के वायुदाब मापी में पारे का उपयोग किया गया था। पास्कल ने ऐसा ही वायुदाब मापी 984 kg m^{-3} घनत्व की फ्रेंच शराब का उपयोग करके बनाया। सामान्य वायुमंडलीय दाब के लिए शराब-स्तंभ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

10.7 समुद्र तट से दूर कोई ऊर्ध्वाधर संरचना 10^9 Pa के अधिकतम प्रतिबल को सहन करने के लिए बनाई गई है। क्या यह संरचना किसी महासागर के भीतर किसी तेल कूप के शिखर पर रखे जाने के लिए उपयुक्त है ? महासागर की गहराई लगभग 3 km है। समुद्री धाराओं की उपेक्षा कीजिए।

10.8 किसी द्रवचालित आटोमोबाइल लिफ्ट की संरचना अधिकतम 3000 kg संहति की कारों को उठाने के लिए की गई है। बोझ को उठाने वाले पिस्टन की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल 425 cm^2 है। छोटे पिस्टन को कितना अधिकतम दाब सहन करना होगा ?

10.9 किसी U-नली की दोनों भुजाओं में भरे जल तथा मेथेलेटिड स्पिरिट को पारा एक-दूसरे से पृथक् करता है। जब जल तथा पारे के स्तंभ क्रमशः 10 cm तथा 12.5 cm ऊँचे हैं, तो दोनों भुजाओं में पारे का स्तर समान है। स्पिरिट का आपेक्षिक घनत्व ज्ञात कीजिए।

10.10 यदि प्रश्न 10.9 की समस्या में, U-नली की दोनों भुजाओं में इन्हीं दोनों द्रवों को और उड़ेल कर दोनों द्रवों के स्तंभों की ऊँचाई 15 cm और बढ़ा दी जाएँ, तो दोनों भुजाओं में पारे के स्तरों में क्या अंतर होगा। (पारे का आपेक्षिक घनत्व = 13.6)।

10.11 क्या बर्नूली समीकरण का उपयोग किसी नदी की किसी क्षिप्रिका के जल-प्रवाह का विवरण देने के लिए किया जा सकता है ? स्पष्ट कीजिए।

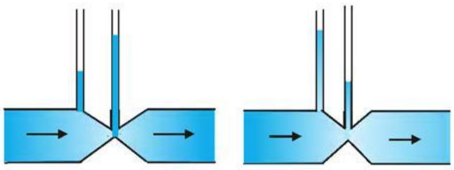
10.12 बर्नूली समीकरण के अनुप्रयोग में यदि निरपेक्ष दाब के स्थान पर प्रमापी दाब (गेज़ दाब) का प्रयोग करें तो क्या इससे कोई अंतर पड़ेगा ? स्पष्ट कीजिए।

10.13 किसी 1.5 m लंबी 1.0 cm त्रिज्या की क्षैतिज नली से ग्लिसरीन का अपरिवर्ती प्रवाह हो रहा है। यदि नली के एक सिरे पर प्रति सेकंड एकत्र होने वाली ग्लिसरीन का परिमाण 4.0×10^{-3} kg s^{-1} है, तो नली के दोनों सिरों के बीच दाबांतर ज्ञात कीजिए। (ग्लिसरीन का घनत्व = 1.3×10^3 kg m^{-3} तथा ग्लिसरीन की श्यानता = 0.83 Pa s)

[आप यह भी जाँच करना चाहेंगे कि क्या इस नली में स्तरीय प्रवाह की परिकल्पना सही है।]

10.14 किसी आदर्श वायुयान के परीक्षण प्रयोग में वायु-सुरंग के भीतर पंखों के ऊपर और नीचे के पृष्ठों पर वायु-प्रवाह की गतियाँ क्रमशः 70 m s^{-1} तथा 63 m s^{-1} हैं। यदि पंख का क्षेत्रफल 2.5 m^2 है, तो उस पर आरोपित उत्थापक बल परिकलित कीजिए। वायु का घनत्व 1.3 kg m^{-3} लीजिए।

10.15 चित्र 10.23(a) तथा (b) किसी द्रव (श्यानताहीन) का अपरिवर्ती प्रवाह दर्शाते हैं। इन दोनों चित्रों में से कौन सही नहीं है ? कारण स्पष्ट कीजिए।

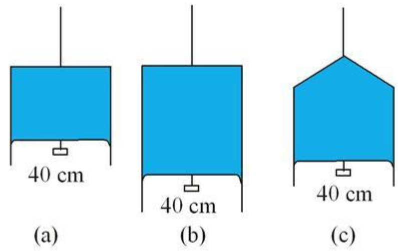


(a) *चित्र 10.23* (b)

10.16 किसी स्प्रे पंप की बेलनाकार नली की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल 8.0 cm^2 है। इस नली के एक सिरे पर 1.0 mm व्यास के 40 सूक्ष्म छिद्र हैं। यदि इस नली के भीतर द्रव के प्रवाहित होने की दर 1.5 m min^{-1} है, तो छिद्रों से होकर जाने वाले द्रव की निष्कासन-चाल ज्ञात कीजिए।

10.17 U-आकार के किसी तार को साबुन के विलयन में डुबो कर बाहर निकाला गया जिससे उस पर एक पतली साबुन की फिल्म बन गई। इस तार के दूसरे सिरे पर फिल्म के संपर्क में एक फिसलने वाला हलका तार लगा है जो 1.5×10^{-2} N भार (जिसमें इसका अपना भार भी सम्मिलित है) को सँभालता है। फिसलने वाले तार की लंबाई 30 cm है। साबुन की फिल्म का पृष्ठ तनाव कितना है ?

10.18 निम्नांकित चित्र 10.24(a) में किसी पतली द्रव-फिल्म को 4.5×10^{-2} N का छोटा भार सँभाले दर्शाया गया है। चित्र (b) तथा (c) में बनी इसी द्रव की फिल्में इसी ताप पर कितना भार सँभाल सकती हैं ? अपने उत्तर को प्राकृतिक नियमों के अनुसार स्पष्ट कीजिए।



चित्र 10.24

10.19 3.00 mm त्रिज्या की किसी पारे की बूँद के भीतर कमरे के ताप पर दाब क्या है? 20 °C ताप पर पारे का पृष्ठ तनाव 4.65×10^{-1} N m^{-1} है। यदि वायुमंडलीय दाब 1.01×10^5 Pa है, तो पारे की बूँद के भीतर दाब-अधिक्य भी ज्ञात कीजिए।

10.20 5.00 mm त्रिज्या के किसी साबुन के विलयन के बुलबुले के भीतर दाब-आधिक्य क्या है? 20 °C ताप पर साबुन के विलयन का पृष्ठ तनाव 2.50×10^{-2} N m^{-1} है। यदि इसी विमा का कोई वायु का बुलबुला 1.20 आपेक्षिक घनत्व के साबुन के विलयन से भरे किसी पात्र में 40.0 cm गहराई पर बनता, तो इस बुलबुले के भीतर क्या दाब होता, ज्ञात कीजिए। (1 वायुमंडलीय दाब = 1.01×10^5 Pa)।

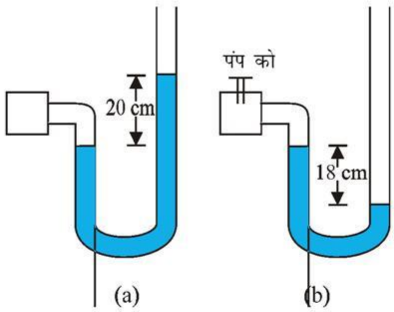
अतिरिक्त अभ्यास

10.21 1.0 m^2 क्षेत्रफल के वर्गाकार आधार वाले किसी टैंक को बीच में ऊर्ध्वाधर विभाजक दीवार द्वारा दो भागों में बाँटा गया है। विभाजक दीवार में नीचे 20 cm^2 क्षेत्रफल का कब्जेदार दरवाज़ा है। टैंक का एक भाग जल से भरा है तथा दूसरा भाग 1.7 आपेक्षिक घनत्व के अम्ल से भरा है। दोनों भाग 4.0 m ऊँचाई तक भरे गए हैं। दरवाज़े को बंद रखने के आवश्यक बल परिकलित कीजिए।

10.22 चित्र 10.25(a) में दर्शाए अनुसार कोई मैनोमीटर किसी बर्तन में भरी गैस के दाब का पाठ्यांक लेता है। पंप द्वारा कुछ गैस बाहर निकालने के पश्चात् मैनोमीटर चित्र 10.25(b) में दर्शाए अनुसार पाठ्यांक लेता है। मैनोमीटर में पारा भरा है तथा वायुमंडलीय दाब का मान 76 cm (Hg) है।

(i) प्रकरणों (a) तथा (b) में बर्तन में भरी गैस के निरपेक्ष दाब तथा प्रमापी दाब cm (Hg) के मात्रक में लिखिए।

(ii) यदि मैनोमीटर की दाहिनी भुजा में 13.6 cm ऊँचाई तक जल (पारे के साथ अमिश्रणीय) उड़ेल दिया जाए तो प्रकरण (b) में स्तर में क्या परिवर्तन होगा? (गैस के आयतन में हुए थोड़े परिवर्तन की उपेक्षा कीजिए।)



चित्र 10.25

10.23 दो पात्रों के आधारों के क्षेत्रफल समान हैं परंतु आकृतियाँ भिन्न-भिन्न हैं। पहले पात्र में दूसरे पात्र की अपेक्षा किसी ऊँचाई तक भरने पर दो गुना जल आता है। क्या दोनों प्रकरणों में पात्रों के आधारों पर आरोपित बल समान हैं। यदि ऐसा है तो भार मापने की मशीन पर रखे एक ही ऊँचाई तक जल से भरे दोनों पात्रों के पाठ्यांक भिन्न-भिन्न क्यों होते हैं ?

10.24 रुधिर-आधान के समय किसी शिरा में, जहाँ दाब 2000 Pa है, एक सुई धँसाई जाती है। रुधिर के पात्र को किस ऊँचाई पर रखा जाना चाहिए ताकि शिरा में रक्त ठीक-ठीक प्रवेश कर सके। (संपूर्ण रुधिर का घनत्व सारणी 10.1 में दिया गया है।)

10.25 बर्नूली समीकरण व्युत्पन्न करने में हमने नली में भरे तरल पर किए गए कार्य को तरल की गतिज तथा स्थितिज ऊर्जाओं में परिवर्तन के बराबर माना था। (a) यदि क्षयकारी बल उपस्थित है, तब नली के अनुदिश तरल में गति करने पर दाब में परिवर्तन किस प्रकार होता है ? (b) क्या तरल का वेग बढ़ने पर क्षयकारी बल अधिक महत्त्वपूर्ण हो जाते हैं ? गुणात्मक रूप में चर्चा कीजिए।

10.26 (a) यदि किसी धमनी में रुधिर का प्रवाह पटलीय प्रवाह ही बनाए रखना है तो 2×10^{-3} m त्रिज्या की किसी धमनी में रुधिर-प्रवाह की अधिकतम चाल क्या होनी चाहिए ? (b) तदनुरूपी प्रवाह-दर क्या है ? (रुधिर की श्यानता 2.084×10^{-3} Pa s लीजिए)।

10.27 कोई वायुयान किसी निश्चित ऊँचाई पर किसी नियत चाल से आकाश में उड़ रहा है तथा इसके दोनों पंखों में प्रत्येक का क्षेत्रफल 25 m^2 है। यदि वायु की चाल पंख के निचले पृष्ठ पर 180 km h^{-1} तथा ऊपरी पृष्ठ पर 234 km h^{-1} है, तो वायुयान की संहति ज्ञात कीजिए। (वायु का घनत्व 1 kg m^{-3} लीजिए)।

10.28 मिलिकन तेल बूँद प्रयोग में, 2.0×10^{-5} m त्रिज्या तथा 1.2×10^{3} kg m^{-3} घनत्व की किसी बूँद की सीमांत चाल क्या है? प्रयोग के ताप पर वायु की श्यानता 1.8×10^{-5} Pa s लीजिए। इस चाल पर बूँद पर श्यान बल कितना है ? (वायु के कारण बूँद पर उत्प्लावन बल की उपेक्षा कीजिए)।

10.29 सोडा काँच के साथ पारे का स्पर्श कोण 140° है। यदि पारे से भरी द्रोणिका में 1.00 mm त्रिज्या की काँच की किसी नली का एक सिरा डुबोया जाता है, तो पारे के बाहरी पृष्ठ के स्तर की तुलना में नली के भीतर पारे का स्तर कितना नीचे चला जाता है ? (पारे का घनत्व = 13.6×10^{3} kg m^{-3})

10.30 3.0 mm तथा 6.0 mm व्यास की दो संकीर्ण नलियों को एक साथ जोड़कर दोनों सिरों से खुली एक U-आकार की नली बनाई जाती है। यदि इस नली में जल भरा है, तो इस नली की दोनों भुजाओं में भरे जल के स्तरों में क्या अंतर है। प्रयोग के ताप पर जल का पृष्ठ तनाव 7.3×10^{-2} N m^{-1} है। स्पर्श कोण शून्य लीजिए तथा जल का घनत्व 1.0×10^{3} kg m^{-3} लीजिए। ($g = 9.8$ m s^{-2})

परिकलित्र/कंप्यूटर-आधारित प्रश्न

10.31 (a) यह ज्ञात है कि वायु का घनत्व ρ ऊँचाई y (मीटरों में) के साथ इस संबंध के अनुसार घटता है :

$$\rho = \rho_0 e^{-y/y_0}$$

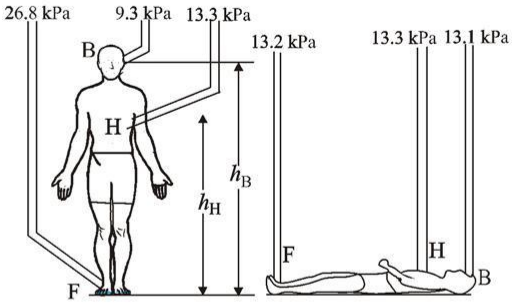
यहाँ समुद्र तल पर वायु का घनत्व $\rho_0 = 1.25$ kg m^{-3} तथा y_0 एक नियतांक है। घनत्व में इस परिवर्तन को वायुमंडल का नियम कहते हैं। यह संकल्पना करते हुए कि वायुमंडल का ताप नियत रहता है (समतापी अवस्था) इस नियम को प्राप्त कीजिए। यह भी मानिए कि g का मान नियत रहता है।

(b) 1425 m^3 आयतन का हीलियम से भरा कोई बड़ा गुब्बारा 400 kg के किसी पेलोड को उठाने के काम में लाया जाता है। यह मानते हुए कि ऊपर उठते समय गुब्बारे की त्रिज्या नियत रहती है, गुब्बारा कितनी अधिकतम ऊँचाई तक ऊपर उठेगा?

[$y_0 = 8000$ m तथा $\rho_{He} = 0.18$ kg m^{-3} लीजिए।]

परिशिष्ट 10.1 रक्त दाब (रक्त चाप) क्या है ?

विकासमूलक इतिहास में एक ऐसा समय भी आया जब जंतुओं ने अपना अधिकांश समय खड़े रहकर बिताना आरंभ कर दिया । इससे उनके परिसंचरण तंत्रों का कार्य बढ़ गया । इससे उनके शिरा तंत्र, जो निचले अग्रांगों से रक्त को वापस हृदय तक पहुँचाते हैं, में परिवर्तन हुए। आप जानते ही हैं कि शिराएँ रक्त वाहिकाएँ होती हैं जिनसे होकर रक्त वापस हृदय तक पहुँचता है । मानव तथा जिराफ जैसे जंतुओं ने अपना अनुकूलन करके गुरुत्व बल के विपरीत अपने शरीर के विभिन्न भागों तक रक्त को ऊपर पहुँचाने की समस्या को हल कर लिया है । परंतु, कुछ जीवों; जैसे–साँप, चूहा, तथा खरगोश को यदि ऊपरिमुखी रखें तो वे मर जाएँगे । इसका कारण यह है कि इन जीवों के शिरा-तंत्रों में रक्त को, गुरुत्व बल के विपरीत, हृदय तक वापस भेजने की सामर्थ्य नहीं होती, फलस्वरूप रक्त के निचले अग्रांगों में ही रहने के कारण ये जीव मर जाते हैं ।



चित्र 10.26 मानव शरीर के विभिन्न भागों की धमनियों में खड़े होते समय तथा लेटते समय गेज़ दाबों का आरेखीय दृश्य । यहाँ किसी एक हृदय-चक्र के औसत दाब दर्शाए गए हैं ।

चित्र 10.26 में किसी मानव शरीर के विभिन्न बिंदुओं की धमनियों पर प्रेक्षित औसत दाब दर्शाए गए हैं । क्योंकि श्यानता के प्रभाव कम हैं, अतः इन दाबों को समझने के लिए बर्नूली समीकरण (10.13),

$$P+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho g y = \text{स्थिरांक}$$

का उपयोग किया जा सकता है । क्योंकि तीनों धमनियों में रक्त के प्रवाह के वेग कम (≈ 0.1 m s^{-1}) तथा लगभग अचर हैं, अतः हम बर्नूली की उपरोक्त समीकरण में गतिज ऊर्जा के पद $\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)$ की उपेक्षा कर सकते हैं । इसीलिए मस्तिष्क, हृदय तथा पाद (पैर) के गेज़ दाबों (प्रमापी दाबों) क्रमशः P_B, P_H तथा P_F में परस्पर संबंध को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं,

$$P_F = P_H + \rho g\, h_H = P_B + \rho g\, h_B \qquad (10.34)$$

यहाँ ρ रक्त का घनत्व है ।

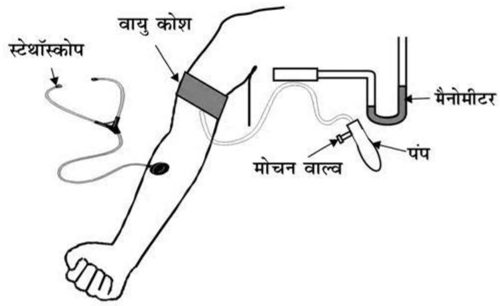
हृदय तथा मस्तिष्क की ऊँचाइयों के प्ररूपी मान h_H = 1.3 m तथा h_B = 1.7 m होते हैं । $\rho = 1.06 \times 10^3$ kg m^{-3} लेने पर हमें पाद का प्रमापी दाब P_F = 26.8 kPa (किलो पास्कल) तथा मस्तिष्क का प्रमापी दाब P_B = 9.3 kPa प्राप्त होता है, जबकि हमें यह ज्ञात है कि हृदय का प्रमापी दाब P_H = 13.3 kPa है । इस प्रकार, जब कोई व्यक्ति खड़ा होता है तब उसके शरीर के निचले भाग तथा ऊपरी भाग के दाबों में इतना अंतर होता है । परंतु लेटी हुई स्थिति में ये दाब लगभग बराबर होते हैं । जैसा कि इसी अध्याय में पहले की जा चुकी चर्चा से स्पष्ट है कि औषध तथा शरीर विज्ञान में सामान्य उपयोग में टॉर (torr) तथा mm (Hg) को दाब के मात्रक के रूप में काम में लाया जाता है । 1 mm (Hg) = 1 torr = 0.133 kPa । इस प्रकार, हृदय पर औसत दाब P_H = 13.3 kPa = 100 mm (Hg) ।

मानव शरीर प्रकृति का अद्भुत चमत्कार है । इसके निचले अग्रांगों की शिराओं में वाल्व होते हैं, जो उस समय खुलते हैं जब रक्त हृदय की ओर प्रवाहित होता है, तथा उस समय बंद हो जाते हैं, जब रक्त नीचे की ओर प्रवाहित होने का प्रयास करता है । श्वसन क्रिया तथा चलते समय कंकाल पेशियों में लचक से संबद्ध पंपन क्रिया द्वारा भी आंशिक तौर पर कुछ न कुछ रक्त वापस लौट जाता है । इससे यह स्पष्ट होता है कि "सावधान" की स्थिति में खड़े रहने के लिए बाध्य कोई सिपाही हृदय में पर्याप्त मात्रा में रक्त के वापस न पहुँच पाने के कारण शिथिल (मूर्च्छित-सा) क्यों हो जाता है । यदि उसे एक बार लेटने की अनुमति प्रदान कर दी जाए, तो दाब समान हो जाता है

और वह पुन: होश में आ जाता है ।

मनुष्यों के रक्त चाप को मापने के लिए प्राय: एक उपकरण का उपयोग किया जाता है जिसे नाड़ी दाबांतर मापी (स्फ़िग्मॉमैनोमीटर) कहते हैं । यह एक तीव्र, पीड़ाहीन तथा अनाक्रामक तकनीक होती है जिससे डॉक्टर को रोगी के स्वास्थ्य के बारे में विश्वसनीय धारणा प्राप्त होती है । चित्र 10.27 में रक्त चाप मापने की प्रक्रिया दर्शायी गई है । इस प्रक्रिया में ऊपरी भुजा का उपयोग करने के दो कारण हैं । पहला कारण यह है कि इसका स्तर हृदय के स्तर के समान होता है, जिसके कारण यहाँ पर ली गई दाब की माप हृदय पर दाब के लगभग बराबर होती है । दूसरा कारण यह है कि ऊपरी भुजा में केवल एक ही अस्थि होती है जिसके कारण यहाँ की धमनी (जिसे बाहुधमनी कहते हैं) को संपीडित करना सरल होता है ।

हम सभी ने कलाई पर अंगुलियों को रखकर नाड़ी-दर (*स्पंदन-दर*) मापी है । प्रत्येक स्पंद एक सेकंड से कुछ कम समय लेता है । प्रत्येक स्पंदन में जैसे ही हृदय द्वारा रक्त पंप किया जाता है (*प्रकुंचन दाब*), तब हृदय तथा परिसंचरण तंत्र में दाब अधिकतम होता है तथा जब हृदय शिथिल होता है (अनुशिथिलन दाब), तब यह दाब न्यूनतम होता है । स्फ़िग्मॉमैनोमीटर वह युक्ति है जो इन दो चरम दाबों को मापती है । ***इसके कार्य करने का सिद्धांत यह है कि बाहु धमनी (ऊपरी भुजा) में प्रवाहित होने वाले रक्त के प्रवाह को उचित संपीडन द्वारा स्तरीय प्रवाह से प्रक्षुब्ध प्रवाह में परिवर्तित किया जा सकता है । प्रक्षुब्ध प्रवाह क्षयकारी होता है, तथा इसकी ध्वनि को स्टेथॉस्कोप द्वारा ढूँढ़ा जा सकता है ।***



चित्र 10.27 स्फ़िग्मॉमैनोमीटर तथा स्टेथॉस्कोप का उपयोग करके रक्त-चाप मापना ।

ऊपरी भुजा के चारों ओर लिपटे वायु कोश के भीतर की वायु का गेज़ दाब किसी मैनोमीटर अथवा डायल दाब गेज़ (चित्र 10.27) की सहायता से मापा जाता है । सर्वप्रथम कोश का भीतरी दाब उस सीमा तक बढ़ाया जाता है कि बाहु धमनी बंद हो जाए । तत्पश्चात् कोश में वायु दाब धीरे-धीरे घटाया जाता है तथा कोश के तुरंत नीचे स्टेथॉस्कोप को रखकर बाहु धमनी से आने वाले कोलाहल (शोर) को सुनते हैं । जब दाब प्रकुंचन (शिखर) दाब से तुरंत नीचे होता है तो धमनी बहुत थोड़ी-सी खुलती है । इस अल्पकालीन अवधि में अत्यधिक संकुचित धमनी में रक्त के प्रवाह का वेग उच्च तथा प्रक्षुब्ध होने के कारण कोलाहलपूर्ण होता है । स्टेथॉस्कोप द्वारा यही परिणाम कोलाहल निकासी ध्वनि के रूप में सुनाई देता है । जब कोश में वायु दाब और कम किया जाता है तब हृदय-चक्र के अधिकांश भाग के लिए धमनी खुली रहती है । तथापि धड़कन की अनुशिथिलन (न्यूनतम दाब) प्रावस्था की अवधि में यह बंद रहती है । इस प्रकार, निकासी ध्वनि की अवधि अपेक्षाकृत बड़ी होती है । जब कोश में दाब अनुशिथिलन दाब के बराबर हो जाता है तो हृदय-चक्र की समस्त अवधि में धमनी खुली रहती है । यद्यपि, अब भी प्रवाह प्रक्षुब्ध तथा कोलाहलपूर्ण होता है । परंतु, अब निकासी ध्वनि के स्थान पर स्टेथॉस्कोप में हम एक स्थायी, सतत् कोलाहल सुनते हैं ।

किसी रोगी का रक्त चाप प्रकुंचन दाब तथा अनुशिथिलन दाब के अनुपात के रूप में प्रस्तुत किया जाता है । किसी शांत स्वस्थ वयस्क के लिए यह प्ररूपी मान 120/80 mm (Hg) या (120/80 टॉर) होते हैं । यदि रक्त चाप 140/90 mm (Hg) से अधिक है तो उसे डॉक्टरी देखरेख तथा परामर्श चाहिए । उच्च रक्त चाप हृदय, गुर्दों (वृक्क) तथा शरीर के अन्य अंगों को गंभीर क्षति पहुँचा सकता है अत: इसे नियंत्रित किया जाना आवश्यक होता है ।

अध्याय 11

द्रव्य के तापीय गुण

11.1 भूमिका

हम सभी में ताप तथा ऊष्मा की सहज बोध धारणा होती है। ताप किसी वस्तु की तप्तता (ऊष्णता) की माप होती है। उबलते जल से भरी केतली बर्फ से भरे बॉक्स से अधिक तप्त होती है। भौतिकी में हमें ऊष्मा, ताप, आदि धारणाओं को अधिक सावधानीपूर्वक परिभाषित करने की आवश्यकता होती है। इस अध्याय में आप यह जानेंगे कि ऊष्मा क्या है और इसे कैसे मापते हैं, तथा एक वस्तु से दूसरी वस्तु में ऊष्मा प्रवाह की विभिन्न प्रक्रियाओं का अध्ययन करेंगे। अध्ययन करते आप यह भी ज्ञात करेंगे कि किसी बैलगाड़ी के लकड़ी के पहिए की नेमि पर लोहे की रिंग चढ़ाने से पहले लोहार इसे तप्त क्यों करते हैं, तथा सूर्य छिपने के पश्चात् समुद्र तटों पर पवन प्राय: अपनी दिशा उत्क्रमित क्यों कर लेती हैं? आप यह भी जानेंगे कि क्या होता है जब जल उबलता अथवा जमता है तथा इन प्रक्रियाओं की अवधि में इसके ताप में परिवर्तन नहीं होता, यद्यपि काफी मात्रा में ऊष्मा इनके भीतर/इनसे बाहर प्रवाहित होती है।

11.2 ताप तथा ऊष्मा

हम द्रव्य के तापीय गुणों के अध्ययन का आरंभ ताप तथा ऊष्मा की परिभाषा से कर सकते हैं। ताप तप्तता अथवा शीतलता की आपेक्षिक माप अथवा सूचन होता है। किसी तप्त बर्तन के ताप को उच्च ताप तथा बर्फ के घन के ताप को निम्न ताप कहते हैं। एक पिण्ड जिसका ताप दूसरे पिण्ड की अपेक्षा अधिक है, अपेक्षाकृत अधिक तप्त कहा जाता है। ध्यान दीजिए, कि लंबे और ठिगने की भांति तप्त तथा शीत भी आपेक्षिक पद हैं। हम स्पर्श द्वारा ताप का अनुभव कर सकते हैं। परन्तु यह ताप बोध कुछ-कुछ अविश्वसनीय होता है तथा इसका परिसर इतना सीमित है कि किसी वैज्ञानिक कार्यों के लिए इसका कोई उपयोग नहीं किया जा सकता।

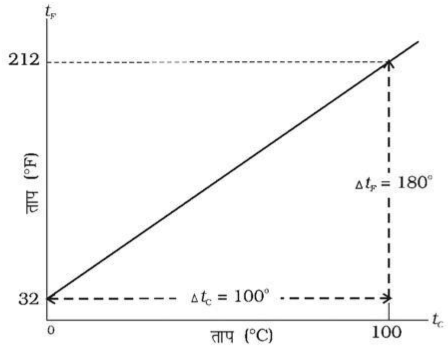
अपने अनुभवों से हम यह जानते हैं कि किसी तप्त गर्मी के दिन एक मेज पर रखा बर्फ के शीतल जल से भरा गिलास अंततोगत्वा गर्म हो जाता है जबकि तप्त चाय से भरा प्याला उसी मेज पर ठंडा हो जाता है। इसका अर्थ यह हुआ कि जब भी किसी वस्तु (निकाय), इस प्रकरण में बर्फ का शीतल जल अथवा

गर्म चाय, तथा उसके परिवेशी माध्यम के तापों में अंतर होगा तो वस्तु तथा उसके परिवेशी माध्यम के बीच उस समय तक ऊष्मा स्थानांतरण होता है जब तक वस्तु तथा इसका परिवेशी माध्यम समान ताप पर नहीं आ जाते। हम यह भी जानते हैं कि गिलास में भरे शीतल जल के प्रकरण में ऊष्मा पर्यावरण से गिलास में प्रवाहित होती है, जबकि गर्म चाय के प्रकरण में ऊष्मा गर्म चाय के प्याले से पर्यावरण में प्रवाहित होती है। अतः हम यह कह सकते हैं कि **ऊष्मा ऊर्जा का एक रूप है जिसका स्थानांतरण दो (अथवा अधिक) निकायों के बीच अथवा किसी निकाय तथा उसके परिवेश के बीच ताप में अंतर के कारण होता है।** स्थानांतरित ऊष्मा ऊर्जा के SI मात्रक को जूल (J) में व्यक्त किया जाता है जबकि ताप का SI मात्रक केल्विन (K) है तथा °C सामान्य उपयोग में आने वाला ताप का मात्रक है। जब किसी वस्तु को गर्म करते हैं तो उसमें बहुत से परिवर्तन हो सकते हैं। इसके ताप में वृद्धि हो सकती है, इसमें प्रसार हो सकता है अथवा अवस्था परिवर्तन हो सकता है। अनुवर्ती अनुभागों में हम विभिन्न वस्तुओं पर ऊष्मा के प्रभाव का अध्ययन करेंगे।

11.3 ताप मापन

तापमापी (थर्मामीटर) का उपयोग करके ताप की एक माप प्राप्त होती है। पदार्थों के बहुत से भौतिक गुणों में ताप के साथ पर्याप्त परिवर्तन होते हैं जिन्हें तापमापी की रचना का आधार मानकर उपयोग किया जाता है। सामान्य उपयोग में आने वाला गुण "ताप के साथ किसी द्रव के आयतन में परिवर्तन" होता है। उदाहरण के लिए, सामान्य तापमापी (काँच-में-द्रव प्रकार), जिससे आप परिचित हैं। पारा तथा एल्कोहॉल ऐसे द्रव हैं जिनका उपयोग अधिकांश काँच-में-द्रव तापमापियों में किया जाता है।

तापमापियों का अंशांकन इस प्रकार किया जाता है कि किसी दिए गए ताप को कोई संख्यात्मक मान निर्धारित किया जा सके। किसी भी मानक मापक्रम के लिए दो नियत संदर्भ बिंदुओं की आवश्यकता होती है। चूंकि ताप के साथ सभी पदार्थों की विमाएँ परिवर्तित होती हैं अतः प्रसार के लिए कोई निरपेक्ष संदर्भ उपलब्ध नहीं है। तथापि आवश्यक नियत बिंदु को सदैव समान ताप पर होने वाली भौतिक परिघटनाओं से संबंधित किया जा सकता है। जल का हिमांक तथा भाप-बिंदु दो सुविधाजनक नियत बिंदु हैं, जिन्हें हिमांक तथा क्वथनांक कहते हैं। ये दो नियत बिंदु वह ताप हैं जिन पर शुद्ध जल मानक दाब के अधीन जमता तथा उबलता है। फारेनहाइट ताप मापक्रम तथा सेल्सियस ताप मापक्रम, दो सुपरिचित ताप मापक्रम हैं। फारेनहाइट मापक्रम पर हिमांक तथा भाप-बिंदु के मान क्रमशः 32°F तथा 212°F हैं जबकि सेल्सियस मापक्रम पर इनके मान क्रमशः 0°C तथा 100°C हैं। फारेनहाइट मापक्रम पर दो संदर्भ बिंदुओं के बीच 180 समान अंतराल हैं तथा सेल्सियस मापक्रम पर ये अंतराल 100 हैं।



चित्र 11.1 फारेनहाइट ताप (t_F) प्रति सेल्सियस ताप (t_C) का आलेखन।

दो मापक्रमों में रूपांतरण के लिए आवश्यक संबंध को फारेनहाइट ताप (t_F) तथा सेल्सियस ताप (t_C) के बीच ग्राफ से प्राप्त किया जा सकता है। यह एक सरल रेखा (चित्र 11.1) है जिसका समीकरण इस प्रकार है :

$$\frac{t_F - 32}{180} = \frac{t_C}{100} \qquad (11.1)$$

11.4 आदर्श-गैस समीकरण तथा परम ताप

काँच-में-द्रव तापमापी, प्रसार गुणों में अंतर के कारण नियत बिंदुओं से अन्य तापों के भिन्न पाठ्यांक दर्शाते हैं। परन्तु ऐसे तापमापी जिनमें गैस का उपयोग होता है, चाहे उनमें किसी भी गैस का उपयोग किया जाए, सदैव एक ही पाठ्यांक प्रदर्शित करते हैं। प्रयोग यह दर्शाते हैं कि सभी गैसें कम घनत्व होने पर समान प्रसार-आचरण दर्शाती हैं। वे चर राशियाँ, जो किसी दी गई मात्रा (द्रव्यमान) की गैस के आचरण की व्याख्या करते हैं, दाब, आयतन तथा ताप (P, V, तथा T) (यहाँ $T = t + 273.15$; t सेल्सियस मापक्रम °C में ताप है)। जब ताप को नियत रखा जाता है, तो किसी गैस की निश्चित मात्रा का दाब तथा आयतन PV = नियतांक के रूप में संबंधित होते हैं। इस संबंध को, एक अंग्रेज रसायनज्ञ रॉबर्ट बॉयल (1627-1691) जिन्होंने इस संबंध की खोज की थी, के नाम पर बॉयल-नियम कहते हैं। जब दाब को नियत रखते हैं, तो किसी निश्चित परिमाण की गैस का आयतन उसके ताप से इस प्रकार संबंधित है : V/T = नियतांक। यह संबंध फ्रेंच वैज्ञानिक जैक्स चार्ल्स (1747-1823) के नाम पर चार्ल्स के नियम से जाना जाता

है। कम घनत्व पर गैसें इन नियमों का पालन करती हैं जिन्हें एकल संबंध में समायोजित किया जा सकता है। ध्यान दीजिये कि चूंकि गैस की दी हुई मात्रा के लिए PV = नियतांक तथा V/T = नियतांक, इसलिए PV/T भी एक नियतांक होना चाहिए। इस संबंध को आदर्श गैस नियम कहते हैं। इसे और अधिक व्यापक रूप में लिखा जा सकता है जिसका अनुप्रयोग केवल किसी एकल गैस की दी गई मात्रा पर ही नहीं होता, वरन् किसी भी तनु गैस की किसी मात्रा के लिए किया जा सकता है। इस संबंध को **आदर्श गैस समीकरण** कहते हैं।

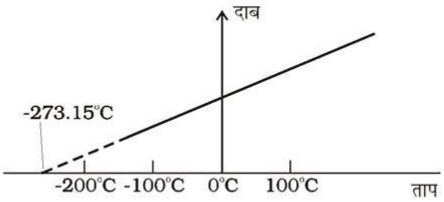
$$\frac{PV}{T} = \mu R$$

अथवा $$PV = \mu RT \qquad (11.2)$$

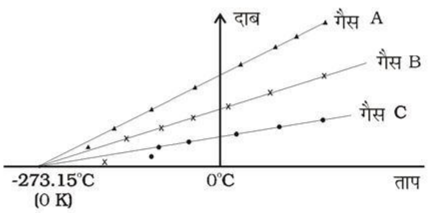
यहाँ, μ गैस के प्रतिदर्श में मोल की संख्या है तथा R को सार्वत्रिक गैस नियतांक कहते हैं :

$R = 8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$

समीकरण 11.2 से हमने जाना है कि दाब तथा आयतन (का गुणनफल) ताप के अनुक्रमानुपाती है : $PV \propto T$। यह संबंध किसी नियत आयतन गैस तापमापी में ताप मापन के लिए गैस के उपयोग को स्वीकार करते हैं। किसी गैस का आयतन नियत रखने पर, $P \propto T$ प्राप्त होता है। इस प्रकार, किसी नियत आयतन गैस तापमापी में ताप को दाब के पदों में मापा जाता है। चित्र 11.2 में दर्शाए अनुसार, इस प्रकरण में, दाब तथा ताप के बीच ग्राफ एक सरल रेखा होता है।

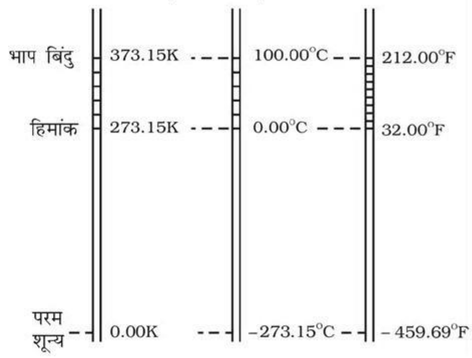


चित्र 11.2 *नियत आयतन पर रखी किसी कम घनत्व की गैस के दाब तथा आयतन के बीच ग्राफ।*



चित्र 11.3 *दाब तथा ताप के बीच ग्राफ का आलेखन तथा कम घनत्व की गैसों के लिए रेखाओं का बहिर्वेशन समान परम शून्य ताप को संकेत करता है।*

तथापि, निम्न ताप पर वास्तविक गैसों पर ली गई मापों तथा आदर्श गैस नियम द्वारा प्रागुक्त मानों में अंतर पाया गया है। परन्तु एक विस्तृत ताप परिसर में यह संबंध रैखिक है तथा ऐसा प्रतीत होता है कि यदि गैस गैसीय अवस्था में ही बनी रहे तो ताप घटाने पर दाब शून्य हो जाएगा। चित्र 11.3 में दर्शाए अनुसार, सरल रेखा को बहिर्वेशित करके किसी आदर्श गैस के लिए परम निम्निष्ठ ताप प्राप्त किया जा सकता है। इस ताप का मान – 273.15°C पाया गया तथा इसे **परम शून्य** कहा जाता है। परम शून्य ब्रिटिश वैज्ञानिक लॉर्ड केल्विन के नाम पर केल्विन ताप मापक्रम अथवा परम ताप मापक्रम का आधार है। इस मापक्रम पर – 273.15°C को शून्य बिंदु के रूप में, अर्थात् 0 K लिया जाता है (चित्र 11.4)।



चित्र 11.4 *केल्विन, सेल्सियस तथा फारेनहाइट ताप मापक्रमों में तुलना।*

केल्विन मापक्रम के लिए मात्रक की आमाप अंश सेल्सियस डिग्री के समान है, अतः इन मापक्रमों के तापों में संबंध इस प्रकार है :

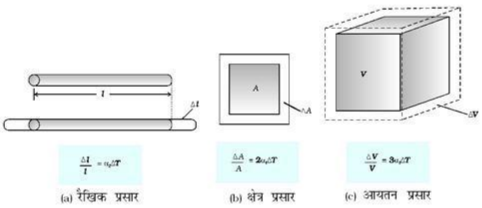
$$T = t_C + 273.15 \qquad (11.3)$$

11.5 तापीय प्रसार

आपने यह देखा होगा कि कभी-कभी धातुओं के ढक्कन वाली बंद बोतलों के चूड़ीदार ढक्कनों को इतना कसकर बंद कर दिया जाता है कि ढक्कनों को खोलने के लिए उन्हें कुछ देर तक गर्म जल में डालना होता है। ऐसा करने पर ढक्कन में प्रसार होकर वह ढीला हो जाता है और उसकी चूड़ियाँ आसानी से खुल जाती हैं। द्रवों के प्रकरण में आपने यह देखा होगा कि जब किसी तापमापी को हलके उष्ण जल में रखते हैं, तो उस तापमापी में पारा कुछ ऊपर चढ़ जाता है। यदि हम तापमापी को

उष्ण जल से बाहर निकाल लेते हैं तो तापमापी में पारे का तल नीचे गिर जाता है। इसी प्रकार, गैसों के प्रकरण में, ठंडे कमरे में आंशिक रूप से फूला कोई गुब्बारा, उष्ण जल में रखे जाने पर अपनी पूरी आमाप तक फूल सकता है। इसके विपरीत, जब किसी पूर्णत: फूले किसी गुब्बारे को शीतल जल में डुबाते हैं तो वह भीतर की वायु के सिकुड़ने के कारण सिकुड़ना आरंभ कर देता है।

यह हमारा सामान्य अनुभव है कि अधिकांश पदार्थ तप्त होने पर प्रसारित होते हैं तथा शीतलन पर सिकुड़ते हैं। किसी वस्तु के ताप में परिवर्तन होने पर उसकी विमाओं में अंतर हो जाता है। किसी वस्तु के ताप में वृद्धि होने पर उसकी विमाओं में वृद्धि होने को तापीय प्रसार कहते हैं। लंबाई में प्रसार को **रैखिक प्रसार** कहते हैं। क्षेत्रफल में प्रसार को **क्षेत्र प्रसार** कहते हैं। आयतन में प्रसार को **आयतन प्रसार** कहते हैं (चित्र 11.5)।



चित्र 11.5 तापीय प्रसार।

यदि पदार्थ किसी लंबी छड़ के रूप में है, तो ताप में अल्प परिवर्तन, ΔT, के लिए लंबाई में भिन्नात्मक परिवर्तन, $\Delta l/l$, ΔT के अनुक्रमानुपाती होता है।

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha_l \, \Delta T \qquad (11.4)$$

जहाँ α_l को **रैखिक प्रसार गुणांक** कहते हैं तथा यह छड़ के पदार्थ का अभिलक्षण होता है। सारणी 11.1 में ताप परिसर 0°C से 100°C में कुछ पदार्थों के रैखिक प्रसार गुणांकों के प्रतिरूपी माध्य मान दिए गए हैं। इस सारणी से काँच तथा ताँबे के लिए α_l के मानों की तुलना कीजिए। हम यह पाते हैं कि समान ताप वृद्धि के लिए ताँबे में काँच की तुलना में पाँच गुना अधिक प्रसार होता है। सामान्यत:, धातुओं में अधिक प्रसार होता है तथा इनके लिए α_l के मान अपेक्षाकृत अधिक होते हैं।

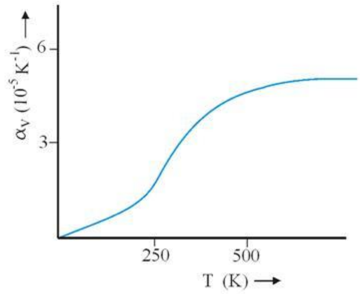
सारणी 11.1 कुछ पदार्थों के लिए रैखिक प्रसार गुणांकों के मान

पदार्थ	α_l (10^{-5} K^{-1})
एलुमिनियम	2.5
पीतल	1.8
लोहा	1.2
ताँबा	1.7
चाँदी	1.9
सोना	1.4
काँच (पायरेक्स)	0.32
लैड	0.29

इसी प्रकार, हम किसी ताप परिवर्तन, ΔT के लिए किसी पदार्थ के भिन्नात्मक आयतन परिवर्तन, $\frac{\Delta V}{V}$, पर विचार करते हैं तथा **आयतन प्रसार गुणांक,** α_V को इस प्रकार परिभाषित करते हैं

$$\alpha_V = \left(\frac{\Delta V}{V}\right)\frac{1}{\Delta T} \qquad (11.5)$$

यहाँ भी α_V पदार्थ का अभिलक्षण है, परन्तु सही अर्थ में यह नियतांक नहीं है। व्यापक रूप में यह ताप पर निर्भर करता है (चित्र 11.6)। यह पाया गया है कि केवल उच्च ताप पर α_V नियतांक बन जाता है।



चित्र 11.6 ताप के फलन के रूप में ताँबे का आयतन प्रसार गुणांक।

सारणी 11.2 में 0-100 °C ताप परिसर में कुछ सामान्य पदार्थों के आयतन प्रसार गुणांकों के मान दिए गए हैं। आप यह देख सकते हैं कि इन पदार्थों (ठोस तथा द्रव) के तापीय प्रसार

कम हैं, तथा पायरेक्स काँच तथा इनवार (लोहे तथा निकेल की विशिष्ट मिश्र धातु) जैसे पदार्थों के α_V के मान विशेषकर निम्न हैं। इस सारणी से हम यह पाते हैं कि एल्कोहॉल (ऐथिल) के लिए α_v का मान पारे की तुलना में अधिक है, तथा समान ताप वृद्धि के लिए इसमें पारे की तुलना में अधिक वृद्धि होती है।

सारणी 11.2 कुछ पदार्थों के आयतन प्रसार गुणांक के मान

पदार्थ	α_v (K^{-1})
एलुमिनियम	7×10^{-5}
पीतल	6×10^{-5}
लोहा	3.55×10^{-5}
पैराफीन	58.8×10^{-5}
काँच (सामान्य)	2.5×10^{-5}
काँच (पायरेक्स)	1×10^{-5}
कठोर रबड़	2.4×10^{-4}
इनवार	2×10^{-6}
पारा	18.2×10^{-5}
जल	20.7×10^{-5}
एल्कोहॉल (ऐथिल)	110×10^{-5}

जल असंगत व्यवहार प्रदर्शित करता है; यह 0°C से 4°C के बीच गर्म किए जाने पर सिकुड़ता है। किसी दिए गए परिमाण के जल का आयतन, कक्ष ताप से 4°C तक ठंडा किए जाने पर, घटता है [चित्र 11.7(a)]। 4°C से कम ताप पर आयतन बढ़ता है अतः घनत्व घटता है [चित्र 11.7(b)]।

इसका अर्थ यह हुआ कि जल का घनत्व 4°C पर अधिकतम होता है। जल के इस गुण का एक महत्त्वपूर्ण पर्यावरणीय प्रभाव है : तालाबों तथा झीलों जैसे जलाशयों का शीर्ष भाग पहले जमता है। जैसे-जैसे झील 4°C तक ठंडी होती जाती है, पृष्ठ के समीप का जल अपनी ऊर्जा वातावरण को देता जाता है और संघनित होकर डूबता जाता है। तली का उष्ण, अपेक्षाकृत कम संघनित जल ऊपर उठता है। परन्तु, एक बार शीर्षभाग के ठंडे जल का ताप 4°C से नीचे पहुँच जाता है, यह जल कम संघनित बन जाता है, और पृष्ठ पर ही रहता है, जहाँ यह जम जाता है। यदि जल में यह गुण न होता, तो झील तथा तालाब तली से ऊपर की ओर जमते जिससे उसका अधिकांश जलीय जीवन (जल जीव-जन्तु तथा पौधे) नष्ट हो जाता।

सामान्य ताप पर ठोसों तथा द्रवों की अपेक्षा गैसों में अपेक्षाकृत अधिक प्रसार होता है। द्रवों के लिए, आयतन प्रसार गुणांक अपेक्षाकृत ताप पर निर्भर नहीं करता। परन्तु गैसों के लिए यह ताप पर निर्भर करता है। किसी आदर्श गैस के लिए किसी नियत दाब पर आयतन प्रसार गुणांक का मान आदर्श गैस समीकरण से प्राप्त किया जा सकता है :

$PV = \mu RT$

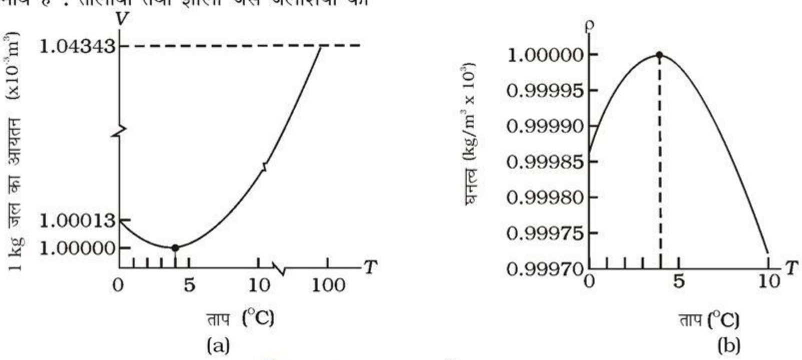
नियत ताप पर

$P\Delta V = \mu R \Delta T$

$\dfrac{\Delta V}{V} = \dfrac{\Delta T}{T}$

अर्थात् $\alpha_v = \dfrac{1}{T}$ आदर्श गैस के लिए (11.6)

0°C, $\alpha_v = 3.7 \times 10^{-3}\ K^{-1}$, जो ठोसों तथा द्रवों की अपेक्षा अत्यधिक बड़ा है। समीकरण (11.6) α_v की ताप पर निर्भरता को दर्शाती है। इसका मान ताप में वृद्धि के साथ कम हो जाता है। नियत दाब तथा कक्ष ताप पर किसी गैस के लिए α_v का मान लगभग $3300 \times 10^{-6} K^{-1}$ है, जो कि प्रतिरूपी द्रवों के आयतन प्रसार गुणांक की तुलना में कई कोटि गुना बड़ा है।



चित्र 11.7 जल का तापीय प्रसार।

आयतन प्रसार गुणांक (α_v) तथा रैखिक प्रसार गुणांक (α_l) में एक सरल संबंध है। लंबाई l के किसी ऐसे घन की कल्पना कीजिए जिसमें ताप में ΔT की वृद्धि होने पर सभी दिशाओं में समान रूप से वृद्धि होती है। तब

$$\Delta l = \alpha_l \, l \, \Delta T$$

इसीलिए, $\Delta V = (l+\Delta l)^3 - l^3 \approx 3l^2 \, \Delta l$ (11.7)

समीकरण 11.7 में हमने (Δl) को l की तुलना में छोटा होने के कारण $(\Delta l)^2$ तथा $(\Delta l)^3$ के पदों को उपेक्षणीय मान लिया है। अत:

$$\Delta V = \frac{3V\,\Delta l}{l} = 3V\alpha_l \, \Delta T \quad (11.8)$$

इससे हमें प्राप्त होता है

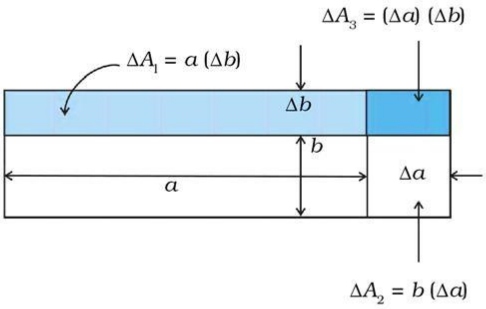
$$\alpha_v = 3\alpha_l \quad (11.9)$$

क्या होता है, जब किसी छड़ के दोनों सिरों को दृढ़ता से जड़कर इसके तापीय प्रसार को रोका जाता है। स्पष्ट है कि सिरों के दृढ़ अवलंबों द्वारा प्रदत्त बाह्य बलों के कारण छड़ में संपीडन विकृति उत्पन्न हो जाती है जिसके तदनुरूपी छड़ में एक प्रतिबल उत्पन्न होता है जिसे **तापीय प्रतिबल** कहते हैं। उदाहरण के लिए 40 cm^2 अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल की 5m लंबी स्टील की ऐसी छड़ के बारे में विचार कीजिए जिसके तापीय प्रसार को रोका जाता है, जबकि उसके ताप में 10°C की वृद्धि की गई है। स्टील का रैखिक प्रसार गुणांक $\alpha_{l(\text{स्टील})} = 1.2 \times 10^{-5}$ K^{-1} है। अत: यहाँ संपीडन विकृति $\frac{\Delta l}{l} = \alpha_{l(\text{स्टील})} \, \Delta T = 1.2{\times}10^{-5}{\times}10 = 1.2{\times}10^{-4}$। स्टील के लिए यंग प्रत्यास्थता गुणांक $Y_{(\text{स्टील})} = 2{\times}10^{11}$ N m^{-2}। अत: छड़ में उत्पन्न तापीय प्रतिबल $\frac{\Delta F}{A} = Y_{\text{स्टील}} \left(\frac{\Delta l}{l}\right) = 2.4{\times}10^7$ N m^{-2}, इसके तदनुरूपी बाह्य बल

$$\Delta F = AY_{\text{स्टील}} \left(\frac{\Delta l}{l}\right) = 2.4{\times}10^7{\times}40{\times}10^{-4} \simeq 10^5 \text{ N}$$

यदि बाह्य सिरों पर आबद्ध इस प्रकार की स्टील की दो पटरियों के भीतरी सिरे संपर्क में हैं तो इस परिमाण के बल पटरियों को सरलता से मोड़ सकते हैं।

उदाहरण 11.1 यह दर्शाइए कि किसी ठोस की आयताकार शीट का क्षेत्र प्रसार गुणांक, $(\Delta A/A)/\Delta T$, इसके रैखिक प्रसार गुणांक α_l का दो गुना होता है।



चित्र 11.8

हल किसी ठोस पदार्थ की आयताकार शीट जिसकी लंबाई a तथा चौड़ाई b (चित्र 11.8) है, पर विचार कीजिए। जब ताप में ΔT की वृद्धि की जाती है तो a में $\Delta a = \alpha_l a \Delta T$ तथा b में $\Delta b = \alpha_l b \, \Delta T$ की वृद्धि होती है। चित्र 11.8 के अनुसार क्षेत्रफल में वृद्धि

$$\Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3$$
$$\Delta A = a\,\Delta b + b\Delta a + (\Delta a)\;(\Delta b)$$
$$= a\alpha_l b\,\Delta T + b\alpha_l\, a\,\Delta T + (\alpha_l)^2\, ab\,(\Delta T)^2$$
$$= \alpha_l\, ab\,\Delta T\,(2 + \alpha_l\,\Delta T) = \alpha_l\, A\,\Delta T\,(2 + \alpha_l\,\Delta T)$$

चूंकि $\alpha_l \approx 10^{-5}$ K^{-1}, तब सारणी 11.1 के अनुसार 2 की तुलना में गुणनफल, $\alpha_l \Delta T$ का मान बहुत छोटा है, अत: इसे उपेक्षणीय माना जा सकता है। अत:

$$\left(\frac{\Delta A}{A}\right)\frac{1}{\Delta T} \approx 2\alpha_l$$

उदाहरण 11.2 कोई लोहार किसी बैलगाड़ी के लकड़ी के पहिए की नेमी पर लोहे की रिंग जड़ता है। 27°C पर नेमी तथा लोहे की रिंग के व्यास क्रमश: 5.243m तथा 5.231 m हैं। लोहे की रिंग को किस ताप तक तप्त किया जाए कि वह पहिए की नेमी पर ठीक बैठ जाए।

हल

दिया गया है कि, $T_1 = 27°C$

$L_{T1} = 5.231$ m

$L_{T2} = 5.243$ m

अत:

$$L_{T2} = L_{T1}\;[1 + \alpha_l\,(T_2 - T_1)]$$

$$5.243\text{m} = 5.231\text{m}\;[1 + 1.20 \times 10^{-5}\,\text{K}^{-1}\;(T_2 - 27°\text{C}]$$

अथवा $T_2 = 218°C$

11.6 विशिष्ट ऊष्मा धारिता

किसी बर्तन में जल लेकर उसे किसी बर्नर पर गर्म करना आरंभ कीजिए। शीघ्र ही आप जल में बुलबुले ऊपर उठते देखेंगे। जैसे ही ताप में वृद्धि की जाती है, तो जल के कणों की गति में विक्षोभ होने तक वृद्धि होती जाती है और जल उबलने लगता है। वे कौन से कारक हैं जिन पर किसी पदार्थ का ताप बढ़ाने के लिए आवश्यक ऊष्मा की मात्रा निर्भर करती है? इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए प्रथम चरण में, जल की कुछ मात्रा को गर्म करके उसके ताप में कुछ वृद्धि, जैसे 20°C कीजिए और उसमें लगा समय नोट कीजिए। पुन: इतना ही जल लेकर अब इसके ताप में ऊष्मा के उसी स्रोत द्वारा 40°C की ताप वृद्धि कीजिए और विराम घड़ी से समय नोट कीजिए। आप यह पाएंगे कि इस बार लगभग दो गुना समय लगता है। अत: समान मात्रा के जल के ताप में दो गुनी वृद्धि करने के लिए दो गुनी ऊष्मा की मात्रा की आवश्यकता होती है।

दूसरे चरण में, अब मान लीजिए आप दो गुना जल लेकर इसे गर्म करने के लिए उसी स्रोत का उपयोग करके इसके ताप में 20°C की ताप-वृद्धि करते हैं। आप यह पाएँगे कि इस बार फिर गर्म करने में पहले चरण की अपेक्षा लगभग दो गुना समय लगा है।

तीसरे चरण में, जल के स्थान पर, अब किसी तेल, जैसे सरसों का तेल, की समान मात्रा लेकर इसके ताप में भी 20°C की वृद्धि कीजिए। अब उसी विराम घड़ी द्वारा समय नोट कीजिए। आप यह पाएँगे कि इस बार पहले की अपेक्षा कम समय लगा है। अत: आवश्यक ऊष्मा की मात्रा समान मात्रा के जल के ताप में समान वृद्धि के लिए आवश्यक ऊष्मा की मात्रा से कम है।

उपरोक्त प्रेक्षण यह दर्शाते हैं कि किसी दिए गए पदार्थ को उष्ण करने के लिए आवश्यक ऊष्मा की मात्रा इसके द्रव्यमान m, ताप में परिवर्तन ΔT, तथा पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर करती है। किसी पदार्थ के ताप में परिवर्तन, जबकि ऊष्मा की एक दी गई मात्रा को वह पदार्थ अवशोषित करता है अथवा बहिष्कृत करता है, एक राशि, जिसे उस पदार्थ की **ऊष्मा धारिता** कहते हैं, द्वारा अभिलक्षित की जाती है। किसी पदार्थ की ऊष्मा धारिता S को हम इस प्रकार परिभाषित करते हैं :

$$S = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \qquad (11.10)$$

यहाँ ΔQ पदार्थ के ताप में T से $T + \Delta T$ तक परिवर्तन करने के लिए आवश्यक ऊष्मा की मात्रा है।

आपने यह प्रेक्षण किया है कि जब विभिन्न पदार्थों के समान द्रव्यमानों को समान मात्रा में ऊष्मा प्रदान की जाती है, तो उनमें होने वाले परिणामी ताप परिवर्तन समान नहीं होते। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि किसी पदार्थ के एकांक द्रव्यमान में एकांक ताप-परिवर्तन के लिए वह पदार्थ ऊष्मा की एक निश्चित व अनन्य मात्रा का अवशोषण अथवा बहिष्करण करता है, इस मात्रा को पदार्थ की **विशिष्ट ऊष्मा धारिता** कहते हैं।

यदि m द्रव्यमान के किसी पदार्थ द्वारा ΔT ताप परिवर्तन के लिए ΔQ ऊष्मा की मात्रा अवशोषित अथवा बहिष्कृत करनी होती है तो उस पदार्थ की विशिष्ट ऊष्मा धारिता s को इस प्रकार व्यक्त किया जाता है

$$s = \frac{S}{m} = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T} \qquad (11.11)$$

विशिष्ट ऊष्मा धारिता किसी पदार्थ का वह गुण होता है जो इस पदार्थ द्वारा एक दिए गए परिमाण की ऊष्मा को अवशोषित (अथवा बहिष्कृत) करने पर (यदि प्रावस्था परिवर्तन नहीं है) उस पदार्थ के ताप में होने वाले परिवर्तन को निर्धारित करता है। इसे "ऊष्मा की वह मात्रा जो किसी पदार्थ का एकांक द्रव्यमान अपने ताप में एकांक परिवर्तन के लिए अवशोषित अथवा बहिष्कृत करता है" के रूप में परिभाषित किया जाता है। विशिष्ट ऊष्मा धारिता का SI मात्रक $J\,kg^{-1}\,K^{-1}$ है।

यदि पदार्थ की मात्रा का उल्लेख "द्रव्यमान m किलोग्रामों" में न करके मोल μ के पदों में किया जाता है तो हम किसी पदार्थ की ऊष्मा धारिता प्रति मोल को इस प्रकार व्यक्त करते हैं

$$C = \frac{S}{\mu} = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta Q}{\Delta T} \qquad (11.12)$$

जहाँ C **मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता** कहलाती है। S की भाँति C भी पदार्थ की प्रकृति तथा इसके ताप पर निर्भर करता है। मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता का SI मात्रक $J\,mol^{-1}\,K^{-1}$ है।

परन्तु, गैसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिता के संबंध में C को परिभाषित करने के लिए अतिरिक्त प्रतिबंधों की आवश्यकता होती है। इस प्रकरण में दाब अथवा आयतन को नियत रखकर भी ऊष्मा स्थानांतर किया जा सकता है। यदि ऊष्मा स्थानांतरण के समय गैस का दाब नियत रखा जाता है, तो इसे **नियत दाब पर मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता** कहते हैं और इसे C_p द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है। इसके विपरीत, यदि ऊष्मा स्थानांतरण के समय गैस का आयतन नियत रखते हैं, तो इसे **नियत आयतन पर मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता** कहते हैं और इसे C_v द्वारा निर्दिष्ट करते हैं। इसके विस्तृत वर्णन के लिए

सारणी 11.3 वायुमण्डलीय दाब तथा कक्ष ताप पर कुछ पदार्थों की विशिष्ट ऊष्मा धारिताएँ

पदार्थ	विशिष्ट ऊष्मा धारिता ($J\ kg^{-1} K^{-1}$)	पदार्थ	विशिष्ट ऊष्मा धारिता ($J\ kg^{-1} K^{-1}$)
एलुमिनियम	900.0	बर्फ	2060
कार्बन	506.5	काँच	840
ताँबा	386.4	आयरन	450
लैड	127.7	कैरोसीन	2118
चाँदी	236.1	खाद्य तेल	1965
टंग्सटन	134.1	पारा	140
जल	4186.0		

अध्याय 12 देखिए। सारणी 11.3 में वायुमण्डलीय दाब तथा कक्ष ताप पर कुछ पदार्थों की विशिष्ट ऊष्मा धारिता के मापे हुए मानों की सूची दी गई है जबकि सारणी 11.4 में कुछ गैसों की

सारणी 11.4 कुछ गैसों की मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिताएँ

गैस	C_p ($J\ mol^{-1}K^{-1}$)	C_v ($J\ mol^{-1}K^{-1}$)
He	20.8	12.5
H_2	28.8	20.4
N_2	29.1	20.8
O_2	29.4	21.1
CO_2	37.0	28.5

मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता की सूची दी गई है। सारणी 11.3 से आप यह ध्यान में रख सकते हैं कि अन्य पदार्थों की तुलना में जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता उच्चतम होती है। यही कारण है कि स्वचालित वाहनों के रैडिएटरों में जल का उपयोग शीतलक के रूप में किया जाता है तथा सिकाई के लिए उपयोग होने वाली तप्त जल थैलियों में जल का उपयोग तापक के रूप में किया जाता है। उच्च विशिष्ट ऊष्मा धारिता होने के कारण गर्मियों में थल की अपेक्षा जल बहुत धीमी गति से गर्म होता है फलस्वरूप समुद्र की ओर से आने वाली पवनें शीतल होती हैं। अब आप यह बता सकते हैं कि मरुक्षेत्रों में पृथ्वी का पृष्ठ दिन के समय शीघ्र उष्ण तथा रात्रि के समय शीघ्र शीतल क्यों हो जाता है।

11.7 ऊष्मामिति

किसी निकाय को वियुक्त निकाय तब कहा जाता है जब उस निकाय तथा उसके परिवेश के बीच कोई ऊष्मा विनिमय अथवा ऊष्मा स्थानांतर नहीं होता। जब किसी वियुक्त निकाय के विभिन्न भाग भिन्न-भिन्न ताप पर होते हैं, तब ऊष्मा की कुछ मात्रा उच्च ताप के भाग से निम्न ताप वाले भाग को स्थानांतरित हो जाती है। उच्च ताप के भाग द्वारा लुप्त ऊष्मा निम्न ताप के भाग द्वारा ऊष्मा लब्धि के बराबर होती है।

ऊष्मामिति का अर्थ ऊष्मा मापन है। जब कोई उच्च ताप की वस्तु किसी निम्न ताप की वस्तु के संपर्क में लाई जाती है, तो उच्च ताप की वस्तु द्वारा लुप्त ऊष्मा निम्न ताप की वस्तु द्वारा ऊष्मा लब्धि के बराबर होती है, बशर्ते कि निकाय से ऊष्मा का कोई भाग भी परिवेश में पलायन न करे। ऐसी युक्ति जिसमें ऊष्मा मापन किया जा सके उसे **ऊष्मामापी** कहते हैं। यह धातु के एक बर्तन तथा उसी पदार्थ जैसे ताँबा अथवा एल्युमिनियम के विडोलक से मिलकर बना होता है। इस बर्तन को एक लकड़ी के आवरण के भीतर, जिसमें ऊष्मारोधी पदार्थ जैसे काँच तंतु भरा होता है, रखा जाता है। बाहरी आवरण ऊष्मा कवच की भांति कार्य करता है तथा यह भीतरी बर्तन से ऊष्मा-हानि को कम कर देता है। बाहरी आवरण में एक छिद्र बनाया जाता है जिससे होते हुए पारे का तापमापी बर्तन के भीतर पहुँचता है। निम्नलिखित उदाहरण द्वारा आपको किसी दिए गए ठोस पदार्थ की विशिष्ट ऊष्मा धारिता ज्ञात करने की ऐसी विधि मिल जाएगी जिसमें लुप्त ऊष्मा = ऊष्मा लब्धि के सिद्धांत का उपयोग किया जाता है।

उदाहरण 11.3 0.047 kg द्रव्यमान के किसी ऐलुमिनियम के गोले को काफी समय के लिए उबलते जल से भरे बर्तन में रखा गया है ताकि गोले का ताप 100°C हो जाए। इसके पश्चात् गोले को तुरन्त 0.14 kg द्रव्यमान के ताँबे के ऊष्मामापी, जिसमें 20°C का 0.25 kg जल भरा है, में स्थानांतरित किया जाता है। जल के ताप में वृद्धि होती है तथा यह 23°C पर स्थायी अवस्था ग्रहण कर लेता है। ऐलुमिनियम की विशिष्ट ऊष्मा धारिता परिकलित कीजिए।

हल इस उदाहरण को हल करते समय हम इस तथ्य का उपयोग करेंगे कि स्थायी अवस्था में ऐलुमिनियम के गोले द्वारा दी गई ऊष्मा जल तथा ऊष्मामापी द्वारा अवशोषित ऊष्मा के बराबर होती है।

ऐलुमिनियम के गोले का द्रव्यमान (m_1) = 0.047 kg

ऐलुमिनियम के गोले का आरंभिक ताप = 100°C

अंतिम ताप = 23°C

ताप में परिवर्तन (ΔT) = (100°C - 23°C) = 77°C

मान लीजिए, ऐलुमिनियम की विशिष्ट ऊष्मा धारिता = s_{Al}

ऐलुमिनियम के गोले द्वारा लुप्त ऊष्मा की मात्रा =

$m_1 s_{Al} \Delta T = 0.047\text{kg} \times s_{Al} \times 77°\text{C}$

जल का द्रव्यमान (m_2) = 0.25 kg

ऊष्मामापी का द्रव्यमान (m_3) = 0.14 kg

जल तथा ऊष्मामापी का आरंभिक ताप = 20°C

मिश्रण का अंतिम ताप = 23°C

ताप में परिवर्तन (ΔT_2) = 23°C–20°C = 3°C

जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता (s_w)

$= 4.18\times10^3$ J kg^{-1} °C^{-1}

ताँबे के ऊष्मामापी की विशिष्ट ऊष्मा धारिता

$= 0.386\times10^3$ J kg^{-1} °C^{-1}

जल तथा ऊष्मामापी द्वारा ऊष्मालब्धि की मात्रा

$= m_2\, s_w\, \Delta T_2 + m_3 s_{cu} \Delta T_2$

$= (m_2 s_w + m_3 s_{cu})\ (\Delta T_2)$

$= 0.25$ kg $\times 4.18 \times 10^3$ J kg^{-1} °C^{-1} + 0.14 kg $\times$ 0.386 $\times 10^3$ J kg^{-1} °C^{-1}) (23°C – 20°C)

स्थायी अवस्था में ऐलुमिनियम के गोले द्वारा लुप्त ऊष्मा = जल द्वारा ऊष्मा लब्धि + ऊष्मामापी द्वारा ऊष्मा लब्धि

0.047 kg $\times s_{Al} \times$ 77°C

= (0.25 kg $\times$ 4.18 $\times 10^3$ J kg^{-1} °C^{-1}+ 0.14 kg $\times$ 0.386 $\times 10^3$ J kg^{-1} °C^{-1})(3°C)

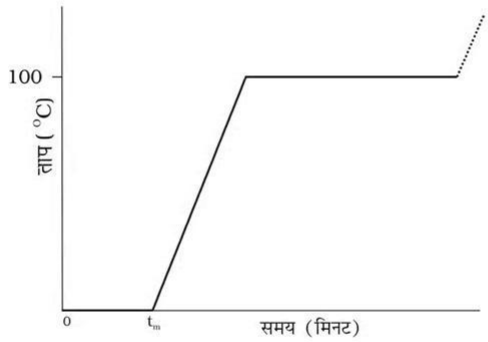
s_{Al} = 0.911 kJ kg^{-1} °C^{-1} ◀

11.8 अवस्था परिवर्तन

सामान्य रूप में द्रव्य की तीन अवस्थाएँ हैं : ठोस, द्रव तथा गैस। इन अवस्थाओं में से किसी एक अवस्था से दूसरी अवस्था में संक्रमण को अवस्था परिवर्तन कहते हैं। दो सामान्य अवस्था परिवर्तन ठोस से द्रव तथा द्रव से गैस (तथा विलोमत:) हैं। ये परिवर्तन तब ही हो सकते हैं जबकि पदार्थ तथा उसके परिवेश के बीच ऊष्मा का विनिमय होता है। तापन अथवा शीतलन पर अवस्था परिवर्तन का अध्ययन करने के लिए आइए निम्नलिखित क्रियाकलाप करते हैं।

क्रियाकलाप 11.1

एक बीकर में कुछ हिम क्यूब लीजिए। हिम का ताप (0°C) नोट कीजिए। इसे धीरे-धीरे किसी अचल ऊष्मा स्रोत पर गर्म करना आरंभ कीजिए। हर एक मिनट के पश्चात् ताप नोट कीजिए। जल तथा हिम के मिश्रण को निरंतर विडोलित करते रहिए। समय और ताप के बीच ग्राफ आलेखित कीजिए (चित्र 11.9)। आप यह पाएँगे कि जब तक बीकर में हिम उपस्थित है तब तक ताप में कोई परिवर्तन नहीं होता। उपरोक्त प्रक्रिया में, निकाय को ऊष्मा की सतत आपूर्ति होने पर भी उसके ताप में कोई परिवर्तन नहीं होता। यहाँ संभरण की जा रही ऊष्मा का उपयोग ठोस (हिम) से द्रव (जल) में अवस्था परिवर्तन किए जाने में हो रहा है।

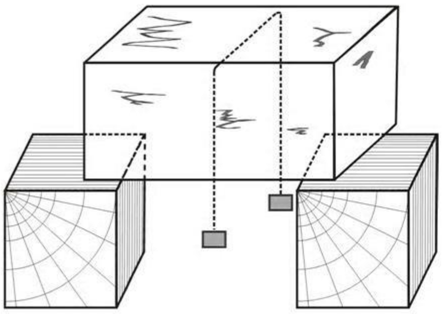


चित्र 11.9 हिम को गर्म करने पर अवस्था में हुए परिवर्तनों को ताप और समय के बीच ग्राफ आलेखित करके दर्शाना (पैमाने के अनुसार नहीं)।

ठोस से द्रव में अवस्था परिवर्तन को **गलन** (अथवा पिघलना) तथा द्रव से ठोस में अवस्था परिवर्तन को **संगलन** कहते हैं। यह पाया गया है कि ठोस पदार्थ की समस्त मात्रा के पिघलने तक ताप नियत रहता है अर्थात् **ठोस से द्रव में अवस्था परिवर्तन की अवधि में पदार्थ की दोनों अवस्थाएँ ठोस तथा द्रव तापीय साम्य में सहवर्ती होती हैं।** वह ताप जिस पर किसी पदार्थ की ठोस तथा द्रव अवस्थाएँ परस्पर तापीय साम्य में होती हैं उसे उस पदार्थ का **गलनांक** कहते हैं। यह किसी पदार्थ का अभिलक्षण होता है। यह दाब पर भी निर्भर करता है। मानक वायुमण्डलीय दाब पर किसी पदार्थ के गलनांक को **प्रसामान्य गलनांक** कहते हैं। हिम के गलने की प्रक्रिया को समझने के लिए आइए निम्नलिखित क्रियाकलाप करें।

क्रियाकलाप 11.2

एक हिम शिला लीजिए। एक धातु का तार लेकर उसके दोनों सिरों से समान भार जैसे 5 kg के बाट बाँधिए। चित्र 11.10 में दर्शाए अनुसार इस तार को हिम शिला के ऊपर रखिए। आप यह देखेंगे कि तार हिमशिला में से पार हो जाता है। ऐसा होने का कारण यह है कि तार के ठीक नीचे दाब में वृद्धि के कारण हिम निम्न ताप पर पिघल जाता है। जब तार वहाँ से गुजर जाता है, तो तार के ऊपर का जल पुनः हिमीभूत हो जाता है। इस प्रकार तार हिम शिला से पार हो जाता है तथा शिला विभक्त नहीं होती। पुनर्हिमीभवन की इस परिघटना को **पुनर्हिमायन** कहते हैं। हिम पर 'स्केट' के नीचे जल बनने के कारण ही 'स्केटिंग' करना संभव हो पाता है। दाब में वृद्धि के कारण जल बनता है जो स्नेहक की भांति कार्य करता है।



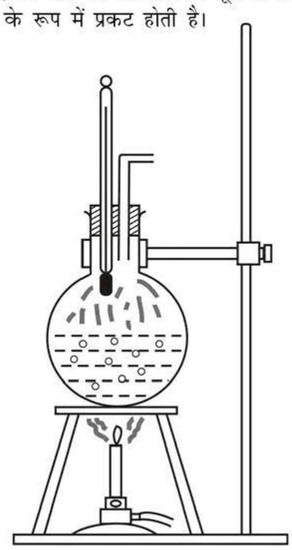
चित्र 11.10

जब समस्त हिम जल में रूपांतरित हो जाता है और इसके पश्चात् जैसे ही हम और आगे गर्म करना चालू रखते हैं तो हम यह पाते हैं कि ताप में वृद्धि होनी आरंभ हो जाती है। ताप में यह वृद्धि निरंतर लगभग 100°C तक होती है और यहाँ फिर ताप स्थिर हो जाता है। अब फिर जल को आपूर्त ऊष्मा का उपयोग जल को द्रव अवस्था से वाष्प अथवा गैसीय अवस्था में रूपांतरित करने में होता है।

द्रव से वाष्प (अथवा गैस) में अवस्था परिवर्तन को **वाष्पन** कहते हैं। यह पाया गया है कि समस्त द्रव के वाष्प में रूपांतरित होने तक ताप नियत रहता है। अर्थात्, ठोस से वाष्प में अवस्था परिवर्तन की अवधि में पदार्थ की दोनों अवस्थाएँ द्रव तथा गैस तापीय साम्य में सहवर्ती होती हैं। वह ताप जिस पर किसी पदार्थ की द्रव तथा वाष्प दोनों अवस्थाएँ तापीय साम्य में परस्पर सहवर्ती होती हैं उसे उस पदार्थ का **क्वथनांक** कहते हैं। जल के क्वथन की प्रक्रिया को समझने के लिए आइए निम्नलिखित क्रियाकलाप करें।

क्रियाकलाप 11.3

आधे से अधिक जल से भरा एक गोल पेंदी का फ्लास्क लीजिए। चित्र 11.11 में दर्शाए अनुसार फ्लास्क के मुख पर लगी कार्क के वेधों से होकर भीतर जाते हुए एक तापमापी तथा एक भाप निकास कार्क में लगाइए और फ्लास्क को बर्नर के ऊपर रखिए। जैसे ही जल गर्म होता है, तो पहले यह देखिए कि वह वायु, जो जल में विलीन थी, छोटे-छोटे बुलबुलों के रूप में बाहर आएगी। तत्पश्चात् भाप के बुलबुले फ्लास्क की तली में बनेंगे, परन्तु जैसे ही वे शीर्षभाग के पास के शीतल जल की ओर ऊपर उठते हैं, संघनित होकर अदृश्य हो जाते हैं। अंततः जैसे ही समस्त जल का ताप 100°C पर पहुँचता है, भाप के बुलबुले पृष्ठ पर पहुँचते हैं और **क्वथन** होने लगता है। फ्लास्क के भीतर भाप दिखाई नहीं देती, परन्तु जैसे ही फ्लास्क से बाहर निकलती है, यह जल की अत्यंत छोटी बूँदों के रूप में संघनित होकर धुंध के रूप में प्रकट होती है।



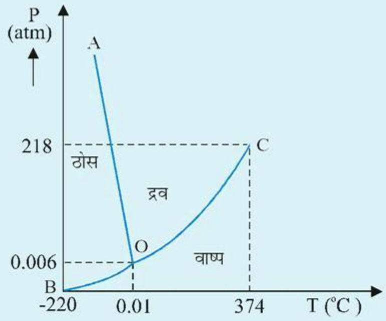
चित्र 11.11 क्वथन प्रक्रिया।

अब यदि कुछ सेकंडों के लिए भाप निकास को बंद कर दें, ताकि फ्लास्क के भीतर दाब में वृद्धि हो, तब आप यह देखेंगे कि क्वथन रुक जाता है। जल में क्वथन प्रक्रिया पुनः आरंभ होने तक जल के ताप में वृद्धि करने के लिए (दाब पर निर्भर करते हुए) और ऊष्मा की आवश्यकता होती है। इस प्रकार दाब में वृद्धि के साथ क्वथनांक में वृद्धि हो जाती है।

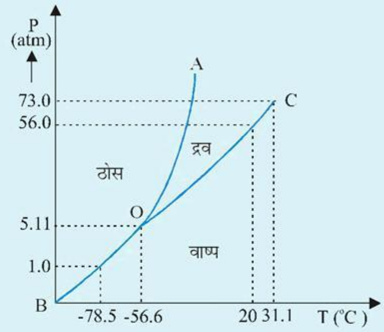
आइए अब हम बर्नर को हटा लेते हैं तथा जल को लगभग 80°C तक ठंडा होने देते हैं। फ्लास्क से तापमापी तथा भाप निकास हटाकर फ्लास्क के मुँह को वायुरुद्ध कर्क से कस कर

त्रिक बिंदु

किसी पदार्थ का ताप उसकी अवस्था परिवर्तन (प्रावस्था परिवर्तन) की अवधि में नियत रहता है। किसी पदार्थ के ताप T तथा दाब P के बीच आलेखित ग्राफ को प्रावस्था आरेख अथवा $P-T$ आरेख कहते हैं। नीचे दिखाए गए चित्र में जल तथा CO_2 के प्रावस्था आरेख दर्शाए गए हैं। इस प्रकार का प्रावस्था आरेख $P-T$ तल को ठोस क्षेत्र, वाष्प क्षेत्र तथा द्रव क्षेत्र में विभाजित करता है। इन क्षेत्रों को वक्रों जैसे **ऊर्ध्वपातन वक्र** (BO), **संगलन वक्र** (AO) तथा **वाष्पन वक्र** (CO) द्वारा पृथक किया जाता है। ऊर्ध्वपातन वक्र BO के बिंदु उस अवस्था को निरूपित करते हैं जिस पर ठोस तथा वाष्प प्रावस्थाएँ सहवर्ती होती हैं। संगलन वक्र AO के बिंदु उस अवस्था का निरूपण करते हैं जिसमें ठोस तथा द्रव प्रावस्थाएँ सहवर्ती होती हैं। वाष्पन वक्र CO के बिंदु उस अवस्था को निरूपित करते हैं जिसमें द्रव तथा वाष्प प्रावस्थाएँ सहवर्ती होती हैं। वह ताप तथा दाब जिस पर संगलन वक्र, वाष्पन वक्र तथा ऊर्ध्वपातन वक्र मिलते हैं तथा किसी पदार्थ की तीनों प्रावस्थाएँ सहवर्ती होती हैं उस पदार्थ का **त्रिक बिंदु** कहलाता है। उदाहरण के लिए, जल के त्रिक बिंदु को ताप 273.16K तथा दाब 6.11×10^{-3} Pa द्वारा निरूपित करते हैं।



(a)



(b)

(a) जल तथा (b) CO_2 के लिए दाब-ताप प्रावस्था आरेख (पैमाने के अनुसार नहीं)

बंद कर देते हैं। अब फ्लास्क को स्टैंड पर उलटा करके रखते हैं और फ्लास्क पर हिमशीतित जल उड़ेलते हैं। ऐसा करने पर फ्लास्क के भीतर की जलवाष्प संघनित होकर फ्लास्क के भीतर जल के पृष्ठ पर दाब को कम कर देती है। अब निम्न ताप पर जल में पुन: क्वथन आरंभ हो जाता है। इस प्रकार दाब में कमी होने पर क्वथनांक घट जाता है।

इससे यह स्पष्ट हो जाता है कि पहाड़ी क्षेत्रों में भोजन पकाना क्यों कठिन होता है। उच्च तुंगता पर वायुमण्डलीय दाब निम्न होता है, जिसके कारण वहाँ पर समुद्र तट की तुलना में जल का क्वथनांक घट जाता है। इसके विपरीत, दाब कुकर के भीतर दाब में वृद्धि करके क्वथनांक बढ़ाया जाता है। इसीलिए पाकक्रिया तेज होती है। मानक वायुमण्डलीय दाब पर किसी पदार्थ के क्वथनांक को **प्रसामान्य क्वथनांक** कहते हैं।

परन्तु, सभी पदार्थ इन तीनों अवस्थाओं - ठोस, द्रव तथा गैस से नहीं गुजरते। कुछ पदार्थ ऐसे भी हैं जो सामान्यत: सीधे ठोस से वाष्प अवस्था में और विलोमत: पहुँच जाते हैं। किसी पदार्थ का ठोस अवस्था से वाष्प अवस्था में, बिना द्रव अवस्था से गुजरे, पहुँचना **ऊर्ध्वपातन** कहलाता है तथा ऐसे पदार्थ को **ऊर्ध्वपातन** पदार्थ कहते हैं। शुष्क हिम (ठोस CO_2) का ऊर्ध्वपातन होता है, आयोडीन भी इसी प्रकार का पदार्थ है। ऊर्ध्वपातन की प्रक्रिया के समय किसी पदार्थ की दोनों अवस्थाएँ - ठोस तथा वाष्प अवस्था तापीय साम्य में सहवर्ती होती हैं।

11.8.1 गुप्त ऊष्मा

अनुभाग 11.8 में हमने यह सीखा है कि जब कोई पदार्थ अवस्था परिवर्तन की स्थिति में होता है तो पदार्थ तथा उसके परिवेश के बीच ऊष्मा की एक निश्चित मात्रा स्थानांतरित होती है। किसी पदार्थ की अवस्था परिवर्तन की अवधि में, ऊष्मा की मात्रा का प्रति एकांक द्रव्यमान स्थानांतरण, उस पदार्थ की इस

सारणी 11.4 1 atm दाब पर विभिन्न पदार्थों के अवस्था परिवर्तन के ताप तथा गुप्त ऊष्माएँ

पदार्थ	गलनांक ($^{\circ}C$)	L_f ($10^5 J\ kg^{-1}$)	क्वथनांक ($^{\circ}C$)	L_v ($10^5 J\ kg^{-1}$)
ऐथिल ऐल्कोहॉल	–114	1.0	78	8.5
सोना	1063	0.645	2660	15.8
लैड	328	0.25	1744	8.67
पारा	–39	0.12	357	2.7
नाइट्रोजन	–210	0.26	–196	2.0
ऑक्सीजन	–219	0.14	–183	2.1
जल	0	3.33	100	22.6

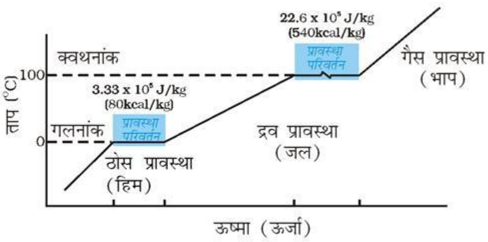
प्रक्रिया के लिए **गुप्त ऊष्मा** कहलाती है। उदाहरण के लिए, यदि $-10^{\circ}C$ के किसी दिए गए परिमाण के हिम को गर्म किया जाए तो उसका ताप इसके गलनांक ($0^{\circ}C$) तक बढ़ता है। इस ताप पर और ऊष्मा देने पर ताप में वृद्धि नहीं होती, परन्तु हिम पिघलने लगती है अर्थात् अवस्था परिवर्तन होता है। जब समस्त हिम पिघल जाती है, तो और ऊष्मा देने पर जल के ताप में वृद्धि होती है। इसी प्रकार की स्थिति क्वथनांक पर द्रव-गैस अवस्था परिवर्तन के समय होती है। उबलते जल को और ऊष्मा प्रदान करने पर ताप में वृद्धि नहीं होती; वाष्पन हो जाता है।

अवस्था परिवर्तन के समय आवश्यक ऊष्मा का परिमाण जिस पदार्थ की अवस्था में परिवर्तन हो रहा है उसके द्रव्यमान तथा रूपांतरण-ऊष्मा पर निर्भर करता है। इस प्रकार, यदि m उस पदार्थ का द्रव्यमान है जिसका एक अवस्था से दूसरी अवस्था में परिवर्तन हो रहा है, तब आवश्यक ऊष्मा का परिमाण

$$Q = mL$$

अथवा $$L = Q/m \qquad (11.13)$$

यहाँ L को गुप्त ऊष्मा कहते हैं तथा यह पदार्थ का अभिलक्षण है। इसका SI मात्रक $J\ kg^{-1}$ है। L का मान दाब पर भी निर्भर करता है। प्राय: इसके मान का उद्धरण मानक वायुमण्डलीय दाब पर किया जाता है। ठोस-द्रव अवस्था परिवर्तन के लिए गुप्त ऊष्मा को **संगलन की गुप्त ऊष्मा** (L_f) कहते हैं, तथा द्रव-गैस अवस्था परिवर्तन के लिए गुप्त ऊष्मा को **वाष्पन की गुप्त ऊष्मा** (L_v) कहते हैं। इसे हम प्राय: संगलन ऊष्मा तथा वाष्पन ऊष्मा कहते हैं। चित्र 11.12 में जल के किसी परिमाण के लिए ताप तथा ऊष्मा ऊर्जा के बीच ग्राफ का आलेख दर्शाया गया है। सारणी 11.4 में कुछ पदार्थों की गुप्त ऊष्मा, गलनांक तथा क्वथनांक दिए गए हैं।



चित्र 11.12 जल के लिए ताप तथा ऊष्मा के बीच ग्राफ आलेखन (पैमाने के अनुसार नहीं)।

ध्यान दीजिए कि जब अवस्था परिवर्तन के समय ऊष्मा दी (अथवा ली) जाती है, तो ताप नियत रहता है। ध्यान से देखिए कि चित्र 11.12 में प्रावस्था रेखाओं की प्रवणताएँ समान नहीं हैं जो यह संकेत देता है कि विभिन्न अवस्थाओं की विशिष्ट ऊष्मा धारिताएँ समान नहीं हैं। जल के लिए, संगलन तथा वाष्पन की गुप्त ऊष्माएँ क्रमश: $L_f = 3.33 \times 10^5\ J\ kg^{-1}$ तथा $L_v = 22.6 \times 10^5\ J\ kg^{-1}$ हैं। अर्थात् 1 kg हिम को $0^{\circ}C$ पर गलन के लिए 3.33×10^5 J ऊष्मा चाहिए तथा 1 kg जल को $100^{\circ}C$ पर भाप में परिवर्तन होने के लिए 22.6×10^5 J ऊष्मा चाहिए। अत: $100^{\circ}C$ के जल की अपेक्षा $100^{\circ}C$ की भाप में $22.6 \times 10^5\ J\ kg^{-1}$ ऊष्मा अधिक होती है। यही कारण है कि उबलते जल की तुलना में उसी ताप की भाप प्राय: अधिक गंभीर जलन देती है।

उदाहरण 11.4 जब 0°C के 0.15 kg हिम को किसी पात्र में भरे 50°C के 0.30 kg जल में मिलाया जाता है तो मिश्रण का परिणामी ताप 6.7°C हो जाता है। हिम के संगलन की ऊष्मा परिकलित कीजिए। ($s_{जल}$ = 4186 J kg^{-1} °C^{-1})

हल :

जल द्वारा लुप्त ऊष्मा = $ms_w(\theta_i-\theta_f)_w$

= (0.30 kg) (4186 J kg^{-1} °C^{-1}) (50.0°C – 6.7°C)

= 54376.14 J

हिम के गलन के लिए आवश्यक ऊष्मा

= m_2L_f = (0.15 kg) L_f

हिम जल के ताप को अंतिम ताप तक बढ़ाने के लिए आवश्यक ऊष्मा = $m_1s_w(\theta_f-\theta_i)_I$

= (0.15 kg) (4186 J kg^{-1} °C^{-1}) (6.7°C – 0°C)

= 4206.93 J

लुप्त ऊष्मा = ऊष्मा लब्धि

54376.14 J = (0.15 kg) L_f + 4206.93 J

L_f = 3.34×10^5 J kg^{-1} ◀

उदाहरण 11.5 किसी ऊष्मामापी में भरे –12°C के 3 kg हिम को वायुमण्डलीय दाब पर 100°C की भाप में परिवर्तित करने के लिए आवश्यक ऊष्मा परिकलित कीजिए। दिया गया है हिम की विशिष्ट ऊष्मा धारिता = 2100 J kg^{-1} °C^{-1}, जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता = 4186 J kg^{-1} °C^{-1}, हिम के संगलन की गुप्त ऊष्मा = 3.35×10^5 J kg^{-1} तथा भाप की गुप्त ऊष्मा = 2.256×10^6 J kg^{-1}.

हल : दिया है

हिम का द्रव्यमान m = 3 kg

हिम की विशिष्ट ऊष्मा धारिता, $s_{हिम}$

= 2100 J kg^{-1} °C^{-1}

जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता, $s_{जल}$

= 4186 J kg^{-1} °C^{-1}

हिम के संगलन की गुप्त ऊष्मा, $L_{f\,हिम}$

= 3.35×10^5 J kg^{-1}

भाप की गुप्त ऊष्मा, $L_{भाप}$

= 2.256×10^6 J kg^{-1}

अब, Q = –12°C के 3 kg हिम को 100°C की भाप में परिवर्तित करने के लिए आवश्यक ऊष्मा

Q_1 = –12°C के 3 kg हिम को 0°C के हिम में परिवर्तित करने के लिए आवश्यक ऊष्मा

= $m\,s_{हिम}\,\Delta T_1$ = (3 kg) (2100 J kg^{-1} °C^{-1}) [0–(–12)]°C = 75600 J

Q_2 = 0°C के 3 kg हिम को 0°C के जल में संगलित करने के लिए आवश्यक ऊष्मा

= $m\,L_{f\,हिम}$ = (3 kg) (3.35×10^5 J kg^{-1})

= 1005000 J

Q_3 = 0°C के 3 kg जल को 100°C के जल में परिवर्तित करने के लिए आवश्यक ऊष्मा

= $ms_w\,\Delta T_2$

= (3kg) (4186J kg^{-1} °C^{-1}) (100°C)

= 1255800 J

Q_4 = 100°C के 3 kg जल को 100°C की भाप में परिवर्तित करने के लिए आवश्यक ऊष्मा

= $m\,L_{भाप}$ = (3 kg) (2.256×10^6 J kg^{-1})

= 6768000 J

अतः, $Q = Q_1+Q_2+Q_3+Q_4$

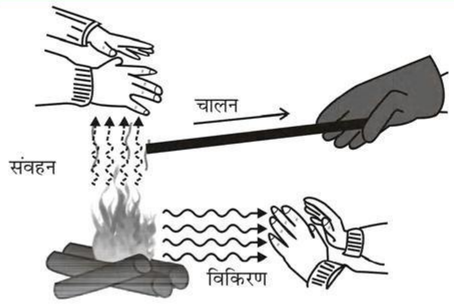
= 75600 J + 1005000J

+ 1255800 J + 6768000 J

= 9.1×10^6 J ◀

11.9 ऊष्मा स्थानांतरण

हमने देखा है कि ताप में अंतर के कारण एक निकाय से दूसरे निकाय में अथवा किसी निकाय के एक भाग से उसके दूसरे भाग में ऊर्जा के स्थानांतरण को ऊष्मा कहते हैं। इस ऊर्जा स्थानांतर के विविध साधन क्या हैं? ऊष्मा स्थानांतरण की सुस्पष्ट तीन विधियाँ हैं: चालन, संवहन तथा विकिरण (चित्र 11.13)।

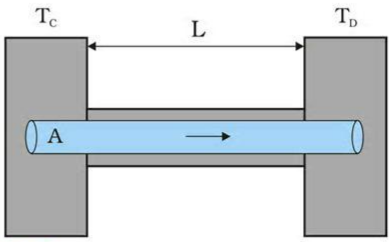


चित्र 11.13 चालन, संवहन तथा विकिरण द्वारा तापन।

11.9.1 चालन

किसी वस्तु के दो संलग्न भागों के बीच उनके तापों में अंतर के कारण ऊष्मा स्थानांतरण की क्रियाविधि को **चालन** कहते हैं। मान लीजिए किसी धातु की छड़ का एक सिरा आग की ज्वाला में रखा है। शीघ्र ही छड़ का दूसरा सिरा इतना गर्म हो जाएगा कि आप उसे अपने नंगे हाथों से पकड़ नहीं सकेंगे। यहाँ छड़ में ऊष्मा स्थानांतरण चालन द्वारा छड़ के तप्त सिरे से छड़ के विभिन्न भागों से होकर दूसरे सिरे तक होता है। गैसें हीन ऊष्मा चालक होती हैं तथा द्रवों की चालकता ठोसों तथा गैसों के बीच की होती है।

मात्रात्मक रूप में, ऊष्मा चालन का वर्णन "किसी पदार्थ में किसी दिए गए तापांतर के लिए ऊष्मा प्रवाह की दर" द्वारा किया जाता है। L लंबाई तथा A एकसमान अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल की धातु की किसी ऐसी छड़ पर विचार कीजिए जिसके दोनों सिरों के बीच तापांतर स्थापित किया गया है। उदाहरण के लिए, ऐसा छड़ के सिरों को क्रमशः T_C तथा T_D ताप के ऊष्मा भंडारों के संपर्क में रखकर किया जा सकता है (चित्र 11.14)। अब हम एक ऐसी आदर्श स्थिति की कल्पना करते हैं जिसमें छड़ के पार्श्व पूर्णतः ऊष्मारोधी हैं ताकि पार्श्वों तथा परिवेश के बीच ऊष्मा का विनिमय नहीं होता।



चित्र 11.14 किसी छड़ जिसके दो सिरों को T_C तथा T_D तापों पर ($T_C > T_D$) स्थापित किया गया है, में चालन द्वारा स्थायी अवस्था ऊष्मा प्रवाह।

कुछ समय के पश्चात् स्थायी अवस्था आ जाती है; छड़ का ताप दूरी के साथ एकसमान रूप से T_C से T_D तक घटता है; ($T_C>T_D$)। C पर ऊष्मा भण्डार एक नियत दर पर ऊष्मा की आपूर्ति करता है, जो छड़ से स्थानांतरित होकर उसी दर से D पर स्थित ऊष्मा भंडार में पहुँच जाती है। प्रयोगों द्वारा यह पाया जाता है कि इस स्थायी अवस्था में, ऊष्मा प्रवाह की दर H तापांतर ($T_C - T_D$) तथा अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल, A के अनुक्रमानुपाती और छड़ की लंबाई L के व्युत्क्रमानुपाती होती है:

$$H = KA\frac{T_C - T_D}{L} \tag{11.14}$$

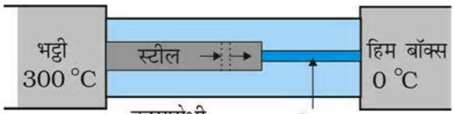
आनुपातिकता स्थिरांक K को पदार्थ की **ऊष्मा चालकता** कहते हैं। किसी पदार्थ के लिए K का मान जितना अधिक होता है उतनी ही शीघ्रता से वह ऊष्मा चालन करता है। K का SI मात्रक $J\ s^{-1}\ m^{-1}\ K^{-1}$ अथवा $W\ m^{-1}\ K^{-1}$ है। सारणी 11.5 में विभिन्न पदार्थों की ऊष्मा चालकता के मान दिए गए हैं। इन मानों में ताप के साथ अल्प अंतर होता है, परन्तु सामान्य ताप परिसर में इन मानों को अचर मान सकते हैं।

अच्छे ऊष्मा चालकों (धातुओं) की अपेक्षाकृत अधिक ऊष्मा चालकताओं की तुलना कुछ अच्छे ऊष्मारोधी पदार्थों, जैसे लकड़ी तथा काँच तंतु, की अपेक्षाकृत कम ऊष्मा चालकताओं से कीजिए। आपने यह पाया होगा कि खाना पकाने के कुछ बर्तनों की पेंदी पर ताँबे का विलेपन होता है। ऊष्मा का अच्छा चालक होने के कारण ताँबा बर्तन की पेंदी पर ऊष्मा वितरण को उन्नत करता है जिससे भोजन समान रूप से पकता है। इसके विपरीत, प्लास्टिक फेन, मुख्यतः वायु की कोटरिका होने के कारण, अच्छे ऊष्मारोधी होते हैं। याद कीजिए गैसें अल्प चालक होती हैं तथा सारणी 11.5 से वायु की निम्न ऊष्मा चालकता नोट कीजिए। बहुत से अन्य अनुप्रयोगों में ऊष्मा धारण तथा स्थानांतरण महत्वपूर्ण होते हैं। हमारे देश में, कंक्रीट की छतों वाले घर गर्मियों में बहुत गर्म हो जाते हैं, इसका कारण यह है कि कंक्रीट की ऊष्मा चालकता (यद्यपि धातुओं की तुलना काफी कम है।) फिर भी बहुत कम नहीं है। इसीलिए, प्रायः लोग छतों पर फेन-रोधन कराना पसंद करते हैं ताकि ऊष्मा स्थानांतरण को रोककर कमरे को शीतल रखा जा सके। कुछ स्थितियों में ऊष्मा स्थानांतरण क्रांतिक होता है। उदाहरण के लिए नाभिकीय रिएक्टरों में सुविस्तृत ऊष्मा-स्थानांतर निकायों को स्थापित करने की आवश्यकता होती है ताकि नाभिकीय रिएक्टर के क्रोड में नाभिकीय विखंडन द्वारा उत्पन्न विशाल ऊर्जा का काफी तेज़ी से बाहर पारगमन किया जा सके तथा क्रोड अतितप्त होने से बचा रहे।

सारणी 11.5 कुछ पदार्थों की ऊष्मा चालकताएँ

पदार्थ	ऊष्मा चालकता ($J\ s^{-1}\ m^{-1}\ K^{-1}$)
धातुएँ	
चाँदी	406
ताँबा	385
ऐलुमिनियम	205
पीतल	109
स्टील	50.2
लैड	34.7
पारा	8.3
अधातुएँ	
ऊष्मारोधी ईंट	0.15
कंक्रीट	0.8
शरीर-वसा	0.20
नमदा	0.04
काँच	0.8
हिम	1.6
काँच तंतु	0.04
लकड़ी	0.12
जल	0.8
गैसें	
वायु	0.024
ऑर्गन	0.016
हाइड्रोजन	0.14

उदाहरण 11.6 चित्र 11.15 में दर्शाए गए निकाय की स्थायी अवस्था में स्टील-ताँबा संधि का ताप क्या है? स्टील छड़ की लंबाई = 15.0 cm, ताँबे की छड़ की लंबाई = 10.0 cm, भट्टी का ताप = 300°C, दूसरे सिरे का ताप = 0°C; स्टील की छड़ की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल ताँबे की छड़ की अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल का दो गुना है। (स्टील की ऊष्मा चालकता = 50.2 $J\ s^{-1}\ m^{-1}\ K^{-1}$; ताँबे की ऊष्मा चालकता = 385 $J\ s^{-1} m^{-1} K^{-1}$)



चित्र 11.15

हल : छड़ों को चारों ओर से घेरे रखने वाले ऊष्मारोधी पदार्थ छड़ों के पार्श्व से होने वाली ऊष्मा क्षति को कम कर देते हैं। इसीलिए, ऊष्मा केवल छड़ की लंबाई के अनुदिश ही प्रवाहित होती है। छड़ की किसी भी अनुप्रस्थ काट पर विचार कीजिए। स्थायी अवस्था में छड़ के किसी अवयव में प्रवेश करने वाली ऊष्मा उससे बाहर निष्कासित होने वाली ऊष्मा के बराबर होनी चाहिए, वरना अवयव द्वारा ऊष्मा की नेट लब्धि अथवा हानि होगी तथा इसका ताप स्थायी नहीं रहेगा। इस प्रकार स्थायी अवस्था में छड़ की किसी अनुप्रस्थ काट से प्रवाहित होने वाली ऊष्मा की दर संयुक्त स्टील-ताँबा छड़ की लंबाई के अनुदिश सभी बिंदुओं पर समान है। मान लीजिए स्टील-ताँबा संधि का स्थायी अवस्था में ताप T है, तब

$$\frac{K_1 A_1 (300 - T)}{L_1} = \frac{K_2 A_2 (T - 0)}{L_2}$$

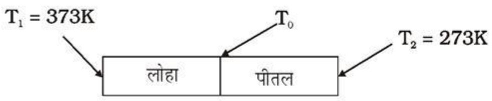
यहाँ, 1 तथा 2 क्रमशः स्टील तथा ताँबे को संदर्भित करते हैं। $A_1 = 2A_2$, $L_1 = 15.0$ cm, $L_2 = 10.0$ cm, $K_1 = 50.2\ J\ s^{-1}\ m^{-1}\ K^{-1}$, $K_2 = 385\ J\ s^{-1}\ m^{-1}\ K^{-1}$, के लिए

$$\frac{50.2 \times 2\,(300 - T)}{15} = \frac{385T}{10}$$

अर्थात् $T = 44.4\ °C$ ◀

उदाहरण 11.7 चित्र 11.16 में दर्शाए अनुसार लोहे की किसी छड़ ($L_1 = 0.1$m, $A_1 = 0.02\ m^2$, $K_1 = 79\ W\ m^{-1} K^{-1}$) को किसी पीतल की छड़ ($L_2 = 0.1$m, $A_2 = 0.02\ m^2$, $K_2 = 109\ W\ m^{-1} K^{-1}$) के साथ सिरे से सिरे को मिलाकर डाला गया है। लोहे की छड़ तथा पीतल की छड़ के स्वतंत्र सिरों को क्रमशः 373 K तथा 273 K पर स्थापित किया गया है। (i) दोनों छड़ों की संधि पर ताप, (ii) संयुक्त छड़ की तुल्य ऊष्मा चालकता, तथा (iii) संयुक्त छड़ में ऊष्मा प्रवाह की दर के लिए व्यंजक निकालिए तथा परिकलित कीजिए।

हल



चित्र 11.16

दिया गया है,
$L_1 = L_2 = L = 0.1\text{m}$, $A_1 = A_2 = A = 0.02\ \text{m}^2$
$K_1 = 79\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1}$, $K_2 = 109\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1}$,
$T_1 = 373$ K, और $T_2 = 273$ K

स्थायी अवस्था की शर्तों के अधीन, लोहे की छड़ से ऊष्मा प्रवाह की दर (H_1) ताँबे की छड़ से ऊष्मा प्रवाह की दर (H_2) के समान है।

अतः, $H = H_1 = H_2$

$$= \frac{K_1 A_1 (T_1 - T_0)}{L_1} = \frac{K_2 A_2 (T_0 - T_2)}{L_2}$$

चूंकि $A_1 = A_2 = A$ तथा $L_1 = L_2 = L$
अतः उपरोक्त समीकरण होगा

$K_1 (T_1 - T_0) = K_2 (T_0 - T_2)$
अतः दोनों छड़ों की संधि का ताप T_0 होगा

$$T_0 = \frac{K_1 T_1 + K_2 T_2}{K_1 + K_2}$$

T_0 के इस मान का प्रतिस्थापन करने से किसी भी छड़ से ऊष्मा प्रवाह की दर H का मान प्राप्त होता है:

$$H = \frac{K_1 A (T_1 - T_0)}{L} = \frac{K_2 A (T_0 - T_2)}{L}$$

$$= \left(\frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}\right) \frac{A(T_1 - T_0)}{L} = \frac{A(T_1 - T_2)}{L\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right)}$$

यदि लंबाई $L_1 + L_2 = 2L$ की संयुक्त छड़ की तुल्य ऊष्मा चालकता K है तथा इससे होकर जाने वाली ऊष्मा प्रवाह की दर H' हो, तो उपरोक्त समीकरण का उपयोग करने पर

$$H' = \frac{K'A (T_1 - T_2)}{2L} = H$$

तथा $$K = \frac{2K_1 K_2}{K_1 + K_2}$$

इस प्रकार,

(i) $$T_0 = \frac{K_1 T_1 + K_2 T_2}{K_1 + K_2}$$

$$= \frac{(79\ \text{W m}^{-1}\text{K}^{-1})(373\text{K}) + (109\ \text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1})(273\text{K})}{79\ \text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1} + 109\ \text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}}$$

$= 315$ K

(ii) $$K' = \frac{2K_1 K_2}{K_1 + K_2}$$

$$= \frac{2 \times (79\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1}) \times (109\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1})}{79\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1} + 109\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1}}$$

$= 91.6\ \text{W m}^{-1}\text{K}^{-1}$

(iii) $$H' = H = \frac{K'A (T_1 - T_2)}{2L}$$

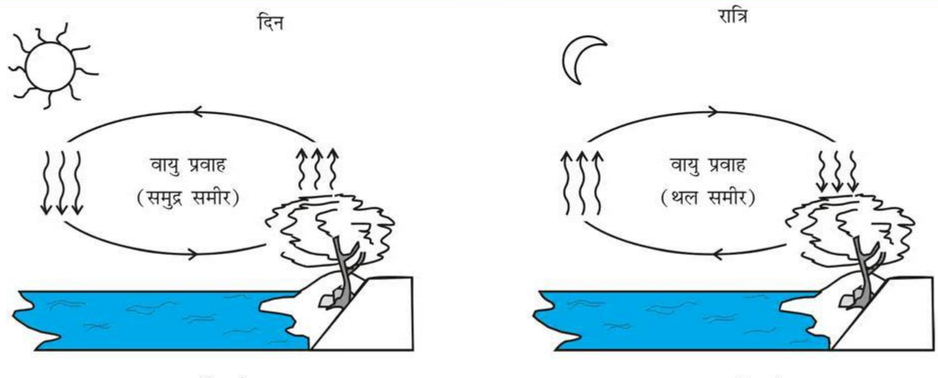
$$= \frac{(91.6\ \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1}) \times (0.02\ \text{m}^2) \times (373\text{K}-273\text{K})}{2 \times (0.1\ \text{m})}$$

$= 916.1$ W ◀

11.9.2 संवहन

संवहन वह विधि है जिसमें पदार्थ की वास्तविक गति द्वारा ऊष्मा स्थानांतरण होता है। यह केवल तरलों में ही संभव है। संवहन प्राकृतिक हो सकता है अथवा प्रणोदित भी हो सकता है। प्राकृतिक संवहन में गुरुत्व एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाती है। जब किसी तरल को नीचे से गर्म किया जाता है, तो गर्म भाग में प्रसार होता है, फलस्वरूप उसका घनत्व घट जाता है। उत्प्लावना के कारण यह ऊपर उठता है तथा ऊपरी शीतल भाग इसे प्रतिस्थापित कर देता है। यह पुनः तप्त होता है, ऊपर उठता है तथा तरल के शीतल भाग द्वारा प्रतिस्थापित होता है। यह प्रक्रिया चलती रहती है। स्पष्ट रूप से ऊष्मा स्थानांतर की यह विधि चालन से भिन्न होती है। संवहन में तरल के विभिन्न भागों का स्थूल अभिगमन होता है। प्रणोदित संवहन में पदार्थ को किसी पम्प अथवा किसी अन्य भौतिक साधन द्वारा गति करने के लिए विवश किया जाता है। घरों में प्रणोदित वायु तापन निकाय, मानव परिसंचरण तंत्र तथा स्वचालित वाहनों के इंजनों के शीतलन निकाय प्रणोदित संवहन निकायों के सामान्य उदाहरण हैं। मानव शरीर में हृदय एक पम्प की भांति कार्य करता है जो रुधिर का शरीर के विभिन्न भागों में संचरण करता है, तथा इस प्रकार प्रणोदित संवहन द्वारा ऊष्मा स्थानांतरित करके शरीर में एकसमान ताप स्थापित करता है।

प्राकृतिक संवहन बहुत सी सुपरिचित परिघटनाओं के लिए उत्तरदायी है। दिन के समय बड़े जलाशयों की तुलना में थल शीघ्र तप्त हो जाता है। ऐसा दो कारणों से होता है - पहला जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता उच्च है तथा दूसरा मिश्रित धाराएँ अवशोषित ऊष्मा को विशाल आयतन के जल के सब भागों में विसारित कर देती हैं। तप्त थल के संपर्क वाली वायु चालन



चित्र 11.17 संवहन चक्र।

द्वारा गर्म होती है तथा तप्त होकर वायु फैलती है, जिससे परिवेश की शीतल वायु की तुलना में इसका घनत्व कम हो जाता है। फलस्वरूप उष्ण वायु ऊपर उठती है (वायु धाराएँ), तथा रिक्त स्थान को भरने के लिए अन्य वायु गति करती हैं (पवनें) – जिससे बड़े जलाशयों के निकट **समुद्र समीर** उत्पन्न हो जाती हैं। ठंडी वायु नीचे आती हैं तथा एक तापीय संवहन चक्र बन जाता है, जो ऊष्मा को थल से दूर स्थानांतरित कर देता है। रात्रि में थल की ऊष्मा का ह्रास अधिक शीघ्रता से होता है तथा जलीय पृष्ठ थल की तुलना में उष्ण होती है। परिणामस्वरूप चक्र उत्क्रमित हो जाता है (चित्र 11.17)।

प्राकृतिक संवहन का एक अन्य उदाहरण उत्तर पूर्व से विषुवत् वृत्त की ओर पृथ्वी पर बहने वाली स्थायी पृष्ठीय पवनें हैं, जिन्हें व्यापारिक पवनें कहते हैं। इनके बहने की यथोचित व्याख्या इस प्रकार है : पृथ्वी के विषुवतीय क्षेत्रों तथा ध्रुवीय क्षेत्रों को सूर्य की ऊष्मा समान मात्रा में प्राप्त नहीं होती। विषुवत वृत्त के समीप पृथ्वी के पृष्ठ पर वायु तप्त होती है जबकि ध्रुवों के ऊपरी वायुमण्डलीय वायु शीतल होती है। किसी अन्य कारक की अनुपस्थिति में, संवहन धाराएँ प्रवाहित होने लगेंगी जिसमें वायु विषुवतीय पृष्ठ से ऊपर उठकर ध्रुवों की ओर बहेगी, फिर नीचे की ओर जाएगी तथा बहती हुई पुन: विषुवत वृत्त की ओर जाएगी। परन्तु, पृथ्वी की घूर्णन गति इस संवहन धारा में संशोधन कर देती है जिसके कारण विषुवत वृत्त के समीप की वायु की पूर्व की ओर चाल 1600 km/h होती है जबकि ध्रुवों के समीप यह चाल शून्य होती है। परिणामस्वरूप यह वायु ध्रुवों पर नीचे की ओर न फैलकर 30°N (उत्तर) अक्षांश पर फैलती है और विषुवत वृत्त पर लौट आती है। इसे **व्यापारिक पवनें** कहते हैं।

11.9.3 विकिरण

चालन तथा संवहन को परिवहन माध्यम के रूप में किसी पदार्थ की आवश्यकता होती है। ऊष्मा स्थानांतरण की ये विधियाँ निर्वात से पृथक दो वस्तुओं के बीच क्रियाशील नहीं हो सकतीं। परन्तु विशाल दूरी होने पर भी पृथ्वी सूर्य से ऊष्मा प्राप्त कर लेती है, तथा हम पास की आग की उष्णता शीघ्र ही अनुभव कर लेते हैं, यद्यपि वायु अल्प चालक है तथा इतने कम समय में संवहन धाराएँ भी स्थापित नहीं हो पातीं। ऊष्मा स्थानांतरण की तीसरी विधि को किसी माध्यम की आवश्यकता नहीं होती। इस विधि को **विकिरण** कहते हैं, तथा विद्युत चुंबकीय तरंगों द्वारा इस प्रकार विकरित ऊर्जा को **विकिरण ऊर्जा** कहते हैं। किसी विद्युत चुंबकीय तरंग में वैद्युत तथा चुंबकीय क्षेत्र दिक तथा काल में दोलन करते हैं। अन्य किसी तरंग की भाँति विद्युत चुंबकीय तरंगों की विभिन्न तरंगदैर्घ्य हो सकती हैं तथा वे निर्वात में समान चाल, जिसे प्रकाश की चाल कहते हैं अर्थात् $3\times10^8\, m\, s^{-1}$ से चल सकती हैं। इन तथ्यों के बारे में विस्तार से आप बाद में फिर कभी सीखेंगे, परन्तु अब आप यह जान गए हैं कि विकिरण द्वारा ऊष्मा स्थानांतरण के लिए माध्यम का होना क्यों आवश्यक नहीं है तथा यह इतनी तीव्र गति से क्यों होता है। विकिरण द्वारा ही सूर्य से ऊष्मा निर्वात (शून्य अंतरिक्ष) से होकर पृथ्वी तक पहुँचती है। सभी तप्त पिण्ड चाहे वे ठोस, द्रव अथवा गैस हों, विकिरण ऊर्जा उत्सर्जित करते हैं। किसी पिण्ड द्वारा उसके ताप के कारण उत्सर्जित विद्युत चुंबकीय विकिरणों जैसे लाल तप्त लोहा से विकिरण अथवा तंतु लैम्प से प्रकाश को **ऊष्मा विकिरण** कहते हैं।

जब यह ऊष्मा विकिरण अन्य पिण्डों पर पड़ता है तो इसका आंशिक परावर्तन तथा आंशिक अवशोषण होता है। ऊष्मा का वह परिमाण जिसे कोई पिण्ड विकिरण द्वारा अवशोषित कर सकता है, उस पिण्ड के वर्ण (रंग) पर निर्भर करता है।

हम यह पाते हैं कि कृष्ण पिण्ड विकिरण ऊर्जा का अवशोषण तथा उत्सर्जन हलके वर्णों के पिण्डों की अपेक्षा अधिक करते हैं। इस तथ्य के हमारे दैनिक जीवन में अनेक अनुप्रयोग हैं। हम गर्मियों में श्वेत अथवा हलके वर्णों के वस्त्र पहनते हैं ताकि वे सूर्य की कम से कम ऊष्मा अवशोषित करें। परन्तु सर्दियों में हम गहरे वर्ण के वस्त्र पहनते हैं जो सूर्य की अधिक ऊष्मा को अवशोषित करके हमें उष्ण रखते हैं। खाना पकाने के बर्तनों की पेंदी को काला पोत दिया जाता है ताकि आग से वह अधिकतम ऊष्मा अवशोषित करके पकाई जाने वाली सब्जी को दें।

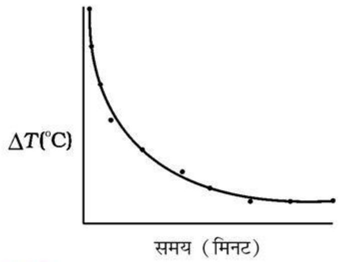
इसी प्रकार, ड्यूआर फ्लास्क अथवा थर्मस बोतल एक ऐसी युक्ति है जो बोतल की अंतर्वस्तु तथा बाहरी परिवेश के बीच ऊष्मा स्थानांतरण को निम्नतम कर देती है। यह दोहरी दीवारों का काँच का बर्तन होता है जिसकी भीतरी तथा बाहरी दीवारों पर चाँदी का लेप होता है। भीतरी दीवार से विकिरण परावर्तित होकर बोतल की अंतर्वस्तु में वापस लौट जाते हैं। इसी प्रकार बाहरी दीवार भी बाहर से आने वाले किन्हीं भी विकिरणों को वापस परावर्तित कर देती है। दीवारों के बीच के स्थान को निर्वातित करके चालन तथा संवहन द्वारा होने वाले ऊष्मा क्षय को घटाया जाता है तथा फ्लास्क को ऊष्मा रोधी जैसे कार्क पर टिकाया जाता है। इसीलिए यह युक्ति तप्त अंतर्वस्तु (जैसे दूध) को ठंडा होने से बचाने में उपयोगी है, अथवा वैकल्पिक रूप से ठंडी अंतर्वस्तुओं (जैसे हिम) का भंडारण करने में भी उपयोगी है।

11.10 न्यूटन का शीतलन नियम

हम सभी यह जानते हैं कि तप्त जल अथवा दूध मेज पर यदि रखा छोड़ दें तो वह धीरे-धीरे शीतल होना आरंभ कर देता है। अंततः वह परिवेश के ताप पर पहुँच जाता है। कोई दी गई वस्तु अपने परिवेश से ऊष्मा का विनिमय करके कैसे शीतल हो सकती है, इसका अध्ययन करने के लिए आइए निम्नलिखित क्रियाकलाप करें।

क्रियाकलाप 11.4

एक विडोलक सहित ऊष्मामापी में कुछ जल, मान लें 300 mL लीजिए और इसे दो छिद्र वाले ढक्कन से ढक दीजिए। ढक्कन के एक छिद्र में तापमापी लगाइए तथा यह सुनिश्चित कीजिए कि तापमापी का बल्ब जल में डूब जाए। तापमापी का पाठ्यांक नोट कीजिए। यह पाठ्यांक T_1 परिवेश का ताप है। ऊष्मामापी के जल को इतना गर्म कीजिए कि इसका ताप कक्ष ताप (अर्थात् परिवेश के ताप) से लगभग 40°C अधिक तक पहुँच जाए। तत्पश्चात् ऊष्मा स्रोत को हटाकर जल को गर्म करना बंद कीजिए। विराम घड़ी चलाइए तथा प्रत्येक नियत समय अंतराल जैसे 1 मिनट के पश्चात् विडोलक से धीरे-धीरे विडोलित करते हुए तापमापी के पाठ्यांक नोट कीजिए। जल का ताप परिवेश के ताप से लगभग 5°C अधिक रहने तक पाठ्यांक नोट करते रहिए। मान लीजिए यह पाठ्यांक (T_2) है। तत्पश्चात् ताप $\Delta T = T_2 - T_1$ को y अक्ष के अनुदिश लेकर इसके प्रत्येक मान के लिए तदनुरूपी t के मान को x-अक्ष के अनुदिश लेकर ग्राफ आलेखित करिए (चित्र 11.18)।



चित्र 11.18 समय के साथ तप्त जल के शीतलन को दर्शाने वाला वक्र।

ग्राफ से आप यह निष्कर्ष निकालेंगे कि किस प्रकार तप्त जल का शीतलन उसके अपने तथा अपने परिवेश के तापों के बीच अंतर पर निर्भर करता है। आप यह भी नोट करेंगे कि आरंभ में शीतलन की दर उच्च है तथा वस्तु के ताप में कमी होने पर यह दर घट जाती है।

उपरोक्त क्रियाकलाप यह दर्शाता है कि कोई तप्त पिण्ड ऊष्मा विकिरण के रूप में अपने परिवेश को ऊष्मा खो देता है। यह ऊष्मा-क्षय की दर पिण्ड तथा उसके परिवेश के तापों के अंतर पर निर्भर करती है। न्यूटन ऐसे पहले वैज्ञानिक थे जिन्होंने किसी दिए गए अंतःक्षेत्र के भीतर रखे किसी पिण्ड द्वारा लुप्त ऊष्मा तथा उसके ताप के बीच संबंध का योजनाबद्ध अध्ययन किया।

न्यूटन के शीतलन नियम के अनुसार किसी पिण्ड के ऊष्मा क्षय की दर, $-\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ पिण्ड तथा उसके परिवेश के तापों के अंतर $\Delta T = (T_2 - T_1)$ के अनुक्रमानुपाती होती है। यह नियम केवल लघु तापांतर के लिए ही वैध है। विकिरण द्वारा ऊष्मा-क्षय पिण्ड के पृष्ठ की प्रकृति तथा खुले पृष्ठ के

क्षेत्रफल पर भी निर्भर करता है। अत: हम लिख सकते हैं कि

$$-\frac{dQ}{dt}=k(T_2-T_1) \quad (11.15)$$

यहाँ k एक धनात्मक नियतांक है जो पिण्ड के पृष्ठ के क्षेत्रफल तथा उसकी प्रकृति पर निर्भर करता है। मान लीजिए m द्रव्यमान तथा विशिष्ट ऊष्मा धारिता s का कोई पिण्ड T_2 ताप पर है। मान लीजिए परिवेश का ताप T_1 है। मान लीजिए पिण्ड का ताप एक लघु समय अंतराल dt में dT_2 कम हो जाता है, तब लुप्त ऊष्मा का परिमाण

$dQ = ms\, dT_2$

∴ ऊष्मा क्षय की दर

$$\frac{dQ}{dt}=ms\frac{dT_2}{dt} \quad (11.16)$$

समीकरणों (11.15) तथा (11.16) से हमें प्राप्त होता है

$$-ms\frac{dT_2}{dt}=k(T_2-T_1)$$

$$\frac{dT_2}{T_2-T_1}=-\frac{k}{ms}dt=-K\,dt \quad (11.17)$$

यहाँ $K = k/(ms)$

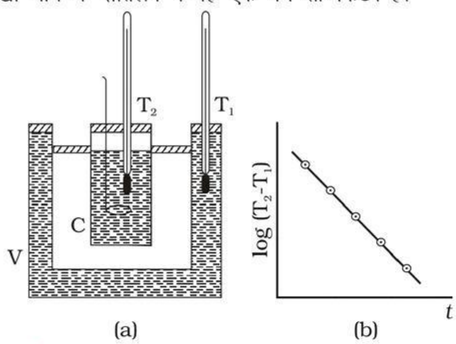
समाकलित करने पर

$$\log_e(T_2-T_1)=-Kt+c \quad (11.18)$$

अथवा $T_2 = T_1 + C'e^{-Kt}$; यहाँ $C' = e^c$ (11.19)

समीकरण (11.19) की सहायता से एक विशिष्ट ताप परिसर के आद्योपांत शीतलन का समय परिकलित किया जा सकता है।

लघु तापांतरों के लिए, चालन, संवहन तथा विकिरण के संयुक्त प्रभाव के कारण शीतलन की दर तापांतर के अनुक्रमानुपाती होती है। किसी विकिरक से कमरे में ऊष्मा स्थानांतरण, कमरे की दीवारों से पार होकर ऊष्मा-क्षति अथवा मेज पर प्याले में रखी चाय के शीतलन में यह एक वैध सन्निकटन है।



चित्र 11.19 न्यूटन के शीतलन नियम का सत्यापन।

चित्र 11.19(a) में दर्शायी गई प्रायोगिक व्यवस्था की सहायता से न्यूटन के शीतलन नियम का सत्यापन किया जा सकता है। इसमें दोहरी दीवारों वाला एक बर्तन (V) जिसकी दीवारों के बीच जल भरा होता है, लिया जाता है। इस दोहरी दीवारों वाले बर्तन में तप्त जल से भरा ताँबे का ऊष्मामापी (C) रखते हैं। इसमें दो तापमापियों का उपयोग किया जाता है, जिसमें तापमापी T_1 के द्वारा दोहरी दीवारों के बीच भरे उष्ण जल का ताप, तथा तापमापी T_2 के द्वारा ऊष्मामापी में भरे जल का ताप मापते हैं। ऊष्मामापी के तप्त जल का ताप एक नियमित अंतराल के पश्चात् मापा जाता है। समय t तथा $\log_e(T_2-T_1)$ के बीच ग्राफ आलेखित किया जाता है जिसकी प्रकृति चित्र 11.19(b) में दर्शाए अनुसार ऋणात्मक प्रवणता की एक सरल रेखा होती है। यह समीकरण 11.18 की पुष्टि करती है।

उदाहरण 11.8 किसी बर्तन में भरे तप्त भोजन का ताप 2 मिनट में 94°C से 86°C हो जाता है जबकि कक्ष-ताप 20°C है। 71°C से 69°C तक ताप के गिरने में कितना समय लगेगा?

हल : 94°C तथा 86°C का माध्य 90°C है जो कक्ष-ताप से 70°C अधिक है। इन अवस्थाओं में बर्तन का ताप 2 मिनट में 8°C घट जाता है।

अत:, समीकरण (11.17) से,

$$\frac{\text{तापांतर}}{\text{समय}}=K\Delta T$$

$$\frac{8^\circ C}{2\ \text{मिनट}}=K(70^\circ C)$$

69°C तथा 71°C का माध्य 70°C है, जो कक्ष-ताप से 50°C अधिक है। इस अवस्था में K मूल अवस्था के समान है, अत:

$$\frac{2^\circ C}{\text{समय}}=K(50^\circ C)$$

दोनों समीकरणों को विभाजित करने पर

$$\frac{8^\circ C/2\ \text{मिनट}}{2^\circ C/\text{समय}}=\frac{K(70^\circ C)}{K(50^\circ C)}$$

समय = 0.7 min. = 42 s

सारांश

1. ऊष्मा ऊर्जा का एक रूप है जो किसी पिण्ड तथा उसके परिवर्ती माध्यम के बीच उनमें तापांतर के कारण प्रवाहित होती है। किसी पिण्ड की तप्तता की कोटि मात्रात्मक रूप में ताप द्वारा निरूपित होती है।
2. किसी ताप मापन युक्ति (तापमापी) में मापन योग्य किसी ऐसे गुण (जिसे तापमापीय गुण कहते हैं) का उपयोग किया जाता है, जिसमें ताप के साथ परिवर्तन होता है। विभिन्न तापमापी में भिन्न-भिन्न ताप मापक्रम बनते हैं। कोई ताप मापक्रम बनाने के लिए दो नियत बिंदुओं का चयन किया जाता है तथा उन्हें कुछ यादृच्छिक ताप मान दिए जाते हैं। ये दो संख्याएँ मापक्रम के मूल बिंदु तथा उसके मात्रक की आमाप को निश्चित करती हैं।
3. सेल्सियस ताप (t_C) तथा फारेनहाइट ताप (t_F) में यह संबंध होता है : $t_F = (9/5)\ t_C + 32$
4. दाब (P), आयतन (V) तथा परम ताप (T) में संबंध दर्शाने वाली आदर्श गैस समीकरण इस प्रकार व्यक्त की जाती है:

$$PV = \mu RT$$

यहाँ μ मोल की संख्या तथा R सार्वत्रिक गैस नियतांक है।

5. परम ताप मापक्रम में, मापक्रम का शून्य, ताप के परम शून्य को व्यक्त करता है। यह वह ताप है जिस पर प्रत्येक पदार्थ में न्यूनतम संभावित आण्विक सक्रियता होती है। केल्विन परम ताप मापक्रम (T) के मात्रक का आकार सेल्सियस ताप मापक्रम (t_c) के मात्रक के आकार के बराबर होता है परन्तु इनके मूल बिंदुओं में अंतर होता है:

$$t_C = T - 273.15$$

6. रैखिक प्रसार गुणांक (α_l) तथा आयतन प्रसार गुणांक (α_V) को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है:

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha_l \Delta T$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \alpha_V \Delta T$$

यहाँ Δl तथा ΔV ताप में ΔT का परिवर्तन होने पर क्रमशः लंबाई l तथा आयतन V में परिवर्तन को निर्दिष्ट करते हैं। इनमें निम्नलिखित संबंध है:

$$\alpha_V = 3\ \alpha_l$$

7. किसी पदार्थ की विशिष्ट ऊष्मा धारिता को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है:

$$s = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

यहाँ m पदार्थ का द्रव्यमान तथा ΔQ पदार्थ के ताप में ΔT का परिवर्तन करने के लिए आवश्यक ऊर्जा की मात्रा है। किसी पदार्थ की मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है:

$$C = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

यहाँ μ पदार्थ के मोल की संख्या है।

8. संगलन की गुप्त ऊष्मा (L_f) ऊष्मा की वह मात्रा है जो किसी पदार्थ के एकांक द्रव्यमान को समान ताप तथा दाब पर ठोस अवस्था से द्रव अवस्था में परिवर्तित करने के लिए आवश्यक होती है। वाष्पन की गुप्त ऊष्मा (L_v) ऊष्मा

की वह मात्रा है जो किसी पदार्थ के एकांक द्रव्यमान को ताप व दाब में बिना कोई परिवर्तन किए द्रव अवस्था से वाष्प अवस्था में परिवर्तित करने के लिए आवश्यक होती है।

9. ऊष्मा-स्थानांतरण की तीन विधियाँ हैं - चालन, संवहन तथा विकिरण।

10. चालन में किसी पिण्ड के आस-पास के भागों के बीच ऊष्मा का स्थानांतरण आण्विक संघट्टनों द्वारा संपन्न होता है परन्तु इसमें द्रव्य का प्रवाह नहीं होता। किसी L लंबाई तथा A अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल की छड़, जिसके दोनों सिरों के तापों को T_C तथा T_D पर स्थापित किया गया है, द्वारा प्रवाहित ऊष्मा की दर

$$H = K\,A\,\frac{T_C - T_D}{L}$$

यहाँ K छड़ के पदार्थ की ऊष्मा चालकता है।

11. न्यूटन के शीतलन नियम के अनुसार किसी पिण्ड के शीतलन की दर परिवेश के ऊपर वस्तु के ताप-आधिक्य के अनुक्रमानुपाती होती है

$$\frac{dQ}{dt} = -k\,(T_2 - T_1)$$

यहाँ T_1 परिवेशी माध्यम का ताप तथा T_2 पिण्ड का ताप है।

राशि	प्रतीक	विमाएँ	मात्रक	टिप्पणी
पदार्थ की मात्रा	μ	(मोल)	मोल (mol)	
सेल्सियस ताप	t_c	[K]	°C	
केल्विन परम ताप	T	[K]	K	$t_c = T - 273.15$
रैखिक प्रसार गुणांक	α_l	[K^{-1}]	K^{-1}	
आयतन प्रसार गुणांक	α_v	[K^{-1}]	K^{-1}	$\alpha_v = 3\alpha_l$
किसी निकाय को आपूर्त ऊष्मा	ΔQ	[ML^2 T^{-2}]	J	Q अवस्था चर नहीं है
विशिष्ट ऊष्मा धारिता	s	[L^2 T^{-2}K^{-1}]	J kg^{-1} K^{-1}	
ऊष्मा चालकता	K	[MLT^{-3} K^{-1}]	J s^{-1} m^{-1}K^{-1}	$H = -KA\,\frac{dT}{dx}$

विचारणीय विषय

1. केल्विन ताप (T) तथा सेल्सियस ताप t_c को जोड़ने वाला संबंध इस प्रकार है:

   $$T = t_c + 273.15$$

   तथा जल के त्रिक बिंदु के लिए (चयन द्वारा) $T = 273.16$ K का निर्धारण यथार्थ संबंध है। इस चयन के साथ सेल्सियस मापक्रम पर हिम का गलनांक तथा जल का क्वथनांक (दोनों 1 atm दाब पर) क्रमशः 0 °C तथा 100 °C के अत्यधिक निकट हैं परन्तु यथार्थ रूप से इनके बराबर नहीं हैं। मूल सेल्सियस ताप मापक्रम में पिछले नियत बिंदु (चयन द्वारा) तथ्यतः 0 °C तथा 100 °C थे, परन्तु अब नियत बिंदुओं के चयन के लिए जल के त्रिक बिंदु को अच्छा माना जाता है क्योंकि इसका ताप अद्वितीय है।

2. जब कोई द्रव वाष्प के साथ साम्य में होता है तो समस्त निकाय का दाब तथा ताप समान होता है तथा साम्यावस्था में दोनों प्रावस्थाओं के मोलर आयतनों में अंतर (घनत्वों में अंतर) होता है। यह सभी निकायों पर लागू होता है चाहे उसमें कितनी भी प्रावस्थाएँ साम्य में हों।

3. ऊष्मा स्थानांतरण में सदैव दो निकायों अथवा एक ही निकाय के दो भागों के बीच तापांतर सम्मिलित होता है। ऐसा ऊर्जा स्थानांतरण जिसमें किसी भी रूप में तापांतर सम्मिलित नहीं होता, वह ऊष्मा नहीं है।

4. संवहन में किसी तरल के भीतर उसके भागों में असमान ताप होने के कारण द्रव्य का प्रवाह सम्मिलित होता है। किसी टोंटी से गिरते जल के नीचे रखी किसी तप्त छड़ की ऊष्मा का क्षय छड़ के पृष्ठ तथा जल के बीच चालन के कारण होता है जल के भीतर संवहन द्वारा नहीं होता।

अभ्यास

11.1 निऑन तथा CO_2 के त्रिक बिंदु क्रमशः 24.57 K तथा 216.55 K हैं। इन तापों को सेल्सियस तथा फारेनहाइट मापक्रमों में व्यक्त कीजिए।

11.2 दो परम ताप मापक्रमों A तथा B पर जल के त्रिक बिंदु को 200 A तथा 350 B द्वारा परिभाषित किया गया है। T_A तथा T_B में क्या संबंध है?

11.3 किसी तापमापी का ओम में विद्युत प्रतिरोध ताप के साथ निम्नलिखित सन्निकट नियम के अनुसार परिवर्तित होता है

$$R = R_o \,[1 + \alpha\,(T - T_o)]$$

यदि तापमापी का जल के त्रिक बिंदु 273.16 K पर प्रतिरोध 101.6 Ω तथा लैड के सामान्य संगलन बिंदु (600.5 K) पर प्रतिरोध 165.5 Ω है तो वह ताप ज्ञात कीजिए जिस पर तापमापी का प्रतिरोध 123.4 Ω है।

11.4 निम्नलिखित के उत्तर दीजिए:

(a) आधुनिक तापमिति में जल का त्रिक बिंदु एक मानक नियत बिंदु है, क्यों? हिम के गलनांक तथा जल के क्वथनांक को मानक नियत बिंदु मानने में (जैसा कि मूल सेल्सियस मापक्रम में किया गया था।) क्या दोष है?

(b) जैसा कि ऊपर वर्णन किया जा चुका है कि मूल सेल्सियस मापक्रम में दो नियत बिंदु थे जिनको क्रमशः 0 °C तथा 100 °C संख्याएँ निर्धारित की गई थीं। परम ताप मापक्रम पर दो में से एक नियत बिंदु जल का त्रिक बिंदु लिया गया है जिसे केल्विन परम ताप मापक्रम पर संख्या 273.16 K निर्धारित की गई है। इस मापक्रम (केल्विन परम ताप) पर अन्य नियत बिंदु क्या है?

(c) परम ताप (केल्विन मापक्रम) T तथा सेल्सियस मापक्रम पर ताप t_c में संबंध इस प्रकार है:

$$t_c = T - 273.15$$

इस संबंध में हमने 273.15 लिखा है 273.16 क्यों नहीं लिखा?

(d) उस परम ताप मापक्रम पर, जिसके एकांक अंतराल का आमाप फारेनहाइट के एकांक अंतराल की आमाप के बराबर है, जल के त्रिक बिंदु का ताप क्या होगा?

11.5 दो आदर्श गैस तापमापियों A तथा B में क्रमशः ऑक्सीजन तथा हाइड्रोजन प्रयोग की गई है। इनके प्रेक्षण निम्नलिखित है :

ताप	**दाब** **तापमापी A में**	**दाब** **तापमापी B में**
जल का त्रिक बिंदु	1.250×10^5 Pa	0.200×10^5 Pa
सल्फर का सामान्य गलनांक	1.797×10^5 Pa	0.287×10^5 Pa

(a) तापमापियों A तथा B के द्वारा लिए गए पाठ्यांकों के अनुसार सल्फर के सामान्य गलनांक के परमताप क्या हैं?

(b) आपके विचार से तापमापियों A तथा B के उत्तरों में थोड़ा अंतर होने का क्या कारण है? (दोनों तापमापियों में कोई दोष नहीं है)। दो पाठ्यांकों के बीच की विसंगति को कम करने के लिए इस प्रयोग में और क्या प्रावधान आवश्यक हैं?

11.6 किसी 1 m लंबे स्टील के फीते का यथार्थ अंशांकन 27.0 °C पर किया गया है। किसी तप्त दिन जब ताप 45°C था तब इस फीते से किसी स्टील की छड़ की लंबाई 63.0 cm मापी गई। उस दिन स्टील की छड़ की वास्तविक लंबाई क्या थी? जिस दिन ताप 27.0 °C होगा उस दिन इसी छड़ की लंबाई क्या होगी? स्टील का रेखीय प्रसार गुणांक = 1.20×10^{-5} K^{-1}।

11.7 किसी बड़े स्टील के पहिए को उसी पदार्थ की किसी धुरी पर ठीक बैठाना है। 27°C पर धुरी का बाहरी व्यास 8.70 cm तथा पहिए के केंद्रीय छिद्र का व्यास 8.69 cm है। सूखी बर्फ द्वारा धुरी को ठंडा किया गया है। धुरी के किस ताप पर पहिया धुरी पर चढ़ेगा? यह मानिए कि आवश्यक ताप परिसर में स्टील का रैखिक प्रसार x q kkd fu : r jgrk g s $\alpha_{\text{स्टील}} = 1.20\times10^{-5} K^{-1}$।

11.8 ताँबे की चादर में एक छिद्र किया गया है। 27.0 °C पर छिद्र का व्यास 4.24 cm है। इस धातु की चादर को 227 °C तक तप्त करने पर छिद्र के व्यास में क्या परिवर्तन होगा? ताँबे का रेखीय प्रसार गुणांक = 1.70×10^{-5} K^{-1}।

11.9 27°C पर 1.8 cm लंबे किसी ताँबे के तार को दो दृढ़ टेकों के बीच अल्प तनाव रखकर थोड़ा कसा गया है। यदि तार को –39 °C ताप तक शीतित करें तो तार में कितना तनाव उत्पन्न हो जाएगा? तार का व्यास 2.0 mm है। पीतल का रेखीय प्रसार गुणांक = 2.0×10^{-5} K^{-1}, पीतल का यंग प्रत्यास्थता गुणांक = 0.91×10^{11} Pa।

11.10 50 cm लंबी तथा 3.0 mm व्यास की किसी पीतल की छड़ को उसी लंबाई तथा व्यास की किसी स्टील की छड़ से जोड़ा गया है। यदि ये मूल लंबाइयाँ 40°C पर हैं, तो 250 °C पर संयुक्त छड़ की लंबाई में क्या परिवर्तन होगा? क्या संधि पर कोई तापीय प्रतिबल उत्पन्न होगा? छड़ के सिरों को प्रसार के लिए मुक्त रखा गया है। (ताँबे तथा स्टील के रेखीय प्रसार गुणांक क्रमशः = 2.0×10^{-5} K^{-1}, स्टील = 1.2×10^{-5} K^{-1} हैं।)

11.11 ग्लिसरीन का आयतन प्रसार गुणांक 49×10^{-5} K^{-1} है। ताप में 30 °C की वृद्धि होने पर इसके घनत्व में क्या आंशिक परिवर्तन होगा?

11.12 8.0 kg द्रव्यमान के किसी ऐलुमिनियम के छोटे ब्लॉक में छिद्र करने के लिए किसी 10 kW की बरमी का उपयोग किया गया है। 2.5 मिनट में ब्लॉक के ताप में कितनी वृद्धि हो जाएगी। यह मानिए कि 50% शक्ति

तो स्वयं बरमी को गर्म करने में खर्च हो जाती है अथवा परिवेश में लुप्त हो जाती है। ऐलुमिनियम की विशिष्ट ऊष्मा धारिता = $0.91 \ J \ g^{-1} \ K^{-1}$ है।

11.13 2.5 kg द्रव्यमान के ताँबे के गुटके को किसी भट्ठी में 500 °C तक तप्त करने के पश्चात् किसी बड़े हिम-ब्लॉक पर रख दिया जाता है। गलित हो सकने वाली हिम की अधिकतम मात्रा क्या है? ताँबे की विशिष्ट ऊष्मा धारिता = $0.39 \ J \ g^{-1} \ K^{-1}$; बर्फ की संगलन ऊष्मा = $335 \ J \ g^{-1}$ ।

11.14 किसी धातु की विशिष्ट ऊष्मा धारिता के प्रयोग में 0.20 kg के धातु के गुटके को 150 °C पर तप्त करके, किसी ताँबे के ऊष्मामापी (जल तुल्यांक = 0.025 kg), जिसमें 27 °C का 150 cm^3 जल भरा है, में गिराया जाता है। अंतिम ताप 40 °C है। धातु की विशिष्ट ऊष्मा धारिता परिकलित कीजिए। यदि परिवेश में क्षय ऊष्मा उपेक्षणीय न मानकर परिकलन किया जाता है, तब क्या आपका उत्तर धातु की विशिष्ट ऊष्मा धारिता के वास्तविक मान से अधिक मान दर्शाएगा अथवा कम?

11.15 कुछ सामान्य गैसों के कक्ष ताप पर मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के प्रेक्षण नीचे दिए गए हैं:

गैस	**मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता (C_v)** ($cal \ mol^{-1} \ K^{-1}$)
हाइड्रोजन	4.87
नाइट्रोजन	4.97
ऑक्सीजन	5.02
नाइट्रिक ऑक्साइड	4.99
कार्बन मोनोक्साइड	5.01
क्लोरीन	6.17

इन गैसों की मापी गई मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिताएँ एक परमाणुक गैसों की मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं से सुस्पष्ट रूप से भिन्न हैं। प्रतीकात्मक रूप में किसी एक परमाणुक गैस की मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता 2.92 cal/mol K होती है। इस अंतर का स्पष्टीकरण कीजिए। क्लोरीन के लिए कुछ अधिक मान (शेष की अपेक्षा) होने से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

11.16 CO_2 के *P-T* प्रावस्था आरेख पर आधारित निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) किस ताप व दाब पर CO_2 की ठोस, द्रव तथा वाष्प प्रावस्थाएँ साम्य में सहवर्ती हो सकती हैं?

(b) CO_2 के गलनांक तथा क्वथनांक पर दाब में कमी का क्या प्रभाव पड़ता है?

(c) CO_2 के लिए क्रांतिक ताप तथा दाब क्या हैं? इनका क्या महत्त्व है?

(d) (a) –70 °C ताप व 1 atm दाब, (b) –60 °C ताप व 10 atm दाब, (c) 15 °C ताप व 56 atm दाब पर CO_2 ठोस, द्रव अथवा गैस में से किस अवस्था में होती है?

11.17 CO_2 के *P – T* प्रावस्था आरेख पर आधारित निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) 1 atm दाब तथा –60 °C ताप पर CO_2 का समतापी संपीडन किया जाता है? क्या यह द्रव प्रावस्था में जाएगी?

(b) क्या होता है जब 4 atm दाब पर CO_2 का दाब नियत रखकर कक्ष ताप पर शीतन किया जाता है?

(c) 10 atm दाब तथा –65 °C ताप पर किसी दिए गए द्रव्यमान की ठोस CO_2 को दाब नियत रखकर कक्ष ताप तक तप्त करते समय होने वाले गुणात्मक परिवर्तनों का वर्णन कीजिए।

(d) CO_2 को 70 °C तक तप्त तथा समतापी संपीडित किया जाता है। आप प्रेक्षण के लिए इसके किन गुणों में अंतर की अपेक्षा करते हैं?

11.18 101°F ताप ज्वर से पीड़ित किसी बच्चे को एन्टीपायरिन (ज्वर कम करने की दवा) दी गई जिसके कारण उसके शरीर से पसीने के वाष्पन की दर में वृद्धि हो गई। यदि 20 मिनट में ज्वर 98 °F तक गिर जाता है तो दवा द्वारा होने वाले अतिरिक्त वाष्पन की औसत दर क्या है? यह मानिए कि ऊष्मा ह्रास का एकमात्र उपाय वाष्पन ही है। बच्चे का द्रव्यमान 30 kg है। मानव शरीर की विशिष्ट ऊष्मा धारिता जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता के लगभग बराबर है तथा उस ताप पर जल के वाष्पन की गुप्त ऊष्मा 580 cal g^{-1} है।

11.19 थर्मोकोल का बना 'हिम बॉक्स' विशेषकर गर्मियों में कम मात्रा के पके भोजन के भंडारण का सस्ता तथा दक्ष साधन है। 30 cm भुजा के किसी हिम बॉक्स की मोटाई 5.0 cm है। यदि इस बॉक्स में 4.0 kg हिम रखा है तो 6 h के पश्चात् बचे हिम की मात्रा का आकलन कीजिए। बाहरी ताप 45 °C है तथा थर्मोकोल की ऊष्मा चालकता 0.01 J s^{-1} m^{-1} K^{-1} है। (हिम की संगलन ऊष्मा = 335×10^3 J kg^{-1})

11.20 किसी पीतल के बॉयलर की पेंदी का क्षेत्रफल 0.15 m^2 तथा मोटाई 1.0 cm है। किसी गैस स्टोव पर रखने पर इसमें 6.0 kg/min की दर से जल उबलता है। बॉयलर के संपर्क की ज्वाला के भाग का ताप आकलित कीजिए। पीतल की ऊष्मा चालकता = 109 J s^{-1} m^{-1} K^{-1}; जल की वाष्पन ऊष्मा = 2256×10^3 J kg^{-1} है।

11.21 स्पष्ट कीजिए कि क्यों –

(a) अधिक परावर्तकता वाले पिण्ड अल्प उत्सर्जक होते हैं।

(b) कंपकंपी वाले दिन लकड़ी की ट्रे की अपेक्षा पीतल का गिलास कहीं अधिक शीतल प्रतीत होता है।

(c) कोई प्रकाशिक उत्तापमापी (उच्च तापों को मापने की युक्ति), जिसका अंशांकन किसी आदर्श कृष्णिका के विकिरणों के लिए किया गया है, खुले में रखे किसी लाल तप्त लोहे के टुकड़े का ताप काफी कम मापता है, परन्तु जब उसी लोहे के टुकड़े को भट्ठी में रखते हैं, तो वह ताप का सही मान मापता है।

(d) बिना वातावरण के पृथ्वी अशरणीय शीतल हो जाएगी।

(e) भाप के परिचालन पर आधारित तापन निकाय तप्त जल के परिचालन पर आधारित निकायों की अपेक्षा भवनों को उष्ण बनाने में अधिक दक्ष होते हैं।

11.22 किसी पिण्ड का ताप 5 मिनट में 80 °C से 50 °C हो जाता है। यदि परिवेश का ताप 20°C है, तो उस समय का परिकलन कीजिए जिसमें उसका ताप 60 °C से 30 °C हो जाएगा।

अध्याय 12

ऊष्मागतिकी

12.1 भूमिका

पिछले अध्याय में हमने द्रव्यों के तापीय गुणों का अध्ययन किया। इस अध्याय में हम उन नियमों का अध्ययन करेंगे जो ऊष्मीय ऊर्जा को निर्धारित करते हैं। हम उन प्रक्रियाओं का अध्ययन करेंगे जिनमें कार्य ऊष्मा में परिवर्तित होता है, तथा विलोमत: ऊष्मा भी कार्य में परिवर्तित होती है। शीत ऋतु में जब हम हथेलियों को परस्पर रगड़ते हैं तो हमें गरमी की अनुभूति होती है क्योंकि इस प्रक्रिया में किया गया कार्य ऊष्मा उत्पन्न करता है। इसके विपरीत, भाप इंजन में वाष्प की ऊष्मा का उपयोग लाभप्रद कार्य को संपन्न करने में अर्थात् पिस्टन को गति देने में होता है जिसके परिणामस्वरूप रेलगाड़ी के पहिए घूमते हैं।

भौतिकी में ऊष्मा, ताप, कार्य आदि की अवधारणाओं को अधिक सावधानीपूर्वक परिभाषित करने की आवश्यकता पड़ती है। ऐतिहासिक रूप से ऊष्मा की सटीक अवधारणा तक पहुँचने के लिए पर्याप्त समय लगा। आधुनिक अवधारणा के पूर्व ऊष्मा को ऐसे सूक्ष्म अदृश्य तरल के रूप में समझा गया जो किसी पदार्थ के रंध्रों में भरा रहता है। गरम व ठंडे पिंडों के पारस्परिक संपर्क में आने पर यह तरल (जिसे कैलॉरिक कहते थे) ठंडे पिंड से अपेक्षाकृत गरम पिंड में बहने लगता है! यह बिलकुल वैसा ही है जैसा उस समय होता है जब भिन्न-भिन्न ऊँचाइयों तक पानी से भरी दो टंकियों को एक क्षैतिज नल से जोड़ दिया जाता है। जल का बहाव उस समय तक निरंतर बना रहता है जब तक दोनों टंकियों में जल के तल समान न हो जाएँ। इसी के समान ऊष्मा की 'कैलॉरिक' धारणा में ऊष्मा उस समय तक प्रवाहित होती रहती है जब तक कि 'कैलॉरिक तल' (अर्थात् ताप) समान नहीं हो जाते।

इसी बीच, ऊष्मा को ऊर्जा के रूप में कल्पित करने की आधुनिक अवधारणा के कारण इसके (ऊष्मा के) तरल स्वरूप को नकार दिया गया। इस संबंध में 1798 में बेंजामिन थॉमसन (जिन्हें काउन्ट रम्फोर्ड भी कहते हैं) ने एक महत्वपूर्ण प्रयोग भी किया। इन्होंने पाया कि पीतल की तोप में छेद करते समय इतनी अधिक ऊष्मा उत्पन्न होती है कि उससे पानी उबल सकता है। इससे अधिक महत्वपूर्ण तथ्य यह प्राप्त हुआ कि प्रयोग में उत्पन्न ऊष्मा का परिमाण उस कार्य पर निर्भर करता था जो घोड़े ड्रिल को घुमाने में करते थे न कि ड्रिल के पैनेपन पर। कैलॉरिक स्वरूप के अनुसार अधिक पैनी ड्रिल को रंध्रों से अधिक ऊष्मा तरल बाहर निकालना चाहिए, किंतु प्रयोग में यह सही नहीं पाया गया। प्रेक्षणों की सबसे अधिक स्वाभाविक व्याख्या यह थी कि ऊष्मा ऊर्जा का ही एक रूप है तथा प्रयोग से भी यह प्रमाणित हो गया कि ऊर्जा एक रूप से दूसरे रूप में अर्थात् कार्य से ऊष्मा में रूपांतारित हो जाती है।

ऊष्मागतिकी भौतिकी की वह शाखा है जो ऊष्मा तथा ताप की अवधारणा एवं ऊष्मा के अन्य प्रकार की ऊर्जाओं में अंतरा-रूपान्तरण का विवेचन करती है। ऊष्मागतिकी एक स्थूल विज्ञान है, क्योंकि यह किसी निकाय की स्थूल प्रकृति पर विचार करती है न कि द्रव्य की आण्विक संरचना पर। वास्तव में, इससे संबंधित अवधारणाओं तथा नियमों का प्रतिपादन 19वीं शताब्दी में उस समय हुआ था जब द्रव्य के आण्विक स्वरूप को दृढ़तापूर्वक प्रमाणित नहीं किया गया था। ऊष्मागतिकी के वर्णन में निकाय के अपेक्षाकृत कुछ ही स्थूल चर समाहित होते हैं जो सामान्य अनुभव पर आधारित हैं तथा जिन्हें प्रत्यक्ष रूप में मापा जा सकता है। उदाहरणार्थ, किसी गैस के सूक्ष्म वर्णन में उसकी रचना करने वाले अगणित अणुओं के निर्देशांकों एवं वेगों का निर्धारण आवश्यक होता है। हालांकि गैसों के अणुगति सिद्धांत का विवरण बहुत विस्तृत नहीं है फिर भी इसमें अणुओं के वेगों का विवरण समाहित है। इसके विपरीत किसी गैस के ऊष्मागतिकीय विवरण में आण्विक वर्णन पूर्ण रूप से नकार दिया जाता है। ऊष्मागतिकी में किसी गैस की अवस्था दाब, आयतन, ताप, द्रव्यमान तथा संगठन जैसे ऐसे स्थूल चरों द्वारा निर्धारित होती है जिन्हें हम अपनी इंद्रियों से अनुभव करते हैं और माप सकते हैं*।

यांत्रिकी एवं ऊष्मागतिकी के बीच भेद आपके मस्तिष्क में भलीभांति आ जाना चाहिए। यांत्रिकी में हमारी रुचि बलों तथा बल आघूर्णों के प्रभाव में गति कर रहे कणों एवं पिण्डों में होती है। ऊष्मागतिकी में संपूर्ण निकाय की गति पर विचार नहीं किया जाता। इसकी रुचि पिण्ड की आंतिरक स्थूल अवस्था में होती है। जब बंदूक से गोली दागते हैं तब जो परिवर्तन होता है वह गोली की यांत्रिक अवस्था (विशेषकर गतिज ऊर्जा) में परिवर्तन होता है, उसके ताप में नहीं। जब गोली लकड़ी में धँसकर रुक जाती है तो गोली की गतिज ऊर्जा ऊष्मा में रूपांतरित हो जाती है जिससे गोली तथा उसके चारों ओर की लकड़ी की सतहों का ताप परिवर्तित हो जाता है। ताप गोली की आंतरिक गति (जो अव्यवस्थित है) की ऊर्जा से संबंधित होता है न कि गोली की संपूर्ण गति से।

12.2 तापीय साम्य

यांत्रिकी में साम्यावस्था से तात्पर्य है कि निकाय पर नेट बाह्य बल व बल आघूर्ण शून्य हैं। ऊष्मागतिकी में साम्यावस्था का अर्थ भिन्न संदर्भ में दृष्टिगोचर होता है : निकाय की अवस्था को हम उस समय साम्यावस्था में कहते हैं जब निकाय को अभिलक्षणित करने वाले स्थूल चर समय के साथ परिवर्तित नहीं होते। उदाहरणार्थ, किसी पर्यावरण से पूर्णत: ऊष्मारोधी बंद दृढ़ पात्र में भरी कोई गैस ऊष्मागतिक रूप से तब साम्यावस्था में होगी जब उसके दाब, आयतन, ताप, द्रव्यमान के परिमाण तथा संगठन समय के साथ परिवर्तित न हों।

कोई निकाय साम्यावस्था में है कि नहीं व्यापक रूप में यह चारों ओर के परिवेश तथा उस दीवार की प्रकृति पर निर्भर करता है जो निकाय को परिवेश से पृथक् करती है। कल्पना कीजिए कि दो गैसें A व B दो भिन्न-भिन्न पात्रों में भरी हैं। प्रयोग द्वारा हमें पता है कि किसी गैस के दिए हुए द्रव्यमान के दाब व ताप को उसके दो स्वतंत्र चरों के रूप में चुना जा सकता है। मान लीजिए कि गैसों के दाब व आयतन क्रमश: (P_A, V_A) तथा (P_B, V_B) हैं। कल्पना कीजिए कि पहले दोनों निकाय पास-पास हैं परंतु उन्हें किसी रुद्धोष्म दीवार (एक **ऊष्मारोधी दीवार**) द्वारा एक दूसरे से पृथक् रखा गया है। इस दीवार के कारण ऊर्जा (ऊष्मा) एक पात्र से दूसरे पात्र में नहीं जा पाती है। निकायों को भी शेष परिवेश से इसी प्रकार की रुद्धोष्म दीवार से पृथक् रखते हैं। इस व्यवस्था का आरेखीय चित्रण [12.1(a)] में दिया गया है। यहाँ यह पाया गया है कि (P_A, V_A) के किसी भी संभावित युग्म का मान (P_B, V_B) के किसी भी संभव युग्म के मान के साथ साम्यावस्था में होगा। पुन: कल्पना कीजिए कि **रुद्धोष्म दीवार** को एक **ऊष्मा-पार्थ-दीवार** से प्रतिस्थापित कर दिया गया है – यह दीवार (ऊष्मा) ऊर्जा को एक निकाय से दूसरे निकाय में जाने देती है। ऐसा करने में यह देखा गया है कि निकायों A व B के स्थूल चर स्वत: उस समय तक परिवर्तित होते हैं जब तक कि दोनों निकाय साम्यावस्था की स्थिति प्राप्त नहीं कर लेते। इसके पश्चात् उनकी अवस्था में कोई परिवर्तन नहीं होता है। इस स्थिति को चित्र [12.1(b)] में दर्शाया गया है। मान लीजिए कि दोनों गैसों के दाब व आयतन संबंधी चर परिवर्तित होकर क्रमश: (P'_A, V'_A) तथा (P'_B, V'_B) हो जाते हैं ताकि A व B की नयी अवस्थाएँ पुन: एक-दूसरे की साम्यावस्था में हो जाती हैं**। एक निकाय से दूसरे निकाय में अब और ऊर्जा का प्रवाह नहीं होता। ऐसी स्थिति में हम कहते हैं कि निकाय A, निकाय B के साथ तापीय साम्य में है।

दो निकायों के मध्य की साम्यावस्था की स्थिति को क्या अभिलक्षित करती है ? आप अपने अनुभव से उत्तर का अनुमान लगा सकते हैं। तापीय साम्य में, दो निकायों के ताप समान होते हैं। हम जानेंगे कि ऊष्मागतिकी में ताप की अवधारणा तक कैसे पहुँचते हैं ? ऊष्मागतिकी का शून्य कोटि का नियम इसकी ओर संकेत करता है।

* ऊष्मागतिकी में अन्य ऐसे चर भी निहित होते हैं जो हमारी इंद्रियों को इतने सुस्पष्ट नहीं होते (उदाहरणार्थ, एंट्रॉपी, एंथाल्पी (संपूर्ण ऊष्मा), आदि जिनके विषय में आप उच्च कक्षाओं में पढ़ेंगे), किंतु ये सभी स्थूल चर हैं।

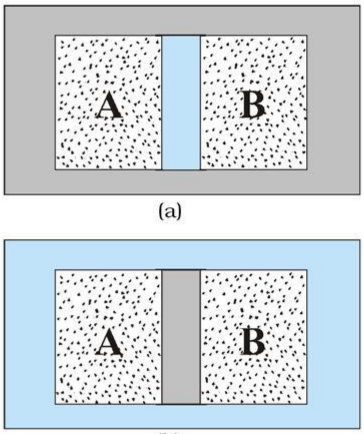
** यह आवश्यक नहीं है कि दोनों चर बदलें। ऐसा प्रतिबंधों पर निर्भर करता है। उदाहरण के लिए, यदि गैस स्थिर आयतन वाले पात्र में भरी हो तो तापीय साम्य के लिए केवल गैसों के दाब को परिवर्तित होना चाहिए।

12.3 ऊष्मागतिकी का शून्य कोटि नियम

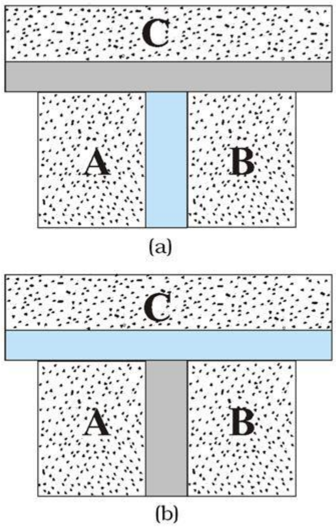
कल्पना कीजिए कि दो निकाय A व B एक रुद्धोष्म दीवार से पृथक् हैं । इनमें से प्रत्येक एक तीसरे निकाय C से एक सुचालक दीवार द्वारा संपर्क में हैं [चित्र 12.2(a)] । निकायों की अवस्थाएँ (अर्थात् उनके स्थूल चर) तब तक परिवर्तित होंगी जब तक A व B दोनों निकाय C के साथ तापीय साम्य में नहीं आ जाते हैं । जब ऐसा हो जाए तो कल्पना कीजिए कि A व B के मध्य की रुद्धोष्म दीवार एक सुचालक दीवार से प्रतिस्थापित कर दी जाती है तथा C को A व B से किसी रुद्धोष्म दीवार से पृथक् कर दिया जाता है [चित्र 12.2(b)] । ऐसा देखा जाता है कि A व B की अवस्थाएँ अब और नहीं बदलतीं अर्थात् वे **दोनों अब तापीय साम्य में होती हैं** । यह प्रेक्षण ऊष्मागतिकी के शून्य कोटि नियम का आधार बना । यह नियम बतलाता है कि ***यदि दो निकाय किसी तीसरे निकाय के साथ पृथक्-पृथक् रूप से तापीय साम्य में हैं तो वे परस्पर भी तापीय साम्य में होते हैं ।*** यहाँ यह बात ध्यान में रखनी चाहिए कि ऊष्मागतिकी के प्रथम व द्वितीय नियम की अभिव्यक्ति तथा उनके क्रमांकन के बहुत समय बाद 1931 में आर.एच. फाउलर ने शून्य कोटि नियम का प्रतिपादन किया था।

शून्य कोटि नियम से यह संकेत मिलता है कि जब दो निकाय A व B परस्पर तापीय साम्य में होते हैं, तो ऐसी कोई भौतिक राशि है जो दोनों निकायों के लिए समान मान रखती है । यह ऊष्मागतिक चर, जिसका मान तापीय साम्य वाले निकायों के लिए समान होता है, ताप (T) कहलाता है । अत: यदि A व B साम्यावस्था में तीसरे निकाय C से पृथक् हैं तो $T_A = T_C$ तथा $T_B = T_C$ । इसका तात्पर्य यह है कि $T_A = T_B$ अर्थात् निकाय A व B स्वयं भी तापीय साम्य में हैं ।

शून्य कोटि नियम के माध्यम से हमने विधिवत ताप की अवधारणा विकसित की है । हमारे सामने पुन: एक प्रश्न उत्पन्न होता है : भिन्न-भिन्न पिंडों के ताप के लिए हम अंकिक मानों का निर्धारण कैसे करें? दूसरे शब्दों में, हम ताप मापक्रम कैसे बनाएँ? तापमिति इस मौलिक प्रश्न से संबंध रखती है जिसके विषय में हम अगले अनुभाग में अध्ययन करेंगे ।



चित्र 12.1 *(a) (दो गैसों के) निकाय A व B एक रुद्धोष्म दीवार से पृथक् हैं : इस दीवार से ऊष्मा आर-पार नहीं जा पाती । (b) यही निकाय A व B एक ऊष्मा-पार्थ दीवार से पृथक् दर्शाए गए हैं । यह एक चालक दीवार होती है जिससे ऊष्मा एक निकाय से दूसरे में चली जाती है । इस उदाहरण में तापीय साम्य यथोचित समय में प्राप्त हो जाता है ।*



चित्र 12.2 *(a) निकाय A व B जो एक रुद्धोष्म दीवार से पृथक् हैं जबकि इनमें से प्रत्येक एक तीसरे निकाय C से एक सुचालक दीवार द्वारा संपर्क में है । (b) A व B के मध्य की रुद्धोष्म दीवार को किसी सुचालक दीवार से प्रतिस्थापित किया गया है जबकि C को A व B से रुद्धोष्म दीवार से पृथक् दर्शाया गया है ।*

12.4 ऊष्मा, आंतरिक ऊर्जा तथा कार्य

ऊष्मागतिकी के शून्य कोटि नियम से ताप की अवधारणा की उत्पत्ति हुई जो हमारे सामान्य ज्ञान के अनुकूल है । ताप किसी पिण्ड की उष्णता का द्योतक है । जब दो पिण्ड ऊष्मीय संपर्क

में लाए जाते हैं तो इससे ऊष्मा के प्रवाह की दिशा निर्धारित होती है । ऊष्मा उच्च ताप वाले पिण्ड से निम्न ताप वाले पिण्ड की ओर प्रवाहित होती है । जब ताप समान हो जाते हैं तो प्रवाह रुक जाता है । ऐसी स्थिति में दोनों पिण्ड तापीय साम्य में होते हैं । हम यह विस्तार से पढ़ चुके हैं कि भांति-भांति के पिण्डों के ताप के निर्धारण के लिए ताप मापक्रम कैसे बनाए जाते हैं । अब हम ऊष्मा तथा तत्संबंधित राशियों; जैसे–आंतरिक ऊर्जा तथा कार्य की अवधारणाओं का वर्णन करेंगे ।

किसी निकाय की आंतरिक ऊर्जा की अवधारणा को समझना कठिन नहीं है । हम जानते हैं कि प्रत्येक स्थूल निकाय असंख्य अणुओं से निर्मित है । आंतरिक ऊर्जा इन अणुओं की स्थितिज व गतिज ऊर्जाओं का योग है । हमने यह टिप्पणी की है कि ऊष्मागतिकी में निकाय की समग्र रूप से गतिज ऊर्जा प्रासंगिक नहीं होती । इस प्रकार, निर्देश फ्रेम में आंतरिक ऊर्जा अणु की गतिज व स्थितिज ऊर्जा के योग के बराबर होती है जिसके सापेक्ष निकाय का द्रव्यमान-केंद्र विरामावस्था में होता है । इस प्रकार, इसमें केवल निकाय के अणुओं की यादृच्छिक गति से संबंधित (अव्यवस्थित) ऊर्जा ही समाहित होती है । निकाय की आंतरिक ऊर्जा को U से चिह्नित करते हैं ।

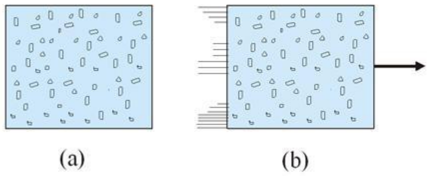
यद्यपि हमने आंतरिक ऊर्जा के अर्थ को समझने के लिए आण्विक चित्र प्रस्तुत किया है तथापि जहाँ तक ऊष्मागतिकी का संबंध है, U निकाय का केवल एक स्थूल चर ही है । आंतरिक ऊर्जा के संबंध में एक महत्वपूर्ण तथ्य यह है कि यह केवल निकाय की अवस्था पर निर्भर करती है न कि इस बात पर कि यह अवस्था किस प्रकार प्राप्त हुई । निकाय की आंतरिक ऊर्जा U ऊष्मागतिकीय 'अवस्था चर' का एक उदाहरण है । इसका मान निकाय की दी हुई अवस्था पर निर्भर करता है न कि उसके इतिवृत्ति (History) (अर्थात् उस स्थिति तक पहुँचने के लिए अनुसरण किए गए पथ) पर। अत: किसी गैस के दिए गए द्रव्यमान के लिए आंतरिक ऊर्जा उसकी स्थिति पर निर्भर करती है । यह स्थिति दाब, आयतन व ताप के विशिष्ट मानों से वर्णित होती है । यह इस बात पर निर्भर नहीं करती कि गैस की यह स्थिति किस प्रकार प्राप्त हुई । दाब, आयतन, ताप तथा आंतरिक ऊर्जा निकाय (गैस) के ऊष्मागतिकीय अवस्था चर कहलाते हैं (अनुभाग 12.7 देखें) । यदि गैस के अल्पप्रभावी अंतराण्विक बलों की उपेक्षा कर दें तो गैस की आंतरिक ऊर्जा उसके अणुओं की अनेक यादृच्छिक गतियों से संबद्ध गतिज ऊर्जाओं के योग के ठीक बराबर होती है । अगले अध्याय में हम पढ़ेंगे कि किसी गैस में यह गति केवल स्थानांतरीय ही नहीं होती (इसमें गति पात्र के आयतन में एक बिंदु से दूसरे बिंदु के मध्य होती है), वरन् इसमें अणु की घूर्णी तथा कंपन गति भी होती है (चित्र 12.3) ।

किसी निकाय की आंतरिक ऊर्जा में किन उपायों से परिवर्तन किए जा सकते हैं ? सुविधा की दृष्टि से पुन: कल्पना कीजिए कि चित्र 12.4 के अनुसार निकाय किसी दिए गए द्रव्यमान की एक गैस है जो एक सिलिंडर में भरी है जिसमें गतिशील पिस्टन लगा है । अनुभव यह बताता है कि गैस की अवस्था (तथा इस प्रकार उसकी आंतरिक ऊर्जा) परिवर्तित करने के दो उपाय होते हैं । एक उपाय है कि सिलिंडर को उस पिण्ड के संपर्क में रखें जो गैस की अपेक्षा उच्च ताप पर है । तापांतर के कारण ऊर्जा (ऊष्मा) गरम पिण्ड से गैस में प्रवाहित होगी । इससे गैस की आंतरिक ऊर्जा बढ़ जाएगी । दूसरा उपाय है कि पिस्टन को नीचे की ओर दबाया जाए (अर्थात् निकाय पर कार्य किया जाए) । इसमें भी गैस की आंतरिक ऊर्जा बढ़ जाती है । नि:संदेह ये दोनों बातें विपरीत दिशा में भी संभव होती हैं । यदि चारों ओर के परिवेश का ताप कम है तो ऊष्मा गैस से परिवेश में प्रवाहित होगी । इसी प्रकार, गैस पिस्टन को ऊपर की ओर धक्का दे सकती है और परिवेश पर कार्य कर सकती है । संक्षेप में, ऊष्मा और कार्य दो भिन्न-भिन्न विधियाँ हैं जिनसे ऊष्मीय निकाय की स्थिति परिवर्तित होती है तथा उसकी आंतरिक ऊर्जा में परिवर्तन होता है ।

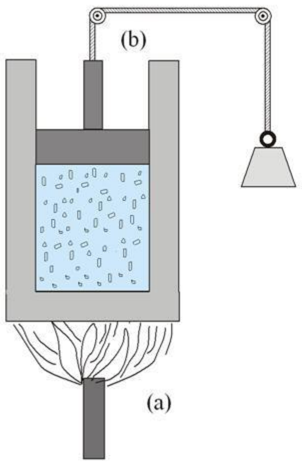
ऊष्मा एवं आंतरिक ऊर्जा की धारणाओं में अंतर को सावधानीपूर्वक समझना आवश्यक है । ऊष्मा निश्चित रूप से ऊर्जा है परंतु यह ऊर्जा पारगमन में है । यह मात्र शब्दों का खेल नहीं है । दोनों में अंतर मूल महत्त्व का है । किसी ऊष्मागतिकी निकाय की स्थिति उसकी आंतरिक ऊर्जा से अभिलक्षित होती है न कि ऊष्मा से । इस प्रकार का प्रकथन कि *'किसी दी हुई अवस्था में गैस में ऊष्मा की कुछ मात्रा होती है'* उतना ही निरर्थक है जितना कि यह प्रकथन कि *'किसी दी हुई स्थिति में गैस में कुछ कार्य निहित होता है ।'* इसके विपरीत, *'किसी दी हुई अवस्था में गैस में आंतरिक ऊर्जा की कुछ मात्रा होती है'* पूरी तरह से एक सार्थक प्रकथन है । इसी प्रकार से, ऐसे प्रकथन जैसे *'निकाय को एक निश्चित मात्रा की ऊष्मा दी गई है'* या *'निकाय द्वारा एक निश्चित मात्रा का कार्य किया गया'* पूर्णत: अर्थपूर्ण सार्थक प्रकथन हैं ।

संक्षेप में, ऊष्मा व कार्य ऊष्मागतिकी में स्थिति चर नहीं होते । ये किसी निकाय में ऊर्जा स्थानांतरण की विधियाँ होती हैं जिससे उसकी आंतरिक ऊर्जा परिवर्तित होती है। जो, जैसा कि पहले वर्णन कर चुके हैं, एक अवस्था चर होता है ।

साधारण भाषा में हमें प्राय: ऊष्मा तथा आंतरिक ऊर्जा में भ्रम बना रहता है । कुछ प्राथमिक भौतिकी की पुस्तकों में कभी-कभी इस भेद की उपेक्षा कर दी जाती है । तथापि ऊष्मागतिकी को भलीभांति समझने के लिए यह विभेद आवश्यक है ।



चित्र 12.3 (a) जब बॉक्स विरामावस्था में है तो गैस की आंतरिक ऊर्जा U उसके अणुओं की गतिज व स्थितिज ऊर्जा के योग के बराबर होती है। विभिन्न प्रकार की गतियों (स्थानांतरीय, घूर्णी, कंपन) के कारण गतिज ऊर्जा को U में समाहित किया जाता है। (b) यदि यही समग्र बॉक्स कुछ वेग से गतिमान है, तो बॉक्स की गतिज ऊर्जा को U में सम्मिलित नहीं करना है।



चित्र 12.4 ऊष्मा व कार्य किसी निकाय में ऊर्जा स्थानांतरण की दो विभिन्न विधियाँ हैं जिनसे उसकी आंतरिक ऊर्जा में परिवर्तन होता है। (a) निकाय तथा परिवेश के बीच तापांतर के कारण ऊष्मा को ऊर्जा के स्थानांतरण के रूप में परिभाषित करते हैं। (b) कार्य उन साधनों (उदाहरणार्थ, पिस्टन से जुड़े भारों को ऊपर नीचे करके पिस्टन को गति देना) द्वारा उत्पन्न ऊर्जा का स्थानांतरण है जिनमें तापांतर समाहित नहीं होता।

12.5 ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम

हम यह देख चुके हैं कि किसी निकाय की आंतरिक ऊर्जा U दो विधियों से ऊर्जा स्थानांतरण के कारण परिवर्तित हो सकती है। ये विधियाँ हैं : ऊष्मा तथा कार्य। कल्पना कीजिए कि

ΔQ = परिवेश द्वारा निकाय को दी गई ऊष्मा

ΔW = निकाय द्वारा परिवेश पर किया गया कार्य

ΔU = निकाय की आंतरिक ऊर्जा में परिवर्तन

ऊर्जा संरक्षण के सामान्य नियम में यह अंतर्निहित है कि

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W \qquad (12.1)$$

इसका तात्पर्य यह है कि जो ऊर्जा (ΔQ) निकाय को दी जाती है, उसका कुछ अंश निकाय की आंतरिक ऊर्जा में वृद्धि करता है (ΔU) तथा शेष परिवेश पर किया गया कार्य (ΔW) है। समीकरण (12.1) को **ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम** के रूप में जाना जाता है। यह ऊर्जा संरक्षण का केवल सामान्य नियम है जिसे किसी भी उस निकाय पर लागू किया जा सकता है जिसमें परिवेश को अथवा परिवेश से ऊष्मा स्थानांतरण पर ध्यान दिया जाता है।

मान लीजिए कि हम समीकरण (12.1) को वैकल्पिक रूप में प्रस्तुत करते हैं,

$$\Delta Q - \Delta W = \Delta U \qquad (12.2)$$

अब मान लीजिए कि निकाय किसी आरंभिक अवस्था से अंतिम अवस्था में कई प्रकार से आता है। उदाहरणार्थ, गैस की अवस्था (P_1, V_1) से परिवर्तित करके (P_2, V_2) कर दी जाए तो हम पहले गैस के दाब को स्थिर रखकर उसके आयतन को V_1 से V_2 में परिवर्तित करते हैं अर्थात् पहले हम अवस्था (P_1, V_2) में जा सकते हैं और फिर गैस के आयतन को स्थिर रखते हुए इसके दाब को P_1 से P_2 में परिवर्तित करते हैं। इससे गैस (P_2, V_2) अवस्था में पहुँच जाती है। विकल्पत: हम पहले आयतन को स्थिर रख सकते हैं और फिर दबाव स्थिर रखते हैं। चूंकि U एक अवस्था चर है, ΔU केवल प्रारंभिक व अंतिम अवस्थाओं पर निर्भर करेगा न कि उस पथ पर जिससे गैस एक अवस्था से दूसरी अवस्था में पहुँचती है। यद्यपि, ΔQ तथा ΔW दोनों, सामान्यतया, उस पथ पर निर्भर करते हैं जिससे गैस प्रारंभिक अवस्था से अंतिम अवस्था में जाती है। ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम, समीकरण (12.2), से यह स्पष्ट है कि संयोजन $\Delta Q - \Delta W$ पथ पर निर्भर नहीं करता। इससे पता चलता है कि यदि कोई निकाय ऐसी प्रक्रिया अपनाता है जिसमें $\Delta U = 0$ (उदाहरणार्थ, आदर्श गैस का समतापीय प्रसार, अनुभाग 12.8 देखिए), तो

$$\Delta Q = \Delta W$$

अर्थात् निकाय को दी गई ऊष्मा निकाय द्वारा परिवेश पर कार्य करने में पूर्ण रूप से उपयोग में आ जाती है।

यदि निकाय सिलिंडर में भरी गैस है तथा सिलिंडर में गतिशील पिस्टन लगा है तो पिस्टन को गति देने में गैस को कार्य करना पड़ता है। चूंकि बल को दाब × क्षेत्रफल के रूप में परिभाषित करते हैं तथा क्षेत्रफल × विस्थापन को आयतन कहते हैं तो स्थिर

दाब P के विरुद्ध निकाय द्वारा संपादित कार्य निम्नलिखित होगा,

$$\Delta W = P\Delta V$$

यहाँ ΔV गैस में आयतन के परिवर्तन को व्यक्त करता है । अत: इस उदाहरण के लिए, समीकरण (12.20) निम्न प्रकार से लिखी जाएगी

$$\Delta Q = \Delta U + P\Delta V \qquad (12.3)$$

समीकरण (12.3) के अनुप्रयोग के रूप में हमें 1g जल की आंतरिक ऊर्जा के परिवर्तन पर विचार करना होगा जब यह अपनी द्रव प्रावस्था से वाष्प प्रावस्था में परिवर्तित होता है । जल की मापी गई गुप्त ऊष्मा 2256 J/g है अर्थात् जल के 1 ग्राम के लिए $\Delta Q = 2256$ J होता है । वायुमंडलीय दाब पर, 1 g जल का आयतन द्रव प्रावस्था में 1 cm^3 तथा वाष्प प्रावस्था में 1671 cm^3 होता है । अत:

$\Delta W = P(V_g - V_l) = 1.013 \times 10^5 \times (1670) \times 10^{-6}$ = 169.2 J

समीकरण (12.3) से हमें आंतरिक ऊर्जा का मान प्राप्त होता है,

$$\Delta U = 2256 - 169.2 = 2086.8 \text{ J}$$

इस प्रकार, हम देखते हैं कि ऊष्मा का अधिकांश भाग जल की आंतरिक ऊर्जा में वृद्धि करने में व्यय होता है । इस प्रक्रिया में जल द्रव से वाष्प प्रावस्था में परिवर्तित होता है ।

12.6 विशिष्ट ऊष्मा धारिता

कल्पना कीजिए कि किसी पदार्थ को दी गई ऊष्मा की मात्रा ΔQ उसके ताप को T से बढ़ाकर $T+\Delta T$ कर देती है । हम पदार्थ की ऊष्मा धारिता को निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित करते हैं ।

$$S = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \qquad (12.4)$$

हम आशा करते हैं कि ΔQ और इस प्रकार से ऊष्मा धारिता S पदार्थ के द्रव्यमान के अनुक्रमानुपाती होती है । इसके अतिरिक्त यह ताप पर भी निर्भर कर सकती है । अर्थात् भिन्न-भिन्न तापों पर पदार्थ के ताप में एकांक वृद्धि के लिए ऊष्मा के भिन्न-भिन्न परिमाणों की आवश्यकता पड़ सकती है । पदार्थ के किसी नियत अभिलक्षण को परिभाषित करने तथा उसे उसके परिमाण से स्वतंत्र रखने के लिए हम S को पदार्थ के द्रव्यमान m (kg में) से विभाजित कर देते हैं :

$$s = \frac{S}{m} = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T} \qquad (12.5)$$

s को पदार्थ की **विशिष्ट ऊष्मा धारिता** कहते हैं । यह पदार्थ की प्रकृति और उसके ताप पर निर्भर करती है । विशिष्ट ऊष्मा का मात्रक J $kg^{-1} K^{-1}$ है।

यदि पदार्थ के परिमाण का निर्धारण μ मोल (द्रव्यमान m को kg में व्यक्त करने के स्थान पर) के पदों में करें तो हम पदार्थ की ऊष्मा धारिता प्रति मोल को इस प्रकार से व्यक्त कर सकते है

$$C = \frac{S}{\mu} = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta Q}{\Delta T} \qquad (12.6)$$

C को पदार्थ की **मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता** कहते हैं । s की भाँति C भी पदार्थ के परिमाण पर निर्भर नहीं करता तथा प्रदत्त ऊष्मा की परिस्थितियों, पदार्थ की प्रकृति, उसके ताप पर निर्भर करता है । C का मात्रक J $mol^{-1} K^{-1}$ है । जैसा कि हम बाद में देखेंगे (गैस की विशिष्ट ऊष्मा के संबंध में) C या s को परिभाषित करने के लिए अतिरिक्त शर्तों की आवश्यकता पड़ सकती है । C को परिभाषित करने के पीछे यह विचार है कि मोलर विशिष्ट ऊष्माओं के संबंध में सरल भविष्यवाणियाँ की जा सकती हैं।

सारणी 12.1 में कमरे के ताप तथा वायुमंडलीय दाब पर कुछ ठोसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिता तथा मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता दी गई हैं।

हम अध्याय 13 में पढ़ेंगे कि गैसों की विशिष्ट ऊष्माओं के संबंध में की गई भविष्यवाणियाँ सामान्यतया प्रयोग से मेल खाती हैं । हम उसी ऊर्जा सम विभाजन नियम का उपयोग कर सकते हैं । जैसा कि हमने वहाँ ठोसों की मोलर विशिष्ट ऊष्मा की भविष्यवाणी में किया है । N परमाणुओं वाले किसी ठोस पर विचार करें । प्रत्येक परमाणु अपनी माध्य स्थिति के दोनों ओर कंपन करता है । एक विमा में किसी दोलक की माध्य ऊर्जा $2 \times ½\, k_B T = k_B T$ होगी । तीन विमाओं में माध्य ऊर्जा $3\, k_B T$ होगी । ठोस के एक मोल के लिए कुल ऊर्जा

$$U = 3\, k_B T \times N_A = 3\, RT$$

अब स्थिर दाब पर, $\Delta Q = \Delta U + P\Delta V \cong \Delta U$ होगा, क्योंकि किसी ठोस के लिए ΔV नगण्य होगा । अत:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} = 3R \qquad (12.7)$$

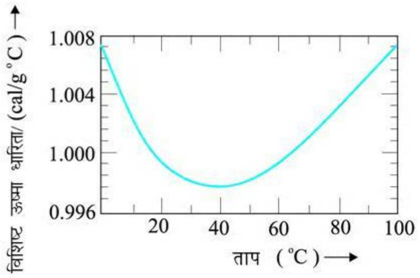
सारणी 12.1 कमरे के ताप तथा वायुमंडलीय दाब पर कुछ ठोसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिता तथा मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता

पदार्थ	विशिष्ट ऊष्मा धारिता (J $kg^{-1}K^{-1}$)	मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता (J $mol^{-1}K^{-1}$)
ऐलुमिनियम	900.0	24.4
कार्बन	506.5	6.1
ताँबा	386.4	24.5
सीसा	127.7	26.5
चाँदी	236.1	25.5
टंगस्टन	134.4	24.9

जैसा कि सारणी से स्पष्ट है कि भविष्यवाणियाँ सामान्यतया साधारण तापों पर प्रायोगिक मानों से मेल खाती हैं (कार्बन एक अपवाद है) । यह ज्ञात है कि यह मेल निम्न तापों पर भंग हो जाता है ।

जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता

ऊष्मा का पुराना मात्रक कैलोरी था। 1 कैलोरी को ऊष्मा के उस परिमाण के रूप में परिभाषित करते थे जो 1g जल के ताप में 1°C की वृद्धि कर दे । अधिक परिशुद्ध मापों से यह पाया गया है कि जल की विशिष्ट ऊष्मा में ताप के साथ किंचितमात्र परिवर्तन होता है । चित्र 12.5 में ताप परिसर 0-100 °C में यह परिवर्तन दर्शाया गया है ।



चित्र 12.5 ताप के साथ जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता में परिवर्तन

इसलिए कैलोरी की यथार्थ परिभाषा के लिए यह आवश्यक समझा गया कि एकांक ताप अंतराल को निर्धारित किया जाए । ऊष्मा का वह परिमाण जो 1 g जल के ताप में 1 °C (14.5 °C से 15.5 °C) की वृद्धि कर दे, उसे 1 कैलोरी के रूप में परिभाषित किया गया । चूंकि ऊष्मा ऊर्जा का ही एक रूप है, इसलिए मात्रक जूल, J के उपयोग को प्राथमिकता देना अधिक उपयुक्त है । SI मात्रकों में, जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता 4186 J $kg^{-1}K^{-1}$ अर्थात् 4.186 J $g^{-1}K^{-1}$ है । तथाकथित ऊष्मा का यांत्रिक तुल्यांक, जिसे 1 कैलोरी ऊष्मा उत्पन्न करने के लिए आवश्यक कार्य के रूप में परिभाषित करते हैं, वास्तव में ऊर्जा के दो भिन्न मात्रकों (कैलोरी से जूल) के मध्य एक परिवर्तन गुणक है । चूंकि SI मात्रक पद्धति में ऊष्मा कार्य या ऊर्जा के किसी अन्य रूप के लिए जूल मात्रक का उपयोग करते हैं, अत: 'यांत्रिक तुल्यांक' पद अब निरर्थक हो गया है और इसे उपयोग में लाने की आवश्यकता नहीं है ।

जैसा कि पहले वर्णन किया जा चुका है कि विशिष्ट ऊष्मा धारिता, प्रक्रिया या उन परिस्थितियों पर निर्भर करती है जिनके अंतर्गत ऊष्मा का स्थानांतरण होता है । उदाहरणार्थ, गैसों के लिए हम दो विशिष्ट ऊष्माओं को परिभाषित करते हैं : *स्थिर आयतन पर विशिष्ट ऊष्मा धारिता तथा स्थिर दाब पर विशिष्ट ऊष्मा धारिता।* किसी आदर्श गैस के लिए हमारे पास एक सरल संबंध होता है जिसे हम निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त करते है :

$$C_p - C_V = R \qquad (12.8)$$

यहाँ C_p व C_V आदर्श गैस की क्रमश: स्थिर दाब व स्थिर आयतन पर मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिताएँ हैं तथा R सार्वत्रिक गैस नियतांक है । इसे सिद्ध करने के लिए हम 1 मोल गैस के लिए समीकरण (12.3) पर विचार करते हैं :

$$\Delta Q = \Delta U + P\Delta V$$

यदि ΔQ का स्थिर आयतन पर अवशोषण होता है तो $\Delta V = 0$ होगा ।

$$C_v = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_v = \left(\frac{\Delta U}{\Delta T}\right)_v = \left(\frac{\Delta U}{\Delta T}\right) \qquad (12.9)$$

यहाँ अधोलिखित V को अंतिम पद में छोड़ दिया गया है क्योंकि आदर्श गैस के लिए U का मान मात्र ताप पर निर्भर करता है । (अधोलिखित यह व्यक्त करता है कि तत्संबंधित राशि स्थिर है ।) इसके विपरीत, यदि ΔQ का स्थिर दाब पर अवशोषण होता है तो

$$C_p = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_p = \left(\frac{\Delta U}{\Delta T}\right)_p + P\left(\frac{\Delta V}{\Delta T}\right)_p \qquad (12.10)$$

अधोलिखित P को प्रथम पद में छोड़ा जा सकता है क्योंकि आदर्श गैस के लिए U का मान मात्र T पर निर्भर करता है । आदर्श गैस के 1 मोल के लिए

$$PV = RT$$

जो निम्नलिखित परिणाम देता है :

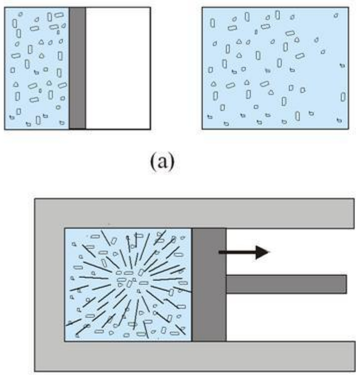
$$P\left(\frac{\Delta V}{\Delta T}\right)_P = R \qquad (12.11)$$

समीकरणों (12.9) से (12.11) तक के उपयोग से हमें वांछित संबंध (12.8) प्राप्त होता है ।

12.7 ऊष्मागतिकीय अवस्था चर तथा अवस्था का समीकरण

किसी भी ऊष्मागतिकीय निकाय की प्रत्येक **साम्य अवस्था** को कुछ स्थूल चरों के विशिष्ट मानों के उपयोग द्वारा पूरी तरह से वर्णित कर सकते हैं । उदाहरणार्थ, किसी गैस की साम्य अवस्था उसके दाब, आयतन, ताप व द्रव्यमान (तथा संगठन यदि गैसों का सम्मिश्रण है) के मानों द्वारा पूरी तरह से निर्धारित होती है । कोई ऊष्मागतिक निकाय सदैव साम्य स्थिति में नहीं होता । उदाहरणार्थ, किसी गैस को निर्वात के विरुद्ध यदि फैलने दिया

जाता है तो यह साम्य अवस्था नहीं होती [चित्र 12.6(a)]। द्रुत प्रसरण की अवधि में गैस का दाब संभव है कि सभी स्थानों पर एकसमान न हो। इसी प्रकार, गैसों का वह सम्मिश्रण जिसमें विस्फोटक रासायनिक अभिक्रिया होती है (उदाहरणार्थ, पेट्रोल की वाष्प तथा वायु का मिश्रण जिसे एक चिंगारी से प्रज्ज्वलित किया जाता है) एक साम्य अवस्था नहीं है; इसके अतिरिक्त इसके ताप व दाब एकसमान नहीं हैं [चित्र 12.6(b)]। अंतत:, गैस का ताप व दाब एकसमान हो जाता है तथा वह परिवेश के साथ तापीय व यांत्रिक साम्य में आ जाती है।



(a)

(b)

चित्र 12.6 (a) बॉक्स के विभाजक को अचानक हटा दिया गया है जिससे गैस का मुक्त प्रसरण होता है। (b) गैसों का मिश्रण जिसमें विस्फोटक रासायनिक अभिक्रिया संपन्न होती है। दोनों स्थितियों में गैस साम्यावस्था में नहीं है तथा चरों से इसका विवरण नहीं दिया जा सकता।

संक्षेप में, ऊष्मागतिकीय अवस्था चर निकायों की साम्यावस्था का विवरण देते हैं। यह आवश्यक नहीं है कि विभिन्न अवस्था चर स्वतंत्र हों। अवस्था चरों के पारस्परिक संबंध को अवस्था का समीकरण कहते हैं। उदाहरणार्थ, किसी आदर्श गैस के लिए अवस्था का समीकरण आदर्श गैस संबंध होता है,

$$PV = \mu RT$$

गैस की निश्चित मात्रा के लिए अर्थात् दिए गए μ के लिए इस प्रकार से केवल दो ही स्वतंत्र चर होते हैं। मान लीजिए कि वे P और V या T और V हैं। निश्चित ताप पर दाब आयतन वक्र को **समतापी** कहते हैं। वास्तविक गैसों के लिए अवस्था का समीकरण अधिक जटिल हो सकता है।

ऊष्मागतिकीय अवस्था चर दो प्रकार के होते हैं : **विस्तीर्ण** तथा **गहन**। विस्तीर्ण चर निकाय के आकार का संकेत देते हैं जबकि गहन चर जैसे दाब तथा ताप से ऐसा नहीं करते। यह निर्णय लेने के लिए कि कौन-सा चर विस्तीर्ण है तथा कौन-सा गहन है, किसी प्रासंगिक निकाय पर विचार कीजिए तथा कल्पना कीजिए कि उसे दो समान भागों में बाँट दिया गया है। वे चर जो हर भाग में अपरिवर्तित रहते हैं गहन चर कहलाते हैं किंतु जिन चरों का मान हर भाग में आधा हो जाता है, उन्हें विस्तीर्ण चर कहते हैं। उदाहरणार्थ, यह आसानी से देखा जा सकता है कि आंतरिक ऊर्जा U, आयतन V, कुल द्रव्यमान M विस्तीर्ण चर हैं जबकि दाब P, ताप T व घनत्व ρ गहन चर हैं। यह एक अच्छी आदत होगी यदि चरों के इस प्रकार के वर्गीकरण के द्वारा ऊष्मागतिकीय समीकरणों की प्रासंगिकता का परीक्षण कर लिया जाए। उदाहरणार्थ, समीकरण,

$$\Delta Q = \Delta U + P\Delta V$$

में दोनों ओर की राशियाँ विस्तीर्ण हैं* (किसी गहन चर जैसे P तथा विस्तीर्ण राशि ΔV का गुणनफल विस्तीर्ण राशि है)।

12.8 ऊष्मागतिकीय प्रक्रम

12.8.1 स्थैतिककल्प प्रक्रम

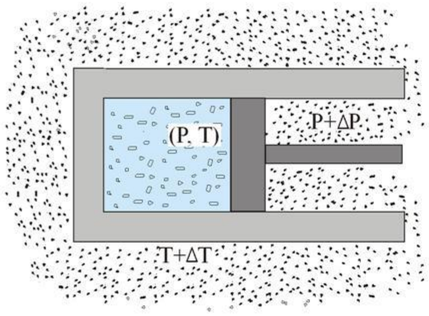
ऐसी गैस पर विचार कीजिए जो अपने परिवेश से तापीय तथा यांत्रिक रूप से साम्य में हो। ऐसी स्थिति में गैस का दाब बाह्य दाब के बराबर होगा तथा इसका ताप वही होगा जो परिवेश का है। कल्पना कीजिए कि बाह्य दाब को यकायक कम कर देते हैं (मान लीजिए कि बर्तन में लगे गतिशील पिस्टन से भार हटा लेते हैं)। पिस्टन बाहर की ओर त्वरित होगा। प्रक्रम की अवधि में गैस उन अवस्थाओं से गुजरती है जो साम्यावस्थाएँ नहीं हैं। असाम्य अवस्थाओं का सुनिश्चित दाब व ताप नहीं होता। इसी प्रकार, यदि गैस व उसके परिवेश के मध्य सीमित तापांतर है, तो ऊष्मा का विनिमय द्रुत गति से होता है। इस प्रक्रम में गैस असाम्यावस्था से गुजरती है। यथासमय, गैस संतुलन की अवस्था में पहुँच जाएगी जिसमें सुनिश्चित ताप व दाब परिवेश के ताप व दाब के बराबर हो जाएगा। निर्वात में गैस का स्वतंत्र प्रसार तथा विस्फोटक रासायनिक अभिक्रिया प्रदर्शित करने वाली गैसों का सम्मिश्रण (जिसका खंड (12.7) में वर्णन किया गया है) भी ऐसे उदाहरण हैं जिसमें निकाय असाम्यावस्था से गुजरता है।

किसी निकाय की असाम्यावस्था से व्यवहार करना कठिन होता है। इसलिए एक आदर्शीकृत प्रक्रम की कल्पना करना

* जैसा पहले भी दर्शाया गया है Q अवस्था चर नहीं है किन्तु ΔQ निकाय की कुल मात्रा समानुपातिक है। अत: यह विस्तीर्ण चर है।

सरल होता है जिसके हर चरण में निकाय एक साम्यावस्था में है । ऐसा प्रक्रम सिद्धांत: अनंत रूप से धीमा होता है । इस कारण इस प्रक्रम को स्थैतिककल्प (लगभग स्थिर) प्रक्रम कहते हैं। यह निकाय अपने चरों (P, T, V) को इतनी धीमी गति से परिवर्तित करता है कि यह पूरी अवधि में अपने परिवेश से तापीय व यांत्रिक साम्य में रहता है । किसी स्थैतिककल्प प्रक्रम के हर चरण में निकाय के दाब तथा उसके बाह्य दाब का अंतर अत्यंत छोटा होता है । यही बात निकाय तथा उसके परिवेश के मध्य तापांतर पर भी लागू होती है । स्थैतिककल्प प्रक्रम के माध्यम से किसी गैस को उसकी अवस्था (P, T) से अन्य अवस्था (P', T') में ले जाते हैं तो हम बाह्य दाब को अत्यल्प मात्रा से परिवर्तित करते हैं तथा इसके दाब को परिवेश के दाब के बराबर हो जाने देते हैं । प्रक्रम को अति धीमी गति से चलने देते हैं जब तक कि निकाय का दाब P' न हो जाए । इसी प्रकार, ताप बदलने के लिए हम निकाय तथा परिवेश के ऊष्मा भंडार के मध्य अत्यन्त सूक्ष्म तापांतर उत्पन्न करते हैं तथा ऊष्मा भंडारों का चयन उत्तरोत्तर भिन्न तापों T से T' का करते हैं। इस प्रकार निकाय का ताप T' हो जाता है ।

स्पष्ट रूप से, स्थैतिककल्प प्रक्रम काल्पनिक रचना है। व्यवहार रूप से उन प्रक्रमों को, जो बहुत ही धीमे हैं, जिनके पिस्टन में त्वरित गति नहीं होती तथा जिनमें अधिक ताप प्रवणता नहीं होती, इन्हें आदर्श स्थैतिककल्प प्रक्रम मानना तर्कसंगत है। यदि अन्य बात का वर्णन न किया जाए तो हम अब स्थैतिककल्प प्रक्रमों के विषय में ही अध्ययन करेंगे।



चित्र 12.7 स्थैतिककल्प प्रक्रम में परिवेश के पात्र का ताप तथा बाह्य दाब एवं निकाय के ताप व दाब का अंतर अत्यल्प है ।

वह प्रक्रम जिसकी पूरी अवधि में निकाय का ताप स्थिर रखा जाता है, **समतापीय प्रक्रम** कहलाता है । स्थिर ताप के किसी विशाल ऊष्मा भंडार में रखे धात्विक सिलिंडर में प्रसरित हो रही गैस समतापीय प्रक्रम का एक उदाहरण है । (ऊष्मा भंडार से निकाय में ऊष्मा के स्थानांतरण से ऊष्माशय का ताप यथार्थ रूप से प्रभावित नहीं होता, क्योंकि उसकी ऊष्माधारिता अत्यधिक होती है) । **समदाबीय प्रक्रम** में दाब स्थिर रहता है जबकि **समआयतनिक प्रक्रम** में आयतन स्थिर रहता है । अंततः, यदि निकाय को परिवेश से ऊष्मारुद्ध कर दिया जाए तथा निकाय व परिवेश के मध्य ऊष्मा प्रवाहित न हो, तो प्रक्रम **रुद्धोष्म** होता है । इन विशेष प्रक्रमों की परिभाषाओं का सार सारणी 12.2 में प्रस्तुत किया गया है ।

सारणी 12.2 कुछ विशिष्ट ऊष्मागतिकीय प्रक्रम

प्रक्रमों का प्रकार	विशेषता
समतापीय	स्थिर ताप
समदाबीय	स्थिर दाब
समआयतनिक	स्थिर आयतन
रुद्धोष्म	निकाय व परिवेश के मध्य ऊष्मा प्रवाह नहीं ($\Delta Q = 0$)

अब हम इन प्रक्रमों के विषय में विस्तार से अध्ययन करेंगे।

समतापीय प्रक्रम

किसी समतापीय प्रक्रम में (जिसमें T स्थिर है) आदर्श गैस समीकरण से निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है

$$PV = \text{नियतांक}$$

अर्थात् किसी निश्चित द्रव्यमान की गैस का दाब उसके आयतन का व्युत्क्रमानुपाती होता है । यह और कुछ नहीं वरन् बॉयल का नियम है ।

कल्पना कीजिए कि कोई आदर्श गैस समतापीय (ताप T पर) रूप से अपनी प्रारंभिक (P_1, V_1) से अंतिम अवस्था (P_2, V_2) में पहुँचती है । बीच के किसी चरण में जब दाब P हो तथा आयतन में परिवर्तन V से $V + \Delta V$ (ΔV कम) हो, तो

$$\Delta W = P\Delta V$$

$\Delta V \to 0$ लेते हुए राशि ΔW को संपूर्ण प्रक्रम में जोड़कर कार्य की कुल मात्रा निम्नलिखित रूप से ज्ञात कर लेते हैं,

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\, dV$$

$$= \mu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \mu RT \ln \frac{V_2}{V_1} \qquad (12.12)$$

दूसरे चरण में हमने आदर्श गैस समीकरण $PV = \mu RT$ का उपयोग किया है तथा अचरों को समाकलन से बाहर ले लिया है । आदर्श गैस के लिए आंतरिक ऊर्जा ताप पर निर्भर करती है । इस प्रकार, किसी आदर्श गैस के समतापीय प्रक्रम में आंतरिक ऊर्जा में कोई परिवर्तन नहीं होता । इसलिए ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम के अनुसार, गैस को दी गई ऊष्मा की मात्रा गैस द्वारा संपादित किए गए कार्य के बराबर होती है : $Q = W$ । समीकरण (12.12) में ध्यान दीजिए कि जब $V_2 > V_1$ तो $W > 0$; तथा $V_2 < V_1$ के लिए $W < 0$ होता है । इसका तात्पर्य यह है कि समतापीय प्रसार में गैस ऊष्मा अवशोषित करके कुछ कार्य संपादित करती है जबकि समतापीय संपीडन में गैस पर परिवेश द्वारा कार्य होता है तथा ऊष्मा का निष्कासन होता है ।

रुद्धोष्म प्रक्रम

रुद्धोष्म प्रक्रम में निकाय को परिवेश से ऊष्मारुद्ध कर देते हैं फलस्वरूप अवशोषित या निष्कासित ऊष्मा शून्य होती है । समीकरण (12.1) से पता चलता है कि गैस द्वारा संपादित कार्य के फलस्वरूप आंतरिक ऊर्जा कम हो जाती है (और इस प्रकार आदर्श गैस के लिए उसका ताप) । यहाँ हम बिना उपपत्ति के इस तथ्य का उल्लेख कर रहे हैं (जिसका आप उच्च कक्षाओं में अध्ययन करेंगे) कि आदर्श गैस के लिए रुद्धोष्म प्रक्रम में

$$PV^{\gamma} = \text{नियतांक} \qquad (12.13)$$

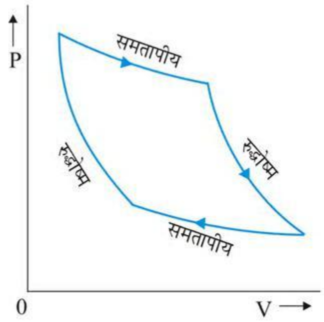
जहाँ γ गैस की दो विशिष्ट ऊष्माओं (सामान्य अथवा मोलर), स्थिर दाब पर विशिष्ट ऊष्मा C_p तथा स्थिर आयतन पर विशिष्ट ऊष्मा C_v का अनुपात है । अर्थात्

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

अतः यदि कोई आदर्श गैस रुद्धोष्म ढंग से (P_1, V_1) अवस्था से (P_2, V_2) अवस्था में पहुँच जाती है, तो

$$P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma} \qquad (12.14)$$

चित्र 12.8 में आदर्श गैस के लिए P-V वक्रों को दो रुद्धोष्म से जोड़ने वाले दो समतापीय को दर्शाया गया है ।



चित्र 12.8 आदर्श गैस के समतापीय व रुद्धोष्म प्रक्रमों के लिए P-V वक्र ।

किसी आदर्श गैस की अवस्था (P_1, V_1, T_1) से अवस्था (P_2, V_2, T_2) में रुद्धोष्म परिवर्तन में होने वाले कार्य को हम पहले ही की भांति परिकलित कर सकते हैं । अर्थात्,

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV$$

$$= \text{नियतांक} \times \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^{\gamma}} = \text{नियतांक} \times \left.\frac{V^{-\gamma+1}}{1-\gamma}\right|_{V_1}^{V_2}$$

$$= \frac{\text{नियतांक}}{1-\gamma} \times \left[\frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_1^{\gamma-1}}\right] \qquad (12.15)$$

समीकरण (12.14), से नियतांक $P_1 V_1^{\gamma}$ है अथवा $P_2 V_2^{\gamma}$

$$\therefore \quad W = \frac{1}{1-\gamma} \times \left[\frac{P_2 V_2^{\gamma}}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{P_1 V_1^{\gamma}}{V_1^{\gamma-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{1-\gamma}\left[P_2 V_2 - P_1 V_1\right] = \frac{\mu R (T_1 - T_2)}{\gamma - 1} \qquad (12.16)$$

जैसा अपेक्षित है, यदि रुद्धोष्म प्रक्रम में कार्य गैस द्वारा संपन्न होता है ($W > 0$), तब समीकरण (12.16) से $T_2 > T_1$ । इसके विपरीत, यदि कार्य गैस पर संपादित होता है ($W < 0$) तो, हमें $T_2 > T_1$ प्राप्त होता है, अर्थात् गैस का ताप बढ़ता है ।

समआयतनिक प्रक्रम

किसी समआयतनिक प्रक्रम में V नियत रहता है । इस प्रक्रम में न तो गैस पर कोई कार्य होता है और न ही गैस द्वारा कोई कार्य संपादित होता है । समीकरण (12.1) से गैस द्वारा अवशोषित ऊष्मा पूर्ण रूप से उसकी आंतरिक ऊर्जा तथा उसके ताप को परिवर्तित करने में व्यय होती है । किसी दी गई ऊष्मा की मात्रा के लिए ताप में परिवर्तन नियत आयतन पर गैस की विशिष्ट ऊष्मा द्वारा निर्धारित की जाती है।

समदाबीय प्रक्रम

समदाबीय प्रक्रम में दाब P नियत रहता है । गैस द्वारा किया गया कार्य

$$W = P(V_2 - V_1) = \mu R (T_2 - T_1) \qquad (12.17)$$

चूंकि ताप परिवर्तित होता है, अतः आंतरिक ऊर्जा भी परिवर्तित होती है । अवशोषित ऊष्मा आंशिक रूप से आंतरिक ऊर्जा में वृद्धि करने में तथा आंशिक रूप से कार्य करने में व्यय होती है । किसी नियत ऊष्मा की मात्रा के लिए ताप में परिवर्तन नियत दाब पर गैस की विशिष्ट ऊष्मा द्वारा निर्धारित किया जाता है ।

चक्रीय प्रक्रम

चक्रीय प्रक्रम में निकाय अपनी प्रारंभिक अवस्था में वापस लौट आता है । चूंकि आंतरिक ऊर्जा अवस्था चर है, चक्रीय प्रक्रम के लिए ΔU=0 । समीकरण (12.1) से, अवशोषित ऊष्मा की कुल मात्रा निकाय द्वारा किए गए कार्य के बराबर होती है ।

12.9 ऊष्मा इंजन

ऊष्मा इंजन एक ऐसी युक्ति है, जिसमें निकाय द्वारा चक्रीय प्रक्रम पूरा कराया जाता है जिसके फलस्वरूप ऊष्मा कार्य में रूपांतरित होती है ।

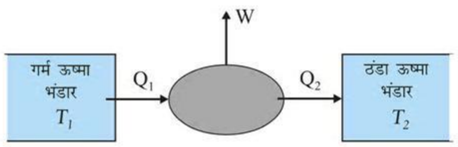
(1) इसमें एक **कार्यकारी पदार्थ** होता है। उदाहरणार्थ, किसी गैसोलीन अथवा डीजल इंजन में ईंधन वाष्प तथा वायु का मिश्रण, अथवा किसी भाप इंजन में भाप कार्यकारी पदार्थ है।

(2) कार्यकारी पदार्थ एक चक्र से गुजरता है जिसमें कई प्रक्रम होते हैं। एक प्रक्रम में यह पदार्थ किसी उच्च ताप T_1 पर किसी बाह्य ऊष्मा भंडार से ऊष्मा की कुल मात्रा Q_1 अवशोषित करता है ।

(3) चक्र के द्वितीय प्रक्रम में कार्यकारी पदार्थ किसी अपेक्षाकृत कम ताप T_2 पर किसी बाह्य ऊष्मा भंडार को कुल ऊष्मा की मात्रा Q_2 मुक्त करता है ।

(4) एक चक्र में निकाय द्वारा संपादित कार्य W किसी विधा द्वारा परिवेश में स्थानांतरित किया जाता है (उदाहरणार्थ, कार्यकारी पदार्थ गतिशील पिस्टन लगे किसी सिलिंडर में भरा हो सकता है जो पिस्टन द्वारा यांत्रिक ऊर्जा को शाफ्ट के माध्यम से वाहन के पहियों को स्थानांतरित कर देता है)।

किसी ऊष्मा इंजन के मौलिक लक्षणों का योजनाबद्ध निरूपण चित्र 12.9 में किया गया है ।



चित्र 12.9 ऊष्मा इंजन का योजनाबद्ध निरूपण । इंजन ताप T_1 पर गरम ऊष्मा भंडार से Q_1 ऊष्मा ग्रहण करता है, ताप T_2 पर एक ठंडे ऊष्मा भंडार को Q_2 ऊष्मा मुक्त करता है तथा परिवेश को कार्य W प्रदान करता है ।

चक्र बार-बार दोहराया जाता है ताकि किसी प्रयोजन के लिए उपयोगी कार्य संपादित हो सके । ऊष्मागतिकी विषय की जड़ें ऊष्मा इंजनों के अध्ययन में हैं । किसी ऊष्मा इंजन की दक्षता से एक मौलिक प्रश्न संबंधित होता है । किसी ऊष्मा इंजन की दक्षता (η) को इस प्रकार परिभाषित करते हैं

$$\eta = \frac{W}{Q_1} \tag{12.18}$$

यहाँ Q_1 ऊष्मा निवेश है, अर्थात् निकाय द्वारा एक पूरे चक्र में अवशोषित ऊष्मा की मात्रा है तथा W एक चक्र में परिवेश पर किया गया कार्य है । एक चक्र में ऊष्मा की कुछ निश्चित मात्रा [Q_2] परिवेश में निष्कासित भी हो सकती है । ऐसी परिस्थिति में ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम के अनुसार एक पूरे चक्र के लिए किया गया कार्य

$$W = Q_1 - Q_2 \tag{12.19}$$

अर्थात्

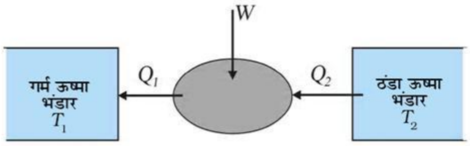
$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \tag{12.20}$$

यदि $Q_2 = 0$ है, तो $\eta = 1$, अर्थात् ऊष्मा को कार्य में परिवर्तित करने में इंजन की दक्षता 100% होगी । इस बात पर ध्यान दीजिए कि ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम अर्थात् ऊर्जा संरक्षण का नियम इस प्रकार के इंजन की संभावना से इनकार नहीं करता । परंतु अनुभव यह दर्शाता है कि चाहे हम वास्तविक इंजन से संबंधित विभिन्न प्रकार की हानियों को कितना भी कम क्यों न कर दें, ऐसा आदर्श इंजन होना जिसके लिए $\eta = 1$ हो, कदापि संभव नहीं है। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि ऊष्मा इंजन की दक्षता की एक मौलिक सीमा होती है जिसका निर्धारण प्रकृति के एक स्वतंत्र नियम, जिसे ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम कहते हैं (खंड 12.11) द्वारा होता है ।

ऊष्मा को कार्य में परिवर्तित करने की प्रक्रिया विभिन्न प्रकार के ऊष्मा इंजनों के लिए भिन्न है । मौलिक रूप से इसके दो प्रकार हैं: निकाय (जैसे कोई गैस या गैसों के मिश्रण) को किसी बाह्य भट्ठी द्वारा गरम किया जाए, जैसा कि भाप इंजन में होता है, अथवा इसके आंतरिक रूप से ऊष्मान्मोची (ऊष्माक्षेपी) रासायनिक अभिक्रिया द्वारा गरम किया जाए, जैसा कि आंतरिक दहन इंजन में होता है । किसी चक्र में निहित विभिन्न चरण भी विभिन्न इंजनों के लिए अलग-अलग होते हैं ।

12.10 प्रशीतक/ऊष्मा पंप

प्रशीतक या ऊष्मा पंप ऊष्मा इंजन के ठीक विपरीत होता है । इसमें कार्यकारी पदार्थ किसी निम्न ताप T_2 के ऊष्मा भंडार से Q_2 ऊष्मा ग्रहण करता है, तत्पश्चात उस पर कुछ बाह्य कार्य W किया जाता है तथा ऊष्मा Q_1 किसी उच्च ताप T_1 के ऊष्मा भंडार को मुक्त कर दी जाती है (चित्र 12.10)।



चित्र 12.10 प्रशीतक या ऊष्मा पंप का योजनाबद्ध निरूपण । यह ऊष्मा इंजन का उत्क्रमणीय होता है ।

ऊष्मा पंप प्रशीतक के समान होता है । हम किस शब्द का उपयोग करते हैं, यह युक्ति के प्रयोजन पर निर्भर करता है। यदि प्रयोजन किसी स्थान के कुछ भाग, जैसे कि किसी प्रकोष्ठ के भीतरी भाग को ठंडा करना है, तो युक्ति को हम प्रशीतक कहते हैं । किंतु यदि प्रयोजन किसी स्थान के किसी भाग में ऊष्मा को पंप करना है, तो युक्ति को ऊष्मा पंप कहते हैं । ऐसा भवन के किसी कमरे को गरम करने के लिए उस समय किया जाता है जब बाहरी वातावरण ठंडा होता है ।

प्रशीतक में कार्यकारी पदार्थ (प्राय:, फ्रीऑन गैस) निम्नलिखित चरणों से गुजरती है : (a) उच्च दाब से निम्न दाब के क्षेत्र में गैस में अचानक प्रसार होता है जिसके कारण वह (फ्रीऑन) ठंडी हो जाती है तथा वाष्प-द्रव मिश्रण में रूपांतरित हो जाती है। (b) ठंडे तरल द्वारा उस भाग से ऊष्मा का अवशोषण जिसे ठंडा करना है, होता है। इससे तरल वाष्प में रूपांतरित हो जाता है। (c) निकाय पर किए गए बाह्य कार्य द्वारा वाष्प का गरम होना, तथा (d) वाष्प द्वारा परिवेश में ऊष्मा मुक्त करके कार्यकारी पदार्थ को एक चक्र पूरा कर पुन: अपनी आरंभिक अवस्था में वापस लाना है । इस प्रकार प्रशीतक का निष्पादन गुणांक

$$\alpha = \frac{Q_2}{W} \qquad (12.21)$$

यहाँ Q_2 ठंडे ऊष्मा भंडार से अवशोषित ऊष्मा की मात्रा तथा W निकाय – प्रशीतक पर किया गया कार्य है । ध्यान दीजिए, परिभाषा के अनुसार η का मान 1 से अधिक नहीं हो सकता, जबकि α का मान 1 से अधिक हो सकता है । ऊष्मा संरक्षण द्वारा गरम ऊष्मा भंडार को मुक्त की गई ऊष्मा

$$Q_1 = W + Q_2$$

अर्थात्

$$\alpha = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} \qquad (12.22)$$

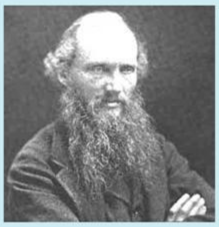
होती है ।

ऊष्मा इंजन में ऊष्मा को पूर्ण रूप से कार्य में रूपांतरित नहीं किया जा सकता : उसी प्रकार से निकाय पर बिना कुछ बाह्य कार्य किए कोई प्रशीतक कार्य नहीं कर सकता, अर्थात् समीकरण (12.21) में निष्पादन गुणांक अनंत नहीं हो सकता ।

12.11 ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम

ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम ऊर्जा संरक्षण नियम है । सामान्य अनुभव यह बतलाता है कि ऐसे बहुत से मनोगम्य प्रक्रम हैं जो ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम से पूर्णतया अनुमत हैं तथापि कभी भी होते हुए दिखाई नहीं देते । उदाहरणार्थ, ऐसा किसी ने कभी

ऊष्मागतिकी के पथ-प्रदर्शक



लार्ड केल्विन (विलियम थॉमसन) (1824-1907), बेल्फास्ट, आयरलैंड में जन्मे 19वीं शती के ब्रिटिश वैज्ञानिकों में से एक हैं । जेम्स जूल (1818-1889), जूलियस मेयर (1814-1878) तथा हरमैन हेल्महॉल्ट्ज़ (1821-1894) द्वारा प्रस्तावित ऊर्जा के संरक्षण नियम के विकास में थॉमसन ने प्रमुख भूमिका अदा की । उन्होंने सुविख्यात "जूल-थॉमसन प्रभाव" : निर्वात में प्रसारित होने पर किसी गैस का ठंडा होना, की खोज में जूल के सहयोगी के रूप में कार्य किया । इन्होंने ताप के परम शून्य की धारणा से परिचय कराया । परम त0प मापक्रम को प्रस्तावित किया, जिसे उनके सम्मान में केल्विन तापक्रम कहते हैं । साडी कार्नो (1796-1832) के कार्य से थॉमसन ऊष्मागतिकी के द्वितीय नियम के एक स्वरूप तक पहुँचे । थॉमसन एक बहुमुखी प्रतिभा के भौतिकविद थे जिन्होंने वैद्युतचुंबकीय सिद्धांत तथा द्रव्यगतिकी में महत्वपूर्ण योगदान दिया ।

रूडोल्फ क्लासियस (1822-1888), पोलैण्ड में जन्मे इस भौतिकविद को प्रमुख रूप से ऊष्मागतिकी के दूसरे नियम का आविष्कारक माना जाता है । कार्नो तथा थॉमसन के कार्य के आधार पर क्लासियस एंट्रॉपी जैसी महत्वपूर्ण धारणा पर पहुँचे जिसने ऊष्मागतिकी के द्वितीय नियम के मूल स्वरूप की खोज का मार्ग प्रशस्त किया जिसका कथन है कि किसी वियुक्त निकाय की एंट्रॉपी कभी भी घट नहीं सकती । क्लासियस ने गैसों के अणुगति सिद्धांत पर भी कार्य किया तथा प्रथम आण्विक अमाप, चाल तथा माध्य मुक्त पथ का विश्वसनीय आकलन प्राप्त किया ।

नहीं देखा कि मेज पर पड़ी कोई पुस्तक स्वत: उछलकर किसी ऊँचाई पर पहुँच जाए। किंतु ऐसी बात तभी संभव हो सकती है यदि केवल ऊर्जा संरक्षण नियम का ही नियंत्रण हो। मेज स्वत: ठंडी होकर अपनी आंतरिक ऊर्जा का कुछ अंश पुस्तक की समान मात्रा की यांत्रिक ऊर्जा में रूपांतरित करने में करे और इस यांत्रिक ऊर्जा के कारण पुस्तक उस ऊँचाई तक उछले जिसकी स्थितिज ऊर्जा पुस्तक द्वारा प्राप्त यांत्रिक ऊर्जा के बराबर हो। परंतु ऐसा कदापि नहीं होता। स्पष्ट है कि प्रकृति के किसी आंतरिक मूल नियम के कारण यह निषेध है। यद्यपि यह ऊर्जा संरक्षण नियम का अनुपालन करता है। वह नियम जो ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम से संगत अनेक परिघटनाओं को स्वीकृति नहीं देता, ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम कहलाता है।

ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम किसी ऊष्मा इंजन की दक्षता तथा किसी प्रशीतक के निष्पादन गुणांक की मूल सीमा निर्धारित करता है। सरल भाषा में, यह नियम बताता है कि ऊष्मा इंजन की दक्षता कदापि 1 नहीं हो सकती। समीकरण (12.20) के अनुसार, इसका तात्पर्य यह है कि ठंडे ऊष्मा भंडार की मुक्त ऊष्मा को कभी भी शून्य नहीं किया जा सकता। प्रशीतक के लिए द्वितीय नियम यह बताता है कि निष्पादन गुणांक कदापि अनंत नहीं हो सकता। समीकरण (12.21) से यह भी निष्कर्ष निकलता है कि प्रशीतक पर बाह्य कार्य (W) कभी भी शून्य नहीं हो सकता। अधोलिखित दोनों प्रकथन, इन प्रेक्षणों का एक संक्षिप्त सार है। उनमें से एक केल्विन तथा प्लैंक के द्वारा दिया गया है जिसके अनुसार, किसी आदर्श ऊष्मा इंजन की संभावना का खंडन किया गया है, तथा दूसरा क्लासियस द्वारा दिया गया है जिसके अनुसार, किसी आदर्श प्रशीतक अथवा ऊष्मा पंप की संभावना का खंडन किया गया है।

ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम

केल्विन-प्लैंक का प्रकथन

ऐसा कोई प्रक्रम संभव नहीं है जिसका एकमात्र परिणाम किसी ऊष्मा भंडार से ऊष्मा का अवशोषण करना तथा उस ऊष्मा को पूर्णतया कार्य में रूपांतरित करना हो।

क्लासियस का प्रकथन

ऐसा कोई भी प्रक्रम संभव नहीं है जिसका एकमात्र परिणाम किसी ठंडे पिंड से किसी गर्म पिंड में ऊष्मा स्थानांतरण हो।

उच्च कक्षाओं के पाठ्यक्रमों में आप इसकी उपपत्ति पढ़ेंगे कि दोनों प्रकथन पूर्णतया समतुल्य हैं।

12.12 उत्क्रमणीय व अनुत्क्रमणीय प्रक्रम

किसी ऐसे प्रक्रम की कल्पना कीजिए जिसमें कोई ऊष्मागतिकीय निकाय आरंभिक अवस्था i से अंतिम अवस्था f में पहुँचता है। प्रक्रम में निकाय परिवेश से Q ऊष्मा अवशोषित करता है तथा उस पर W कार्य संपादित करता है। क्या हम इस प्रक्रम को उलट सकते हैं तथा निकाय व परिवेश दोनों को, कहीं भी कोई अन्य प्रभाव पड़े बिना, आरंभिक अवस्था में वापस ला सकते हैं? अनुभव बताता है कि प्रकृति के अधिकांश प्रक्रमों में ऐसा होना संभव नहीं है। प्रकृति में सभी नैसर्गिक प्रक्रम अनुत्क्रमणीय हैं। इनके अनेक उदाहरण गिनाये जा सकते हैं। चूल्हे पर रखे बर्तन का आधार दूसरे भागों की अपेक्षा अधिक गरम होता है। जब बर्तन को हटाते हैं तो ऊष्मा आधार से दूसरे भागों में स्थानांतरित होती है जिससे बर्तन का ताप एकसमान हो जाता है (यथोचित समय में यह परिवेश के ताप के बराबर ठंडा हो जाता है)। इस प्रक्रम को उत्क्रमित नहीं किया जा सकता, बर्तन का कोई भाग स्वत: ठंडा होकर आधार को गर्म नहीं करेगा। यदि ऐसा होता है तो ऊष्मागतिकी के द्वितीय नियम का उल्लंघन होगा। गैस का मुक्त प्रसार अनुत्क्रमणीय होता है। वायु तथा पेट्रोल के मिश्रण में स्फुलिंग द्वारा प्रज्वलित दहन अभिक्रिया को उत्क्रमित नहीं किया जा सकता। रसोईघर में किसी गैस सिलिंडर से रिस रही भोजन पकाने की गैस पूरे कमरे में विसरित हो जाती है। विसरण प्रक्रम स्वत: उत्क्रमित नहीं होगा जिससे गैस वापस सिलिंडर में भर जाए। किसी ऊष्मा भंडार के ऊष्मीय संपर्क में आने वाले द्रव का विलोड़न संपादित हो रहे कार्य को ऊष्मा में रूपांतरित कर देगा जिससे उष्माशय की आंतरिक ऊर्जा बढ़ जाती है। प्रक्रम को पूर्णतया उत्क्रमित नहीं कर सकते, अन्यथा इसका अर्थ होगा कि ऊष्मा पूर्णतया कार्य में परिवर्तित हो गई है। यह ऊष्मागतिकी के दूसरे नियम का उल्लंघन है। अनुत्क्रमणीयता एक नियम है न कि प्रकृति में कोई अपवाद।

अनुत्क्रमणीयता मुख्यत: दो कारणों से उत्पन्न होती है : पहला, अनेक प्रक्रम (जैसे मुक्त प्रसरण या विस्फोटक रासायनिक अभिक्रिया) निकाय को असंतुलन की अवस्थाओं में ले जाते हैं; दूसरा, अनेक प्रक्रमों में घर्षण, श्यानता तथा अन्य क्षय संबंधी प्रभाव निहित होते हैं (इसके उदाहरण हैं – किसी गतिमान पिंड का रुकना जिसमें पिंड अपनी यांत्रिक ऊर्जा को फर्श व स्वयं अपनी ऊष्मा के रूप में दे देता है; द्रव में घूमते हुए ब्लेड का श्यानता के कारण रुक जाना जिसमें यह अपनी यांत्रिक ऊर्जा को द्रव की आंतरिक ऊर्जा के रूप में दे देता है)। चूंकि क्षयकारी प्रभाव सभी स्थानों पर उपस्थित रहते हैं। इन्हें कम तो किया जा सकता है पर पूर्णतया समाप्त नहीं किया जा सकता। जिन प्रक्रमों से हमारा अधिकतर सामना होता है वे सभी अनुत्क्रमणीय होते हैं।

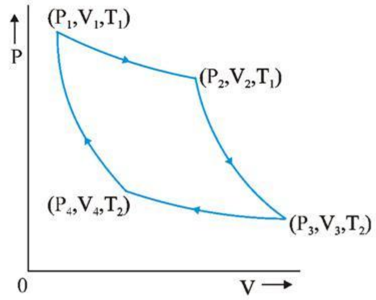
कोई ऊष्मागतिकीय प्रक्रम (अवस्था i – अवस्था f) तभी उत्क्रमणीय होता है यदि उसे इस प्रकार वापस लौटाया जा सके कि निकाय व परिवेश दोनों अपनी प्रारंभिक अवस्थाओं में वापस आ जाएँ तथा परिवेश में कहीं भी किसी भी प्रकार का अन्य परिवर्तन न हो। पूर्व विवेचना के अनुसार कोई उत्क्रमणीय प्रक्रम एक आदर्श धारणा है। कोई प्रक्रम उत्क्रमणीय तभी होता है जब वह स्थैतिककल्प होता है (परिवेश के साथ प्रत्येक चरण पर साम्य निकाय) तथा निकाय में कोई क्षयकारी प्रभाव नहीं होते हैं। उदाहरणार्थ, घर्षणहीन गतिशील पिस्टन लगे सिलिंडर भरी किसी आदर्श गैस का स्थैतिककल्प समतापीय प्रसरण उत्क्रमणीय प्रक्रम है।

उत्क्रमणीयता ऊष्मागतिकी की ऐसी मूल धारणा क्यों है? जैसा कि हम देख चुके है, ऊष्मागतिकी के महत्त्वों में से एक महत्त्व दक्षता का है जिससे ऊष्मा कार्य में रूपांतरित की जा सकती है। ऊष्मागतिकी का दूसरा नियम 100% दक्षता के आदर्श ऊष्मा इंजन की संभावना को नियम विरुद्ध बताता है। T_1 व T_2 के दो ऊष्मा भंडारों के बीच कार्य करने वाले किसी ऊष्मा इंजन की संभावित अधिकतम दक्षता कितनी होगी? यह देखा जाता है कि आदर्श उत्क्रमणीय प्रक्रमों पर आधारित ऊष्मा इंजन अधिकतम संभावित दक्षता प्राप्त करता है। अन्य दूसरे इंजनों जिनमें किसी न किसी रूप में अनुत्क्रमणीयता निहित होती है (जैसा कि व्यावहारिक इंजनों में होता है) की दक्षता इस सीमांत दक्षता से कम होती है।

12.13 कार्नो इंजन

कल्पना कीजिए कि हमारे पास ताप T_1 पर एक उष्ण ऊष्मा भंडार व ताप T_2 पर एक ठंडा ऊष्मा भंडार है। इन दोनों ऊष्मा भंडारों के बीच कार्य करने वाले किसी ऊष्मा इंजन की अधिकतम दक्षता कितनी होगी तथा सर्वाधिक दक्षता प्राप्त करने के लिए प्रक्रमों के किस चक्र को अपनाना चाहिए? फ्रेंच इंजीनियर, साडी कार्नो ने 1824 में सर्वप्रथम इस प्रश्न पर विचार किया। दिलचस्प बात यह है कि कार्नो ने इस प्रश्न का सही उत्तर पा लिया था यद्यपि ऊष्मा और ऊष्मागतिकी की मौलिक अवधारणा को तब तक दृढ़तापूर्वक स्थापित नहीं किया जा सका था।

हम यह आशा करते हैं कि दो तापों के बीच कार्य करने वाला आदर्श इंजन उत्क्रमणीय इंजन है। जैसा कि पहले अनुभागों में बताया जा चुका है, अनुत्क्रमणीयता से दक्षता को कम करने वाले क्षयकारी प्रभाव संबद्ध होते हैं। कोई प्रक्रम तभी उत्क्रमणीय होता है यदि वह स्थैतिककल्प तथा ऊर्जा-संरक्षी हो। हम यह देख चुके हैं कि वह प्रक्रम स्थैतिककल्प नहीं होता है जिसमें निकाय व ऊष्मा भंडार के बीच तापांतर पर्याप्त हो। इसका तात्पर्य यह है कि दो तापों के मध्य कार्य कर रहे किसी उत्क्रमणीय ऊष्मा इंजन में ऊष्मा का अवशोषण (गरम ऊष्मा भंडार से) समतापीय विधि द्वारा होना चाहिए तथा (अपेक्षाकृत



चित्र 12.11 किसी ऊष्मा इंजन के लिए कार्नो चक्र जिसमें कार्यकारी पदार्थ के रूप में आदर्श गैस का उपयोग होता है।

ठंडे ऊष्मा भंडार को) समतापीय विधि द्वारा ऊष्मा मुक्त होनी चाहिए। इस प्रकार, हमने उत्क्रमणीय इंजन के दो चरणों की पहचान की : ताप T_1 पर समतापीय प्रक्रम जिसमें गरम ऊष्मा भंडार से Q_1 ऊष्मा अवशोषित होती है तथा ताप T_2 पर दूसरा समतापीय प्रक्रम जिसमें ठंडे ऊष्मा भंडार को Q_2 ऊष्मा मुक्त होती है। चक्र पूरा होने के लिए इस बात की आवश्यकता है कि हम निकाय को ताप T_1 से T_2 तक ले जाएँ फिर उसे ताप T_2 से T_1 पर वापस ले जाएँ। प्रश्न यह है कि इस उद्देश्य के लिए हमें किन प्रक्रमों का उपयोग करना चाहिए जो उत्क्रमणीय हों? थोड़े चिंतन से यह पता चल जाता है कि उस उद्देश्य के लिए हम केवल उत्क्रमणीय रुद्धोष्म प्रक्रम ही अपना सकते हैं जिसमें किसी भी ऊष्मा भंडार से ऊष्मा का प्रवाह सम्मिलित नहीं होता। निकाय को एक ताप से दूसरे ताप तक ले जाने के लिए यदि हम कोई अन्य प्रक्रम अपनाते हैं जो रुद्धोष्म नहीं है, मान लीजिए समआयतनिक प्रक्रम, तो हमें ताप परिसर T_2 से T_1 में ऊष्मा भंडार की एक श्रृंखला की आवश्यकता होगी ताकि यह निश्चित किया जा सके कि हर चरण में प्रक्रम स्थैतिककल्प में है। (हम आपको पुनः याद दिलाते हैं कि किसी स्थैतिककल्प व उत्क्रमणीय प्रक्रम में निकाय व ऊष्मा भंडार के बीच बहुत तापांतर नहीं होना चाहिए)। परंतु हम यहाँ एक ऐसे उत्क्रमणीय इंजन पर विचार कर रहे हैं जो केवल दो तापों के बीच कार्य करता है। इस प्रकार, रुद्धोष्म प्रक्रमों द्वारा निकाय के ताप में T_1 से T_2 तथा इस इंजन के ताप में T_2 से T_1 का परिवर्तन लाना चाहिए।

दो तापों के मध्य कार्य करने वाला कोई उत्क्रमणीय ऊष्मा इंजन **कार्नो इंजन** कहलाता है। हमने अभी विवेचना की है कि इस इंजन में चरणों का क्रम निम्नलिखित होना चाहिए, जो चित्र 12.11 में दर्शाए अनुसार एक चक्र का निर्माण करते हैं, जिसे

कार्नो चक्र कहते हैं । हमने कार्नो इंजन का कार्यकारी पदार्थ एक आदर्श गैस लिया है ।

(a) चरण $1 \rightarrow 2$ गैस का समतापी प्रसार जिसमें गैस अवस्था (P_1, V_1, T_1) से (P_2, V_2, T_1) में पहुँच जाती है।

ताप T_1 पर ऊष्माशय से अवशोषित ऊष्मा (Q_1) का मान समीकरण (12.12) से दिया जाता है । यह गैस द्वारा परिवेश पर संपादित किए गए कार्य $W_{1\rightarrow 2}$ के बराबर होता है ।

$$W_{1\rightarrow 2} = Q_1 = \mu R T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \quad (12.23)$$

(b) चरण $2 \rightarrow 3$ (P_2, V_2, T_1) से (P_3, V_3, T_2) अवस्था में गैस का रुद्धोष्म प्रसार । समीकरण (12.16) से गैस द्वारा संपादित हुआ कार्य होगा

$$W_{2\rightarrow 3} = \frac{\mu R(T_1 - T_2)}{(\gamma - 1)} \quad (12.24)$$

(c) चरण $3 \rightarrow 4$ गैस की अवस्था (P_3, V_3, T_2) से (P_4, V_4, T_2) में समतापी संपीडन ।

ताप T_2 पर गैस द्वारा ऊष्माशय को मुक्त की गई ऊष्मा की मात्रा समीकरण (12.12) से प्राप्त होती है । यह परिवेश द्वारा गैस पर संपादित कार्य $W_{3\rightarrow 4}$ के भी बराबर होती है

$$W_{3\rightarrow 4} = Q_2 = \mu R T_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right) \quad (12.25)$$

(d) चरण $4 \rightarrow 1$ गैस की अवस्था (P_4, V_4, T_2) से (P_1, V_1, T_1) में रुद्धोष्म संपीडन। समीकरण (12.16) से गैस पर किया गया कार्य

$$W_{4\rightarrow 1} = \mu R \frac{(T_1 - T_2)}{(\gamma - 1)} \quad (12.26)$$

समीकरणों (12.23)से (12.26) के उपयोग से एक पूरे चक्र में गैस द्वारा संपादित कुल कार्य की मात्रा,

$$W = W_{1\rightarrow 2} + W_{2\rightarrow 3} - W_{3\rightarrow 4} - W_{4\rightarrow 1}$$

$$= \mu R T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) - \mu R T_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right) \quad (12.27)$$

कार्नो इंजन की दक्षता

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$= 1 - \left(\frac{T_2}{T_1}\right) \frac{\ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right)}{\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} \quad (12.28)$$

अब चूंकि चरण $2 \rightarrow 3$ एक रुद्धोष्म प्रक्रम है, इसलिए

$$T_1 V_2^{\gamma - 1} = T_2 V_3^{\gamma - 1}$$

अथवा $$\frac{V_2}{V_3} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/(\gamma - 1)} \quad (12.29)$$

इसी प्रकार, चूंकि चरण $4 \rightarrow 1$ भी एक रुद्धोष्म प्रक्रम है, इसलिए

$$T_2 V_4^{\gamma - 1} = T_1 V_1^{\gamma - 1}$$

अथवा $$\frac{V_1}{V_4} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/(\gamma - 1)} \quad (12.30)$$

समीकरणों (12.29) तथा (12.30) से,

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1} \quad (12.31)$$

समीकरण (12.31) के उपयोग से समीकरण (12.28) से η का निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है :

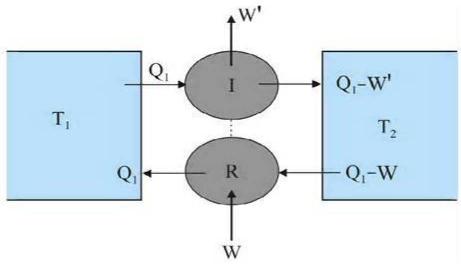
$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \text{ (कार्नो इंजन)} \quad (12.32)$$

हम जानते हैं कि कार्नो इंजन एक उत्क्रमणीय इंजन है । वास्तव में यही एकमात्र ऐसा इंजन संभव है जो भिन्न तापों के दो ऊष्मा भंडारों के मध्य कार्य करता है । चित्र 12.11 में दर्शाए कार्नो चक्र का हर चरण उत्क्रमित किया जा सकता है । यह उस प्रक्रम के समान होता है, जिसमें T_2 ताप पर ठंडे ऊष्मा भंडार से Q_2 ऊष्मा ली जाती है, निकाय पर W कार्य किया जाता है, तथा गरम ऊष्मा भंडार को Q_1 ऊष्मा स्थानांतरित कर दी जाती है । यह युक्ति एक उत्क्रमणीय प्रशीतक होगी ।

अब हम महत्वपूर्ण परिणाम सिद्ध करेंगे (जिसे कभी-कभी **कार्नो प्रमेय** कहते हैं) (a) दिए हुए गरम तथा ठंडे ऊष्माशयों के क्रमशः दो तापों T_1 तथा T_2 के बीच कार्यरत किसी भी इंजन की दक्षता कार्नो इंजन की दक्षता से अधिक नहीं हो सकती है तथा (b) कार्नो इंजन की दक्षता कार्यकारी पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर नहीं करती ।

परिणाम (a) को सिद्ध करने के लिए हम कल्पना करते हैं कि एक उत्क्रमणीय (कार्नो) इंजन R तथा एक अनुत्क्रमणीय इंजन I एक ही स्रोत (गरम ऊष्मा भंडार) तथा अभिगम (Sink) (ठंडा ऊष्मा भंडार) के बीच कार्यरत हैं। अब हम इन दोनों इंजनों को इस प्रकार संयोजित करते हैं कि I ऊष्मा इंजन की भांति तथा R प्रशीतक की भांति कार्य करें। कल्पना कीजिए

कि I स्रोत से Q_1 ऊष्मा अवशोषित करता है, W' कार्य प्रदान करता है तथा $Q_1 - W'$ ऊष्मा अभिगम को मुक्त करता है । हम ऐसा समायोजन करते हैं कि R अधिगम से Q_2 ऊष्मा लेकर तथा उस पर जो कार्य $W = Q_1 - Q_2$ किया जाना है, उसे कराकर उतनी ही ऊष्मा Q_1 स्रोत को वापस करता है । मान लीजिए कि $\eta_R < \eta_I$ है । अर्थात् यदि R इंजन की भांति कार्य करता तो वह I की अपेक्षा कम कार्य निर्गत करता। अर्थात् किसी दी गई ऊष्मा Q_1 के लिए $W < W'$ । यदि R प्रशीतक के रूप में कार्य करता, तो इसका तात्पर्य यह होता कि $Q_2 = Q_1 - W > Q_1 - W'$ । इस प्रकार, युक्तिपूर्ण संयोजित $I - R$ निकाय ठंडे ऊष्मा भंडार से $(Q_1 - W) - (Q_1 - W') = W' - W$ ऊष्मा निकालता है तथा एक चक्र में इतनी ही मात्रा का कार्य उसे सौंप देता है (इस पूरे चक्र में स्रोत या अन्यत्र कोई परिवर्तन नहीं होता)। यह ऊष्मागतिकी के द्वितीय नियम से संबंधित केल्विन-प्लैंक के प्रकथन से सर्वथा विपरीत है । इसलिए यह निश्चयपूर्वक कहना कि $\eta_I > \eta_R$ अनुचित है । अत: समान तापों के मध्य कार्यरत किसी भी इंजन की दक्षता कार्नो इंजन की दक्षता से अधिक नहीं हो सकती । इसी प्रकार के एक तर्क की रचना यह दर्शाने के लिए भी की जा सकती है कि ऐसे उत्क्रमणीय इंजन की दक्षता जिसमें एक विशेष कार्यकारी पदार्थ है, उस इंजन की दक्षता से अधिक नहीं हो सकती जिसमें कोई अन्य पदार्थ उपयोग होता है । कार्नो इंजन की अधिकतम दक्षता जो समीकरण (12.32) से दी जाती है, कार्नो चक्र की प्रक्रिया को संपादित करने वाले निकाय की प्रकृति पर निर्भर नहीं करती है । अत: हमारे लिए कार्नो इंजन की दक्षता η के परिकलन के लिए कार्यकारी पदार्थ के रूप में आदर्श गैस का उपयोग न्यायसंगत है । आदर्श गैस की अवस्था समीकरण सरल होती है जिसके कारण η का परिकलन सरल हो जाता है, किंतु η के लिए अंतिम परिणाम, समीकरण (12.32), किसी भी कार्नो इंजन के लिए सही है ।



चित्र 12.12 उत्क्रमणीय प्रशीतक (R) से संयुक्त एक अनुत्क्रमणीय इंजन (I) । यदि $W' > W$, तो इसका आशय यह हुआ कि अवशोषक से $W' - W$ ऊष्मा निकालकर उसे पूर्णत: कार्य में रूपांतरित कर दिया गया है, जो ऊष्मागतिकी के दूसरे नियम के विपरीत है ।

यह अंतिम टिप्पणी दर्शाती है कि कार्नो इंजन के लिए,

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \tag{12.33}$$

एक व्यापक संबंध है जो निकाय की प्रकृति पर निर्भर नहीं करता। यहाँ Q_1 व Q_2 कार्नो इंजन में क्रमश: गरम व ठंडे ऊष्मा भंडारों द्वारा समतापीय ढंग से अवशोषित व मुक्त की गई ऊष्माएँ हैं । किसी वास्तविक सर्वव्यापक ऊष्मागतिकीय ताप मापक्रम को परिभाषित करने के लिए हम समीकरण (12.33) का एक सूत्र के रूप में उपयोग कर सकते हैं । यह तापक्रम कार्नो चक्र में प्रयुक्त निकाय के किन्हीं विशेष गुणधर्मों पर निर्भर नहीं करता। वास्तव में, कार्यकारी पदार्थ के रूप में किसी आदर्श गैस के लिए इस ताप का मान वही है जो खंड 12.11 में उल्लेखित आदर्श गैस ताप का है ।

सारांश

1. ऊष्मागतिकी का शून्यवाँ नियम यह अभिव्यक्त करता है कि "दो निकाय जो किसी तीसरे निकाय के साथ तापीय साम्य में हैं, वे एक-दूसरे के साथ भी तापीय साम्य में होते हैं"। शून्यवाँ नियम ताप की अवधारणा का सूत्रपात करता है ।
2. निकाय की आंतरिक ऊर्जा उसके आण्विक घटकों की गतिज एवं स्थितिज ऊर्जाओं के योग के बराबर होती है । इसमें निकाय की संपूर्ण गतिज ऊर्जा सम्मिलित नहीं होती । ऊष्मा और कार्य किसी निकाय में ऊर्जा स्थानांतरण के दो रूप हैं। निकाय व उसके परिवेश के बीच तापांतर के कारण ऊर्जा का स्थानांतरण ऊष्मा के रूप में होता है । कार्य अन्य साधनों (जैसे गैस भरे सिलिंडर के पिस्टन जिससे कुछ भार संबद्ध है, को ऊपर नीचे करने में) द्वारा उत्पन्न ऊर्जा का स्थानांतरण है । इसमें तापांतर समाहित नहीं होता है ।
3. ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम ऊर्जा संरक्षण का व्यापक नियम है, जो उस निकाय में लागू होता है जिसमें परिवेश को या परिवेश से (ऊष्मा व कार्य द्वारा) ऊर्जा स्थानांतरण हो । यह बताता है कि

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$$

यहाँ ΔQ निकाय को दी गई ऊष्मा है, ΔW निकाय पर किया गया कार्य है तथा ΔU निकाय की आंतरिक ऊर्जा में परिवर्तन है ।

4. पदार्थ की विशिष्ट ऊष्मा धारिता को हम निम्नलिखित सूत्र द्वारा परिभाषित करते हैं

$$s = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

यहाँ m पदार्थ का द्रव्यमान है तथा ΔQ वह ऊष्मा है जिसके द्वारा पदार्थ के ताप में ΔT की वृद्धि हो जाती है। पदार्थ की मोलीय विशिष्ट ऊष्मा धारिता निम्नांकित सूत्र से परिभाषित की जाती है

$$C = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

μ पदार्थ के मोल की संख्या को व्यक्त करता है । किसी ठोस के लिए ऊर्जा के सम विभाजन के नियम से

$$C = 3\,R$$

जो सामान्यतया साधारण तापों पर किए जाने वाले प्रयोगों से प्राप्त परिणामों से मेल खाता है ।

कैलोरी ऊष्मा का पुराना मात्रक है । 1 कैलोरी ऊष्मा की वह मात्रा है जो 1g जल के ताप में 14.5 °C से 15.5 °C तक वृद्धि कर देती है । 1 cal = 4.186 J

5. किसी आदर्श गैस के लिए स्थिर ताप तथा स्थिर दाब पर मोलीय विशिष्ट ऊष्मा धारिताएँ निम्नलिखित संबंध का पालन करती हैं

$$C_P - C_V = R$$

यहाँ R गैस का सार्वत्रिक नियतांक है।

6. किसी ऊष्मागतिकीय निकाय की साम्यावस्था का विवरण अवस्था चरों द्वारा होता है। किसी अवस्था चर का मान केवल उसकी किसी विशेष अवस्था पर निर्भर करता है न कि उस पथ पर जिससे यह अवस्था प्राप्त होती है। अवस्था चरों के उदाहरण हैं : दाब (P), आयतन (V), ताप (T), तथा द्रव्यमान (m)। ऊष्मा और कार्य अवस्था चर नहीं हैं। कोई अवस्था समीकरण (जैसे आदर्श गैस समीकरण $PV = \mu RT$) विभिन्न अवस्था चरों के मध्य एक संबंध को व्यक्त करता है।

7. कोई स्थैतिककल्प प्रक्रम अत्यंत धीमी गति से संपन्न होने वाला प्रक्रम है जिसमें निकाय परिवेश के साथ पूरे समय तापीय व यांत्रिक साम्य में रहता हैं। स्थैतिककल्प प्रक्रम में परिवेश के दाब व ताप तथा निकाय के दाब व ताप में अनंत सूक्ष्म अंतर हो सकता है।

8. किसी आदर्श गैस के ताप T पर आयतन V_1 से V_2 तक होने वाले किसी समतापीय प्रसार में अवशोषित ऊष्मा (Q) का मान गैस द्वारा किए गए कार्य (W) के बराबर होता है। प्रत्येक का मान निम्नलिखित है :

$$Q = W = \mu RT \ \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

9. किसी आदर्श गैस के रुद्धोष्म प्रक्रम में

$$PV^{\gamma} = \text{नियतांक}$$

$$\text{जहाँ } \gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

किसी आदर्श गैस द्वारा अवस्था (P_1, V_1, T_1) से अवस्था (P_2, V_2, T_2) में रुद्धोष्म प्रक्रम से परिवर्तन में संपादित कार्य है :

$$W = \frac{\mu R(T_1 - T_2)}{\gamma - 1}$$

10. ऊष्मा इंजन एक ऐसी युक्ति है जिसमें निकाय एक चक्रीय प्रक्रम में चलता है जिसके परिणामस्वरूप ऊष्मा कार्य में परिवर्तित होती है। यदि एक चक्र में स्रोत से अवशोषित ऊष्मा Q_1, अभिगम को मुक्त की गई ऊष्मा Q_2 तथा W निर्गत कार्य है, तो इंजन की दक्षता

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

11. प्रशीतक या ऊष्मा पंप में निकाय ठंडे ऊष्माशय से Q_2 ऊष्मा ग्रहण करता है तथा Q_1 मात्रा गरम ऊष्मा भंडार को मुक्त करता है। इस प्रक्रिया में निकाय पर W कार्य संपन्न होता है। प्रशीतक का निष्पादन गुणांक निम्न प्रकार से परिभाषित होता है,

$$\alpha = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$$

12. ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम कुछ उन प्रक्रमों की स्वीकृति नहीं देता जो ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम के अनुकूल हैं। इसके दो प्रकथन इस प्रकार हैं :

केल्विन-प्लैंक का प्रकथन

ऐसा कोई प्रक्रम संभव नहीं है जिसका मात्र परिणाम केवल किसी ऊष्मा भंडार से ऊष्मा का अवशोषण करके उसे पूर्णतया कार्य में रूपांतरित करना हो।

क्लॉसियस का प्रकथन

ऐसा कोई प्रक्रम संभव नहीं है जिसका मात्र परिणाम ऊष्मा का किसी ठंडे पिंड से अपेक्षाकृत गरम पिंड में स्थानांतरण हो।

इसे सरल ढंग से कहा जाए तो द्वितीय नियम यह बताता है कि किसी भी ऊष्मा इंजन की दक्षता $\eta = 1$ नहीं हो सकती अथवा किसी प्रशीतक का निष्पादन गुणांक α अनंत के बराबर नहीं हो सकता।

13. कोई प्रक्रम उत्क्रमणीय होता है यदि उसे इस प्रकार उत्क्रमित किया जाए कि निकाय व परिवेश दोनों अपनी प्रारंभिक अवस्थाओं में वापस पहुँच जाएँ और परिवेश में कहीं भी कोई परिवर्तन न हो। प्रकृति के नैसर्गिक प्रक्रम अनुत्क्रमणीय होते हैं। आदर्शीकृत उत्क्रमणीय प्रक्रम स्थैतिककल्प प्रक्रम होता है जिसमें कोई भी क्षयकारी घटक; जैसे – घर्षण, श्यानता आदि विद्यमान नहीं रहते।

14. किन्हीं दो तापों T_1 (स्रोत) तथा T_2 (अभिगम) के मध्य कार्य करने वाला कार्नो इंजन उत्क्रमणीय इंजन है। दो रुद्धोष्म प्रक्रमों से संयुक्त दो समतापी प्रक्रम कार्नो चक्र का निर्माण करते हैं। कार्नो इंजन की दक्षता निम्नलिखित सूत्र से व्यक्त की जाती है :

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \qquad \text{(कार्नो इंजन)}$$

किन्हीं दो तापों के मध्य कार्य करने वाले इंजन की दक्षता कार्नो इंजन की दक्षता से अधिक नहीं हो सकती।

15. यदि $Q > 0$, निकाय को ऊष्मा दी गई।
यदि $Q < 0$, निकाय से ऊष्मा निकाली गई।
यदि $W > 0$, निकाय द्वारा कार्य किया गया।
यदि $W < 0$, निकाय पर कार्य किया गया।

राशि	प्रतीक	विमाएँ	मात्रक	टिप्पणी
किसी निकाय को प्रदत्त ऊष्मा	ΔQ	$[ML^2T^{-2}]$	J	Q अवस्था चर नहीं है।
आंतरिक ऊर्जा	U	$[ML^2T^{-2}]$	J	अवस्था चर
कार्य	W	$[ML^2T^{-2}]$	J	W अवस्था चर नहीं है।
विशिष्ट ऊष्मा	s	$[L^2T^{-2}K^{-1}]$	$J\,kg^{-1}\,K^{-1}$	
ऊष्मा इंजन की दक्षता	η	विमाहीन	–	
प्रशीतक का निष्पादन गुणांक	α	विमाहीन	–	

विचारणीय विषय

1. किसी पिंड का ताप उसकी माध्य आंतरिक ऊर्जा से संबंधित है न कि उसके द्रव्यमान केंद्र की गतिज ऊर्जा से। बंदूक से दागी गई किसी गोली का उच्च ताप उसकी अधिक चाल के कारण नहीं होता ।
2. ऊष्मागतिकी में साम्य उस परिस्थिति की ओर निर्देश करता है जब निकाय की ऊष्मागतिकीय अवस्था का वर्णन करने वाले स्थूल चर, समय पर निर्भर नहीं करते । यांत्रिकी में किसी निकाय की साम्यावस्था से अभिप्राय है कि निकाय पर कार्य करने वाले नेट बल तथा बल आघूर्ण दोनों शून्य होते हैं ।
3. ऊष्मागतिकीय साम्य में निकाय के सूक्ष्म संघटक साम्यावस्था में नहीं होते (यांत्रिकी के प्रसंग में)।
4. ऊष्माधारिता, व्यापक रूप में उस प्रक्रम पर निर्भर करती है जिससे निकाय तब गुजरता है जब वह ऊष्मा ग्रहण करता है ।
5. समतापीय स्थैतिककल्प प्रक्रमों में, निकाय द्वारा ऊष्मा अवशोषित या निर्गत होती है यद्यपि हर चरण में गैस का ताप वही होता है जो परिवेशीय ऊष्मा भंडार होता है । निकाय तथा ऊष्मा भंडार के मध्य अत्यंत सूक्ष्म तापांतर के कारण ऐसा संभव हो पाता है।

अभ्यास

12.1 कोई गीज़र 3.0 लीटर प्रति मिनट की दर से बहते हुए जल को 27 °C से 77 °C तक गर्म करता है । यदि गीज़र का परिचालन गैस बर्नर द्वारा किया जाए तो ईंधन के व्यय की क्या दर होगी ? बर्नर के ईंधन की दहन-ऊष्मा 4.0×10^4 J g^{-1} है ?

12.2 स्थिर दाब पर 2.0×10^{-2} kg नाइट्रोजन (कमरे के ताप पर) के ताप में 45 °C वृद्धि करने के लिए कितनी ऊष्मा की आपूर्ति की जानी चाहिए ? (N_2 का अणुभार = 28; R = 8.3 J mol^{-1} K^{-1}) ।

12.3 व्याख्या कीजिए कि ऐसा क्यों होता है :

(a) भिन्न-भिन्न तापों T_1 व T_2 के दो पिण्डों को यदि ऊष्मीय संपर्क में लाया जाए तो यह आवश्यक नहीं कि उनका अंतिम ताप $(T_1 + T_2)/2$ ही हो।

(b) रासायनिक या नाभिकीय संयत्रों में शीतलक (अर्थात् द्रव जो संयत्र के भिन्न-भिन्न भागों को अधिक गर्म होने से रोकता है) की विशिष्ट ऊष्मा अधिक होनी चाहिए।

(c) कार को चलाते-चलाते उसके टायरों में वायुदाब बढ़ जाता है।

(d) किसी बंदरगाह के समीप के शहर की जलवायु, समान अक्षांश के किसी रेगिस्तानी शहर की जलवायु से अधिक शीतोष्ण होती है।

12.4 गतिशील पिस्टन लगे किसी सिलिंडर में मानक ताप व दाब पर 3 मोल हाइड्रोजन भरी है । सिलिंडर की दीवारें ऊष्मारोधी पदार्थ की बनी हैं तथा पिस्टन को उस पर बालू की परत लगाकर ऊष्मारोधी बनाया गया है । यदि गैस को उसके आरंभिक आयतन के आधे आयतन तक संपीडित किया जाए तो गैस का दाब कितना बढ़ेगा ?

12.5 रुद्धोष्म विधि द्वारा किसी गैस की अवस्था परिवर्तन करते समय उसकी एक साम्यावस्था A से दूसरी साम्यावस्था B तक ले जाने में निकाय पर 22.3 J कार्य किया जाता है। यदि गैस को दूसरी प्रक्रिया द्वारा अवस्था A से अवस्था B में लाने में निकाय द्वारा अवशोषित नेट ऊष्मा 9.35 cal है तो बाद के प्रकरण में निकाय द्वारा किया गया नेट कार्य कितना है? (1 cal = 4.19 J)।

12.6 समान धारिता वाले दो सिलिंडर A तथा B एक-दूसरे से स्टॉपकॉक के द्वारा जुड़े हैं। A में मानक ताप व दाब पर गैस भरी है जबकि B पूर्णत: निर्वातित है। स्टॉपकॉक यकायक खोल दी जाती है । निम्नलिखित का उत्तर दीजिए :

(a) सिलिंडर A तथा B में अंतिम दाब क्या होगा ?

(b) गैस की आंतरिक ऊर्जा में कितना परिवर्तन होगा ?

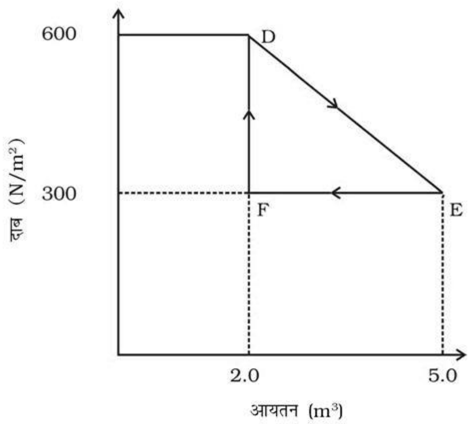
(c) गैस के ताप में क्या परिवर्तन होगा ?

(d) क्या निकाय की माध्यमिक अवस्थाएँ (अंतिम साम्यावस्था प्राप्त करने के पूर्व) इसके P-V-T पृष्ठ पर होंगी ?

12.7 एक वाष्प इंजन अपने बॉयलर से प्रति मिनट 3.6×10^9 J ऊर्जा प्रदान करता है जो प्रति मिनट 5.4×10^8 J कार्य देता है। इंजन की दक्षता कितनी है? प्रति मिनट कितनी ऊष्मा अपशिष्ट होगी?

12.8 एक हीटर किसी निकाय को 100 W की दर से ऊष्मा प्रदान करता है। यदि निकाय 75 J s^{-1} की दर से कार्य करता है, तो आंतरिक ऊर्जा की वृद्धि किस दर से होगी?

12.9 किसी ऊष्मागतिकीय निकाय को मूल अवस्था से मध्यवर्ती अवस्था तक चित्र (12.13) में दर्शाये अनुसार एक रेखीय प्रक्रम द्वारा ले जाया गया है।



चित्र 12.13

एक समदाबी प्रक्रम द्वारा इसके आयतन को E से F तक ले जाकर मूल मान तक कम कर देते हैं। गैस द्वारा D से E तथा वहाँ से F तक कुल किए गए कार्य का आकलन कीजिए।

12.10 खाद्य पदार्थ को एक प्रशीतक के अंदर रखने पर वह उसे 9°C पर बनाए रखता है। यदि कमरे का ताप 36°C है तो प्रशीतक के निष्पादन गुणांक का आकलन कीजिए।

अध्याय 13

अणुगति सिद्धांत

13.1 भूमिका

बॉयल ने 1661 में एक नियम की खोज की, जिसे उनके नाम से जाना जाता है। बॉयल, न्यूटन एवं अन्य कई वैज्ञानिकों ने गैसों के व्यवहार को यह मानकर समझाने की चेष्टा की कि गैसें अत्यंत सूक्ष्म परमाण्वीय कणों से बनी हैं। वास्तविक परमाणु सिद्धांत तो इसके 150 से भी अधिक वर्ष बाद ही स्थापित हो पाया। अणुगति सिद्धांत इस धारणा के आधार पर गैसों के व्यवहार की व्याख्या करता है कि गैसों में अत्यंत तीव्र गति से गतिमान परमाणु अथवा अणु होते हैं। यह संभव भी है, क्योंकि ठोसों तथा द्रवों के परमाणुओं के बीच अंतरापरमाणुक बल, जो कि लघु परासी बल है, एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है जबकि गैसों में इस बल को उपेक्षणीय माना जा सकता है। अणुगति सिद्धांत, 19वीं शताब्दी में, मैक्सवेल, बोल्ट्ज़मान और अन्य वैज्ञानिकों द्वारा विकसित किया गया था। यह असाधारण रूप से सफल सिद्धांत रहा है। यह दाब एवं ताप की एक आण्विक व्याख्या प्रस्तुत करता है तथा आवोगाद्रो की परिकल्पना और गैस नियमों के अनुरूप है। यह बहुत सी गैसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिता की ठीक-ठीक व्याख्या करता है। यह श्यानता, चालकता, विसरण जैसे गैसों के मापनीय गुणों को आण्विक प्राचलों से जोड़ता है और अणुओं की आमापों एवं द्रव्यमानों का आकलन संभव बनाता है। इस अध्याय में अणुगति सिद्धांत का आरंभिक ज्ञान दिया गया है।

13.2 द्रव्य की आण्विक प्रकृति

बीसवीं शताब्दी के महान वैज्ञानिकों में एक रिचर्ड फीनमेन, इस खोज को कि 'द्रव्य परमाणुओं से बना है' अत्यंत महत्वपूर्ण मानते हैं। यदि हम विवेक से काम नहीं लेंगे, तो (नाभिकीय विध्वंस के कारण) मानवता का विनाश हो सकता है, या फिर वह (पर्यावरणीय विपदाओं के कारण) विलुप्त हो सकती है। यदि वैसा होता है और संपूर्ण वैज्ञानिक ज्ञान के नष्ट होने की स्थिति उत्पन्न हो जाती है तो फीनमेन विश्व की अगली पीढ़ी के प्राणियों को परमाणु परिकल्पना संप्रेषित करना चाहेंगे। परमाणु परिकल्पना : सभी वस्तुएँ परमाणुओं से बनी हैं, जो अनवरत

प्राचीन भारत एवं यूनान में परमाण्वीय परिकल्पना

यद्यपि, आधुनिक विज्ञान से परमाण्वीय दृष्टिकोण का परिचय कराने का श्रेय जॉन डाल्टन को दिया जाता है, तथापि, प्राचीन भारत और यूनान के विद्वानों ने बहुत पहले ही परमाणुओं और अणुओं के अस्तित्व का अनुमान लगा लिया था। भारत में वैशेषिक दर्शन, जिसके प्रणेता कणाद थे (छठी शताब्दी ई.पू.), में परमाण्वीय प्रारूप का विस्तृत विकास हुआ । उन्होंने परमाणुओं को अविभाज्य, सूक्ष्म तथा द्रव्य का अविभाज्य अंश माना । यह भी तर्क दिया गया कि यदि द्रव्य को विभाजित करने के क्रम का कोई अन्त न हो तो किसी सरसों के दाने तथा मेरु पर्वत में कोई अंतर नहीं रहेगा । चार प्रकार के परमाणुओं (संस्कृत में सूक्ष्मतम कण को **परमाणु** कहते हैं) की कल्पना की गई जिनकी अपनी अभिलाक्षणिक संहति तथा अन्य विशेषताएँ थीं जो इस प्रकार हैं : भूमि (पृथ्वी), अप् (जल), तेज (अग्नि) तथा वायु (हवा) । उन्होंने आकाश (अंतरिक्ष) को सतत् तथा अक्रिय माना और यह बताया कि इसकी कोई परमाण्वीय संरचना नहीं है । परमाणु संयोग करके विभिन्न अणुओं का निर्माण करते हैं (जैसे दो परमाणु संयोग करके एक द्विपरमाणुक अणु 'द्वैणुक', तीन परमाणुओं के संयोग से 'त्रसरेणु' अथवा त्रिपरमाणुक अणु बनाते हैं), इनके गुण संघटक अणुओं की प्रकृति एवं अनुपात पर निर्भर करते हैं । अनुमानों द्वारा अथवा उन विधियों द्वारा जो हमें ज्ञात नहीं हैं, उन्होंने परमाणुओं के आकार का आकलन भी किया । इन आकलनों में विविधता है । ललित विस्तार - बुद्ध की एक प्रसिद्ध जीवनी जिसे मुख्य रूप से ईसा पूर्व द्वितीय शताब्दी में लिखा गया, में परमाणु का आकार 10^{-10} m की कोटि का बताया गया है । यह आकलन परमाणु के आकार के आधुनिक आकलनों के निकट है ।

पुरातन ग्रीस में, डेमोक्रिटस (चतुर्थ शताब्दी ई.पू.) को उनकी परमाण्वीय परिकल्पना के लिए सर्वश्रेष्ठ माना जाता है। ग्रीक भाषा में 'Atom' शब्द का अर्थ है 'अविभाज्य' । उनके अनुसार परमाणु एक दूसरे से भौतिक रूप में, आकृति में, आकार में तथा अन्य गुणों में भिन्न होते हैं तथा इसी के परिणामस्वरूप उनके संयोग द्वारा निर्मित पदार्थो के भिन्न-भिन्न गुण होते हैं। उनके विचारों के अनुसार जल के अणु चिकने तथा गोल होते हैं तथा वे एक दूसरे के साथ जुड़ने योग्य नहीं होते, यही कारण है कि जल आसानी से प्रवाहित होने लगता है। भूमि के परमाणु खुरदरे तथा काँटेदार होते हैं जिसके कारण वे एक दूसरे को जकड़े रहते हैं तथा कठोर पदार्थ निर्मित करते हैं । उनके विचार से अग्नि के परमाणु कँटीले होते हैं जिसके कारण वे पीड़ादायक जलन उत्पन्न करते हैं। ये धारणाएँ चित्ताकर्षक होते हुए भी, और आगे विकसित न हो सकीं। इसका कदाचित यह कारण हो सकता है कि ये विचार उन दार्शनिकों की अंतर्दर्शी कल्पनाएं एवं अनुमान मात्र थे, जिनका न तो परीक्षण किया गया था और न ही मात्रात्मक प्रयोगों (जो कि आधुनिक विज्ञान का प्रमाण-चिह्न हैं) द्वारा संशोधन ।

गतिमान अत्यंत सूक्ष्म कण हैं, बीच में अल्प दूरी होने पर ये एक दूसरे को आकर्षित करते हैं पर एक दूसरे में निष्पीडित किए जाने पर प्रतिकर्षित करने लगते हैं।

यह चिंतन कि द्रव्य सतत नहीं हो सकता, कई स्थानों और संस्कृतियों में विद्यमान था। भारत में कणाद और यूनान में डेमोक्रिटस ने यह सुझाव दिया था कि द्रव्य अविभाज्य अवयवों का बना हो सकता है। प्राय: वैज्ञानिक आण्विक सिद्धांत की खोज का श्रेय डाल्टन को देते हैं। तत्वों के संयोजन द्वारा यौगिक बनने की प्रक्रिया में पालन किए जाने वाले निश्चित अनुपात और बहुगुणक अनुपात के नियमों की व्याख्या करने के लिए डाल्टन ने यह सिद्धांत प्रस्तावित किया था। पहला नियम बताता है कि किसी यौगिक में अवयवों के द्रव्यमानों का अनुपात नियत रहता है। दूसरे नियम का कथन है कि जब दो तत्व मिलकर दो या अधिक यौगिक बनाते हैं तो एक तत्व के निश्चित द्रव्यमान से संयोजित होने वाले दूसरे तत्व के द्रव्यमानों में एक सरल पूर्णांकीय अनुपात होता है।

इन नियमों की व्याख्या करने के लिए, लगभग 200 वर्ष पूर्व डाल्टन ने सुझाया कि किसी तत्व के सूक्ष्मतम अवयव परमाणु हैं। एक तत्व के सभी परमाणु सर्वसम होते हैं पर ये दूसरे तत्वों के परमाणुओं से भिन्न होते हैं। अल्प संख्या में तत्वों के परमाणु संयोग करके यौगिक का अणु बनाते हैं। 19वीं शताब्दी के आरंभ में दिए गए गै-लुसैक के नियम के अनुसार: जब गैसें रासायनिक रूप से संयोजन करके कोई अन्य गैस बनाती हैं, तो उनके आयतन लघु पूर्णांकों के अनुपात में होते हैं। आवोगाद्रो का नियम (या परिकल्पना) बताता है कि समान ताप और दाब पर गैसों के समान आयतनों में अणुओं की संख्या समान होती है। आवोगाद्रो नियम को डाल्टन के सिद्धांत से जोड़ने पर गै-लुसैक के नियम की व्याख्या की जा सकती है। क्योंकि, तत्व प्राय: अणुओं के रूप में होते हैं, डाल्टन के परमाणु सिद्धांत को द्रव्य का आण्विक सिद्धांत भी कहा जा सकता है। इस सिद्धांत को अब वैज्ञानिकों द्वारा मान्यता है। तथापि, उन्नीसवीं शताब्दी के अंत तक भी ऐसे कई प्रसिद्ध वैज्ञानिक थे जो परमाणु सिद्धांत में विश्वास नहीं करते थे।

आधुनिक काल में, बहुत से प्रेक्षणों से, अब हम यह जानते

हैं कि पदार्थ अणुओं (एक या अधिक परमाणुओं से बने) से मिलकर बना होता है। इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शी एवं क्रमवीक्षण सुरंगक सूक्ष्मदर्शी की सहायता से अब हम उनको देख सकते हैं। परमाणु का आमाप लगभग एक ऐंग्स्ट्रॉम (1Å) (10^{-10}m) है। ठोसों में, जहाँ कण कसकर एक दूसरे से जुड़े हैं, परमाणुओं के बीच कुछ ऐंग्स्ट्रॉम (2 Å) की दूरी है। द्रवों में भी परमाणुओं के बीच इतनी ही दूरी है। द्रवों में परमाणु एक दूसरे के साथ उतनी दृढ़ता से नहीं बँधे होते जितने ठोसों में, और, इसलिए इधर-उधर गति कर सकते हैं। इसीलिए, द्रवों में प्रवाह होता है। गैसों में अंतरपरमाणुक दूरी दसों एंग्स्ट्रॉम में होती है। वह औसत दूरी जो कोई अणु बिना संघट्ट किए चल सकता है उसकी **औसत मुक्त पथ** कहलाती है। गैसों में औसत मुक्त पथ हजारों एंग्स्ट्रॉम की कोटि का होता है। अत: गैसों में परमाणु अत्यधिक स्वतंत्र होते हैं और बड़ी-बड़ी दूरियों तक बिना संघट्ट किए जा सकते हैं। यदि बंद करके न रखा जाए, तो गैसें विसरित हो जाती हैं। ठोसों और द्रवों में पास-पास होने के कारण परमाणुओं के बीच के अंतर परमाणुक बल महत्वपूर्ण हो जाते हैं। ये बल अधिक दूरियों पर आकर्षण और अल्प दूरी पर प्रतिकर्षण बल होते हैं। जब परमाणु एक दूसरे से कुछ एंग्स्ट्रॉम की दूरी पर होते हैं तो वे एक दूसरे को आकर्षित करते हैं पर बहुत पास लाए जाने पर प्रतिकर्षित करने लगते हैं। गैस का स्थैतिक दिखाई पड़ना भ्रामक है। गैस सक्रियता से भरपूर है और इनका संतुलन गतिक संतुलन है। गतिक संतुलन में अणु एक दूसरे से संघट्ट करते हैं और संघट्ट की अवधि में उनकी चालों में परिवर्तन होता है। केवल औसत गुण नियत रहते हैं।

परमाणु सिद्धांत हमारी खोजों का अंत नहीं है बल्कि यह तो इसका एक आरंभ है। अब हम जानते हैं कि परमाणु अविभाज्य या मूल कण नहीं हैं। उनमें एक नाभिक और इलेक्ट्रॉन होते हैं। नाभिक स्वयं प्रोटॉनों और न्यूट्रॉनों से बने होते हैं। यही नहीं प्रोटॉन तथा न्यूट्रॉन क्वार्कों से मिलकर बने होते हैं। हो सकता है कि क्वार्क भी इस कहानी का अंत न हों। यह भी हो सकता है कि स्ट्रिंग (तंतु) जैसी कोई प्राथमिक सत्ता हो। प्रकृति हमारे लिए सदैव ही विलक्षण भरी है, पर, सत्य की खोज आनंददायक होती है और हर आविष्कार में अपना सौंदर्य होता है। इस अध्याय में हम अपना अध्ययन गैसों के (और थोड़ा बहुत ठोसों के) व्यवहार तक ही सीमित रखेंगे। इसके लिए हम उन्हें अनवरत गति करते गतिमान कणों का समूह मानेंगे।

13.3 गैसों का व्यवहार

ठोसों एवं द्रवों की तुलना में गैसों के गुणों को समझना आसान है। यह मुख्यत: इस कारण होता है, क्योंकि, गैस में अणु एक दूसरे से दूर-दूर होते हैं और दो अणुओं के संघट्ट की स्थिति को छोड़कर उनके बीच पारस्परिक अन्योन्य क्रियाएँ उपेक्षणीय होती हैं जैसे निम्न दाब व उनके द्रवित (या घनीभूत) होने के तापों की अपेक्षा अत्यधिक उच्च ताप पर अपने ताप, दाब और आयतन में लगभग निम्नलिखित संबंध दर्शाती हैं (देखिए अध्याय 11)

$$PV = KT \tag{13.1}$$

यह संबंध गैस के दिए गए नमूने के लिए है। यहाँ T केल्विन (या परम) पैमाने पर ताप है, K दिए गए नमूने के लिए नियतांक है परंतु आयतन के साथ परिवर्तित होता है यदि अब हम परमाणु या अणु की धारणा लागू करें तो, K दिए गए नमूने में अणुओं की संख्या N के अनुक्रमानुपाती है। हम लिख सकते हैं, $K = N k$। प्रयोग हमें बताते हैं कि k का मान सभी गैसों के लिए समान है। इसको बोल्ट्समान नियतांक कहा जाता है और k_B द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है।

जॉन डाल्टन
(1766-1844)

जॉन डाल्टन (1766-1844)

वह एक अंग्रेज रसायनज्ञ थे। जब अलग-अलग तरह के परमाणु संयोजित होते हैं तो वे कुछ सरल नियमों का पालन करते हैं। डाल्टन का परमाणु सिद्धांत इन नियमों की सरल व्याख्या करता है। डाल्टन ने वर्णांधता संबंधी एक सिद्धांत भी प्रस्तुत किया।

एमेदियो आवोगाद्रो (1776 – 1856)

उन्होंने एक अत्यंत बुद्धिमत्तापूर्ण अनुमान लगाया कि समान ताप और दाब पर सभी गैसों के समान आयतनों में अणुओं की संख्या समान होती है। इससे गैसों की संयोजन प्रक्रिया को एक सरल ढंग से समझने में सहायता मिली। यह कथन अब आवोगाद्रो की परिकल्पना (या नियम) कहलाता है। उन्होंने यह भी प्रस्तावित किया कि हाइड्रोजन, ऑक्सीजन, नाइट्रोजन जैसी गैसों के सूक्ष्मतम संघटक कण परमाणु नहीं बल्कि द्विपरमाणुक अणु हैं।

एमेदियो आवोगाद्रो
(1776-1856)

$$\because \frac{P_1V_1}{N_1T_1} = \frac{P_2V_2}{N_2T_2} = \text{नियतांक} = k_B \qquad (13.2)$$

यदि P, V एवं T समान हों तो N भी सभी गैसों के लिए समान होगा। यही आवोगाद्रो परिकल्पना है कि समान ताप एवं दाब पर सभी गैसों के प्रति एकांक आयतन में अणुओं की संख्या समान होती है। किसी गैस के 22.4 लीटर आयतन में यह संख्या 6.02×10^{23} है। इस संख्या को आवोगाद्रो संख्या कहा जाता है और संकेत N_A द्वारा चिह्नित किया जाता है। किसी गैस के 22.4 लीटर आयतन का STP (मानक ताप = 273K एवं मानक दाब = 1 एटमौस्फियर) पर द्रव्यमान उस गैस के ग्राम में व्यक्त अणु द्रव्यमान के बराबर है। पदार्थ की यह मात्रा मोल (mole) कहलाती है (अधिक परिशुद्ध परिभाषा के लिए अध्याय 2 देखिए)। आवोगाद्रो ने, रासायनिक अभिक्रियाओं के अध्ययन के आधार पर यह अनुमान लगा लिया था कि समान ताप और दाब पर गैसों के समान आयतन में अणुओं की संख्या समान होगी। अणुगति सिद्धांत इस परिकल्पना को न्यायसंगत ठहराता है।

आदर्श गैस समीकरण को हम इस प्रकार लिख सकते हैं,

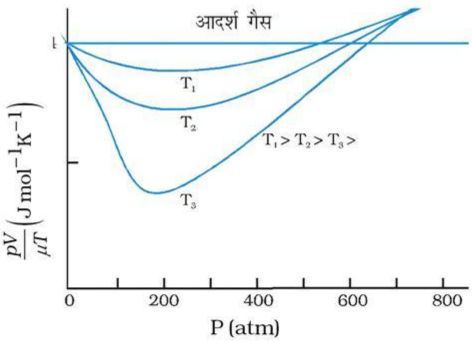
$$PV = \mu RT \qquad (13.3)$$

जहाँ μ मोलों की संख्या है एवं $R = N_A k_B$ एक सार्वत्रिक नियतांक है। ताप T, परम ताप है। परम ताप के लिए केल्विन पैमाना चुनें, तो $R = 8.314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1}$। यहाँ

$$\mu = \frac{M}{M_0} = \frac{N}{N_A} \qquad (13.4)$$

जहाँ, M गैस का द्रव्यमान है जिसमें N अणु हैं, M_0 मोलर द्रव्यमान है एवं N_A आवोगाद्रो संख्या है। समीकरण (13.4) का उपयोग करके समीकरण (13.3) को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं :

$$PV = k_B NT \quad \text{अथवा} \quad P = k_B nT$$



चित्र 13.1 *निम्न दाब और उच्च तापों पर वास्तविक गैसों का व्यवहार आदर्श गैसों के सदृश होने लगता है।*

जहाँ n संख्या घनत्व, अर्थात् प्रति एकांक आयतन में अणुओं की संख्या है। k_B उपरिवर्णित बोल्ट्ज़मान नियतांक हैं। SI मात्रकों में इसका मान $1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ है।

समीकरण (13.3) का दूसरा उपयोगी रूप है,

$$P = \frac{\rho RT}{M_0} \qquad (13.5)$$

जहाँ ρ गैस का द्रव्यमान घनत्व है।

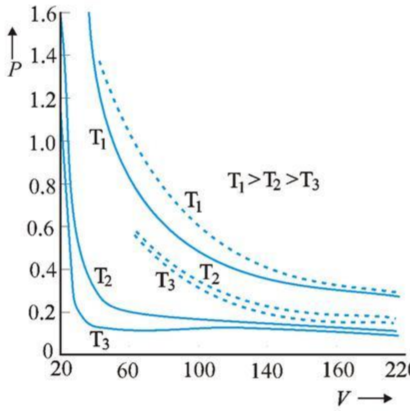
कोई गैस, जो समीकरण (13.3) का, सभी तापों और दाबों पर पूर्णत: पालन करती है **आदर्श गैस** कहलाती है। अत: आदर्श गैस किसी गैस का सरल सैद्धांतिक निदर्श है। कोई भी वास्तविक गैस सही अर्थों में आदर्श गैस नहीं होती। चित्र 13.1 में तीन भिन्न तापों पर किसी वास्तविक गैस का आदर्श गैस से विचलन दर्शाया गया है। ध्यान दीजिए, निम्न दाबों और उच्च तापों पर सभी वक्र आदर्श गैस व्यवहार के सदृश होने लगते हैं।

निम्न दाबों और उच्च तापों पर अणु दूर-दूर होते हैं और उनके बीच की आण्विक अन्योन्य क्रियाएँ उपेक्षणीय होती हैं। अन्योन्य क्रियाओं की अनुपस्थिति में गैस एक आदर्श गैस की तरह व्यवहार करती है।

समीकरण 13.3 में यदि हम μ एवं T को निश्चित कर दें, तो,

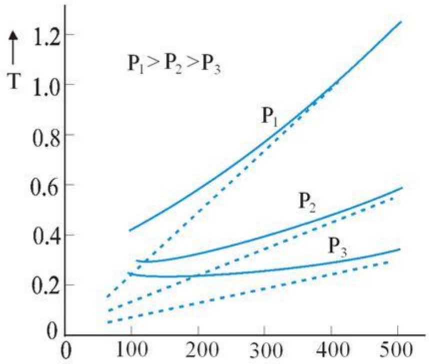
$$PV = \text{नियतांक} \qquad (13.6)$$

अर्थात्, नियत ताप पर, गैस के किसी दिए गए द्रव्यमान का दाब उसके आयतन के व्युत्क्रमानुपाती होता है। यही प्रसिद्ध



चित्र 13.2 *भाप के लिए, तीन भिन्न तापों पर प्रायोगिक P-V वक्रों (ठोस रेखाएँ) की बॉयल के नियम (बिंदुकित रेखाएँ) से तुलना। P का मान 22 atm के मात्रकों में है और V का मान 0.09 लीटर के मात्रकों में है।*

बॉयल का नियम है। चित्र 13.2 में प्रायोगिक *P-V* वक्र एवं बॉयल के नियमानुसार भविष्यवाची सैद्धांतिक वक्र, तुलना के लिए एक साथ दर्शाये गए हैं। एक बार फिर आप देख सकते हैं कि निम्न दाब और उच्च ताप पर प्रायोगिक एवं सैद्धांतिक वक्रों में संगति स्पष्ट दृष्टिगोचर होता है। अब, यदि आप P को नियत रखें तो समीकरण (13.1) दर्शाती है कि $V \propto T$ अर्थात्, नियत दाब पर किसी दी गई गैस का आयतन उसके परम ताप T के अनुक्रमानुपाती होता है **(चार्ल्स का नियम)**। चित्र 13.3 देखिए।



चित्र 13.3 *तीन भिन्न दाबों के लिए CO_2 के प्रायोगिक T-V वक्रों की (पूर्ण रेखाओं द्वारा प्रदर्शित) चार्ल्स नियमानुसार प्राप्त सैद्धांतिक वक्रों से (बिंदुकित रेखाओं द्वारा प्रदर्शित) तुलना। T, 300 K के मात्रकों में एवं V, 0.13 लीटर के मात्रकों में है।*

अंत में, हम एक बर्तन में रखे गए, परस्पर अन्योन्य क्रियाएँ न करने वाली आदर्श गैसों के मिश्रण पर विचार करते हैं, जिसमें μ_1 मोल गैस-1 के, μ_2 मोल गैस-2 के और इसी प्रकार अन्य गैसों के विभिन्न मोल हैं। बर्तन का आयतन V है, गैस का परम ताप T एवं दाब P है। मिश्रण की अवस्था का समीकरण लिखें तो,

$$PV = (\mu_1 + \mu_2 + \ldots)\,RT \qquad (13.7)$$

$$\text{अर्थात्}\ P = \mu_1 \frac{RT}{V} + \mu_2 \frac{RT}{V} + \ldots \qquad (13.8)$$

$$= P_1 + P_2 + \ldots \qquad (13.9)$$

स्पष्टत:, $P_1 = \mu_1 RT/V$ वह दाब है जो ताप और आयतन की समान अवस्थाओं में अन्य सभी गैसों की अनुपस्थिति में केवल गैस-1 के कारण होता। इस दाब को गैस का आंशिक दाब कहते हैं। अत: आदर्श गैसों के किसी मिश्रण का कुल दाब मिश्रण में विद्यमान गैसों के आंशिक दाबों के योग के बराबर होता है। यह डाल्टन का आंशिक दाबों का नियम है।

अब हम कुछ ऐसे उदाहरणों पर विचार करेंगे जिनसे हमें अणुओं द्वारा घेरे गए आयतन और एक अणु के आयतन के विषय में जानकारी प्राप्त होगी।

उदाहरण 13.1 जल का घनत्व 1000 kg m^{-3} है। 100 °C और 1 atm दाब पर जलवाष्प का घनत्व 0.6 kg m^{-3} है। एक अणु के आयतन को कुल अणुओं की संख्या से गुणा करने पर हमें आण्विक आयतन प्राप्त होता है। ताप और दाब की उपरोक्त अवस्था में जलवाष्प के कुल आयतन और इसके आण्विक आयतन का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : जल के किसी दिए गए द्रव्यमान के लिए यदि घनत्व कम हो, तो आयतन अधिक होगा। अत:, वाष्प का आयतन 1000/0.6 = /(6×10^{-4}) गुणा अधिक है। यदि स्थूल जल और जल के अणुओं के घनत्व समान हैं, तो गैस के अणुओं वाले भाग के आयतन, तथा उन्हीं अणुओं का द्रवित होकर जल की अवस्था में आयतन, का अनुपात 1 होगा। चूंकि वाष्प अवस्था में आयतन बढ़ गया है, अत: आंशिक आयतन उसी अनुपात (यानि 6×10^{-4} गुणा) में कम हो जाएगा। ◀

उदाहरण 13.2 उदाहरण 13.1 में दिए गए आंकड़ों का उपयोग करके जल के एक अणु का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : द्रव(या ठोस) प्रावस्था में, जल के अणु बहुत पास-पास संकुलित होते हैं। अत: जल के अणुओं का घनत्व, मोटे तौर पर स्थूल जल के घनत्व = 1000 kg m^{-3} ले सकते हैं। जल के एक अणु का आयतन ज्ञात करने के लिए हमें इसका द्रव्यमान जानने की आवश्यकता होगी। हमें ज्ञात है कि एक मोल जल का द्रव्यमान लगभग

(2 + 16) = 18 g = 0.018 kg

चूंकि 1 मोल में लगभग 6×10^{23} अणु (आवोगाद्रो संख्या) होते हैं, जल के एक अणु का द्रव्यमान = (0.018)/(6×10^{23}) kg = 3×10^{-26} kg है। अत: जल के एक अणु के आयतन का रूक्ष आकलन इस प्रकार किया जाता है :

जल के एक अणु का आयतन
= (3×10^{-26} kg)/ (1000 kg m^{-3})
= 3×10^{-29} m^3
= (4/3) π (त्रिज्या)^3
जल के अणु की त्रिज्या $\approx 2 \times 10^{-10}$ m
= 2 Å ◀

उदाहरण 13.3 जल के अणुओं के बीच औसत दूरी (अंतर परमाणुक दूरी) कितनी है? इसके लिए आप उदाहरण (13.1) एवं (13.2) में दिए गए आंकड़ों का उपयोग कर सकते हैं।

हल : जल के किसी द्रव्यमान का आयतन, वाष्प प्रावस्था में, द्रव प्रावस्था में इसी द्रव्यमान के आयतन का 1.67×10^3 गुना होता है (उदाहरण 13.1)। इतने गुना ही जल के प्रत्येक अणु द्वारा घेरे गए आयतन में वृद्धि हो जाती है। जब आयतन में 10^3 गुनी वृद्धि हो जाती है, तो त्रिज्या $V^{1/3}$ अर्थात् 10 गुना हो जाती है। इस तरह त्रिज्या 10×2 Å $= 20$ Å हो जाती है अर्थात् अणुओं के बीच की दूरी $2 \times 20 = 40$ Å हो जाती है। ◀

उदाहरण 13.4 एक बर्तन में दो अक्रिय गैसें : निऑन (एकपरमाणुक) और ऑक्सीजन (द्विपरमाणुक) भरी हैं। इनके आंशिक दाबों का अनुपात 3 : 2 है। आकलन कीजिए, (i) उनके अणुओं की संख्या का अनुपात, (ii) बर्तन में निऑन एवं ऑक्सीजन के द्रव्यमान घनत्वों का अनुपात। Ne का परमाणु द्रव्यमान 20.2 u एवं ऑक्सीजन का अणु द्रव्यमान = 32.0 u ।

हल : किसी दिए गए ताप पर गैसों के मिश्रण में, किसी एक गैस का आंशिक दाब वह दाब है जो उसी ताप पर बर्तन में भरी होने पर यह अकेली गैस आरोपित करती (अक्रिय गैसों के एक मिश्रण का कुल दाब, अवयवी गैसों के आंशिक दाबों के योग के बराबर होता है)। प्रत्येक गैस (आदर्श गैस मानते हुए) गैस नियम का पालन करती है। चूंकि दो गैसों के मिश्रण में V एवं T दोनों के लिए समान हैं, $P_1V = \mu_1 RT$ एवं $P_2V = \mu_2 RT$, अर्थात् $(P_1/P_2) = (\mu_1/\mu_2)$ । यहाँ 1 एवं 2 क्रमशः निऑन एवं ऑक्सीजन को इंगित करते हैं।

$(P_1/P_2) = (3/2)$ (दिया है), $(\mu_1/\mu_2) = 3/2$

(i) परिभाषा के अनुसार, $\mu_1 = (N_1/N_A)$ एवं $\mu_2 = (N_2/N_A)$ जहाँ N_1 एवं N_2 क्रमशः गैस-1 एवं गैस-2 में अणुओं की संख्या है तथा N_A आवोगाद्रो संख्या है।

इस प्रकार, $(N_1/N_2) = (\mu_1/\mu_2) = 3/2$

(ii) हम यह भी लिख सकते हैं कि $\mu_1 = (m_1/M_1)$ एवं $\mu_2 = (m_2/M_2)$ जहाँ m_1 एवं m_2 गैस-1 तथा गैस-2 के द्रव्यमान हैं और M_1 तथा M_2 उनके आण्विक द्रव्यमान हैं। (m_1 एवं M_1 तथा m_2 एवं M_2 को एक ही मात्रक में व्यक्त किया जाना चाहिए)। यदि ρ_1 एवं ρ_2 क्रमशः गैस-1 एवं गैस-2 के द्रव्यमान घनत्व हों तो,

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{m_1/V}{m_2/V} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \times \left(\frac{M_1}{M_2}\right)$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{20.2}{32.0} = 0.947$$ ◀

13.4 आदर्श गैसों का अणुगति सिद्धांत

गैसों का अणुगति सिद्धांत इस मान्यता पर आधारित है कि द्रव्य अणुओं का बना है। गैस के किसी दिए गए द्रव्यमान में अति विशाल (प्रारूपिक मान आवोगाद्रो संख्या की कोटि का) संख्या में अणु होते हैं जो लगातार यादृच्छिक गति करते हैं। सामान्य ताप और दाब पर अणुओं के बीच की दूरी अणु के आकार (2 Å) की तुलना में 10 गुने से भी अधिक होती है। इसलिए अणुओं के बीच उपेक्षणीय अन्योन्य क्रिया होती है और ऐसा हम मान सकते हैं कि वे न्यूटन के गति के प्रथम नियम के अनुसार स्वतंत्र रूप से सरल रेखा में चलते हैं, तथापि, कभी-कभी वे एक दूसरे के अत्यधिक निकट आ जाते हैं, तब वे अंतर-आण्विक बल का अनुभव करते हैं और उनके वेग परिवर्तित हो जाते हैं। अणुओं के बीच की इस अन्योन्य क्रिया को संघट्ट कहते हैं। इस प्रकार अणु लगातार परस्पर और धारक पात्र की दीवारों से संघट्ट करके अपने वेग परिवर्तित करते रहते हैं। ये सभी संघट्ट प्रत्यास्थ होते हैं। अणुगति सिद्धांत के आधार पर हम गैस के दाब के लिए एक व्यंजक व्युत्पन्न कर सकते हैं।

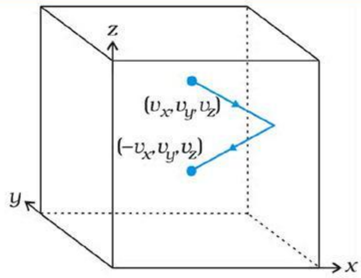
हम इस मूल धारणा से प्रारंभ करते हैं कि गैस के अणु सतत यादृच्छिक गति में हैं और वे एक दूसरे से और धारक पात्र की दीवारों से संघट्ट करते रहते हैं। अणुओं के संघट्ट चाहे पारस्परिक हों, या धारक पात्र की दीवार से ये सभी संघट्ट प्रत्यास्थ होते हैं। इसका अर्थ है कि इनकी कुल गतिज ऊर्जा संरक्षित रहती है। कुल संवेग भी, जैसा प्रायः होता है, संरक्षित रहता है।

13.4.1 किसी आदर्श गैस का दाब

माना कि l भुजा के किसी घनाकार बर्तन में कोई आदर्श गैस भरी है। चित्र 13.4 में दर्शाए अनुसार बर्तन की भुजाएँ संदर्भ अक्षों के समांतर हैं। एक अणु जिसका वेग (v_x, v_y, v_z) है, yz-तल के समांतर दीवार, जिसका क्षेत्रफल A $(= l^2)$ है, पर संघात करता है। क्योंकि संघट्ट प्रत्यास्थ है, यह अणु दीवार से

टकराकर उसी वेग से वापस लौटता है। संघट्ट के फलस्वरूप इसके वेग के y और z घटक तो परिवर्तित नहीं होते परंतु x-घटक का चिह्न उत्क्रमित हो जाता है। अर्थात् संघट्ट के पश्चात वेग $(-v_x, v_y, v_z)$ हो जाता है। इस अणु के संवेग में परिवर्तन $-mv_x - (mv_x) = -2mv_x$ होगा। संवेग संरक्षण के नियमानुसार इतना ही संवेग $= 2mv_x$ संघट्ट में दीवार को प्रदान किया जाएगा।

दीवार पर आरोपित बल (एवं दाब) का परिकलन करने के लिए, हमें प्रति एकांक समय में दीवार पर प्रदान किए जाने वाले संवेग का परिकलन करना होगा। एक अल्प काल-अंतराल Δt में कोई अणु जिसके वेग का x-अवयव v_x है दीवार से संघट्ट करेगा यदि यह दीवार से $v_x \Delta t$ दूरी के भीतर है। अर्थात् वह सभी अणु, जो दीवार के पास $Av_x \Delta t$ आयतन में हैं; Δt समय में केवल वही दीवार से संघात कर सकेंगे। परंतु औसतन इन अणुओं में से आधे दीवार की ओर गति करते हैं और आधे दीवार से दूर गति करते हैं। अत: (v_x, v_y, v_z) वेग से चलते हुए अणुओं में से ½$A\, v_x\, \Delta t\, n$ अणु Δt समय में दीवार से संघात करेंगे, यहाँ n प्रति एकांक आयतन में अणुओं की संख्या है। तब Δt समय में अणुओं द्वारा दीवार को प्रदान किया गया संवेग होगा,



चित्र 13.4 *गैस के एक अणु का धारक की दीवार से प्रत्यास्थ संघट्ट।*

$$Q = (2mv_x)\,(-\,n\,A\,v_x\,\Delta t) \qquad (13.10)$$

दीवार पर लगा बल संवेग हस्तांतरण की दर $Q/\Delta t$ एवं दाब प्रति एकांक क्षेत्रफल पर लगा बल है,

$$P = Q\,/(A\,\Delta t) \;=\; n\,m\,v_x^2 \qquad (3.11)$$

अणुगति सिद्धांत के संस्थापक

जेम्स क्लॉर्क मैक्सवेल (1831 – 1879)

स्कॉटलैंड के एडिनबर्ग में जन्मे **जेम्स क्लॉर्क मैक्सवेल,** उन्नीसवीं शताब्दी के महानतम भौतिक विज्ञानियों में से थे। उन्होंने, गैस में अणुओं के तापीय वेग वितरण के लिए सूत्र व्युत्पन्न किया और वे उन वैज्ञानिकों में से थे जिन्होंने सर्वप्रथम श्यानता जैसी मेय राशियों से आण्विक प्राचलों का विश्वसनीय आकलन किया। मैक्सवेल की सबसे बड़ी उपलब्धि (कूलॉम, ऑर्स्टेड, एम्पियर एवं फैराडे द्वारा खोजे गए) विद्युत एवं चुंबकत्व के नियमों का एकीकरण और उनको समीकरणों के एक संगत समुच्चय के रूप में प्रस्तुत करना था जिन्हें आज हम मैक्सवेल समीकरणों के नाम से जानते हैं। इनके आधार पर वह इस अत्यंत महत्वपूर्ण निष्कर्ष पर पहुँचे कि प्रकाश एक विद्युत चुंबकीय तरंग है। यहाँ यह वर्णन करना रुचिकर है कि मैक्सवेल, विद्युत की कणीय प्रकृति (जो फैराडे के विद्युत अपघटन के नियमों से बिलकुल स्पष्ट होती है) की धारणा से कभी सहमत नहीं हो पाए।

लुडविग बोल्ट्ज़मान (1844 – 1906) ऑस्ट्रिया के वियना शहर में जन्मे लुडविग बोल्ट्ज़मान ने, मैक्सवेल से अलग, स्वतंत्र रूप से गैसों के अणुगति सिद्धांत पर कार्य किया। परमाणुकता जो अणुगति सिद्धांत का मुख्य आधार है, के प्रबल पक्षधर, बोल्ट्ज़मान ने ऊष्मागतिकी के द्वितीय नियम एवं एंट्रॉपी की एक सांख्यिकीय व्याख्या प्रस्तुत की। उनको चिरप्रतिष्ठित सांख्यिकीय यांत्रिकी के संस्थापकों में से एक माना जाता है। अणुगति सिद्धांत में ताप और ऊर्जा में संबंध बताने वाले संबंध में उपयोग किए जाने वाले आनुपातिकता नियतांक को उन्हीं के सम्मान में बोल्ट्ज़मान नियतांक कहा जाता है।

वास्तव में, गैस के सभी अणुओं का वेग समान नहीं होता, वेग अणुओं पर वितरित रहते हैं। अतः, उपरोक्त समीकरण अणुओं के उस समूह के कारण दाब को व्यक्त करती है जिनकी x-दिशा में चाल v_x है और n इस ही अणु समूह का संख्या घनत्व है। कुल दाब ज्ञात करने के लिए सभी समूहों के योगदानों का संकलन करना होगा। तब,

$$P = n\,m\,\overline{v^2} \qquad (13.12)$$

जहाँ $\overline{v_x^2}$, v_x^2 का औसत है। अब, क्योंकि गैस समदैशिक है, अर्थात् धारक पात्र में अणुओं के वेग की कोई वरीय दिशा नहीं है, इसलिए सममिति के अनुसार,

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_3^2} =$$

$$(1/3)\,[\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_3^2}\,] = (1/3)\,\overline{v^2} \qquad (13.13)$$

जहाँ v चाल है, और $\overline{v^2}$ वर्गीकृत चालों का माध्यम है। अतः,

$$P = (1/3)\,n\,m\,\overline{v^2} \qquad (13.14)$$

इस व्युत्पत्ति पर कुछ टिप्पणियाँ : (i) प्रथम, यद्यपि हमने घनाकार बर्तन का चयन किया है, परंतु वास्तव में, बर्तन की आकृति से कुछ अंतर नहीं पड़ता है। बर्तन किसी भी यादृच्छिक आकृति का हो, हम एक अत्यंत सूक्ष्म समतल लेकर उस पर उपरोक्त व्युत्पत्ति के चरण लागू कर सकते हैं। ध्यान दीजिए, A एवं Δt दोनों ही अंतिम परिणाम में प्रकट नहीं होते हैं। अध्याय 10 में दिए गए पास्कल के नियम के अनुसार यदि कोई गैस साम्यावस्था में हो, तो उसके एक भाग पर जितना दाब होता है उतना ही दाब किसी दूसरे भाग पर भी होता है। (ii) द्वितीय, इस व्युत्पत्ति में हमने किन्हीं भी संघट्टों को उपेक्षणीय मानकर परिकलनों में सम्मिलित नहीं किया है। यद्यपि, इस पूर्वधारणा का कोई पक्का औचित्य बताना तो कठिन है, परंतु गुणात्मक रूप से हम यह देख सकते हैं कि इससे अंतिम परिणाम में त्रुटि नहीं आती। Δt सेकंड में दीवार से संघात करने वाले अणुओं की औसत संख्या $-\,n A v_x \Delta t$ पाई जाती है। अब, चूंकि संघट्ट यादृच्छिक है और गैस एक स्थायी प्रावस्था में है, यदि (v_x, v_y, v_z) वेग वाले अणु की, संघट्ट के कारण, गति बदल भी जाएगी तो भिन्न प्रारंभिक वेग वाला कोई कण संघट्ट के बाद यह वेग (v_x, v_y, v_z) प्राप्त कर लेगा। क्योंकि यदि ऐसा नहीं होगा तो वेगों का वितरण स्थायी नहीं रह पाएगा। सभी प्रकरणों में हम $\overline{v_x^2}$ का मान प्राप्त करेंगे। और इस प्रकार अणुओं के संघट्ट (जब तक कि वे बहुत जल्दी-जल्दी नहीं हो रहे हैं और एक संघट्ट में लगा समय दो संघट्टों के बीच के समय की तुलना में उपेक्षणीय है) से उपरोक्त परिकलन प्रभावित नहीं होता।

13.4.2 ताप की अणु गतिक व्याख्या

समीकरण (13.14) को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है,

$$PV = (1/3)\,nV\,m\,\overline{v^2} \qquad (13.15a)$$

$$PV = (2/3)\,[N x - m\,\overline{v^2}\,] \qquad (13.15b)$$

यहाँ $N (= nV)$ गैस के नमूने में अणुओं की कुल संख्या है।

दीर्घ कोष्ठक में लिखी राशि गैस के अणुओं की औसत स्थानांतरीय गतिज ऊर्जा है। क्योंकि किसी आदर्श गैस की आंतरिक ऊर्जा पूर्णतः गतिज ऊर्जा* ही है,

$$E = N \times (1/2)\,m\,\overline{v^2} \qquad (13.16)$$

समीकरण (13.15b) से तब हमें प्राप्त होता है,

$$PV = (2/3)\,E \qquad (13.17)$$

अब हम ताप की अणुगतिक व्याख्या के लिए तैयार हैं। समीकरण (13.17) का आदर्श गैस समीकरण (13.3) से संयोजित करने पर

$$E = (3/2)\,k_B\,NT \qquad (13.18)$$

या $E/\,N = -\;m\,\overline{v^2} \;=\; (3/2)\,k_B T \qquad (13.19)$

अर्थात्, किसी अणु की औसत गतिज ऊर्जा, गैस के परम ताप के अनुक्रमानुपाती होती है : यह आदर्श गैस की प्रकृति, दाब या आयतन पर निर्भर नहीं करती। यह एक मौलिक निष्कर्ष है, जो किसी गैस के ताप, जो गैस का एक स्थूल, मेय, प्राचल (जिसे ऊष्मागतिकी चर कहा जाता है) है, को किसी आण्विक राशि, जिसे अणु की औसत गतिज ऊर्जा कहते हैं से संबद्ध करता है। बोल्ट्ज़मान नियतांक इन दो प्रभाव क्षेत्रों को जोड़ता है। ध्यान से देखें तो समीकरण (13.18) यह स्पष्ट करती है कि आदर्श गैस की आंतरिक ऊर्जा केवल उसके ताप पर निर्भर करती है, दाब या आयतन पर नहीं। ताप की इस व्याख्या से स्पष्ट है कि आदर्श गैसों का अणुगति सिद्धांत आदर्श गैस समीकरण और इस पर आधारित विभिन्न गैस नियमों के पूर्णतः संगत है।

अक्रिय आदर्श गैसों के मिश्रण के लिए कुल दाब मिश्रण की प्रत्येक गैस के दाब का योगदान होता है। समीकरण (13.14) को नए रूप में इस प्रकार लिख सकते हैं,

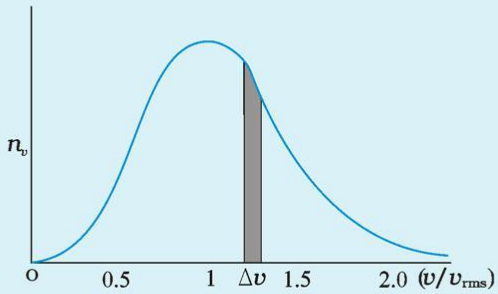
$$P = (1/3)\,[n_1 m_1\,\overline{v_1^2} + n_2 m_2\,\overline{v_2^2} + \ldots\,] \qquad (13.20)$$

* संकेत E आंतरिक ऊर्जा U, जिसमें अन्य स्वातंत्र्य कोटियों के कारण भी ऊर्जाएँ सम्मिलित हो सकती हैं (देखिये अनुभाग 13.5), का केवल स्थानांतरीय भाग ही व्यक्त करता है।

मैक्सवेल बंटन फलन

गैस के दिए गए द्रव्यमान में, दाब, ताप, आयतन जैसे स्थूल प्राचलों के नियत होने पर भी, इसके सब अणुओं के वेग समान नहीं होते। संघट्टों के कारण अणुओं की चाल और गति की दिशा परिवर्तित होती रहती है। तथापि, साम्यावस्था में चालों का वितरण स्थायी या नियत रहता है।

बहुत से पिंडों के निकाय के व्यवहार का अध्ययन करते समय चालों के ये वितरण बहुत महत्वपूर्ण एवं उपयोगी हो जाते हैं। एक उदाहरण के रूप में, आइये किसी शहर में लोगों की आयु पर विचार करें। प्रत्येक व्यक्ति की आयु को परिकलन में सम्मिलित करना हो - व्यावहारिक नहीं है। हम लोगों को समूहों में बाँट सकते हैं : 20 वर्ष तक की आयु के बच्चे, 20 से 60 वर्ष तक की आयु के वयस्क, 60 वर्ष से अधिक आयु के वृद्ध। यदि हमें अधिक विस्तृत जानकारी चाहिए तो हम आयु के और छोटे अंतराल वाले समूह ले सकते हैं : 0-1, 1-2,... 99-100 वर्ष आयु के समूह। जब आयु का अंतराल कम करते हैं तो उस आयु-अंतराल में आने वाले लोगों की संख्या भी कम हो जाती है। उदाहरणार्थ, आधा वर्ष अंतराल में लोगों की संख्या एक वर्ष अंतराल में लोगों की संख्या की लगभग आधी होगी। आयु अंतराल x एवं $x + dx$ में लोगों की संख्या $dN(x)$ अंतराल dx के अनुक्रमानुपाती होगी। अर्थात्, $dN(x) = n_x\, dx$, यहाँ n_x का उपयोग हमने x एवं $x + dx$ के बीच के अंतराल में लोगों की संख्या को निर्दिष्ट करने में किया है।



आण्विक चालों का मैक्सवेल बंटन

इसी प्रकार, आण्विक गतियों के बंटन पर विचार करें तो चालों v एवं $v + dv$ के बीच अणुओं की संख्या $dN(v) = 4p\, N a^3 e^{-bv^2} v^2\, dv = n_v dv$ । यह मैक्सवेल बंटन कहलाता है। n_v और v के बीच ग्राफ ऊपर चित्र में दर्शाया गया है। उन अणुओं की संख्या जिनकी चाल v एवं $v+dv$ के बीच है ग्राफ में दर्शायी पट्टी के क्षेत्रफल के बराबर होती है। v^2 जैसी किसी राशि का औसत, समाकलन $<v^2> = (1/N) \int v^2\, dN(v) = \sqrt{(3k_B T/m)}$ द्वारा परिभाषित किया जाता है जो अधिक प्राथमिक धारणाओं के आधार पर व्युत्पन्न परिणामों से मिलता है।

साम्यावस्था में विभिन्न गैसों के अणुओं की औसत गतिज ऊर्जा समान हो जाएगी। अर्थात्

$$- m_1 \overline{v_1^2} = - m_2 \overline{v_2^2} = (3/2)\, k_B T$$

अतः, $P = (n_1 + n_2 + \dots)\, k_B T$ (13.21)

यही डाल्टन का आंशिक दाबों का नियम है।

समीकरण (13.19) से हम किसी गैस में अणुओं की प्रारूपिक चाल का अनुमान लगा सकते हैं। नाइट्रोजन के एक अणु की $T = 300$ K, ताप पर माध्य वर्ग चाल होगी :

यहाँ, $m = \dfrac{M_{N_2}}{N_A} = \dfrac{28}{6.02 \times 10^{26}} = 4.65 \times 10^{-26}$ kg

$$\overline{v^2} = 3\, k_B T / m = (516)^2\, m^2 s^{-2}$$

$\overline{v^2}$ का वर्गमूल इसकी वर्ग माध्य मूल (rms) चाल कहलाती है और इसे v_{rms} द्वारा निर्दिष्ट करते हैं।

($\overline{v^2}$ को हम $<v^2>$ भी लिख सकते हैं)

$$v_{rms} = 516\, m\, s^{-1}$$

इस चाल की कोटि वायु में ध्वनि के वेग के समान है। समीकरण (13.19) से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि समान ताप पर हलके अणुओं की rms चाल अधिक होती है।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

उदाहरण 13.5 किसी फ्लास्क में आर्गन एवं क्लोरीन गैस भरी है जिनके द्रव्यमान 2 : 1 के अनुपात में हैं। मिश्रण का ताप 27°C है। दोनों गैसों के (i) प्रति अणु की औसत गतिज ऊर्जा का अनुपात (ii) दोनों गैसों के अणुओं की वर्ग माध्य मूल चालों v_{rms} का अनुपात ज्ञात कीजिए। आर्गन का परमाणु द्रव्यमान = 39.9 u, क्लोरीन का अणु द्रव्यमान = 70.9u

हल यहाँ याद रखने योग्य महत्वपूर्ण बात यह है कि किसी (आदर्श) गैस की (प्रति अणु) औसत गतिज ऊर्जा (चाहे वह आर्गन की तरह एक परमाणुक हो, क्लोरीन की तरह द्विपरमाणुक हो, अथवा बहुपरमाणुक भी क्यों न हो) सदैव ही $(3/2)\, k_B T$ के बराबर होती है, गैस के ताप पर निर्भर करती है और गैस की प्रकृति पर निर्भर नहीं करती।

(i) चूंकि फ्लास्क में आर्गन और क्लोरीन दोनों का ताप समान है, अत: इन दो गैसों की (प्रति अणु) औसत गतिज ऊर्जाओं का अनुपात 1 : 1 है।

(ii) अब $-\, m\, v_{rms}^{\;2}$ = प्रति अणु औसत गतिज ऊर्जा = $(3/2)\, k_B T$ यहाँ m गैस के एक अणु का द्रव्यमान है।

$$\frac{(v^2_{rms})_{Ar}}{(v^2_{rms})_{Cl}} = \frac{(m)_{Cl}}{(m)_{Ar}} = \frac{(M)_{Cl}}{(M)_{Ar}} = \frac{70.9}{39.9} = 1.77$$

यहाँ M गैस का अणु-द्रव्यमान है (आर्गन का परमाणु ही उसका अणु है।) दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर

$$\frac{(v_{rms})_{Ar}}{(v_{rms})_{Cl}} = 1.33$$

आपने इस तथ्य पर ध्यान दिया होगा कि उपरोक्त परिकलनों में मिश्रण के द्रव्यमानों के आधार पर संघटन की कोई प्रासंगिकता नहीं है। यदि ताप का मान अपरिवर्तित रहता है तो आर्गन और क्लोरीन के द्रव्यमान किसी अन्य अनुपात में होते, तब भी (i) एवं (ii) के उत्तर यही होते। ◀

उदाहरण 13.6 यूरेनियम के दो समस्थानिकों के द्रव्यमान 235 u एवं 238 u हैं। यदि यूरेनियम हेक्साफ्लोराइड गैस में ये दोनों समस्थानिक विद्यमान हों, तो किसकी औसत चाल अधिक होगी? यदि फ्लोरीन का परमाणु द्रव्यमान 19 u हो, तो किसी भी ताप पर, इनकी चालों में प्रतिशत अंतर आकलित कीजिए।

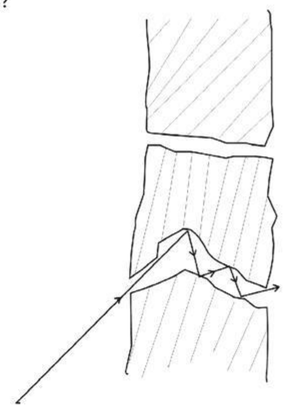
हल : किसी नियत ताप पर औसत ऊर्जा = ½ $m\langle v^2\rangle$ नियत रहती है। अत: अणु का द्रव्यमान जितना कम होगा, उतनी ही अधिक तीव्र उसकी गति होगी। चालों का अनुपात, द्रव्यमानों के अनुपात के वर्गमूल के व्युत्क्रमानुपाती है। चूंकि यहाँ द्रव्यमान 349u एवं 352 इकाइयाँ हैं, इसलिए

$$v_{349} / v_{352} = (352/349)^{1/2} = 1.0044$$

$$\text{चालों के अंतर का प्रतिशत } \frac{\Delta V}{V} = 0.44\ \%$$

^{235}U वह समस्थानिक है जिसकी आवश्यकता नाभिकीय विखंडन में होती है। इसको अधिक मात्रा में पाए जाने वाले समस्थानिक ^{238}U से पृथक करने के लिए मिश्रण को एक सरंध्र सिलिंडर द्वारा चारों ओर से घेर देते हैं। सरंध्र सिलिंडर मोटी दीवार का लेकिन संकरा होना चाहिए ताकि अणु लंबे रंध्रों की दीवारों से संघट्ट करते हुए एक एक कर जा सकें। धीमे अणुओं की तुलना में तीव्रगति से चलने वाले अणु अधिक संख्या में रिस कर बाहर आएंगे और इस प्रकार सरंध्र सिलिंडर के बाहर हलके अणु अधिक मात्रा में पाए जाएँगे (संवर्धन) (देखिए चित्र 13.5)। यह विधि अत्यंत प्रभावी नहीं है और पर्याप्त संवर्धन के लिए इसे कई बार दोहराना पड़ता है। ◀

जब गैसें विसरित होती हैं, तो उनके विसरण की दर उनके अणुओं के द्रव्यमान के वर्गमूल के व्युत्क्रमानुपाती होती है (देखिए अभ्यास 13.12)। क्या उपरोक्त उत्तर के आधार पर आप इस तथ्य की व्याख्या का अनुमान लगा सकते हैं?



चित्र 13.5 *एक सरंध्र दीवार से गुज़रते हुए अणु।*

उदाहरण 13.7 (a) जब कोई अणु (या प्रत्यास्थ गेंद) किसी (भारी) दीवार से टकराता है, तो टकराने के पश्चात् यह उसी चाल से विपरीत दिशा में वापस लौटता है। जब कोई गेंद दृढ़तापूर्वक पकड़े गए भारी बल्ले से टकराती है, तो भी ऐसा ही होता है। तथापि, जब गेंद अपनी ओर आते हुए बल्ले से टकराती है, तो यह भिन्न चाल से वापस लौटती है। उस स्थिति में गेंद की चाल अपेक्षाकृत कम होती है या अधिक? (अध्याय 6 प्रत्यास्थ संघट्टों से संबंधित आपकी याद ताजा कर सकेगा)। (b) पिस्टन लगे सिलिंडर में पिस्टन को अंदर की ओर धकेल कर जब किसी गैस को संपीडित किया जाता है, तो उस गैस का ताप बढ़ जाता है। ऊपर (a) में प्रयुक्त अणुगति सिद्धांत के आधार पर इस प्रेक्षण की व्याख्या कीजिए। (c) पिस्टन लगे सिलिंडर में संपीडित गैस जब पिस्टन को बाहर धकेलकर फैलती है तो क्या होता है? तब आप क्या प्रेक्षण करेंगे? (d) खेलते समय सचिन तेंदुलकर एक भारी बल्ले का उपयोग करते हैं। इससे क्या उनको किसी प्रकार की कोई सहायता मिलती है?

हल **(a)** माना कि बल्ले के पीछे लगे विकिटों के सापेक्ष गेंद की चाल u है। यदि विकिटों के सापेक्ष बल्ला V चाल से गेंद की ओर आ रहा हो तो बल्ले के सापेक्ष गेंद की चाल $V + u$ होगी, जो बल्ले की ओर प्रभावी होगी। भारी बल्ले से टकराकर जब गेंद वापस लौटती है तो बल्ले के सापेक्ष इसकी चाल $V + u$ बल्ले से दूर की ओर होगी। अत: विकिट के सापेक्ष, लौटती हुई गेंद की चाल, $V + (V + u) = 2V + u$, विकिट से परे जाती हुई होगी। अत: इस प्रकार गतिमान बल्ले से संघट्ट के पश्चात् गेंद की चाल बढ़ जाती है। यदि बल्ला भारी नहीं है तो प्रतिपेक्ष चाल u से कम होगी। अणु के लिए इसका अर्थ ताप में वृद्धि होगा।

(a) के उत्तर के आधार पर, अब आप, (b) (c), (d) के उत्तर दे सकते हैं।

(संकेत: इस संगतता पर ध्यान दें, पिस्टन → बल्ला, सिलिंडर → विकिट, अणु → गेंद)। ◀

13.5 ऊर्जा के समविभाजन का नियम

किसी एकल अणु की गतिज ऊर्जा होती है :

$$\varepsilon_t = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 \quad (13.22)$$

T ताप पर, तापीय साम्य में किसी गैस की औसत ऊर्जा का मान $<\varepsilon_t>$ द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है, अत:

$$\langle\varepsilon_t\rangle = \left\langle\frac{1}{2}mv_x^2\right\rangle + \left\langle\frac{1}{2}mv_y^2\right\rangle + \left\langle\frac{1}{2}mv_z^2\right\rangle = \frac{3}{2}k_BT \quad (13.23)$$

क्योंकि यहाँ कोई वरीय दिशा नहीं है, अत: समीकरण (13.23) से इंगित होता है कि

$$\left\langle\frac{1}{2}mv_x^2\right\rangle = \frac{1}{2}k_BT \; ; \left\langle\frac{1}{2}mv_y^2\right\rangle = \frac{1}{2}k_BT \; ;$$

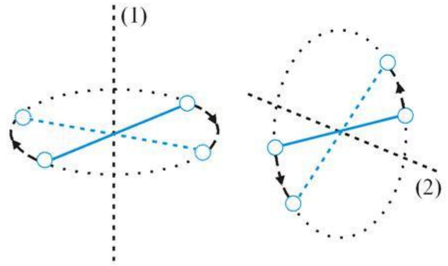
$$\left\langle\frac{1}{2}mv_z^2\right\rangle = \frac{1}{2}k_BT \quad (13.24)$$

दिक्स्थान में गति के लिए स्वतंत्र किसी अणु की स्थिति दर्शाने के लिए हमें तीन निर्देशांकों की आवश्यकता होती है। यदि इसकी गति किसी एक समतल में बाध्य कर दी जाए, तो दो निर्देशांकों की, और यदि इसे किसी सरल रेखा के अनुदिश गति के लिए बाध्य कर दिया जाए, तो केवल एक निर्देशांक की आवश्यकता होगी। इसे एक दूसरे ढंग से भी व्यक्त किया जा सकता है। हम कहते हैं कि सरल रेखीय गति के लिए इसकी स्वातंत्र्य कोटि एक है, समतल गति की स्वातंत्र्य कोटि दो तथा दिक्स्थान में गति के लिए स्वातंत्र्य कोटि तीन है। किसी संपूर्ण पिण्ड की एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक गति को स्थानांतरीय गति कहते हैं। अत:, दिक्स्थान में गति के लिए स्वतंत्र अणु की तीन स्वातंत्र्य कोटि होती हैं। प्रत्येक स्थानांतरीय स्वतंत्रता की एक स्वातंत्र्य कोटि होती है, जिसमें गति के किसी चर का वर्ग सम्मिलित होता है, उदारहणार्थ यहाँ – mv_x^2 और इसी के सदृश पद v_y एवं v_z हैं। समीकरण (13.24) में हम देखते हैं कि तापीय साम्य में इस प्रकार के प्रत्येक पद का औसत मान – k_BT है।

आर्गन जैसी एकपरमाणुक गैस के अणुओं में केवल स्थानांतरीय स्वातंत्र्य कोटि होती है। लेकिन O_2 या N_2 जैसी द्विपरमाणुक गैसों के विषय में क्या कह सकते हैं? O_2 के अणु में 3 स्थानांतरीय स्वातंत्र्य कोटि तो होती ही हैं, पर, इनके अतिरिक्त यह अणु अपने द्रव्यमान केंद्र के परित: घूर्णन गति भी कर सकते हैं। चित्र 13.6 में, ऑक्सीजन के दो परमाणुओं को जोड़ने वाली रेखा के लंबवत् दो स्वतंत्र घूर्णन अक्ष 1 एवं 2 दर्शाए गए हैं जिनके परित: अणु घूर्णन गति कर सकता है*। अत: इन अणुओं में प्रत्येक की दो घूर्णी स्वातंत्र्य कोटि होती हैं। इस प्रकार कुल ऊर्जा में स्थानांतरीय ऊर्जा ε_t एवं घूर्णी ऊर्जा ε_r दोनों का योगदान होता है।

$$\varepsilon_t + \varepsilon_r = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 \quad (13.25)$$

* परमाणुओं को मिलाने वाली रेखा के परित: घूर्णन का जड़त्व आघूर्ण बहुत कम होता है और क्वांटम यांत्रिकीय कारणों से प्रभावी नहीं हो पाता। अनुभाग 13.6 का अंतिम भाग देखिए।



चित्र 13.6 द्विपरमाणुक अणु के दो स्वतंत्र घूर्णन अक्ष।

यहाँ ω_1 एवं ω_2 क्रमशः अक्षों 1 एवं 2 के परितः कोणीय चाल तथा I_1 एवं I_2 उनके संगत जड़त्व-आघूर्ण हैं। ध्यान दीजिए, प्रत्येक घूर्णी स्वातंत्र्य कोटि ऊर्जा में एक पद का योगदान करती है जिसमें घूर्णी गति के किसी चर का वर्ग सम्मिलित होता है।

ऊपर हमने यह मान लिया है, कि O_2 अणु एक "दृढ़ घूर्णी" है, अर्थात्, यह अणु कंपन नहीं करता। O_2 के लिए यह पूर्वधारणा, यद्यपि (सामान्य ताप पर) सही पाई गई है, पर सदैव मान्य नहीं होती। CO जैसे कुछ अणु, सामान्य ताप पर भी कुछ कंपन करते हैं, अर्थात् इनके परमाणु, अंतरापरमाणुक अक्ष के अनुदिश एकविमीय कंपन करते हैं (ठीक वैसे ही जैसे एकविमीय लोलक) और परिणामतः कुल ऊर्जा में एक पद, ε_v कंपन ऊर्जा का भी होता है, यहाँ,

$$\varepsilon_v = \frac{1}{2}m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}ky^2$$

जहाँ k लोलक का बल नियतांक एवं y इसका कंपन निर्देशांक है। अब,

$$\varepsilon = \varepsilon_t + \varepsilon_r + \varepsilon_v \qquad (13.26)$$

पुनः ध्यान दीजिए, समीकरण (13.26) में दिए गए कंपन-ऊर्जा पद में, गति के कंपन चरों y एवं dy/dt के वर्ग सम्मिलित हैं।

यह भी देखिए कि प्रत्येक स्थानांतरीय एवं घूर्णी स्वातंत्र्य कोटि ने तो एक ही "वर्गित पद" का योगदान किया है, पर समीकरण (13.26) में दिए गए कंपन स्वातंत्र्य कोटि के सापेक्ष पद में गतिज एवं स्थितिज ऊर्जा व्यक्त करने वाले दो वर्गित पद हैं।

ऊर्जा के व्यंजक में प्रत्येक द्विघाती पद अणु द्वारा ऊर्जा अवशोषित करने का एक ढंग बताता है। हम देख चुके हैं कि परम ताप T पर तापीय साम्यावस्था में स्थानांतरीय गति के प्रत्येक ढंग के लिए औसत ऊर्जा – k_BT है। सर्वप्रथम मैक्सवेल द्वारा सिद्ध किए गए चिर प्रतिष्ठित सांख्यिकीय यांत्रिकी के सर्वाधिक परिष्कृत सिद्धांत के अनुसार ऊर्जा के विभाजन के प्रत्येक ढंग में ऐसा ही होता है चाहे ऊर्जा स्थानांतरीय हो, घूर्णी हो या कंपन ऊर्जा हो। अर्थात् तापीय साम्य में, ऊर्जा समान रूप से सभी संभव ऊर्जा रूपों पर बंटित होती है और प्रत्येक रूप में औसत ऊर्जा – k_BT पाई जाती है। यही **ऊर्जा का समविभाजन नियम** है। तदनुसार, किसी अणु की स्थानांतरीय एवं घूर्णी स्वातंत्र्य कोटियों में प्रत्येक – k_BT ऊर्जा का योगदान देती है जबकि प्रत्येक कंपन आवृत्ति 2 × – k_BT = k_BT ऊर्जा का योगदान देती है, क्योंकि, कंपन रूप में गतिज और स्थितिज दोनों प्रकार की ऊर्जाओं का योगदान होता है।

ऊर्जा के समविभाजन नियम की उपपत्ति इस पुस्तक की विषय वस्तु से बाहर है। यहाँ हम सैद्धांतिक रूप से गैसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिता ज्ञात करने के लिए इस नियम का उपयोग करेंगे। बाद में ठोसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिता के लिए भी इसके उपयोग का संक्षिप्त विवरण देंगे।

13.6 विशिष्ट ऊष्मा धारिता

13.6.1 एकपरमाणुक गैसों के लिए

एकपरमाणुक गैस के अणु में केवल तीन स्थानांतरीय स्वातंत्र्य कोटि होती हैं। अतः इनके एक अणु की T ताप पर औसत ऊर्जा $(3/2)k_BT$ होगी। इस प्रकार की गैस के 1 मोल की कुल आंतरिक ऊर्जा,

$$U = \frac{3}{2}k_BT \times N_A = \frac{3}{2}RT \qquad (13.27)$$

नियत आयतन पर मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता C_v का मान है,

$$C_v \text{ (एकपरमाणुक गैस के लिए)} = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2}RT \qquad (13.28)$$

आदर्श गैस के लिए

$$C_p - C_v = R \qquad (13.29)$$

जहाँ, C_p नियत दाब पर मोलर विशिष्ट ऊष्माधारिता है।

अतः, $$C_p = \frac{5}{2}R \qquad (13.30)$$

इन दो विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं का अनुपात

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3} \qquad (13.31)$$

13.6.2 द्विपरमाणुक गैसों के लिए

जैसा पहले स्पष्ट किया जा चुका है कि द्विपरमाणुक अणु की आकृति डंबलाकार होती है और यदि इस आकृति को दृढ़ घूर्णी

मानें, तो इसकी 5 स्वातंत्र्य कोटि हैं : 3 स्थानांतरीय एवं 2 घूर्णी। ऊर्जा समविभाजन के नियमानुसार इस प्रकार की गैस के एक मोल की, T ताप पर कुल आंतरिक ऊर्जा,

$$U = \frac{5}{2}k_B T \times N_A = \frac{5}{2}RT \qquad (13.32)$$

अतः मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिताएँ

$$C_v \text{ (दृढ़ द्विपरमाणुक)} = \frac{5}{2}R,\ C_p = \frac{7}{2}R \qquad (13.33)$$

$$\gamma \text{ (दृढ़ द्विपरमाणुक)} = \frac{7}{5} \qquad (13.34)$$

यदि द्विपरमाणुक अणु दृढ़ नहीं है, वरन् इसमें एक अतिरिक्त कंपन रूप भी सम्मिलित है, तो

$$U = \left(\frac{5}{2}k_B T + k_B T\right)N_A = \frac{7}{2}RT$$

$$C_v = \frac{7}{2}R,\ C_p = \frac{9}{2}R,\ \gamma = \frac{9}{7}R \qquad (13.35)$$

13.6.3 बहुपरमाणुक गैसों के लिए

व्यापक रूप में किसी बहुपरमाणुक अणु में 3 स्थानांतरीय, 3 घूर्णी स्वातंत्र्य कोटि एवं कुछ निश्चित संख्या (f) के कंपन रूप होते हैं। ऊर्जा समविभाजन के नियमानुसार यह सुगमता से समझा जा सकता है कि इस प्रकार की गैस के 1 मोल की कुल आंतरिक ऊर्जा

$$U = \left(\frac{3}{2}\ k_B T + \frac{3}{2}\ k_B T + f\, k_B T\right) N_A$$

अर्थात् $C_v = (3 + f)\, R;\quad C_p = (4 + f)\, R,$

$$\gamma = \frac{(4+f)}{(3+f)} \qquad (13.36)$$

ध्यान दीजिए, $C_p - C_v = R$ सभी आदर्श गैसों के लिए सत्य है, फिर चाहे वह गैस एकपरमाणुक हो, द्विपरमाणुक हो अथवा बहुपरमाणुक भी क्यों न हो।

सारणी (13.1) में, गैसों में, कंपन रूपों की उपेक्षा करते हुए, उनकी विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के विषय में सैद्धांतिक पूर्वानुमानों को सूचीबद्ध किया गया है। ये मान सारणी (13.2) में दिए गए कई गैसों के लिए विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के प्रायोगिक मानों से काफी मेल खाते हैं। यह सत्य है, कि ऐसी कई गैसे हैं (जो सारणी में नहीं दर्शाई गई हैं), जैसे Cl_2, C_2H_6 और बहुत सी बहुपरमाणुक गैसें, जिनके प्रायोगिक और सैद्धांतिक मानों में बहुत अंतर पाया गया है। साधारणतः इन गैसों की

सारणी 13.1 गैसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के पूर्वानुमानित मान (कंपन रूपों की उपेक्षा करते हुए)

गैस की प्रकृति	C_v (J mol^{-1} K^{-1})	C_p (J mol^{-1} K^{-1})	$C_p - C_v$ (J mol^{-1} K^{-1})	γ
एकपरमाणुक	12.5	20.8	8.31	1.67
द्विपरमाणुक	20.8	29.1	8.31	1.40
त्रिपरमाणुक	24.93	33.24	8.31	1.33

सारणी 13.2 कुछ गैसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के मापित मान

गैस की प्रकृति	गैस	C_v (J mol^{-1} K^{-1})	C_p (J mol^{-1} K^{-1})	$C_p - C_v$ (J mol^{-1} K^{-1})	γ
एकपरमाणुक	He	12.5	20.8	8.30	1.66
एकपरमाणुक	Ne	12.7	20.8	8.12	1.64
एकपरमाणुक	Ar	12.5	20.8	8.30	1.67
द्विपरमाणुक	H_2	20.4	28.8	8.45	1.41
द्विपरमाणुक	O_2	21.0	29.3	8.32	1.40
द्विपरमाणुक	N_2	20.8	29.1	8.32	1.40
त्रिपरमाणुक	H_2O	27.0	35.4	8.35	1.31
बहुपरमाणुक	CH_4	27.1	35.4	8.36	1.31

विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के मान सारणी (13.1) में दिए गए सैद्धांतिक मानों से अधिक पाए गए हैं। इसका अर्थ यह हुआ कि यदि हम परिकलनों में कंपन रूपों के योगदान को भी सम्मिलित करें, तो प्रायोगिक एवं सैद्धांतिक मानों में अधिक संगति दृष्टिगोचर होगी। अतः, सामान्य ताप पर ऊर्जा समविभाजन का नियम, प्रायोगिक रूप से अच्छी तरह पुष्ट होता है।

उदाहरण 13.8 44.8 लीटर नियत धारिता के एक बेलनाकार बर्तन में STP पर हीलियम गैस भरी है। इस गैस के ताप में 15.0 °C वृद्धि करने के लिए कितनी ऊष्मा की आवश्यकता होगी? (R = 8.31 J mol^{-1} K^{-1})

हल : गैस नियम $PV = \mu RT$ का उपयोग करके आप यह आसानी से दर्शा सकते हैं कि किसी भी आदर्श गैस के 1 मोल का, मानक ताप (273 K) एवं दाब (1 atm = 1.01 × 10^5 Pa) पर आयतन 22.4 लीटर होता है। इस सार्वत्रिक आयतन को 'मोलर आयतन' कहते हैं। अतः इस उदाहरण में बर्तन के भीतर हीलियम के 2 मोल हैं। क्योंकि हीलियम एकपरमाणु गैस है, इसकी नियत आयतन पर विशिष्ट ऊष्मा धारिता $C_v = (3/2)\, R,$ तथा नियत दाब पर विशिष्ट ऊष्मा धारिता

देखें, तो विश्वास करें

क्या परमाणुओं को इधर-उधर दौड़ते हुए देखा जा सकता है, ठीक-ठीक तो नहीं, पर लगभग ऐसा हो सकता है। आप फूलों के परागकणों को जल के अणुओं द्वारा धकेले जाते हुए देख सकते हैं। परागकणों की आमाप ~ 10^{-5} m है। 1827 में, स्कॉटलैंड के वनस्पतिशास्त्री, रॉबर्ट ब्राऊन ने जल में निलंबित फूल के परागकणों का सूक्ष्मदर्शी से परीक्षण करते समय यह पाया कि वे टेढ़े-मेढ़े पथों पर निरंतर यादृच्छिक गति कर रहे हैं।

अणुगति सिद्धांत इस परिघटना की एक सरल व्याख्या प्रस्तुत करता है। जल में निलंबित किसी पिण्ड पर जल के अणु सभी दिशाओं से संघट्ट करते रहते हैं। क्योंकि अणुओं की गति यादृच्छिक है, किसी एक दिशा से संघट्ट करने वाले अणुओं की संख्या लगभग उतनी ही है जितनी विपरीत दिशा से आकर संघट्ट करने वाले परमाणुओं की संख्या होती है। सामान्य आमाप की वस्तु के लिए इन आण्विक संघट्टों की संख्या में अंतर कुल संघट्टों की संख्या की तुलना में उपेक्षणीय होने के कारण हमें अणुओं की गति का प्रभाव दिखाई नहीं पड़ता।

यदि पिण्ड काफी छोटा हो, पर फिर भी सूक्ष्मदर्शी से दिखाई पड़ सकता हो, तो विभिन्न दिशाओं से होने वाले आण्विक संघट्टों की संख्या में अंतर पूर्णरूपेण उपेक्षणीय नहीं होता अर्थात् माध्यम (जल या अन्य तरल) के अणुओं के सतत संघट्टों द्वारा निलंबित पिण्ड पर संघट्टों के कारण आरोपित संवेगों एवं बल आघूर्णों का योग शून्य नहीं होता। किसी न किसी दिशा में कुल संवेग और बल आघूर्ण प्रभावी रह जाते हैं। इसलिए, यह पिण्ड टेढ़े-मेढ़े ढंग से गति करता है और यादृच्छिक ढंग से कलाबाजी खाता है। आजकल **ब्राउनी गति** कहलाने वाली अणुओं की यह गति आण्विक क्रियाशीलता का एक दृष्टव्य प्रमाण है। गत लगभग 50 वर्षों से क्रमवीक्षण सुरंगक (scanning tunneling) एवं अन्य विशिष्ट सूक्ष्मदर्शियों द्वारा, अणुओं को देखा जा रहा है।

1987 में, अमेरिका में कार्यरत मिस्र के वैज्ञानिक अहमद जेवैल ने न केवल अणुओं को देखने में सफलता पाई, वरन् वह उनकी विस्तृत पारस्परिक अन्योन्यक्रियाओं को भी देख सके। ऐसा वे अति अल्प अवधि, दस फेम्टोसेकेंड की कोटि से भी कम अवधि वाले लेसर प्रकाश की क्षणदीप्ति से उनको प्रकाशित कर, और उनके फोटो लेकर संभव कर पाएं। (फेम्टो सेकंड = 10^{-15} s) अब तो आप रासायनिक आबंधों के टूटने और बनने का भी अध्ययन कर सकते हैं। इसी को वास्तव में 'देखना' कहते हैं।

$C_p = (5/2)\,R$ है। क्योंकि बर्तन का आयतन नियत है, आवश्यक ऊष्मा ज्ञात करने के लिए C_v का उपयोग करेंगे। अतः
आवश्यक ऊष्मा = मोलों की संख्या × मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता × तापवृद्धि

$= 2 \times 1.5\,R \times 15.0 = 45\,R$

$= 45 \times 8.31 = 374$ J ◀

13.6.4 ठोसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिता

ठोसों की विशिष्ट ऊष्माधारिता ज्ञात करने के लिए भी हम ऊर्जा समविभाजन का नियम लागू कर सकते हैं। किसी ठोस के विषय में विचार कीजिए, जो N परमाणुओं का बना है। प्रत्येक परमाणु अपनी माध्य स्थिति के इधर-उधर कंपन कर रहा है। किसी एकविमीय कंपन की औसत ऊर्जा $2 \times ½\, k_BT = k_BT$ है। त्रिविमीय कंपनों के लिए औसत ऊर्जा $3\,k_BT$ है। ठोस के 1 मोल के लिए $N = N_A$ और इसकी कुल आंतरिक ऊर्जा

$$U = 3\,k_BT \times N_A = 3\,RT$$

अब, नियत दाब पर $\Delta Q = \Delta U + P\Delta V = \Delta U$, क्योंकि किसी ठोस के लिए ΔV उपेक्षणीय है। अतः

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T} = 3R \qquad (13.37)$$

सारणी 13.3 कमरे के ताप एवं वायुमंडलीय दाब पर कुछ ठोसों की विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के मान

पदार्थ का नाम	विशिष्ट ऊष्मा धारिता ($J\,kg^{-1}\,K^{-1}$)	मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता ($J\,mol^{-1}\,K^{-1}$)
ऐलुमिनियम	900.0	24.4
कार्बन	506.5	6.1
ताँबा	386.4	24.5
सीसा	127.7	26.5
चाँदी	236.1	25.5
टंग्स्टन	134.4	24.9

सारणी 13.3 दर्शाती है कि व्यापक रूप से, सामान्य ताप पर प्राप्त प्रायोगिक मान प्रागुक्त मानों से मेल खाते हैं। (कार्बन एक अपवाद है)।

13.6.5 जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता

हम जल को ठोसों की तरह ही लेते हैं। प्रत्येक परमाणु के लिए औसत ऊर्जा $3k_BT$ है। जल के अणु में 3 परमाणु, दो हाइड्रोजन

के और एक ऑक्सीजन के होते हैं। अत: इसके 1 मोल की आंतरिक ऊर्जा,

$$U = 3 \times 3\, k_B T \times N_A = 9\, RT$$

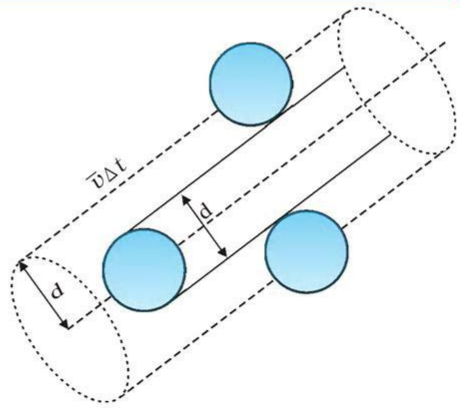
एवं $C = \Delta Q/\Delta T = \Delta U/\Delta T = 9R$

यह इसका प्रेक्षित मान है और प्रायोगिक और सैद्धांतिक मानों में काफी समानता है। कैलॉरी, ग्राम, डिग्री मात्रक में जल की विशिष्ट ऊष्मा धारिता का मान 1 है। क्योंकि, 1 कैलॉरी = 4.179 J और जल का 1 मोल 18 ग्राम है। अत: जल की प्रति मोल विशिष्ट ऊष्मा धारिता ~ 75 J mol^{-1} K^{-1} ~ 9R है। तथापि, ऐल्कोहॉल या एसिटोन जैसे अधिक जटिल अणुओं के लिए स्वातंत्र्य कोटि पर आधारित तर्क और अधिक उलझा देते हैं।

अंत में, हमें ऊर्जा समविभाजन के चिर प्रतिष्ठित नियम पर आधारित विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के पूर्वानुमान के एक महत्वपूर्ण पक्ष को ध्यान में रखना चाहिए। जिसके अनुसार प्रागुक्त विशिष्ट ऊष्मा धारिताएँ ताप पर निर्भर नहीं करतीं। परंतु जैसे-जैसे हम निम्न तापों की ओर बढ़ते जाते हैं, इस प्रागुक्ति में स्पष्ट विचलन दृष्टिगोचर होने लगता है। जैसे $T \rightarrow 0$। सभी पदार्थों की विशिष्ट ऊष्मा धारिताएँ शून्य की ओर अग्रसर होती जाती हैं। इसका संबंध इस तथ्य से है कि निम्न ताप पर स्वातंत्र्य कोटियाँ अनुपलभ्य और इसलिए अप्रभावी हो जाती हैं। चिरप्रतिष्ठित भौतिकी की दृष्टि से, प्रत्येक स्थिति में स्वातंत्र्य कोटियाँ अपरिवर्तित रहनी चाहिएँ। निम्न ताप पर विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं का व्यवहार चिरप्रतिष्ठित भौतिकी की अव्यवहार्यता दर्शाता है और यह व्यवहार केवल क्वांटम धारणाओं के आधार पर ही स्पष्ट किया जा सकता है, जैसा कि सर्वप्रथम आइंस्टीन ने दर्शाया था। क्वांटम यांत्रिकी में स्वातंत्र्य कोटि के प्रभावी होने से पहले ही निकाय में किसी शून्येतर ऊर्जा होना आवश्यक है। यही इस बात का भी कारण है केवल कुछ ही प्रकरणों में क्यों कंपनिक स्वातंत्र्य कोटि प्रभावी होती हैं।

13.7 माध्य मुक्त पथ

गैसों में अणुओं की गति काफी अधिक, वायु में ध्वनि के वेग की कोटि के बराबर होती है। तो भी, रसोईघर में सिलिंडर से लीक हुई गैस को कमरे के दूसरे कोने तक विसरित होने में काफी अधिक समय लगता है। वायुमंडल में धुएँ का बादल घंटों तक बना रहता है। ऐसा इसलिए होता है, क्योंकि, गैस के अणु एक परिमित, पर अत्यंत छोटी आमाप के होते हैं। इसीलिए वे परस्पर टकराते रहने के लिए बाध्य हैं। परिणामस्वरूप, वे अबाध्य रूप से, सरल रेखा में चलते नहीं रह सकते, उनका पथ निरंतर परिवर्तित रहता है।



चित्र 13.7 Δt समय में किसी अणु द्वारा प्रसर्पित आयतन जिसमें कोई दूसरा अणु इससे टकराएगा।

मान लीजिए, किसी गैस के अणु d व्यास के गोले हैं। यहाँ हम अपना ध्यान किसी ऐसे गतिमान अणु पर केंद्रित करेंगे जिसकी माध्य चाल $\langle v \rangle$ है। यह किसी भी ऐसे दूसरे अणु से संघट्ट करेगा जो इन दो अणुओं के केंद्रों के बीच की दूरी d के अंदर आ जाएगा। Δt समय में यह आयतन ($\pi d^2 \langle v \rangle \Delta t$) तय करता है जिसमें आने वाला कोई अणु इससे टकराएगा (देखें चित्र 13.7)। यदि प्रति एकांक आयतन में अणुओं की संख्या n हो तो कोई अणु Δt समय में $n\pi d^2 \langle v \rangle \Delta t$ संघट्ट करेगा। इस प्रकार संघट्टों की दर $n\pi d^2 \langle v \rangle$ है। अथवा दो क्रमिक संघट्टों के बीच औसत अंतराल,

$$\tau = 1/(n\pi \langle v \rangle d^2) \qquad (13.38)$$

किन्हीं दो क्रमिक संघट्टों के बीच की औसत दूरी, जिसे माध्य मुक्त पथ (l) कहते हैं, होगा :

$$l = \langle v \rangle \tau = 1/(n\pi d^2) \qquad (13.39)$$

इस व्युत्पत्ति में हमने यह कल्पना की है कि दूसरे सभी अणु विरामावस्था में हैं। परंतु वास्तव में सभी अणु गतिमान हैं और संघट्ट दर अणुओं के औसत आपेक्षिक वेग द्वारा निर्धारित की जाती है। अत: हमें समीकरण (13.38) में $\langle v \rangle$ को $\langle v_r \rangle$ से प्रतिस्थापित करना होगा। अत: अधिक यथार्थ व्युत्पत्ति द्वारा

$$l = 1/\left(\sqrt{2}\; n\pi d^2\right) \qquad (13.40)$$

आइये, अब हम वायु के अणुओं के लिए, STP पर औसत वेग $\langle v \rangle$ = (485m/s) लेकर l एवं T का आकलन करते हैं।

$$n = \frac{(0.02 \times 10^{23})}{(22.4 \times 10^{-3})}$$

$$= 2.7 \times 10^{25}\ \mathrm{m^{-3}}$$

$d = 2 \times 10^{-10}$ m लेने पर,

$\tau = 6.1 \times 10^{-10}$ s

तथा, $l = 2.9 \times 10^{-7}$ m $\approx 1500d$ (13.41)

जैसी अपेक्षा थी, समीकरण (13.40) द्वारा दिया गया माध्य मुक्त पथ का मान अणु की आमाप एवं संख्या घनत्व पर प्रतिलोमतः निर्भर करता है। किसी अत्यधिक निर्वातित नली में चाहे n कितना भी कम क्यों न हो, माध्य मुक्त पथ का मान नली की लंबाई के बराबर हो सकता है।

उदाहरण 13.9 373 K पर, जल वाष्प में, जल के अणु के माध्य मुक्त पथ का आकलन कीजिए। उदाहरण 13.1 और समीकरण (13.41) में दी गई सूचनाओं का उपयोग कीजिए।

हल जल वाष्प के लिए d का मान, इसका वायु के लिए मान बराबर होता है। संख्या घनत्व परम ताप के व्युत्क्रमानुपाती है।

इसलिए $n = 2.7 \times 10^{25} \times \dfrac{273}{373} = 2 \times 10^{25}\ \text{m}^{-3}$

अतः माध्य मुक्त पथ $l = 4 \times 10^{-7}$ m

ध्यान दीजिए, माध्य मुक्त पथ, पूर्व परिकलनों द्वारा ज्ञात अंतरापरमाणुक दूरी ~ 40 Å = 4×10^{-9} m की तुलना में 100 गुनी है। माध्य मुक्त पथ का यह बड़ा मान ही गैसों के प्रारूपिक व्यवहार का मार्गदर्शक है। बिना किसी धारक पात्र के गैसों को सीमित नहीं किया जा सकता है।

अणुगति सिद्धांत का उपयोग करके, श्यानता, ऊष्मा-चालकता, एवं विसरण जैसे स्थूल मेय गुणों को आण्विक आमाप जैसे अतिसूक्ष्म प्राचलों से संबंधित किया जा सकता है। इसी तरह के संबंधों से ही सर्वप्रथम अणुओं की आमाप का आकलन किया गया था।

सारांश

1. दाब (P), आयतन (V) और परम ताप (T) में संबंध स्थापित करने वाली आदर्श गैस समीकरण है,

$$PV = \mu RT = k_B NT$$

यहाँ μ गैस में मोलों की संख्या और N अणुओं की संख्या है। R तथा k_B क्रमशः सार्वत्रिक गैस नियतांक एवं बोल्ट्ज़मान नियतांक हैं।

$$R = 8.314\ \text{J mol}^{-1}\ \text{K}^{-1}, \quad k_B = \frac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23}\ \text{J K}^{-1}$$

वास्तविक गैसें, आदर्श गैस समीकरण का अधिकाधिक पालन केवल उच्च ताप तथा निम्न दाब पर ही करती हैं।

2. आदर्श गैस के अणुगति सिद्धांत के अनुसार

$$P = \frac{1}{3} n m \overline{v^2}$$

यहाँ n अणुओं का संख्या घनत्व, m अणु का द्रव्यमान एवं $\overline{v^2}$ इनकी माध्य वर्ग चाल है। इसको आदर्श गैस समीकरण के साथ मिलाने से ताप की एक अणुगतिक व्याख्या प्राप्त होती है,

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} k_B T, \quad v_{rms} = \left(\overline{v^2}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

इससे हमें यह ज्ञात होता है कि किसी गैस का ताप उसके किसी अणु की औसत गतिज ऊर्जा की माप है और यह गैस या अणु की प्रकृति पर निर्भर नहीं करता। एक नियत ताप पर गैसों के मिश्रण में भारी अणु की औसत चाल अपेक्षाकृत कम होती है।

3. स्थानांतरीय गतिज ऊर्जा

$$E = \frac{3}{2} k_B NT$$

इससे हमें यह सूत्र प्राप्त होता है–

$$PV = \frac{2}{3} E$$

4. ऊर्जा समविभाजन का नियम बताता है कि यदि एक निकाय परमताप T पर साम्यावस्था में है तो कुल ऊर्जा समान रूप से विभिन्न ऊर्जा रूपों में बँट कर अवशोषित होती है और हर रूप के साथ जुड़ी यह ऊर्जा $- k_B T$ होती है। प्रत्येक स्थानांतरीय एवं घूर्णी स्वातंत्र्य कोटि के संगत अवशोषण का एक ऊर्जा रूप होता है और इससे जुड़ी ऊर्जा $- k_B T$ होती है। प्रत्येक कंपन आवृत्ति के साथ ऊर्जा के दो रूप (गतिज एवं स्थितिज) जुड़ते हैं इसलिए इसके संगत ऊर्जा $= 2 \times - k_B T = k_B T$

5. ऊर्जा समविभाजन का नियम लागू करके हम गैसों की मोलर विशिष्ट ऊष्मा धारिता ज्ञात कर सकते हैं और इस प्रकार प्राप्त विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के मान कई गैसों के प्रयोगों द्वारा प्राप्त विशिष्ट ऊष्मा धारिताओं के मानों से मिलते हैं। यदि गति के कंपन रूपों को भी परिकलनों में सम्मिलित करें तो यह साम्यता और भी सटीक बैठेगी।

6. माध्य मुक्त पथ l अणु के दो क्रमिक संघट्टों के बीच उसके द्वारा चलित औसत दूरी है

$$\bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2}\, n \pi d^2}$$

जहाँ n संख्या घनत्व एवं d अणु का व्यास है।

विचारणीय विषय

1. किसी तरल का दाब केवल धारक की दीवारों पर ही आरोपित नहीं होता, बल्कि यह तरल में हर जगह विद्यमान रहता है। बर्तन में रखे गैस के आयतन में कोई परत साम्यावस्था में होती है क्योंकि इस परत के दोनों ओर समान दाब होता है।

2. गैस में अंतरापरमाणुक दूरी के संबंध में हमें बहुत बढ़ा-चढ़ा कर कोई धारणा नहीं बनानी चाहिए। सामान्य ताप और दाब पर यह ठोसों और द्रवों में अंतरापरमाणुक दूरी के लगभग दस गुने के बराबर है। बहुत भिन्न अगर कुछ है तो वह माध्य मुक्त पथ है जो किसी गैस में अंतरापरमाणुक दूरी का 100 गुना और अणु की आमाप का 1000 गुना होता है।

3. ऊर्जा समविभाजन के नियम को हम इस प्रकार कह सकते हैं– तापीय साम्य में प्रत्येक स्वातंत्र्य कोटि के साथ $- k_B T$ ऊर्जा जुड़ी होती है। अणु की कुल ऊर्जा के व्यंजक में प्रत्येक द्विघाती पद एक स्वातंत्र्य कोटि गिना जाना चाहिए। अतः, प्रत्येक कंपन-विधा में दो स्वातंत्र्य कोटि (न कि एक) होते हैं (गतिज एवं स्थितिज रूपों के संगत) जिनकी ऊर्जा $2 \times - k_B T = k_B T$ होती है।

4. किसी कमरे में वायु के सब अणु नीचे नहीं गिर जाते (गुरुत्व के कारण) तथा फर्श पर आकर नहीं ठहर जाते क्योंकि वह बहुत वेग से गतिमान होते हैं और निरंतर संघट्ट करते रहते हैं। साम्यावस्था में कम ऊँचाइयों पर घनत्व थोड़ा अधिक होता है (जैसे वायुमण्डल में)। इसका प्रभाव कम है, क्योंकि सामान्य ऊँचाइयों के लिए स्थितिज ऊर्जा (mgh) का मान अणु की औसत गतिज ऊर्जा $1/2\, mv^2$ की तुलना में काफी कम है।

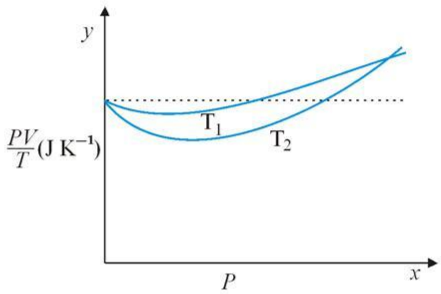
5. $< v^2 >$ सदैव $(< v >)^2$ के बराबर नहीं होता। किसी राशि के वर्ग का माध्य आवश्यक नहीं है कि उस राशि के माध्य के वर्ग के बराबर हो। क्या आप इस कथन की पुष्टि के लिए उदाहरण बता सकते हैं?

अभ्यास

13.1 ऑक्सीजन के अणुओं के आयतन और STP पर इनके द्वारा घेरे गए कुल आयतन का अनुपात ज्ञात कीजिए। ऑक्सीजन के एक अणु का व्यास 3 Å लीजिए।

13.2 मोलर आयतन, STP पर किसी गैस (आदर्श) के 1 मोल द्वारा घेरा गया आयतन है। (STP : 1 atm दाब, 0 °C)। दर्शाइये कि यह 22.4 लीटर है।

13.3 चित्र 13.8 में ऑक्सीजन के 1.00×10^{-3} kg द्रव्यमान के लिए PV/T एवं P में, दो अलग-अलग तापों पर ग्राफ दर्शाये गए हैं।



चित्र 13.8

(a) बिंदुकित रेखा क्या दर्शाती है?
(b) क्या सत्य है : $T_1 > T_2$ अथवा $T_1 < T_2$?
(c) y-अक्ष पर जहाँ वक्र मिलते हैं वहाँ PV/T का मान क्या है?
(d) यदि हम ऐसे ही ग्राफ 1.00×10^{-3} kg हाइड्रोजन के लिए बनाएँ तो भी क्या उस बिंदु पर जहाँ वक्र y-अक्ष से मिलते हैं PV/T का मान यही होगा? यदि नहीं तो हाइड्रोजन के कितने द्रव्यमान के लिए PV/T का मान (कम दाब और उच्च ताप के क्षेत्र के लिए वही होगा? H_2 का अणु द्रव्यमान = 2.02 u, O_2 का अणु द्रव्यमान = 32.0 u, R = 8.31 J mol^{-1} K^{-1})

13.4 एक ऑक्सीजन सिलिंडर जिसका आयतन 30 लीटर है, में ऑक्सीजन का आरंभिक दाब 15 atm एवं ताप 27 °C है। इसमें से कुछ गैस निकाल लेने के बाद प्रमापी (गेज) दाब गिर कर 11 atm एवं ताप गिर कर 17 °C हो जाता है। ज्ञात कीजिए कि सिलिंडर से ऑक्सीजन की कितनी मात्रा निकाली गई है। (R = 8.31 J mol^{-1} K^{-1}, ऑक्सीजन का अणु द्रव्यमान O_2 = 32 u)।

13.5 वायु का एक बुलबुला, जिसका आयतन 1.0 cm^3 है, 40 m गहरी झील की तली से जहाँ ताप 12 °C है, उठकर ऊपर पृष्ठ पर आता है जहाँ ताप 35 °C है। अब इसका आयतन क्या होगा?

13.6 एक कमरे में, जिसकी धारिता 25.0 m^3 है, 27 °C ताप और 1 atm दाब पर, वायु के कुल अणुओं (जिनमें नाइट्रोजन, ऑक्सीजन, जलवाष्प और अन्य सभी अवयवों के कण सम्मिलित हैं) की संख्या ज्ञात कीजिए।

13.7 हीलियम परमाणु की औसत तापीय ऊर्जा का आकलन कीजिए (i) कमरे के ताप (27 °C) पर। (ii) सूर्य के पृष्ठीय ताप (6000 K) पर। (iii) 100 लाख केल्विन ताप (तारे के क्रोड का प्रारूपिक ताप) पर।

13.8 समान धारिता के तीन बर्तनों में एक ही ताप और दाब पर गैसें भरी हैं। पहले बर्तन में नियॉन (एकपरमाणुक) गैस है, दूसरे में क्लोरीन (द्विपरमाणुक) गैस है और तीसरे में यूरेनियम हेक्साफ्लोराइड (बहुपरमाणुक) गैस है। क्या तीनों बर्तनों में गैसों के संगत अणुओं की संख्या समान है? क्या तीनों प्रकरणों में अणुओं की v_{rms} (वर्ग माध्य मूल चाल) समान है।

13.9 किस ताप पर आर्गन गैस सिलिंडर में अणुओं की v_{rms}, – 20 °C पर हीलियम गैस परमाणुओं की v_{rms} के बराबर होगी। (Ar का परमाणु द्रव्यमान = 39.9 u, एवं हीलियम का परमाणु द्रव्यमान = 4.0 u)।

13.10 नाइट्रोजन गैस के एक सिलिंडर में, 2.0 atm दाब एवं 17 °C ताप पर, नाइट्रोजन अणुओं के माध्य मुक्त पथ एवं संघट्ट आवृत्ति का आकलन कीजिए। नाइट्रोजन अणु की त्रिज्या लगभग 1.0 Å लीजिए। संघट्ट-काल की

तुलना अणुओं द्वारा दो संघट्टों के बीच स्वतंत्रतापूर्वक चलने में लगे समय से कीजिए। (नाइट्रोजन का आण्विक द्रव्यमान = 28.0 u)।

अतिरिक्त अभ्यास

13.11 1 मीटर लंबी संकरी (और एक सिरे पर बंद) नली क्षैतिज रखी गई है। इसमें 76 cm लंबाई भरा पारद सूत्र, वायु के 15 cm स्तंभ को नली में रोककर रखता है। क्या होगा यदि खुला सिरा नीचे की ओर रखते हुए नली को ऊर्ध्वाधर कर दिया जाए।

13.12 किसी उपकरण से हाइड्रोजन गैस 28.7 $cm^3\ s^{-1}$ की दर से विसरित हो रही है। उन्हीं स्थितियों में कोई दूसरी गैस 7.2 $cm^3\ s^{-1}$ की दर से विसरित होती है। इस दूसरी गैस को पहचानिए।
[**संकेत** : ग्राहम के विसरण नियम $R_1/R_2 = (M_2/M_1)^{1/2}$ का उपयोग कीजिए, यहाँ R_1, R_2 क्रमशः गैसों की विसरण दर तथा M_1 एवं M_2 उनके आण्विक द्रव्यमान हैं। यह नियम अणुगति सिद्धांत का एक सरल परिणाम है।

13.13 साम्यावस्था में किसी गैस का घनत्व और दाब अपने संपूर्ण आयतन में एकसमान हैं । यह पूर्णतया सत्य केवल तभी है जब कोई भी बाह्य प्रभाव न हो । उदाहरण के लिए, गुरुत्व से प्रभावित किसी गैस स्तंभ का घनत्व (और दाब) एकसमान नहीं होता है । जैसा कि आप आशा करेंगे इसका घनत्व ऊँचाई के साथ घटता है । परिशुद्ध निर्भरता 'वातावरण के नियम' $n_2 = n_1 \exp\left[-\frac{mg}{k_BT}(h_2 - h_1)\right]$ से दी जाती है, यहाँ n_2, n_1 क्रमशः h_2 व h_1 ऊँचाइयों पर संख्यात्मक घनत्व को प्रदर्शित करते हैं । इस संबंध का उपयोग द्रव स्तंभ में निलंबित किसी कण के अवसादन साम्य के लिए समीकरण $n_2 = n_1 \exp\left[-\frac{mg\ N_A}{\rho RT}(\rho - \rho')\ (h_2 - h_1)\right]$ को व्युत्पन्न करने के लिए कीजिए, यहाँ ρ निलंबित कण का घनत्व तथा ρ' चारों तरफ के माध्यम का घनत्व है । N_A आवोगाद्रो संख्या, तथा R सार्वत्रिक गैस नियतांक है । [**संकेत :** निलंबित कण के आभासी भार को जानने के लिए आर्किमिडीज के सिद्धांत का उपयोग कीजिए ।]

13.14 नीचे कुछ ठोसों व द्रवों के घनत्व दिए गए हैं । उनके परमाणुओं की आमापों का आकलन (लगभग) कीजिए।

पदार्थ	परमाणु द्रव्यमान (u)	घनत्व (10^3 kg m^{-3})
कार्बन (हीरा)	12.01	2.22
गोल्ड	197.00	19.32
नाइट्रोजन (द्रव)	14.01	1.00
लिथियम	6.94	0.53
फ्लुओरीन (द्रव)	19.00	1.14

[**संकेत :** मान लीजिए कि परमाणु ठोस अथवा द्रव प्रावस्था में 'दृढ़ता से बँधे' हैं, तथा आवोगाद्रो संख्या के ज्ञात मान का उपयोग कीजिए। फिर भी आपको विभिन्न परमाण्वीय आकारों के लिए अपने द्वारा प्राप्त वास्तविक संख्याओं का बिलकुल अक्षरशः प्रयोग नहीं करना चाहिए क्योंकि दृढ़ संवेष्टन सन्निकटन की रूक्षता के परमाणवीय आकार कुछ Å के परास में हैं।]

अध्याय 14

दोलन

14.1 भूमिका

हम अपने दैनिक जीवन में विभिन्न प्रकार की गतियाँ देखते हैं। इनमें से कुछ जैसे सरल रैखिक गति और किसी प्रक्षेप्य की गति के विषय में तो आप अध्ययन कर ही चुके हैं। ये दोनों ही गतियाँ अनावर्ती होती हैं। हमने एकसमान वर्तुल गति तथा सौर परिवार में ग्रहों की कक्षीय गतियों के विषय में भी अध्ययन कर लिया है। इन उदाहरणों में निश्चित समय-अंतराल के पश्चात् गति की पुनरावृत्ति होती है, अर्थात् यह आवर्ती होती है। आपने बचपन में अपने पालने अथवा झूले पर झूलने का आनन्द लिया होगा। यह दोनों गतियाँ पुनरावर्ती होती हैं, परंतु किसी ग्रह की आवर्ती गति से भिन्न होती हैं। यहाँ वस्तु किसी माध्य स्थिति के इधर-उधर गति करती है। दीवार-घड़ी का लोलक भी इसी प्रकार की गति करता है। इस प्रकार की अग्र-पश्च (आगे-पीछे) आवर्ती गति के प्रचुर उदाहरण हैं– नदी में डूबती-उतरती हुई नाव, वाष्प इंजन में अग्र और पश्च चलता हुआ पिस्टन आदि। इस प्रकार की गति को **दोलन गति** कहते हैं। इस अध्याय में हम इस गति के बारे में अध्ययन करेंगे।

दोलन गति का अध्ययन भौतिकी के लिए आधारभूत है; बहुत-सी भौतिक परिघटनाओं को समझने के लिए इसकी संकल्पना की आवश्यकता होती है। वाद्य यंत्रों; जैसे-सितार, गिटार अथवा वायलिन में हम कंपायमान डोरियों द्वारा रोचक ध्वनियाँ उत्पन्न होते हुए देखते हैं। ढोलों में झिल्लियाँ तथा टेलीफोन और ध्वनि विस्तारकों के स्पीकरों में डायफ्राम अपनी माध्य स्थिति के इधर-उधर कंपन करते हैं। वायु के अणुओं के कंपनों द्वारा ही ध्वनि-संचरण संभव हो पाता है। एक ठोस पदार्थ में अणु अपनी माध्य स्थितियों के परित: कम्पन करते हैं, कम्पन की औसत ऊर्जा तापमान के समानुपाती होती है। AC पावर ऐसी वोल्टता का संभरण करता है जो माध्य मान (शून्य) के धनात्मक तथा ऋणात्मक ओर एकांतर क्रम से दोलायमान रहता है।

किसी आवर्ती गति के व्यापक तथा दोलन गति के विशेष विवरण के लिए कुछ मूल संकल्पनाओं; जैसे–आवर्तकाल, आवृत्ति, विस्थापन, आयाम और कला की आवश्यकता होती है। अगले अनुभाग में इन संकल्पनाओं को विकसित किया गया है।

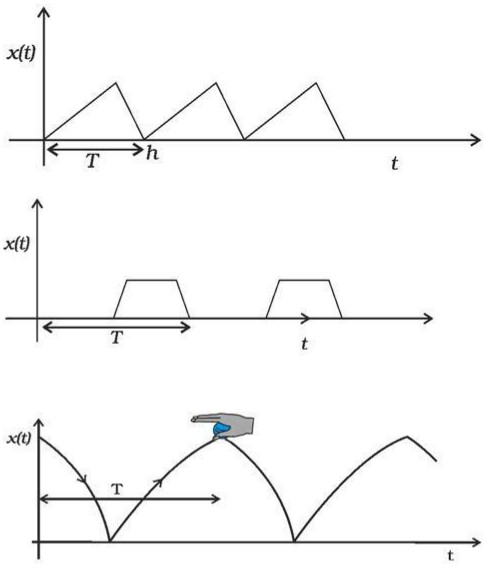
14.2 दोलन और आवर्ती गति

चित्र 14.1 में कुछ आवर्ती गतियाँ दर्शाई गई हैं। मान लीजिए कोई कीट किसी रैम्प पर चढ़ता है और गिर जाता है। वह अपने प्रारंभिक स्थान पर आ जाता है और इस प्रक्रिया को बार-बार दोहराता है। यदि आप जमीन से ऊपर इसकी ऊँचाई तथा समय के बीच ग्राफ खींचें तो यह चित्र 14.1(a) की तरह दिखेगा। यदि कोई बालक किसी सीढ़ी पर चढ़े और उतरे तथा इस प्रक्रिया को बार-बार दोहराये तो उसकी ऊँचाई तथा समय के बीच ग्राफ चित्र 14.1(b) के जैसा दिखेगा। जब आप किसी गेंद को अपनी हथेली से जमीन की तरफ बार-बार मारते हैं तो इसकी ऊँचाई और समय के बीच ग्राफ 14.3(c) के जैसा दिखेगा। ध्यान दीजिए कि चित्र 14.1(c) में दोनों वक्रीय भाग न्यूटन की गति समीकरण के अनुसार परवलय के अंश हैं, अनुभाग (3.6) देखिए।

$h = ut + \frac{1}{2}gt^2$ अधोमुखी गति के लिए, तथा

$h = ut - \frac{1}{2}gt^2$ उपरिमुखी गति के लिए,

इन समीकरणों में u का मान अलग परिस्थितियों के लिए भिन्न होगा। ये सभी आवर्ती गति के उदाहरण हैं। अत: कोई गति जो निश्चित अंतराल के बाद पुनरावृत्ति करती है ***आवर्ती गति*** कहलाती है।



चित्र 14.1 आवृत्ति गति के उदाहरण। प्रत्येक अवस्था में आवर्तकाल T दर्शाया गया है।

सामान्यत: आवर्ती गति करने वाले पिण्ड की एक संतुलन अवस्था होती है जो उसके गति के पथ में स्थित होता है। जब पिण्ड इस संतुलन अवस्था में होता है तो उस पर लगने वाला कुल बाह्य बल शून्य होता है। अत: यदि पिण्ड को इस अवस्था में विराम की स्थिति में छोड़ दें तो यह सदैव विरामावस्था में रहेगा। यदि पिण्ड को इस अवस्था से थोड़ा सा विस्थापित करें तो पिण्ड पर एक बल कार्य करने लगता है जो पिण्ड को पुन: उसकी संतुलन-अवस्था की ओर ले जाने का प्रयास करता है और फलस्वरूप पिण्ड में **दोलन** या **कंपन** उत्पन्न हो जाता है। उदाहरण के लिए यदि किसी कटोरे में एक गेंद रख दें तो गेंद कटोरे की तली पर संतुलन अवस्था में होती है। यदि इसको इस बिंदु से थोड़ा विस्थापित करें तो गेंद कटोरे में दोलन करने लगती है। प्रत्येक दोलन गति आवर्ती होती है परंतु प्रत्येक आवर्ती गति दोलनीय नहीं होती। वर्तुल गति भी आवर्ती होती है, परंतु दोलनीय नहीं होती है।

दोलन एवं कंपन में कोई मुख्य अंतर नहीं है। साधारणत: जब आवृत्ति का मान कम होता है तो हम गति को दोलनीय कहते हैं (जैसे किसी वृक्ष की टहनी की दोलन गति)। इसके विपरीत जब गति की आवृत्ति अधिक होती है तो हम गति को कंपन कहते हैं। जैसे किसी संगीत वाद्य के तार का कंपन।

सरल आवर्ती गति दोलनीय गति का एक सरल रूप है। यह तब होता है जब किसी दोलनीय वस्तु के ऊपर लगने वाला बल संतुलन अवस्था में इसके विस्थापन के समानुपाती होता है। पुन: वस्तु के दोलन के दौरान यह बल सदैव इस संतुलन अवस्था की तरफ निदेशित होता है। यह संतुलन अवस्था वस्तु की गति की माध्य स्थिति भी होती है।

व्यावहारिक रूप में सभी दोलनीय वस्तुएँ अंततोगत्वा अपनी संतुलन अवस्था को प्राप्त कर लेती हैं। क्योंकि इनकी गति में घर्षण तथा अन्य क्षयकारी बलों के कारण अवमंदन उत्पन्न होता है। परंतु कोई बाह्य आवर्ती बल लगाकर हम वस्तु को दोलनीय अवस्था में रख सकते हैं। इस पाठ के अंतिम अनुभागों में हम अवमंदित तथा प्रणोदित दोलनों का अध्ययन करेंगे।

किसी भी द्रव्यात्मक माध्यम को हम युग्मित दलित्रों का एक बड़ा समूह मान सकते हैं। इन दलित्रों के सामूहिक दोलन तरंग का रूप लेते हैं। जल तरंग, भूकम्पित तरंगें, विद्युत चुंबकीय तरंगें इन तरंगों के उदाहरण हैं। तरंगीय घटनाओं के विषय में हम अगले अध्याय में अध्ययन करेंगे।

14.2.1 आवर्तकाल तथा आवृत्ति

हमने देखा है कि कोई गति जिसकी किसी नियमित समय अंतराल पर स्वयं पुनरावृत्ति होती है **आवर्ती गति** कहलाती है। ***वह न्यूनतम समय अंतराल जिसके पश्चात् गति की पुनरावृत्ति होती है, इसका आवर्तकाल कहलाता है।*** अत: समय को हम

T द्वारा दर्शाते हैं। इसका SI मात्रक सेकंड है । उन आवर्ती गतियों के लिए, जो सेकंडों के पैमाने पर या तो बहुत तीव्र अथवा बहुत मंद होती हैं, समय के अन्य सुविधाजनक मात्रक उपयोग में लाए जाते हैं । किसी क्वार्ट्ज़ क्रिस्टल का कंपन काल माइक्रोसेकंड (10^{-6} s) के मात्रकों, जिसका प्रतीक μs है, में व्यक्त किया जाता है । इसके विपरीत बुध ग्रह की कक्षीय अवधि 88 भू-दिवस होती है। हेली धूमकेतु हर 76 वर्ष के पश्चात् पुन: दृष्टिगोचर होता है।

आवर्तकाल 'T के व्युत्क्रम से हमें प्रति इकाई समय में दोलनों की संख्या प्राप्त होती है । यह राशि **आवर्ती गति की आवृत्ति** कहलाती है । इसे प्रतीक υ द्वारा निरूपित किया जाता है । ν तथा T के मध्य निम्नलिखित पारस्परिक संबंध होता है:

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{14.1}$$

इस प्रकार ν का मात्रक (s^{-1}) है । रेडियो तरंगों के आविष्कारक हेनरिख रुडोल्फ हर्ट्ज़ (1857-1894) के नाम पर आवृत्ति के मात्रक को एक विशेष नाम दिया गया । इसे हर्ट्ज़ (hertz प्रतीक Hz) कहते हैं । इस प्रकार,

$$1 \text{ हर्ट्ज़} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ दोलन प्रति सेकंड} = 1 s^{-1} \tag{14.2}$$

ध्यान दीजिए, आवृत्ति का सदैव ही पूर्णांक होना आवश्यक नहीं है।

> **उदाहरण 14.1** कोई मानव हृदय एक मिनट में औसतन 75 बार धड़कन करता पाया जाता है । इसकी आवृत्ति तथा आवर्तकाल परिकलित कीजिए ।

हल हृदय की धड़कन की आवृत्ति = 75/(1 मिनट)

= 75/(60 s)

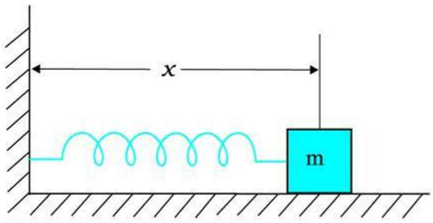
= 1.25 s^{-1}

आवर्तकाल, T = 1/(1.25 s^{-1})

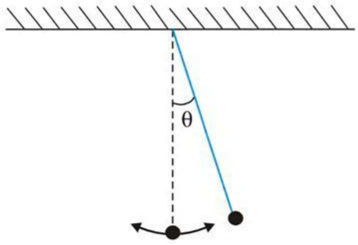
= 0.8 s

14.2.2 विस्थापन

अनुभाग 4.2 में हमने किसी कण के विस्थापन को उसके स्थिति सदिश में परिवर्तन के रूप में परिभाषित किया था । इस अध्याय में हम विस्थापन नामक इस पद का उपयोग अधिक व्यापक अर्थों में करेंगे । यह किसी भी विचारणीय भौतिक गुण में समय के साथ परिवर्तन को निरूपित करेगा । उदाहरण के लिए, एक पृष्ठ पर किसी स्टील बॉल की सरल रेखीय गति के लिए, समय के फलन के रूप में आरंभ बिंदु से बॉल की दूरी इसका **स्थिति-विस्थापन** है । मूल बिंदु का चुनाव सुविधानुसार किया जा सकता है । मान लीजिए कोई गुटका किसी कमानी से जुड़ा है जिसका दूसरा सिरा किसी दृढ़ दीवार से संबद्ध है [देखिए चित्र 14.2 (a)] साधारणत: किसी पिण्ड का विस्थापन इसकी संतुलन अवस्था से मापना सरल होगा। किसी दोलायमान



चित्र 1.4.2(a) कोई गुटका किसी कमानी से संलग्न, जिसका दूसरा सिरा किसी दृढ़ दीवार से संबद्ध है । गुटका घर्षण रहित पृष्ठ पर गति करता है । गुटके की गति को दीवार से दूरी, अथवा विस्थापन x के पदों में व्यक्त किया जा सकता है ।



चित्र 14.2(b) एक दोलायमान सरल लोलक, इसकी गति को ऊर्ध्वाधर से कोणीय विस्थापन θ के पदों में व्यक्त किया जा सकता है ।

सरल लोलक के लिए, समय के फलन के रूप में ऊर्ध्वाधर से कोण को विस्थापन-चर के रूप में निरूपित किया जा सकता है [देखिए चित्र 14.2(b)]। 'विस्थापन' पद का उल्लेख सदैव स्थिति के संदर्भ में ही नहीं किया जाता। विस्थापन चर कई अन्य प्रकार के भी हो सकते हैं । किसी a.c. परिपथ में संयोजित संधारित्र के सिरों के बीच समय के साथ परिवर्तित हो रही "वोल्टता" को भी एक विस्थापन चर के रूप में लिया जा सकता है । इसी प्रकार, ध्वनि तरंगों के संचरण में समय के साथ 'दाब' में परिवर्तन, प्रकाश तरंगों में परिवर्तित हो रहे वैद्युत तथा चुंबकीय क्षेत्र अन्य संदर्भों में विस्थापन के उदाहरण हैं। विस्थापन चर का मान धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है। दोलनों के प्रयोगों में, भिन्न समयों के लिए विस्थापन चरों की माप ली जाती है ।

विस्थापन को सदैव ही समय के गणितीय फलन द्वारा निरूपित किया जा सकता है । आवर्ती गतियों में यह फलन समय का आवर्ती होता है । आवर्ती फलनों में से एक सरलतम आवर्ती फलन को निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं,

$$f(t) = A\cos\omega t \qquad (14.3a)$$

यदि इस फलन के कोणांक, ωt, में 2π रेडियन या इसके किसी पूर्णांक गुणज की वृद्धि कर दी जाए, तो फलन का मान वही f रहता है । तब भी फलन $f(t)$ आवर्ती ही रहता है जिसका आवर्तकाल, T निम्नलिखित होगा,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (14.3b)$$

अत: कोई फलन $f(t)$ काल T का आवर्ती होता है,

$$f(t) = f(t+T)$$

यदि हम ज्या (sin) फलन, $f(t) = A\sin\omega t$ भी लें तो स्पष्ट रूप से यही परिणाम सही होता है । साथ ही ज्या (sin) एवं कोज्या (cos) फलनों का एक घात संचय, जैसे

$$f(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \qquad (14.3c)$$

भी आवर्ती फलन होता है, जिसका आवर्तकाल T होता है । यदि हम

$A = D\cos\phi$ तथा $B = D\sin\phi$

लें, तो समीकरण (14.3c) को इस प्रकार लिख सकते हैं

$$f(t) = D\sin(\omega t + \phi)\,, \qquad (14.3d)$$

यहाँ अचर D और ϕ दिए गए हैं

$D = \sqrt{A^2 + B^2}$ तथा $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$

आवर्ती ज्या और कोज्या फलनों का विशेष महत्त्व फ्रांसीसी गणितज्ञ जीन बापटिस्ट जोसेफ फूरिए (1768–1830) द्वारा सिद्ध असाधारण परिणाम के कारण है, जो इस प्रकार है : *किसी भी आवर्ती फलन को उचित गुणांक वाले विभिन्न आवर्तकाल के ज्या व कोज्या फलनों के अध्यारोपण द्वारा व्यक्त किया जा सकता है ।*

उदाहरण 14.2 निम्नलिखित समय के फलनों में कौन (a) आवर्ती तथा (b) अनावर्ती गति को निरूपित करते हैं ? प्रत्येक आवर्ती गति का आवर्तकाल लिखिए [ω कोई धनात्मक नियतांक है] ।

(i) $\sin\omega t + \cos\omega t$

(ii) $\sin\omega t + \cos 2\omega t + \sin 4\omega t$

(iii) $e^{-\omega t}$

(iv) $\log(\omega t)$

हल (i) $\sin\omega t + \cos\omega t$ एक आवर्ती फलन है। इसे $\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है।

अब, $\sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/4) = \sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/4 + 2\pi)$

$$= \sqrt{2}\sin\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \frac{\pi}{4}\right]$$

इस फलन का आवर्तकाल $\frac{2\pi}{\omega}$ है ।

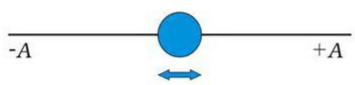
(ii) यह आवर्ती गति का एक उदाहरण है । ध्यान दीजिए, यहाँ प्रत्येक पद एक विभिन्न कोणीय आवृत्ति के आवर्ती फलन को निरूपित करता है । चूँकि आवर्तकाल वह न्यूनतम समय अंतराल होता है जिसके पश्चात् फलन अपने मान की स्वयं पुनरावृत्ति करता है, $\sin\omega t$ का आवर्तकाल $T_0 = 2\pi/\omega$; $\cos 2\omega t$ का आवर्तकाल $\pi/\omega = T_0/2$; तथा $\sin 4\omega t$ का आवर्तकाल $2\pi/4\omega = T_0/4$ होता है । प्रथम पद का आवर्तकाल अंतिम दो पदों के आवर्तकालों का गुणनफल होता है। अत: अंतिम समय का निम्न अंतराल जिसके उपरांत तीनों पदों का योग पुनरावृत्ति करता है T_0 होता है जिसका आवर्त काल $2\pi/\omega$ है।

(iii) फलन $e^{-\omega t}$ अनावर्ती है, यह समय में वृद्धि के साथ एक दिष्टत: घटता है तथा $t\to\infty$ होने पर शून्य की ओर प्रवृत्त होता है और इस प्रकार कभी भी अपने मान की पुनरावृत्ति नहीं करता ।

(iv) फलन $\log(\omega t)$ समय के साथ एकदिष्टत: बढ़ता है । अत: यह अपने मान की कभी भी पुनरावृत्ति नहीं करता और यह एक अनावर्ती फलन है । ध्यान दीजिए, $t\to\infty$ होने पर $\log\omega t$ अपसारित होकर ∞ तक पहुँच जाता है। अत: यह किसी भी प्रकार के भौतिक विस्थापन को निरूपित नहीं कर सकता । ◂

14.3 सरल आवर्त गति

हम चित्र 14.3 के अनुसार x-अक्ष के मूल बिंदु पर $+A$ और $-A$ चरम सीमाओं के मध्य अग्र और पश्च कंपन करने वाले किसी कण पर विचार करें । इस दोलायमान गति को सरल

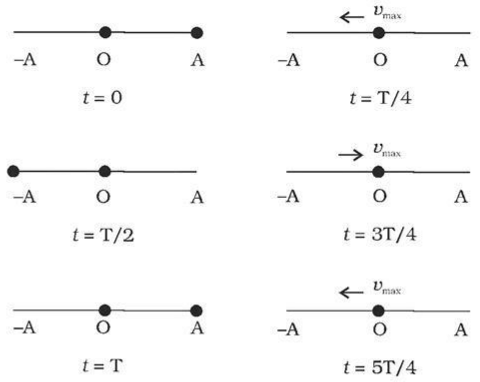


चित्र 14.3 x-अक्ष के मूल बिंदु पर $+A$ और $-A$ सीमाओं के भीतर अग्र और पश्च कंपन करते हुए कोई कण ।

आवर्त गति कहते हैं, यदि मूल बिन्दु से कण का विस्थापन x समय के साथ निम्न समीकरण के अनुसार परिवर्तित हो:

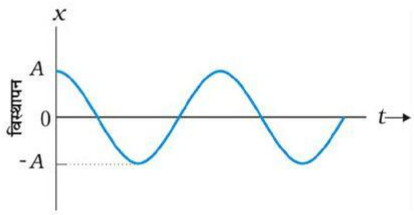
$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad (14.4)$$

यहाँ A, ω तथा ϕ स्थिरांक हैं। अत: प्रत्येक आवर्त गति सरल आवर्त गति (SHM) नहीं है; केवल ऐसी आवर्त गति जिसमें विस्थापन-समय का फलन ज्यावक्रीय है, सरल आवर्त गति होती है। चित्र 14.4 में सरल आवर्त गति करते हुए एक कण की



चित्र 14.4 सरल आवर्त गति करते हुए समय के असतत मान $t = 0$, $T/4$, $T/2$, $3T/4$, T, $5T/4$ पर कण की स्थिति। वह समय जिसके पश्चात गति की पुनरावृत्ति होती है, T कहलाती है। प्रारंभिक स्थिति ($t = 0$) आप कुछ भी चुनें, T का मान स्थिर रहेगा। कण की चाल शून्य विस्थापन ($x = 0$ पर) पर अधिकतम तथा गति की चरम स्थितियों पर शून्य होती है।

समय के असतत् मानों पर स्थिति दर्शायी गई है। प्रत्येक समय अन्तराल $T/4$ है जहाँ T गति का आवर्तकाल है।



चित्र 14.5 सरल आवर्त गति करते हुए कण का विस्थापन समय के सतत फलन के रूप में

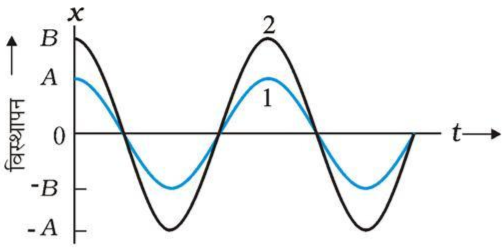
चित्र 14.5 में x के साथ t का ग्राफ आलेखित है जो समय के सतत फलन के रूप में कण के विस्थापन का मान देती है। राशियाँ A, ω तथा ϕ जो दी गई आवर्त गति की विशेषता बताती

$x(t)$	:	विस्थापन x, समय t के फलन के रूप में
A	:	आयाम
ω	:	कोणीय आवृत्ति
$\omega t + \phi$	:	कला (समय पर आश्रित)
ϕ	:	कला स्थिरांक

चित्र 14.6 समीकरण (14.4) में दिए मानक संकेतों का अर्थ

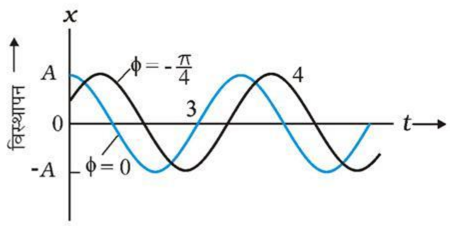
हैं, के मानक नाम हैं, जैसा कि चित्र 14.6 में संक्षिप्त किया गया है। आइए, इन राशियों को हम समझें।

SHM का आयाम A, कण के अधिकतम विस्थापन का परिमाण होता है। [ध्यान दें, व्यापकीकृकता के बिना किसी नुकसान के, A को धनात्मक लिया जा सकता है]। चूंकि समय का कोज्या फलन +1 से –1 के बीच विचरण करता है, इसलिए विस्थापन चरम स्थिति $+A$ से $-A$ के बीच विचरण करेगा। दो सरल आवर्त गतियों के ω तथा ϕ समान, लेकिन आयाम अलग हो सकते हैं, जैसा कि चित्र 14.7(a) में दिखाया गया है।



चित्र 14.7(a) समीकरण (14.4) से प्राप्त $\phi = 0$ पर समय के फलन के रूप में विस्थापन का आलेख । वक्र 1 और 2 दो भिन्न आयामों A तथा A के लिए हैं ।

जब किसी दिए गए आवर्त गति का आयाम A नियत है, किसी समय t पर कण की गति की आवस्था को कोज्या फलन के कोणांक ($\omega t + \phi$) के द्वारा दर्शाया जाता है। समय पर आश्रित रहने वाली इस राशि ($\omega t + \phi$) को गति की कला कहते हैं। $t = 0$ पर कला का परिमाण ϕ होता है जिसे कला नियतांक (अथवा कला-कोण) कहते हैं। यदि आयाम ज्ञात हो तो $t = 0$ पर के विस्थापन मान से ϕ ज्ञात किया जा सकता है। दो सरल आवर्त गतियों के A तथा ω समान लेकिन कला-कोण ϕ विभिन्न हो सकते हैं, जैसा कि चित्र 14.7 (b) में दर्शाया गया है।



चित्र 14.7(b) समीकरण (14.4) से प्राप्त (x-t) आलेख । वक्र 3 तथा 4 क्रमशः कला कोण ϕ = 0 rad तथा $\phi = -\pi/4$ rad के लिए हैं । दोनों आलेखों के लिए आयाम A समान है।

अंततः राशि ω को गति के आवर्तकाल T से संबंधित देखा जा सकता है। सरलता के लिए समीकरण (14.4) में ϕ = 0 rad लेने पर हमें प्राप्त होता है–

$$x(t) = A\cos \omega t \qquad (14.5)$$

चूंकि गति का आवर्तकाल T है, $x(t)$ का मान $x(t+T)$ के समान होगा। अर्थात्,

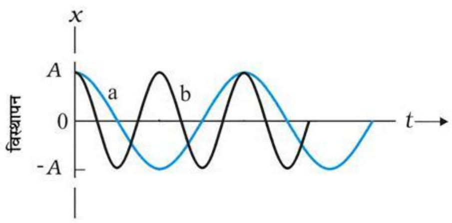
$$A\cos \omega t = A\cos \omega(t+T) \qquad (14.6)$$

अब चूँकि 2π आवर्त काल वाला कोज्या फलन आवर्ती है, अर्थात् जब कोणांक 2π रेडियन से परिवर्तित होता है, यह प्रथम बार स्वयं की पुनरावृत्ति करता है। अतः

$$\omega(t+T) = \omega t + 2\pi$$

अर्थात् $$\omega = 2\pi/T \qquad (14.7)$$

ω को SHM की कोणीय आवृत्ति कहते हैं। इसका S.I. मात्रक रेडियन प्रति सेकेंड है। चूंकि दोलन की आवृत्ति मात्र $1/T$ है, ω दोलन की आवृत्ति का 2π गुणा होता है। दो सरल आवर्त गति के A तथा ϕ समान, किन्तु ω विभिन्न हो सकते हैं, जैसा कि चित्र 11.8 में देखा जा सकता है। इस आलेख में वक्र b का आवर्त काल वक्र a के आवर्त काल का आधा है जबकि इसकी आवृत्ति वक्र a की आवृत्ति की दुगुनी है।



चित्र 14.8 समीकरण (14.4) के ϕ = 0 rad पर दो भिन्न आवर्तकालों के लिए आलेख।

उदाहरण 14.3 समय के निम्नलिखित फलनों में से कौन (a) सरल आवर्त गति तथा (b) आवर्ती गति को निरूपित करता है परंतु सरल आवर्त गति नहीं ? प्रत्येक का आवर्तकाल निकालिए ।

(a) $\sin \omega t - \cos \omega t$

(b) $\sin^2 \omega t$

हल (a) $\sin \omega t - \cos \omega t$

$= \sin \omega t - \sin(\pi/2 - \omega t)$

$= 2\cos(\pi/4)\sin(\omega t - \pi/4)$

$= \sqrt{2}\sin(\omega t - \pi/4)$

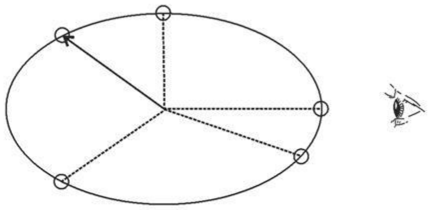
यह फलन सरल आवर्त गति का निरूपण करता है, जिसका आवर्तकाल $T = 2\pi/\omega$ तथा कला-कोण $(-\pi/4)$ rad अथवा $(7\pi/4)$ rad है ।

(b) $\sin^2 \omega t = ½ - ½ \cos 2\omega t$

यह फलन आवर्ती है, जिसका आवर्तकाल $T = \pi/\omega$ है । ये संतुलन बिंदु शून्य के बदले ½ पर सरल आवर्त गति को भी दर्शाता है। ◄

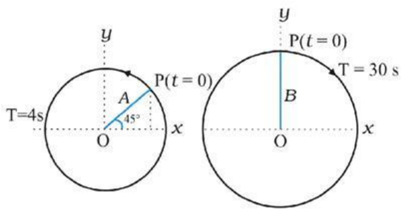
14.4 सरल आवर्त गति तथा एकसमान वर्तुल गति

इस अनुभाग में हम देखेंगे कि वृत्त के व्यास पर एकसमान वर्तुल गति का प्रक्षेप सरल आवर्त गति करता है। एक सरल प्रयोग (चित्र 14.9) इस संबंध की सजीव कल्पना करने में हमारी मदद करता है। एक गेंद को किसी डोरी के सिरे से बाँधकर क्षैतिज तल में उसे किसी निश्चित बिंदु के परितः अचर कोणीय चाल से गति कराइये। तब गेंद क्षैतिज तल में एकसमान वर्तुल गति करेगी। अपनी आंख को गति के तल पर केन्द्रित रखते हुए तिरछी ओर से अथवा सामने से गेंद का अवलोकन कीजिए। घूर्णन बिन्दु को यदि हम मध्य बिन्दु मानें तो यह गेंद एक क्षैतिज तल के अनुदिश इधर-उधर गति करती हुई प्रतीत होगी। विकल्पतः आप गेंद की परछाईं वृत्त के तल के लंबवत् किसी दीवार पर भी देख सकते हैं। इस प्रक्रिया में हम जो कुछ अवलोकन करते हैं, वास्तव में वह हमारी दृष्टि की दिशा के अभिलंबवत् व्यास पर बॉल की गति होती है।



चित्र 14.9 किनारे से देखे गए एक समतल में बॉल की वृत्तीय गति सरल आवर्त गति है।

चित्र 14.10 इसी स्थिति को गणितीय रूप में वर्णन करता है। मान लीजिए कोई कण P, त्रिज्या A के एक वृत्त पर कोणीय चाल ω से एकसमानीय गति कर रहा है। घूमने की दिशा वामावर्त है। कण की प्रारंभिक 'स्थिति सदिश' अर्थात् $t = 0$ पर सदिश $\overline{OP}$, धनात्मक x अक्ष के साथ कोण ϕ बनाता है।



चित्र 14.10

t समय के बाद यह अगला कोण ωt पूरा करता है और इसकी 'स्थिति सदिश' +ve x-अक्ष के साथ एक कोण $\omega t+\phi$ बनाती है। अब x-अक्ष पर 'स्थिति सदिश' OP के प्रक्षेप पर विचार करें। यह OP′ होगा। जब कण P वृत्त पर गति करता है तो x-अक्ष पर P′ की स्थिति प्रदत्त की जाती है

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

जो कि SHM का पारिभाषिक समीकरण है। यह दर्शाता है कि यदि P किसी वृत्त पर एकसमानीय गति करता है तो इसका प्रक्षेप P′ वृत्त के व्यास पर सरल आवर्त गति करता है। कण P तथा वह वृत्त जिसपर यह गति करता है उसे क्रमशः संदर्भ कण तथा संदर्भ वृत्त कहते हैं।

P की गति के प्रक्षेप को हम किसी भी व्यास, जैसे कि y-अक्ष पर ले सकते हैं। इस स्थिति में y-अक्ष पर P′ का विस्थापन $y(t)$ होगा।

$$y(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

यह भी एक SHM है जिसका आयाम x-अक्ष पर प्रक्षेप के समान ही है, लेकिन इसकी कला $\pi/2$ से भिन्न है।

वर्तुल गति तथा SHM के बीच इस संबंध के बावजूद रैखिक सरल आवर्ती गति में किसी कण पर लगता हुआ बल किसी कण को एकसमान वर्तुल गति में रखने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल से काफी अलग है।

उदाहरण 14.4 चित्र 14.10 में दो वर्तुल गतियाँ दर्शायी गई हैं। इन चित्रों पर वृत्त की त्रिज्या, घूर्णन का आवर्तकाल, आरंभिक स्थिति तथा घूर्णन की दिशा अंकित की गई है। प्रत्येक स्थिति में घूर्णी कण P के त्रिज्या सदिश के x-प्रक्षेप की सरल आवर्त गति प्राप्त कीजिए।

हल

(a) $t = 0$ पर, OP x-अक्ष (की धनात्मक दिशा) से $45° = \pi/4$ rad का कोण बनाता है। t समय पश्चात् यह वामावर्त दिशा में $\frac{2\pi}{T}t$ rad कोण पूरा करता है, तथा x-अक्ष से $\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4}\right)$ rad कोण बनाता है। समय t पर x-अक्ष पर OP के प्रक्षेप इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$x(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$T = 4$ s के लिए

$$x(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

जो कि A आयाम, 4 s आवर्तकाल तथा प्रारंभिक कला* $\frac{\pi}{4}$ की सरल आवर्त गति है।

(b) इस स्थिति में $t = 0$ पर, OP x-अक्ष से $90° = \pi/2$ का कोण बनाता है। यह दक्षिणावर्त दिशा में $\frac{2\pi}{T}t$ कोण

* कोण की प्राकृतिक इकाई रेडियन है जिसे त्रिज्या की चाप के अनुपात द्वारा परिभाषित करते हैं। कोण अदिश राशि है। जब हम π को उसके बहुगुण या अपवर्तक लिखते हैं तो रेडियन इकाई का उल्लेख करना आवश्यक नहीं है। रेडियन और डिग्री के बीच रूपांतरण, मीटर, सेंटीमीटर या मील के बीच रूपांतरण के समरूप नहीं है। यदि किसी त्रिकोणमितीय फलन के कोणांक में इकाई नहीं दिया है तो मानना चाहिए कि इकाई रेडियन है। यदि कोण की इकाई डिग्री है तो उसको स्पष्टतः दर्शाना होगा। उदाहरण के लिए $\sin(15°)$ का अर्थ है 15 डिग्री का sin। परन्तु sin (15) का तात्पर्य 15 रेडियन का sin है। आगे से 'rad' इकाई नहीं दर्शाया जाएगा। जब भी कोण का अंकिक मान बिना इकाई के दिया हुआ है तो इकाई वास्तव में रेडियन है।

पूरा करता है, तथा x-अक्ष से $\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{T}t\right)$ कोण बनाता है । समय t पर x-अक्ष पर OP प्रक्षेप को इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$x(t) = B\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$= B\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$T = 30$ s के लिए,

$$x(t) = B\sin\left(\frac{\pi}{15}t\right)$$

इसे इस प्रकार $x(t) = B\cos\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)$ लिखकर इसकी समीकरण (14.4) से तुलना करने पर हमें यह ज्ञात होता है कि यह B आयाम, 30 s आवर्तकाल तथा प्रारंभिक कला $-\frac{\pi}{2}$ rad की सरल आवर्त गति को निरूपित करता है । ◂

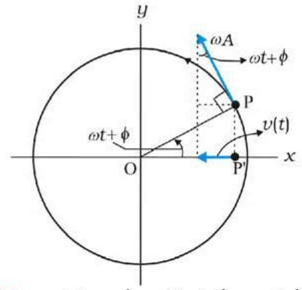
14.5 सरल आवर्त गति में वेग तथा त्वरण

एकसमानीय वर्तुल गति करते हुए किसी कण की चाल इसकी कोणीय चाल गुणा वृत्त की त्रिज्या A के बराबर होती है।

$$v = \omega A \qquad (14.8)$$

किसी समय t पर, वेग $\bar{v}$ की दिशा वृत्त के उस बिन्दु पर स्पर्शज्या के अनुदिश होती है जहाँ कण उस क्षण पर अवस्थित रहता है। चित्र 14.11 की ज्यामिति से यह स्पष्ट है कि समय t पर प्रक्षेप कण P′ का वेग है

$$v(t) = -\omega A\sin(\omega t + \phi) \qquad (14.9)$$



चित्र 14.11 कण P′ का वेग $v(t)$ संदर्भ कण P के वेग $\bar{v}$ का प्रक्षेप है ।

यहाँ ऋणात्मक चिह्न यह दर्शाता है कि $v(t)$ की दिशा x-अक्ष की धनात्मक दिशा के विपरीत है। समीकरण (14.9), सरल आवर्त गति करते हुए कण की तात्क्षणिक वेग प्रदत्त करता है, जहाँ विस्थापन समीकरण (14.4) से प्राप्त होता है। निस्संदेह इस समीकरण को हम बिना ज्यामितीय कोणांक के भी प्राप्त कर सकते हैं। इसके लिए सीधे समीकरण (14.4) को t के सापेक्ष अवकलित करते हैं :

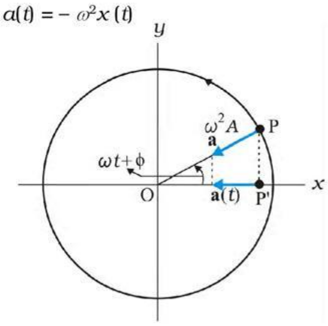
$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) \qquad (14.10)$$

सरल आवर्त गति करते हुए कण के तात्क्षणिक त्वरण को प्राप्त करने के लिए संदर्भ वृत्त की विधि को इसी प्रकार प्रयोग में लाया जा सकता है।

हमें ज्ञात है कि एकसमानीय वर्तुल गति में कण के अभिकेन्द्रीय त्वरण का परिमाण v^2/A अथवा $\omega^2 A$ है तथा यह केन्द्र की ओर निर्दिष्ट है, अर्थात इसकी दिशा PO की ओर है। प्रक्षेप कण P′ का तात्क्षणिक त्वरण तब होगा (चित्र 14.12 देखें)

$$a(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = -\omega^2 x(t) \qquad (14.11)$$



*चित्र 14.12 बिंदु P′ का त्वरण $a(t)$, संदर्भ बिंदु P के त्वरण **a** का प्रक्षेप होता है ।*

समीकरण (14.11) सरल आवर्त गति करते हुए कण का त्वरण व्यक्त करता है। इसी समीकरण को, समीकरण (14.9) से प्रदत्त वेग $v(t)$ को समय के सापेक्ष अवकलित करके सीधे प्राप्त किया जा सकता है:

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) \qquad (14.12)$$

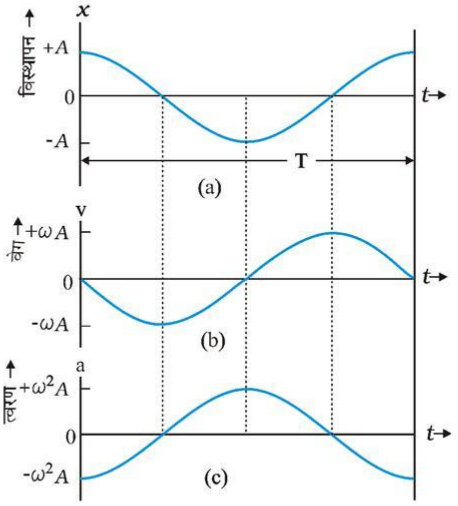
समीकरण (14.11) से हम एक महत्त्वपूर्ण परिणाम पर ध्यान देते हैं कि सरल आवर्त गति में कण का त्वरण इसके विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होता है। $x(t) > 0$ के लिए $a(t) < 0$ तथा $x(t) < 0$ के लिए $a(t) > 0$ होता है। अत: $-A$ तथा A के

बीच x का मान कुछ भी हो, त्वरण a(t) हमेशा केन्द्र की ओर निर्दिष्ट रहता है।

सरलता के लिए हम $\phi = 0$ रख कर $x(t)$, $v(t)$ और $a(t)$ के व्यंजक को लिखते हैं

$x(t)=A\cos\omega t$, $v(t)=-\omega A\sin\omega t$, $a(t)=-\omega^2 A\cos\omega t$

संगत आलेख को चित्र 14.13 में दर्शाया गया है। सभी राशियाँ समय के साथ ज्यावक्रीय विचरण करती हैं; केवल उनकी उच्चिष्ठ (maxima) में अन्तर होता है तथा उनके आलेखों में कलाओं की भिन्नता होती है। x, $-A$ तथा A के मध्य विचरण करता है; $v(t)$, $-\omega A$ तथा ωA के मध्य विचरण करता है एवं $a(t)$, $-\omega^2 A$ तथा $\omega^2 A$ के मध्य विचरण करता है। विस्थापन आलेख के सापेक्ष, वेग आलेख की कला में $\pi/2$ का अंतर है तथा त्वरण आलेख की कला में π का अंतर है।



चित्र 14.13 सरल आवर्त गति में किसी कण का विस्थापन, वेग तथा त्वरण का आवर्तकाल T समान होता है, लेकिन उनकी कलाओं में भिन्नता होती है।

उदाहरण 14.5 : कोई पिंड निम्नलिखित समीकरण के अनुसार सरल आवर्त गति से दोलन करता है,

$x = (5.0\text{ m})\cos[(2\pi\text{ rad/s})\,t + \pi/4]$

$t = 1.5$ s पर, पिंड का (a) विस्थापन, (b) वेग तथा (c) त्वरण परिकलित कीजिए।

हल पिंड की कोणीय आवृत्ति $\omega = 2\pi\text{ s}^{-1}$ तथा इसका आवर्तकाल $T = 1$ s

$t = 1.5$ s पर,

(a) विस्थापन $= (5.0\text{ m})\cos[(2\pi\text{ s}^{-1})\times 1.5\text{ s} + \frac{\pi}{4}]$

$= (5.0\text{ m})\cos[(3\pi + \frac{\pi}{4})]$

$= -5.0\times 0.707\text{ m}$

$= -3.535\text{ m}$

(b) समीकरण (14.9) का उपयोग करने पर पिंड का वेग

$= -(5.0\text{ m})(2\pi\text{ s}^{-1})\sin[(2\pi\text{ s}^{-1})\times(1.5\text{s} + \frac{\pi}{4})]$

$= -(5.0\text{ m})(2\pi\text{ s}^{-1})\sin[(3\pi + \frac{\pi}{4})]$

$= 10\pi\times 0.707\text{ m s}^{-1}$

$= 22\text{ m s}^{-1}$

(c) समीकरण (14.10) का उपयोग करने पर पिंड का त्वरण

$= -(2\pi\text{ s}^{-1})^2\times$ विस्थापन

$= -(2\pi\text{ s}^{-1})^2\times(-3.535\text{ m})$

$= 140\text{ m s}^{-2}$

14.6 सरल आवर्त गति के लिए बल का नियम

न्यूटन की गति के दूसरे नियम तथा आवर्त गति करते किसी कण के लिए त्वरण के व्यंजक (समीकरण 14.11) प्रयोग करने पर

$F(t) = ma$

$= -m\omega^2 x(t)$

अथवा, $F(t) = -k\,x(t)$ (14.13)

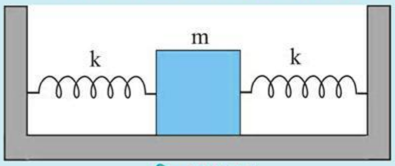
यहाँ $k = m\omega^2$ (14.14a)

अथवा, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (14.14b)

त्वरण की तरह, बल हमेशा माध्य स्थिति की ओर निर्दिष्ट रहता है – इसलिए यह सरल आवर्त गति में प्रत्यानयन बल कहलाता है। अब तक की गई चर्चाओं को संक्षिप्त करने पर हम पाते हैं कि सरल आवर्त गति को दो प्रकार से परिभाषित किया जा सकता है, या तो विस्थापन के लिए समीकरण (14.4) द्वारा अथवा समीकरण (14.13) द्वारा जो कि बल के नियम प्रदान करता है। समीकरण (14.4) से समीकरण (14.13) प्राप्त करने के लिए हमें इसे दो बार अवकलित करना पड़ा। इसी प्रकार बल के नियम, समीकरण (14.13) को दो बार समाकलित करने पर हमें वापस समीकरण (14.4) प्राप्त हो सकता है।

ध्यान दीजिए कि समीकरण (14.13) में बल $x(t)$ के रैखिकीय समानुपाती है। अत: इस तरह के बल के प्रभाव से दोलन करते हुए किसी कण को रैखिक आवर्ती दोलक कहते हैं। वास्तव में, बल के व्यंजक में x^2, x^3 आदि के समानुपाती कुछ पद हो सकते हैं। अत: इन्हें अरैखिक दोलक कहते हैं।

उदाहरण 14.6 कमानी स्थिरांक k की दो सर्वसम कमानियाँ M संहति के किसी गुटके तथा स्थिर आधारों से चित्र 14.14 में दर्शाए गए अनुसार जुड़ी हुई हैं।



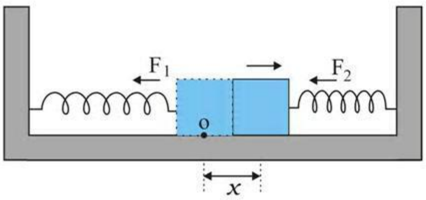
चित्र 14.14

यह दर्शाइए कि जब गुटके को अपनी साम्यावस्था की स्थिति से किसी ओर विस्थापित किया जाता है, तब यह सरल आवर्त गति करता है। दोलन का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए गुटके को अपनी साम्यावस्था की स्थिति से दाईं ओर x दूरी तक विस्थापित किया जाता है। इसे चित्र 14.15 में दिखाया गया है। इस स्थिति में बाईं ओर की कमानी x लंबाई द्वारा दीर्घित हो जाती है तथा दाईं ओर की कमानी भी उतनी ही लंबाई द्वारा संपीडित हो जाती है। तब गुटके पर कार्यरत बल

$F_1 = -kx$ (कमानी द्वारा बाईं ओर आरोपित बल, जो गुटके को माध्य स्थिति की ओर खींचने का प्रयास करता है।)

$F_2 = -kx$ (कमानी द्वारा दाईं ओर आरोपित बल, जो गुटके को माध्य स्थिति की ओर धकेलने का प्रयास करता है।)



चित्र 14.15

तब गुटके पर आरोपित नेट बल,

$$F = -2\,kx$$

अत:, गुटके पर आरोपित बल विस्थापन के अनुक्रमानुपाती तथा माध्य-स्थिति की ओर निर्दिष्ट होता है; इसलिए, गुटके की गति सरल आवर्त गति है। इसमें दोलन का आवर्तकाल,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} \text{ है।}$$

14.7 सरल आवर्त गति में ऊर्जा

सरल आवर्त गति करते हुए कण की स्थितिज तथा गतिज ऊर्जाएँ दोनों शून्य तथा अपने अधिकतम परिमाण के बीच विचरण करती हैं।

अनुभाग 14.5 में हमने देखा है कि सरल आवर्त गति करते किसी कण का वेग समय का आवर्ती फलन होता है। विस्थापन की चरम स्थितियों में यह शून्य होता है। अत: ऐसे कण की गतिज ऊर्जा (K), जिसे हम इस प्रकार परिभाषित करते हैं,

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2}m\,\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2}k\,A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \qquad (14.15)$$

भी समय का आवर्ती फलन होती है जिसका परिमाण विस्थापन अधिकतम होने पर शून्य तथा कण के माध्य स्थिति पर होने पर अधिकतम होता है। ध्यान दीजिए, चूँकि गतिज ऊर्जा K में, v के चिह्न का कोई अर्थ नहीं होता, अत: K का आवर्तकाल $T/2$ है।

सरल आवर्त गति करने वाले किसी कण की स्थितिज ऊर्जा कितनी होती है? अध्याय 6 में हमने देखा है कि स्थितिज ऊर्जा की संकल्पना केवल संरक्षी बलों के लिए ही होती है। कमानी बल $F = -kx$ एक संरक्षी बल है जिससे स्थितिज ऊर्जा संयुक्त होती है।

$$U = \frac{1}{2}k\,x^2 \qquad (14.16)$$

अत: सरल आवर्त गति करते किसी कण की स्थितिज ऊर्जा,

$$U(x) = \frac{1}{2}k\,x^2$$

$$= \frac{1}{2}k\,A^2 \cos^2(\omega t + \phi) \qquad (14.17)$$

इस प्रकार, सरल आवर्त गति करते किसी कण की स्थितिज ऊर्जा भी आवर्ती होती है जिसका आवर्तकाल $T/2$ होता है, यह ऊर्जा माध्य स्थिति में शून्य तथा चरम विस्थापनों पर अधिकतम होती है। अत: समीकरणों (14.15) तथा (14.17) से हमें निकाय की कुल ऊर्जा E, प्राप्त होती है,

$$E = U + K$$

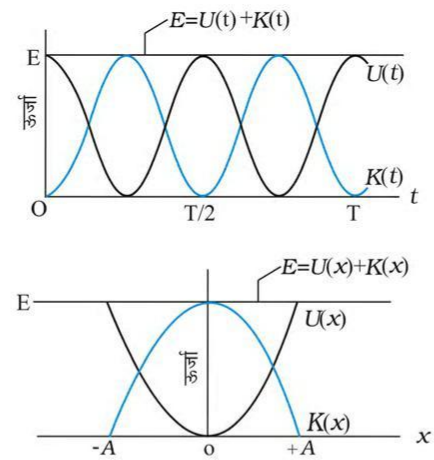
$$= \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2} k A^2 \left[\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)\right]$$

त्रिकोणमिती की सामान्य तादात्मक को प्रयोग करने पर कोष्ठक में दी गई राशि का मान एक प्राप्त होता है। अत:

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \quad (14.18)$$

जैसा कि संरक्षी बलों के अधीन गतियों के लिए आशा की जाती है किसी भी सरल आवर्ती दोलक की कुल यांत्रिक ऊर्जा कालाश्रित नहीं होती । किसी रैखिक सरल आवर्ती दोलक की गतिज तथा स्थितिज ऊर्जाओं की समय और विस्थापन पर निर्भरता चित्र 14.16 में दर्शायी गई है ।



चित्र 14.16 *गतिज ऊर्जा, स्थितिज ऊर्जा तथा कुल ऊर्जा समय के फलन के रूप में [(a) में दर्शित] तथा सरल आवर्त गति करते हुए कण का विस्थापन [(b) में दर्शित]। गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा दोनों आवर्तकाल T/2 के पश्चात पुनरावृत्ति करते हैं। t तथा x के सभी मानों के लिए कुल ऊर्जा नियत रहती है।*

ध्यान दीजिए कि सरल आवर्त गति में स्थितिज तथा गतिज दोनों ऊर्जाएँ चित्र 14.16 में हमेशा धनात्मक मानी गई हैं। निस्सन्देह गतिज ऊर्जा कभी ऋणात्मक नहीं हो सकती, क्योंकि यह चाल के वर्ग के समानुपाती होती है। स्थितिज ऊर्जा के समीकरण में गुप्त नियतांक के चयन के कारण स्थितिज ऊर्जा धनात्मक होती है। गतिज तथा स्थितिज दोनों ऊर्जाएँ SHM के प्रत्येक आवर्तकाल में दो बार अपनी चरम स्थिति को प्राप्त करती हैं। $x = 0$ के लिए, ऊर्जा गतिज है; चरम स्थिति $x = \pm A$ पर यह पूरे तौर पर स्थितिज ऊर्जा है। इन सीमाओं के बीच गति करते हुए, स्थितिज ऊर्जा के घटने से गतिज ऊर्जा बढ़ती है तथा गतिज ऊर्जा के घटने से स्थितिज ऊर्जा बढ़ती है।

▶ ***उदाहरण 14.7*** 1kg संहति के किसी गुटके को एक कमानी से बाँधा गया है । कमानी का कमानी स्थिरांक $50\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ है । गुटके को उसकी साम्यावस्था की स्थिति $x = 0$ से $t = 0$ पर किसी घर्षणहीन पृष्ठ पर कुछ दूरी $x = 10$ cm तक खींचा जाता है । जब गुटका अपनी माध्य-स्थिति से 5 cm दूर है, तब उसकी गतिज, स्थितिज तथा कुल ऊर्जाएँ परिकलित कीजिए ।

हल

गुटका सरल आवर्त गति करता है । समीकरण [14.14(b)] से इसकी कोणीय आवृत्ति

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

$$= \sqrt{\frac{50\ \mathrm{N\ m^{-1}}}{1\ \mathrm{kg}}}$$

$= 7.07\ \mathrm{rad\ s^{-1}}$ होगी,

तब किसी समय t पर इसका विस्थापन

$x(t) = 0.1 \cos(7.07t)$ होगा ।

अत:, जब कण अपनी माध्य स्थिति से 5 cm दूर है, तब

$0.05 = 0.1 \cos(7.07t)$

अथवा $\cos(7.07t) = 0.5$,

अत:, $\sin(7.07t) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$

तब गुटके का $x = 5$ cm पर वेग $= 0.1 \times 7.07 \times 0.866 \text{m s}^{-1}$

$= 0.61 \text{m s}^{-1}$

अतः, गुटके की गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2} m v^2$

$= \frac{1}{2}\left[1 \, kg \times (0.6123 \, \text{ms}^{-1})^2\right]$

$= 0.19$ J

तथा गुटके की स्थितिज ऊर्जा $= \frac{1}{2} k x^2$

$= \frac{1}{2}\left(50 \text{ N m}^{-1} \times 0.05 \times 0.05 \text{ m}\right)$

$= 0.0625$ J

$\therefore$ $x = 5$ cm पर गुटके की कुल ऊर्जा

$= (0.19 + 0.0625)$ J

$= 0.25$ J

हम यह भी जानते हैं कि अधिकतम विस्थापन पर, गतिज ऊर्जा शून्य होती है, अतः निकाय की कुल ऊर्जा स्थितिज ऊर्जा के बराबर होती है। अतः निकाय की कुल ऊर्जा,

$= \frac{1}{2}(50 \text{ N m}^{-1} \times 0.1 \text{ m} \times 0.1 \text{ m})$

$= 0.25$ J

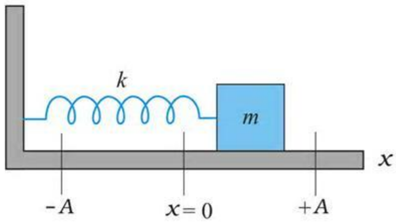
यह ऊर्जा 5 cm विस्थापन पर दोनों ऊर्जाओं के योग के बराबर ही है। यह ऊर्जा संरक्षण सिद्धांत के अनुकूल है। ◂

14.8 सरल आवर्त गति निष्पादित करने वाले कुछ निकाय

निरपेक्षतः शुद्ध सरल आवर्त गति के कोई भौतिक उदाहरण नहीं हैं। अपने व्यावहारिक जीवन में हम ऐसे निकाय देखते हैं जो किन्हीं निश्चित परिस्थितियों में लगभग सरल आवर्त गति करते हैं। इस अनुभाग में इसके पश्चात् हम ऐसे ही कुछ निकायों की गतियों की चर्चा करेंगे।

14.8.1 कमानी के दोलन

सरल आवर्त गति का सरलतम प्रेक्षण योग्य उदाहरण, चित्र 14.17 की भाँति, किसी कमानी के एक सिरे से जुड़े m संहति के किसी गुटके के छोटे दोलन होते हैं। कमानी का दूसरा सिरा एक दृढ़ दीवार से जुड़ा होता है। गुटके को किसी समतल घर्षणरहित पृष्ठ पर रखते हैं। यदि गुटके को एक ओर थोड़ा खींचकर छोड़ दें, तो वह किसी माध्य स्थिति पर इधर-उधर गति करने लगता है। मान लीजिए $x = 0$ गुटके के केंद्र की उस स्थिति को सूचित करता है जब कमानी विश्रांत अवस्था में है। चित्र में अंकित स्थितियाँ $-A$ तथा $+A$ माध्य स्थिति से बाईं तथा



चित्र 14.17 एक रैखिक सरल आवर्ती दोलक जिसमें m संहति का एक गुटका किसी कमानी से जुड़ा है। गुटका एक घर्षणरहित पृष्ठ पर गति करता है। एक बार किसी ओर खींचकर छोड़ने पर गुटका सरल आवर्त गति करता है।

दाईं ओर के अधिकतम विस्थापनों को इंगित करती हैं। हम पहले ही पढ़ चुके हैं कि कमानियों में विशेष गुण होते हैं, जिन्हें सर्वप्रथम एक अंग्रेज भौतिकीवेत्ता रॉबर्ट हुक ने खोजा था। उन्होंने दर्शाया कि जब ऐसे किसी निकाय को विरूपित किया जाता है, तो उस पर एक प्रत्यानयन बल लगता है, जिसका परिमाण विरूपण अथवा विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होता है तथा यह विपरीत दिशा में कार्य करता है। इसे हुक का नियम (अध्याय 9) कहते हैं। यह नियम तब भलीभाँति लागू होता है जब विस्थापन कमानी की लंबाई की तुलना में काफी कम होते हैं। किसी समय t पर, यदि गुटके का उसकी माध्य स्थिति से विस्थापन x है, तो गुटके पर कार्यरत बल F इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$$F(x) = -kx \tag{14.19}$$

यहाँ k आनुपातिकता स्थिरांक है जिसे कमानी-स्थिरांक कहते हैं, तथा इसका मान कमानी के प्रत्यास्थ गुणों से ज्ञात किया जाता है। किसी दृढ़ कमानी के लिए k का मान अधिक तथा मृदु कमानी के k का मान कम होता है। समीकरण (14.19), सरल आवर्त गति के लिए बल-नियम के समान है, अतः यह निकाय सरल आवर्त गति करता है। समीकरण (14.14) से हमें यह संबंध प्राप्त होता है,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{14.20}$$

तथा दोलक का आवर्तकाल, T इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{14.21}$$

दृढ़ कमानियों के k (कमानी स्थिरांक) के मान ज्यादा होते हैं। दृढ़ कमानी से जुड़े लघु संहति के एक गुटके की दोलन आवृत्ति समीकरण (14.20) के अनुसार ज्यादा होगी, जैसा की भौतिक रूप से अपेक्षित है।

उदाहरण 14.8 500N m^{-1} कमानी स्थिरांक की किसी कमानी से 5 kg संहति का कोई कॉलर जुड़ा है जो एक क्षैतिज छड़ पर बिना किसी घर्षण के सरकता है । कॉलर को उसकी साम्यावस्था की स्थिति से 10.0cm विस्थापित करके छोड़ दिया जाता है । कॉलर के (a) दोलन का आवर्तकाल (b) अधिकतम चाल तथा (c) अधिकतम त्वरण परिकलित कीजिए ।

हल (a) समीकरण (14.21) के अनुसार दोलन का आवर्त काल होता है :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{5.0\,\text{kg}}{500\,\text{N m}^{-1}}} = (2\pi/10)\text{s}$$

$$= 0.63 \text{ s}$$

(b) सरल आवर्त गति करते कॉलर का वेग इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$$v(t) = -A\,\omega \sin(\omega t + \phi)$$

अत: अधिकतम चाल,

$$v_m = A\,\omega$$

$$= 0.1 \times \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= 0.1 \times \sqrt{\frac{500\ \text{Nm}^{-1}}{5\ \text{kg}}}$$

$$= 1\text{ms}^{-1}$$

और यहाँ $x = 0$

(c) साम्यावस्था की स्थिति से $x(t)$ विस्थापन पर कॉलर का त्वरण इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

$$= -\frac{k}{m}x(t)$$

अत: अधिकतम त्वरण

$$a_{max} = \omega^2 A$$

$$= \frac{500\,\text{N m}^{-1}}{5\,\text{kg}} \times 0.1\,\text{m}$$

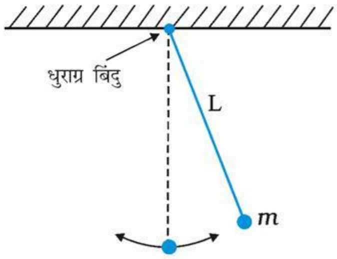
$$= 10 \text{ m s}^{-2}$$

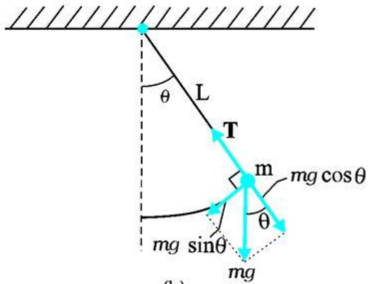
और यह अग्रान्त पर घटित होता है।

14.8.2 सरल लोलक

यह कहा जाता है कि गैलीलियो ने किसी चर्च में एक दोलायमान झाड़फानूस का आवर्तकाल अपनी नाड़ी की स्पंद गति द्वारा मापा था । उसने यह निष्कर्ष निकाला कि झाड़फानूस की गति आवर्ती है । यह निकाय लोलक का ही एक प्रकार होता है । लगभग 1 मीटर लंबे न खिंचने वाले धागे को लेकर उसके एक सिरे से पत्थर का टुकड़ा बाँधकर आप भी अपना एक लोलक बना सकते हैं । अपने लोलक को किसी उचित टेक से बाँधकर इस प्रकार लटकाइए कि वह स्वतंत्रतापूर्वक दोलन कर सके । पत्थर के टुकड़े को कम दूरी तक विस्थापित करके छोड़ दीजिए । पत्थर इधर-उधर गति करने लगता है । पत्थर की यह गति आवर्ती होती है जिसका आवर्तकाल लगभग 2 सेकंड होता है।

हम यह स्थापित करेंगे कि मध्यमान स्थिति से लघु विस्थापनों के लिए इस लोलक की आवर्त गति सरल आवर्त गति होती है। किसी ऐसे सरल लोलक पर विचार कीजिए जिसमें m द्रव्यमान का कोई लघु आमाप का गोलक L लम्बाई के द्रव्यमानहीन तथा न खिंचने योग्य डोरी के एक सिरे से बंधा हो। डोरी का दूसरा सिरा छत पर स्थित किसी दृढ़ टेक से जुड़ा है। गोलक इस ऊर्ध्वाधर दृढ़ टेक से होकर जाने वाली रेखा के अनुदिश तल में दोलन करता है। यह व्यवस्था चित्र 14.18(a) द्वारा दर्शाई गई है। चित्र 14.18 (b) में दोलक पर कार्यरत बल प्रदर्शित किए गए हैं जो एक प्रकार का बल-निर्देशक आरेख है।





चित्र 14.18 *(a) माध्य स्थिति के सापेक्ष दोलन करता कोई सरल लोलक, (b) त्रिज्य बल T–mg cosθ अभिकेन्द्र बल प्रदान करता है परंतु धुराग्र के सापेक्ष इसका कोई बल-आघूर्ण नहीं होता। स्पर्श रेखीय बल mg sinθ प्रत्यानयन बल प्रदान करता है।*

माना कि डोरी ऊर्ध्वाधर से θ कोण बनाती है। जब गोलक माध्य स्थिति में होता है तो $\theta = 0$

गोलक पर केवल दो बल कार्यरत हैं : डोरी की लंबाई के अनुदिश तनाव T तथा गुरुत्व के कारण ऊर्ध्वाधर बल (=mg)। हम बल mg का वियोजन डोरी के अनुदिश घटक $mg\cos\theta$ तथा उसके लंबवत् $mg\sin\theta$ के रूप में कर सकते हैं। चूँकि गोलक की गति L त्रिज्या के किसी वृत्त के अनुदिश है जिसका केन्द्र धुराग्र बिन्दु पर स्थित है, अत: गोलक का कोई त्रिज्य त्वरण ($\omega^2 L$) तथा साथ ही स्पर्शरेखीय त्वरण होगा। स्पर्शरेखीय त्वरण का कारण वृत्त के चाप के अनुरूप गति का एकसमान न होना है। त्रिज्य त्वरण नेट त्रिज्य बल $T - mg\cos\theta$ के कारण होता है जबकि स्पर्शरेखीय त्वरण $mg\sin\theta$ के कारण उत्पन्न होता है। धुराग्र के सापेक्ष बल आघूर्ण पर विचार करना अधिक सुविधाजनक होता है क्योंकि तब त्रिज्य बल का आघूर्ण शून्य हो जाता है। इस प्रकार आधार के सापेक्ष बल आघूर्ण τ बल के स्पर्शरेखीय घटक द्वारा ही पूर्णतया प्राप्त होता है।

$$\tau = -L(mg\sin\theta) \qquad (14.22)$$

यह एक प्रत्यानयन बल आघूर्ण है जो विस्थापन के परिणाम को कम करने का प्रयास करता है; इसी कारण इसे ऋणात्मक चिह्न द्वारा व्यक्त किया गया है। घूर्णी गति के लिए न्यूटन के नियम के अनुसार

$$\tau = I\alpha \qquad (14.23)$$

यहाँ I धुराग्र बिंदु के परित: लोलक का घूर्णी जड़त्व है तथा α उसी बिंदु के परित: कोणीय त्वरण है । इस प्रकार

$$I\alpha = -mgL\sin\theta \qquad (14.24)$$

अथवा $$\alpha = -\frac{mgL\sin\theta}{I} \qquad (14.25)$$

यदि हम यह मानें कि विस्थापन θ छोटा है, तो समीकरण (14.25) को सरल बना सकते हैं । हम जानते हैं कि $\sin\theta$ को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है,

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots\ldots \qquad (14.26)$$

यहाँ θ रेडियन में है।

अब यदि θ छोटा है, तो $\sin\theta$ का सन्निकटन θ द्वारा किया जा सकता है । ऐसी परिस्थिति के समीकरण (14.25) को इस प्रकार भी लिख सकते हैं,

$$\alpha = -\frac{mgL}{I}\theta \qquad (14.27)$$

सारणी 14.1 में हमने कोण θ को अंशों में, इसके तुल्यांक रेडियनों में, तथा फलन $\sin\theta$ के मान सूचीबद्ध किए हैं । सारणी से यह देखा जा सकता है कि θ के 20 अंश तक बड़े मानों के लिए $\sin\theta$ के मान लगभग वही होते हैं जैसे θ को रेडियनों में व्यक्त करने पर मिलते हैं

सरल आवर्त गति–आयाम कितना छोटा होना चाहिए?

जब आप किसी सरल लोलक का आवर्त काल ज्ञात करने के लिए प्रयोग करते हैं तो आपके अध्यापक आयाम को कम रखने की सलाह देते हैं। परन्तु क्या आपने कभी सोचा है कि यह 'कम' कितना कम होना चाहिए? क्या आयाम 5°, 2°, 1°, या 0.5° होना चाहिए या यह 10°, 20°, या 30° भी हो सकता है।

इसकी मात्रा समझने के लिए यह अच्छा होगा कि हम लोलक का आवर्तकाल भिन्न आयामों के लिए ज्ञात करें। परंतु प्रयोग के दौरान आपको ध्यान रखना होगा कि अधिक आयामों की अवस्था में भी लोलक ऊर्ध्वाधर तल में ही दोलन करे। मान लीजिए कम आयाम वाले दोलनों के लिए आवर्तकाल $T(0)$ है। तथा θ आयाम के लिए आवर्तकाल $T(\theta_0) = cT(0)$, यहाँ c गुणककाल है। यदि आप c और θ_0 में ग्राफ खींचे तो इनके विभिन्न मान इस प्रकार होंगे।

θ_0	:	20°	45°	50°	70°	90°
c	:	1.02	1.04	1.05	1.10	1.18

इस सारणी से स्पष्ट है कि लगभग 20° के आयाम पर आवर्तकाल में त्रुटि लगभग 2%, 50° के आयाम पर 5%, 70% के आयाम पर 10% तथा 90° के आयाम पर 18% है।

प्रयोग से आप कभी भी $T(0)$ नहीं माप सकते। क्योंकि यह शून्य दोलन का सूचक है। सैद्धांतिक रूप से भी $\theta = 0$ पर $\sin\theta$, θ के बराबर होता है। θ के अन्य मानों के लिए कुछ त्रुटि तो आ ही जाएगी। यह त्रुटि θ के मान में वृद्धि से बढ़ती है। अत: हमें यह पहले ही निश्चित कर लेना होगा कि त्रुटि की कितनी सीमा होनी चाहिए। वास्तव में कोई भी मापन पूर्ण रूप से त्रुटिरहित नहीं होता है। आपको निम्न प्रश्नों पर भी विचार करना होगा जैसे विराम घड़ी के मान में यथार्थता क्या है? घड़ी के शुरू करने तथा रोकने में आपकी यथार्थता क्या है? आपको पता चलेगा कि इस स्तर पर प्रयोगों में यथार्थता कभी भी 5% या 10% से अधिक नहीं होती। उपरोक्त सारणी से स्पष्ट है कि किसी दोलक के आवर्तकाल में वृद्धि 50° के आयाम पर भी 5% से अधिक नहीं होती है। अत: आप अपने प्रयोगों में लोलक का आयाम 50° या इससे कम रख सकते हैं।

सारणी 14.1 sin θ कोण θ के फलन के रूप में

θ (अंशों में)	θ (रेडियनों में)	sin θ
0	0	0
5	0.087	0.087
10	0.174	0.174
15	0.262	0.256
20	0.349	0.342

गणितीय रूप में समीकरण (14.27) समीकरण (14.11) के तुल्य है, अंतर केवल यह है कि यहाँ चर राशि कोणीय त्वरण है। अत: हमने यह सिद्ध कर दिया है कि θ के लघु मानों के लिए गोलक की गति सरल आवर्त गति है।

समीकरण (14.27) तथा समीकरण (14.11) से हम यह देखते हैं कि

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$$

तथा लोलक का आवर्तकाल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \qquad (14.28)$$

अब क्योंकि लोलक की डोरी द्रव्यहीन है, अत: जड़त्व आघूर्ण I केवल mL^2 के तुल्य होगा। इससे हमें सरल लोलक के आवर्त काल के लिए सुपरिचित सूत्र मिल जाता है

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (14.29)$$

उदाहरण 14.9 उस सरल लोलक की लंबाई क्या है, जो हर सेकंड के बाद टिक करता है ?

हल समीकरण (14.29) से किसी सरल लोलक का आवर्तकाल,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

इस संबंध से हमें प्राप्त होता है,

$$L = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

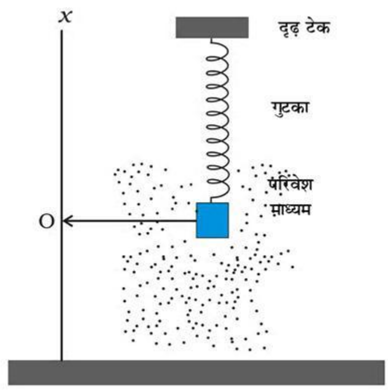
हर एक सेकंड के बाद टिक करने वाले सरल लोलक का आवर्तकाल T, 2 s होता है । अत: $g = 9.8\ \text{m s}^{-2}$ तथा $T = 2$ s के लिए सरल लोलक की लंबाई

$$L = \frac{9.8\,(\text{m s}^{-2}) \times 4\,(\text{s}^2)}{4\pi^2}$$

$$= 1\ \text{m}$$

14.9 अवमंदित सरल आवर्त गति

हम जानते हैं कि वायु में दोलन करने वाले किसी सरल लोलक की गति धीरे-धीरे समाप्त हो जाती है । ऐसा क्यों होता है ? इसका कारण यह है कि वायु का कर्षण बल तथा टेक पर घर्षण बल लोलक की गति का विरोध करते हैं जिससे धीरे-धीरे इसका ऊर्जा-क्षय होता रहता है । लोलक के इस प्रकार के दोलनों को **अवमंदित दोलन** कहते हैं । अवमंदित दोलनों में यद्यपि निकाय की ऊर्जा का धीरे-धीरे क्षय होता रहता है तथापि आभासी रूप से दोलन आवर्ती रहते हैं । व्यापक रूप में क्षयकारी बल घर्षण बल ही होते हैं । इस प्रकार के बाह्य बलों का किसी दोलक की गति पर प्रभाव समझने के लिए आइए चित्र 14.19 में दर्शाए किसी निकाय पर विचार करें । यहाँ k कमानी-स्थिरांक



चित्र 14.19 परिवेश में उपस्थित श्यान माध्यम दोलन करते गुटके पर अवमंदन बल आरोपित करता है जिसके कारण वह अंतत: विराम स्थिति में आ जाता है।

की किसी प्रत्यास्थ कमानी से जुड़ा कोई गुटका ऊर्ध्वाधर दोलन करता दिखाया गया है। यदि गुटके को नीचे की ओर थोड़ा खींचकर छोड़ दिया जाए तो समीकरण (14.20) के अनुसार

यह $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ की कोणीय आवृत्ति से दोलन करने लगेगा।

तथापि वास्तविक स्थिति में गुटके के परिवेश में स्थित माध्यम (वायु) उसकी गति पर कोई अवमंदन बल आरोपित करेगा तथा गुटका-कमानी निकाय की यांत्रिक ऊर्जा घटती जाएगी। ऊर्जा ह्रास परिवेश माध्यम के (तथा गुटके के भी) ताप के रूप में परिलक्षित होगा (चित्र 14.19)।

अवमंदन बल परिवेश माध्यम की प्रकृति पर निर्भर करेगा। यदि गुटका किसी द्रव में डूबा हो तो अवमंदन बल का परिमाण

उच्च होगा तथा ऊर्जा क्षय की दर भी द्रुत होगी। सामान्यत: अवमंदन बल गोलक के वेग के अनुक्रमानुपाती होता है [स्टोक्स के नियम का स्मरण कीजिए, समीकरण (10.19)] तथा यह वेग की दिशा की विपरीत दिशा में कार्यरत होता है। यदि अवमंदन बल को $\mathbf{F}_d$ से निरूपित किया जाए तो

$$\mathbf{F}_d = -b\mathbf{v} \qquad (14.30)$$

जहाँ धनात्मक स्थिरांक b माध्यम के गुणों (उदाहरण के लिए श्यानता), तथा गुटके की अमाप तथा आकृति पर निर्भर करता है। समीकरण (14.30) सामान्यत: वेग के न्यून मानों के लिए ही वैध है।

जब कमानी से कोई द्रव्यमान m से जोड़कर छोड़ते हैं तो कमानी की लंबाई में कुछ वृद्धि होती है तथा द्रव्यमान एक ऊँचाई पर आकर स्थिर हो जाता है। इस अवस्था को दव्यमान की संतुलन अवस्था कहते हैं जिसे चित्र 14.19 में O से दर्शाया गया है। जब द्रव्यमान को थोड़ा नीचे या ऊपर खींचते हैं तो इस पर एक प्रत्यावस्था (प्रत्यानयन) बल $\mathbf{F}_s = -k\mathbf{x}$, कार्य करता है। जहाँ $\mathbf{x}$ द्रव्यमान की संतुलन अवस्था से विस्थापन* है। इस प्रकार किसी क्षण द्रव्यमान पर कार्य करने वाला कुल बल होता है $\mathbf{F} = -k\mathbf{x} - b\mathbf{v}$। यदि किसी क्षण t पर द्रव्यमान का त्वरण $\mathbf{a}(t)$ हो तो न्यूटन की गति के द्वितीय नियम को गति की दिशा में लागू करने पर हमें प्राप्त होता है

$$m\,a(t) = -k\,x(t) - b\,v(t) \qquad (14.31)$$

यहाँ पर हमने सदिश संकेत का प्रयोग नहीं किया है क्योंकि हम एकविमीय गति का वर्णन कर रहे हैं।

$v(t)$ तथा $a(t)$ के लिए $x(t)$ के प्रथम तथा द्वितीय अवकलज क्रमश: प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + k\,x = 0 \qquad (14.32)$$

समीकरण (14.32) का हल वेग के अनुपाती अवमंदन बल के प्रभाव में गुटके की गति का वर्णन करता है। इसका हल निम्न रूप में होता है

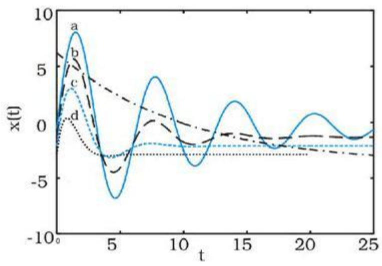
$$x(t) = A\,e^{-b\,t/2m}\cos(\omega' t + \phi) \qquad (14.33)$$

जहाँ a अवमंदित दोलन का आयाम तथा ω' इसकी कोणीय आवृत्ति होता है

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \qquad (14.34)$$

इस फलन में, कोज्या (cos) फलन का आवर्तकाल $2\pi/\omega'$ है परंतु यह फलन वस्तुत: आवर्ती नहीं है क्योंकि कारक $e^{-bt/2m}$ समय के साथ निरंतर घटता है। फिर भी यदि एक आवर्तकाल T में घटोतरी कम है, तो समीकरण (14.33) द्वारा निरूपित गति सन्निकट रूप से आवर्ती है।

समीकरण (14.33) द्वारा दर्शाए गए हल को चित्र 14.20 में दिए अनुसार ग्राफीय निरूपण द्वारा दर्शाया जा सकता है। इसे हम एक कोज्या फलन की भाँति मान सकते हैं जिसका आयाम $Ae^{-bt/2m}$ समय के साथ धीरे-धीरे घटता है।



चित्र 14.20 *दोलन के घटते हुए आयाम के साथ एक अवमंदित दोलक सन्निकट रूप से आवर्ती होता है। ज्यादा अवमंदन होने पर दोलन द्रुत रूप से क्षीण हो जाती है।*

किसी अनवमंदित दोलक की यांत्रिक ऊर्जा $\frac{1}{2}kA^2$ होती है। यदि दोलक में अवमंदन है, तो आयाम अचर नहीं होता, वरन समय पर निर्भर करता है। यदि अवमंदन लघु है, तो हम आयाम को $Ae^{-bt/2m}$ मानकर उसी व्यंजक का उपयोग कर सकते हैं।

$$E(t) = \frac{1}{2}k\,A^2 e^{-bt/m} \qquad (14.35)$$

समीकरण (14.35) यह दर्शाता है कि निकाय की कुल ऊर्जा समय के साथ चरघातांकी रूप में घटती है। ध्यान दीजिए, लघु अवमंदन का तात्पर्य यह है कि विमाहीन अनुपात $\left(\frac{b}{\sqrt{k\,m}}\right)$ का मान 1 से बहुत कम है।

उदाहरण 14.10: चित्र 14.19 में दर्शाए अवमंदित दोलक के लिए गुटके का द्रव्यमान $m = 200$ g, $k = 90$ N m^{-1} तथा अवमंदन स्थिरांक $b = 40$ g s^{-1} है। (a) दोलन का आवर्तकाल, (b) वह समय जिसमें इसके कंपन का आयाम अपने आरंभिक मान का आधा रह जाता है तथा (c) वह समय जिसमें यांत्रिक ऊर्जा अपने आरंभिक मान की आधी रह जाती है, परिकलित कीजिए।

हल (a) $km = 90 \times 0.2 = 18$ kg N m^{-1} = 18kg^2 s^{-2}; इसलिए $\sqrt{km} = 4.243$ kg s^{-1} और $b = 0.04$ kg s^{-1} अत:

* गुरुत्व के प्रभाव में गुटका डोरी पर किसी निश्चित साम्यावस्था की स्थिति O पर होगा। यहाँ x उस भाग से विस्थापन को निरूपित करता है।

$b, \sqrt{km}$ से अति निम्न है। समीकरण (14.34) से आवर्त काल T

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad = 2\pi\sqrt{\frac{0.2 \text{ kg}}{90 \text{ N m}^{-1}}}$$

$$= 0.3 \text{ s}$$

(b) अब, समीकरण (14.33) से, वह समय, $T_{1/2}$ जिसमें आयाम घटकर अपने आरंभिक आयाम का आधा रह जाता है,

$$T_{1/2} = \frac{\ln(1/2)}{b/2m}$$

$$= \frac{0.693}{40} \times 2 \times 200 \text{ s}$$

$$= 6.93 \text{ s}$$

(c) वह समय $t_{1/2}$, जिसमें दोलन की यांत्रिक ऊर्जा घटकर अपने आरंभिक मान की आधी रह जाती है, परिकलित करने के लिए हमें समीकरण (14.35) की सहायता लेनी होती है । इस समीकरण से,

$$E(t_{1/2})/E(0) = \exp(-bt_{1/2}/m)$$

अथवा $\frac{1}{2} = \exp(-bt_{1/2}/m)$

$$\ln(1/2) = -(bt_{1/2}/m)$$

अथवा $t_{1/2} = \frac{0.693}{40 \text{ g s}^{-1}} \times 200 \text{g} = 3.46 \text{ s}$

यह वास्तव में क्षय काल का आधा है। यह उचित ही है क्योंकि समीकरण (14.33) और (14.35) के अनुसार ऊर्जा आयाम के वर्ग पर निर्भर करती है। ध्यान दें कि दोनों समीकरणों के घातांकों में गुणज 2 है। ◀

14.10 प्रणोदित दोलन तथा अनुनाद

जब किसी निकाय (जैसे कोई सरल दोलक या कमानी से लटका हुआ कोई गुटका) को उसकी साम्यावस्था से विस्थापित कर मुक्त किया जाता है तो वह अपनी प्राकृतिक आवृत्ति ω से दोलन करने लगता है। इस प्रकार के दोलन **मुक्त दोलन** कहलाते हैं। सभी मुक्त दोलन सदैव उपस्थित रहने वाले क्षय बलों के कारण अंततः रुक जाते हैं, तथापि कोई बाह्य कारक (बल) इन दोलनों को बनाए रख सकता है। ऐसे दोलनों को **प्रणोदित** अथवा **परिचालित दोलन** कहते हैं। हम किसी ऐसी स्थिति पर विचार करेंगे जब कार्यरत बाह्य बल की प्रकृति आवर्ती हो जिसकी प्राकृतिक आवृत्ति ω_d को परिचालित आवृत्ति कहा जाता है। प्रणोदित अथवा परिचालित आवर्ती दोलनों के संदर्भ में सबसे महत्वपूर्ण तथ्य यह है कि निकाय अपनी प्राकृतिक आवृत्ति ω से दोलन नहीं करता वरन यह बाह्य बल की आवृत्ति ω_d से दोलन करता है; मुक्त दोलन अवमंदन के कारण समाप्त (रुक) हो जाते हैं। इसका सबसे सामान्य उदाहरण किसी पार्क में झूले के वह प्रणोदित दोलन हैं जो बच्चे द्वारा फर्श को अपने पैरों से धक्का देकर (अथवा किसी अन्य व्यक्ति द्वारा आवर्ती रूप में धक्का देकर) आवर्ती बल आरोपित करने के फलस्वरूप स्थापित होते हैं।

मान लीजिए किसी अवमंदित दोलक पर समय के साथ विचरण करने वाले F_0 आयाम का कोई आवर्ती बाह्य बल $F(t)$ आरोपित किया जाता है । इस बल को इस प्रकार निरूपित करते हैं,

$$F(t) = F_o \cos \omega_d t \tag{14.36}$$

समीकरण (14.36) द्वारा निरूपित किसी कण का रैखिक प्रत्यानयन बल, अवमंदित बल तथा कालाश्रित प्रणोदित बल के संयोजी प्रभाव के अंतर्गत गति को इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$m\,a(t) = -k\,x(t) - bv(t) + F_o \cos \omega_d t \tag{14.37a}$$

समीकरण (14.37a) में त्वरण को d^2x/dt^2 द्वारा प्रतिस्थापित तथा उसे पुनर्व्यवस्थित करने पर,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_o \cos \omega_d t \tag{14.37b}$$

यह m द्रव्यमान वाले उस दोलित्र का गति समीकरण है जिस पर ω_d (कोणीय) आवृत्ति वाला बल कार्यरत है। प्रारंभ में दोलित्र अपने प्राकृतिक आवृत्ति ω से दोलन करता है। जब हम इस पर एक बाह्य आवृत्ति बल लगाते हैं तो प्राकृतिक आवृत्ति वाला दोलन क्षीण हो जाता है और वस्तु आरोपित बाह्य बल की (कोणीय) आवृत्ति से दोलन करने लगता है। प्राकृतिक दोलन के शांत हो जाने के उपरांत दोलित्र का विस्थापन होता है

$$x(t) = A\cos(\omega_d t + \phi) \tag{14.38}$$

जहाँ t आवृत्ति बल के लगाए जाने के क्षण से मापा समय है।

आयाम A कोणीय आवृत्तियों ω_d तथा प्राणोदित आवृत्ति ω का फलन है जिसे हम इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$A = \frac{F_o}{\left\{m^2\left(\omega^2 - \omega_d^2\right)^2 + \omega_d^2 b^2\right\}^{1/2}} \tag{14.39a}$$

तथा
$$\tan \phi = \frac{-v_o}{\omega_d x_o} \tag{14.39b}$$

यहाँ m कण का द्रव्यमान तथा v_0 और x_0 समय $t = 0$ पर कण के क्रमशः वेग और विस्थापन हैं । यह वह क्षण है जब हम आवर्ती बल आरोपित करते हैं।

समीकरण (14.39) दर्शाता है कि आयाम परिचालन बल की (कोणीय) आवृत्ति पर निर्भर करता है। ω_d के ω से

अत्यधिक भिन्न होने और समीप होने की अवस्थाओं में हम दोलित्र का भिन्न-भिन्न व्यवहार देखते हैं। अब हम इन दोनों परिस्थितियों पर विचार करते हैं:

(a) ***अल्प अवमंदन जब परिचालक आवृत्ति प्राकृतिक आवृत्ति से अधिक भिन्न है:*** इस स्थिति में $\omega_d b$, $m(\omega^2 - \omega_d^2)$ से अति कम होगा। अत: समीकरण 14.39(a) में उस पद को नगण्य मान सकते हैं:

$$A = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_d^2)} \tag{14.40}$$

चित्र 14.21 में निकाय में उपस्थित विभिन्न सीमाओं के अवमंदक बलों के लिए किसी दोलक के विस्थापन आयाम की परिचालन बल की कोणीय आवृत्ति पर निर्भरता दर्शायी गई है। ध्यान दीजिए, तीनों परिस्थितियों में $\omega_d/\omega = 1$ होने पर ही आयाम अधिकतम होता है। इस चित्र के वक्र यह दर्शाते हैं कि अवमंदन कम होने पर ऊँचा और संकीर्ण **अनुनाद** शिखर प्राप्त होता है।

यदि हम परिचालक आवृत्ति को बदलते रहें तो जब यह आवृत्ति वस्तु की प्राकृतिक आवृत्ति के बराबर हो जाती है तो दोलन का आयाम अनंत की ओर अग्रसर होता है। परन्तु यह शून्य अवमंदन की आदर्श स्थिति होती है जो किसी वास्तविक निकाय में नहीं होती है क्योंकि अवमंदन किसी भी अवस्था में पूर्ण रूप से शून्य नहीं हो सकता। आपने झूला झूलते हुए निश्चय ही अनुभव किया होगा कि जब आप झूले पर इस आवृत्ति से बल लगाते हैं कि बल का आवर्तकाल झूले के प्राकृतिक आवर्तकाल के बराबर होता है तो झूले के दोलन का आयाम अधिकतम होता है। यह आयाम अधिक तो होता है परन्तु अनंत नहीं होता है। क्योंकि झूले की दोलन गति में कुछ न कुछ अवमंदन तो होता ही है। यह अगले भाग (b) में स्पष्ट हो जाएगा।

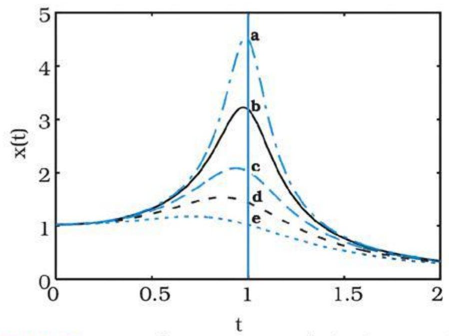
(b) ***जब परिचालक आवृत्ति प्राकृतिक आवृत्ति के निकट हो :*** यदि ω, ω_d के अति निकट हो $m(\omega^2 - \omega_d^2)$, b के उचित मानों के लिए $\omega_d b$ से बहुत कम होगा। इस अवस्था में समीकरण (14.39) हो जाता है।

$$A = \frac{F_o}{\omega_d b} \tag{14.41}$$

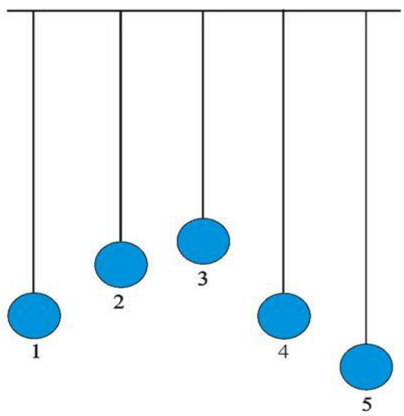
इससे स्पष्ट है कि किसी निश्चित परिचालक आवृत्ति के लिए अधिकतम संभव आयाम परिचालक आवृत्ति तथा अवमंदन पर निर्भर करता है और इस प्रकार कभी भी अनंत नहीं होता। जब परिचालक आवृत्ति, दोलक की प्राकृतिक आवृत्ति के बराबर हो जाती है तो दोलन का आयाम अधिकतम हो जाता है। इस परिघटना को **अनुनाद** कहते हैं।

अपने दैनिक जीवन में हमें अनुनाद से संबंधित परिघटनाएँ देखने को मिलती हैं। झूलों से झूलने का हमारा अनुभव अनुनाद का अच्छा उदाहरण है। आपने यह अनुभव किया होगा कि झूले को अधिक ऊँचाई तक झुलाने की कुशलता धरती पर जोर लगाने की लय को झूले की प्राकृतिक आवृत्ति के समकालिक बनाने में है।

इस तथ्य की और अधिक व्याख्या करने के लिए मान लीजिए चित्र 14.22 की भाँति एक ही डोरी से वर्गीकृत लंबाइयों के 5 सरल लोलक लटकाये गए हैं। लोलक 1 व 4 की लंबाइयां समान हैं तथा अन्य तीनों की लंबाइयाँ भिन्न-भिन्न हैं। अब हम लोलक 1 को गतिमान बनाते हैं। संबद्ध डोरी से होकर ऊर्जा इस लोलक से अन्य लोलकों को स्थानांतरित होती है, फलस्वरूप वे दोलन करने लगते हैं। संबद्ध डोरी द्वारा परिचालन बल प्रदान किया जाता है। इस परिचालन बल की आवृत्ति लोलक 1 के दोलन की आवृत्ति के समान होती है। यदि हम लोलकों 2, 3 तथा 5 की अनुक्रियाओं का अवलोकन करें, तो



चित्र 14.21 ग्राफ समीकरण (14.41) को निरूपित करता है। अवमंदन बढ़ने पर अनुनाद आयाम ($\omega = \omega_d$) घटता जाता है



चित्र 14.22 एक ही आधार से निलंबित भिन्न-भिन्न लंबाई के 5 सरल लोलक।

हम यह पाते हैं कि आरंभ में वे सभी विभिन्न आयामों से अपनी-अपनी प्राकृतिक आवृत्तियों के दोलन करते हैं, परंतु ये गतियाँ अत्यधिक अवमंदित होती हैं और कायम नहीं रह पातीं। धीरे-धीरे उनके दोलन की आवृत्तियाँ परिवर्तित होती हैं और अंत में वे लोलक 1 की आवृत्ति अर्थात् परिचालन बल की आवृत्ति से भिन्न-भिन्न आयामों से दोलन करते हैं। ये दोलन आयाम छोटे होते हैं किन्तु लोलक 4 की अनुक्रिया अन्य तीनों लोलकों से विपरीत होती है। यह लोलक 1 की ही आवृत्ति से दोलन करता है परंतु इसका आयाम धीरे-धीरे बढ़ता हुआ अत्यधिक हो जाता है। अनुनाद की भाँति अनुक्रिया दिखाई देती है। ऐसा होने का कारण यह है कि यहाँ अनुनाद की शर्त, अर्थात् निकाय की प्राकृतिक आवृत्ति परिचालन बल की आवृत्ति के संपाती होनी चाहिए, संतुष्ट होती है।

अब तक हमने केवल ऐसे निकायों पर विचार किया है जिनकी केवल एक प्राकृतिक आवृत्ति होती है। सामान्यत: किसी निकाय की अनेक प्राकृतिक आवृत्तियाँ हो सकती हैं। आप इस प्रकार के निकायों (कंपायमान डोरी, वायु स्तंभ आदि) के विषय में अगले अध्याय में पढ़ेंगे। किसी यांत्रिक संरचना यथा कोई भवन, कोई पुल अथवा वायुयान की अनेक प्राकृतिक आवृत्तियाँ संभव हैं। कोई बाह्य आवर्ती बल अथवा विक्षोभ निकाय को प्रणोदित दोलन प्रदान कर सकता है। यदि संयोगवश प्रणोदित बल की आवृत्ति ω_d निकाय की किसी एक प्राकृतिक आवृत्ति के सन्निकट हो तो दोलन के आयाम (अनुनाद) में आशातीत वृद्धि हो सकती है जिससे विनाश की स्थिति उत्पन्न हो सकती है। इसी कारण किसी पुल से गुजरते समय सैनिकों को कदम से कदम मिलाकर न चलने की सलाह दी जाती है। किसी क्षेत्र में भूकंप के कारण सभी भवनों को एकसमान रूप से क्षति न पहुँचने का भी यही कारण है चाहे वह सभी एक ही सामग्री तथा सामान मजबूती से बने हों। किसी भवन की प्राकृतिक आवृत्ति उसकी ऊँचाई, आमाप के अन्य प्राचलों तथा उसके निर्माण में प्रयुक्त सामग्री की प्रकृति पर निर्भर करती है। जिस भवन की प्राकृतिक आवृत्ति भूकंपी तरंग की आवृत्ति के सन्निकट होती है उसे क्षति पहुँचने की आशंका सर्वाधिक होती है।

सारांश

1. वे गतियाँ जो स्वयं दोहराती हैं *आवर्ती गतियाँ* कहलाती हैं।
2. एक दोलन अथवा चक्र को पूरा करने के लिए आवश्यक समय T को *आवर्तकाल* कहते हैं। यह आवृत्ति से इस प्रकार संबंधित है,

   $$T = \frac{1}{\nu}$$

   किसी आवर्ती अथवा दोलनी गति की *आवृत्ति* उसके द्वारा 1 सेकंड में पूरे किए गए दोलनों की संख्या होती है। SI मात्रक पद्धति में इसे हर्ट्ज़ में मापा जाता है;

   $$1 \text{ हर्ट्ज़} = 1\text{Hz} = 1 \text{ दोलन प्रति सेकंड} = 1\text{s}^{-1}$$

3. *सरल आवर्त गति* में, किसी कण का उसकी साम्यावस्था की स्थिति से विस्थापन $x(t)$ इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

   $$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{विस्थापन})$$

   यहाँ x_m *विस्थापन का आयाम* $(\omega t + \phi)$ *गति की कला*, तथा ϕ *कला स्थिरांक* है। कोणीय आवृत्ति ω गति के आवर्तकाल तथा आवृत्ति से इस प्रकार संबंधित होती है

   $$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \ (\text{कोणीय आवृत्ति})$$

4. सरल आवर्त गति, एकसमान वर्तुल गति के उस वृत्त के व्यास पर प्रक्षेप होती है, जिस पर गति हो रही है।
5. सरल आवर्त गति के समय कण के वेग तथा त्वरण को समय t के फलन के रूप में इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

   $$v(t) = -\omega A_m \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{वेग})$$
   $$a(t) = -\omega^2 A_m \cos(\omega t + \phi)$$
   $$= -\omega^2 x(t) \quad (\text{त्वरण})$$

   समयकालिक क्रिया और सरल आवर्त गति द्वारा हम वेग और गति को इस प्रकार देख सकते हैं।

6. सरल आवर्त गति किसी कण की वह गति होती है जिसमें उस कण पर कोई ऐसा बल आरोपित रहता है, जो कण के विस्थापन के अनुक्रमानुपाती, तथा सदैव गति के केंद्र की ओर निर्दिष्ट होता है ।

7. सरल आवर्त गति करते किसी कण में, किसी भी क्षण, गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2}mv^2$ तथा स्थितिज ऊर्जा $U = \frac{1}{2}kx^2$ होती है । यदि कोई घर्षण न हो, तो निकाय की कुल यांत्रिक ऊर्जा, $E = K + U$ सदैव ही अचर रहती है यद्यपि K और U परिवर्तित होते हैं ।

8. m द्रव्यमान का कोई कण जो हुक के नियम के अनुसार लगे प्रत्यानयन बल $F = -kx$ के प्रभाव में दोलन करता है, सरल आवर्त गति दर्शाता है जिसके लिए,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(कोणीय आवृत्ति)}$$

तथा

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{(आवर्तकाल)}$$

ऐसे निकाय को रैखिक दोलक भी कहते हैं ।

9. लघु कोणों में दोलन करते सरल लोलक की गति सन्निकट सरल आवर्त गति होती है । इसका आवर्तकाल,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

10. किसी भी वास्तविक दोलायनमान निकाय की यांत्रिक ऊर्जा दोलन करते समय घट जाती है क्योंकि बाह्य बल जैसे कर्षण दोलनों को रोकते हैं तथा यांत्रिक ऊर्जा को ऊष्मीय ऊर्जा में स्थानांतरित कर देते हैं । तब वास्तविक दोलक तथा उसकी गति को *अवमंदित गति* कहते हैं । यदि *अवमंदन बल* $F_d = -bv$ है, यहाँ v दोलक का वेग तथा b *अवमंदन स्थिरांक* है, तब दोलक का विस्थापन,

$$x(t) = A\,e^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \phi)$$

यहाँ ω', अवमंदित दोलनों की कोणीय आवृत्ति है जिसे इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

यदि अवमंदन स्थिरांक का मान कम है, तो $\omega' \approx \omega$, यहाँ ω अवमंदित दोलक की कोणीय आवृत्ति है । अवमंदित दोलक की यांत्रिक ऊर्जा E को इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$E(t) = \frac{1}{2}kA^2 e^{-bt/m}$$

11. यदि प्राकृतिक कोणीय आवृत्ति ω के किसी दोलायमान निकाय पर ω_d कोणीय आवृत्ति का कोई बाह्य आवर्ती बल आरोपित किया जाए, तो वह निकाय ω_d कोणीय आवृत्ति से दोलन करता है । इन दोलनों का आयाम तब अधिक होता है जब,

$$\omega_d = \omega$$

जो *अनुनाद* की शर्त होती है ।

भौतिक राशि	प्रतीक	विमाएँ	मात्रक	टिप्पणी
आवर्तकाल	T	[T]	s	गति की स्वयं पुनरावृत्ति के लिए न्यूनतम समय
आवृत्ति	f या ν	$[T^{-1}]$	s^{-1}	$\nu = \frac{1}{T}$
कोणीय आवृत्ति	ω	$[T^{-1}]$	s^{-1}	$= 2\pi\nu$
कला नियतांक	ϕ	विमाहीन	रेडियन	सरल आवर्त गति में विस्थापन की कला का आरंभिक मान
बल नियतांक	k	$[MT^{-2}]$	$N\,m^{-1}$	सरल आवर्त गति में $F = -kx$

विचारणीय विषय

1. आवर्तकाल T वह *न्यूनतम समय* होता है जिसके पश्चात् गति की स्वयं पुनरावृत्ति होती है। इस प्रकार, समय अंतराल nT के पश्चात् गति की स्वयं पुनरावृत्ति होती है, यहाँ n कोई पूर्णांक है।
2. प्रत्येक आवर्ती गति सरल आवर्त गति नहीं होती। केवल वही आवर्ती गति जो बल-नियम $F = -kx$ द्वारा नियंत्रित होती है, सरल आवर्त गति होती है।
3. वर्तुल गति व्युत्क्रम-वर्ग नियम बल (जैसे ग्रहीय गति में) तथा द्विविमा में सरल आवर्त बल $-m\omega^2 r$ के कारण उत्पन्न हो सकती है। बाद के प्रकरण में, गति की कलाएँ, दो लंबवत् दिशाओं (x तथा y) में $\pi/2$ rad द्वारा भिन्न होनी चाहिए। इस प्रकार, कोई कण जिसकी आरंभिक स्थिति (o, a) तथा वेग $(\omega A, o)$ है $-m\,\omega^2 r$ बल आरोपित किए जाने पर A त्रिज्या के वृत्त में एकसमान वर्तुल गति करेगा।
4. ω के किसी दिए गए मान की रैखिक सरल आवर्त गति के लिए दो यादृच्छिक आरंभिक शर्तें आवश्यक हैं और ये शर्तें गति को पूर्णतः निर्धारित करने के लिए पर्याप्त हैं। ये आवश्यक शर्तें हो सकती हैं (i) आरंभिक स्थिति तथा आरंभिक वेग, अथवा (ii) आयाम तथा कला, अथवा (iii) ऊर्जा तथा कला।
5. उपरोक्त बिंदु (4) से, दिए गए आयाम अथवा ऊर्जा गति की कला का निर्धारण आरंभिक स्थिति अथवा आरंभिक वेग द्वारा किया जाता है।
6. यादृच्छिक आयामों तथा कलाओं वाली दो सरल आवर्त गतियों का संयोजन व्यापक रूप में आवर्ती नहीं होता। यह केवल तभी आवर्ती होता है जब एक गति की आवृत्ति दूसरी गति की आवृत्ति की पूर्णांक गुणज हो। तथापि, किसी आवर्ती गति को सदैव ही उपयुक्त आयामों की अनंत सरल आवर्त गतियों के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।
7. सरल आवर्त गति का आवर्तकाल आयाम अथवा ऊर्जा अथवा कला नियतांक पर निर्भर नहीं करता। गुरुत्वाकर्षण के अधीन ग्रहीय कक्षों के आवर्तकाल इसके विपरीत हैं (केप्लर का तृतीय नियम)।
8. किसी सरल लोलक की गति लघु कोणीय विस्थापन के लिए ही सरल आवर्त गति होती है।
9. किसी कण की गति यदि सरल आवर्त गति है, तो उसके विस्थापन को निम्न रूपों में से किसी एक रूप में व्यक्त किया जाना चाहिए :

   $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t;$

   $x = A\cos(\omega t + \alpha);\; x = B\sin(\omega t + \beta)$

   ये तीनों रूप पूर्णतः समतुल्य हैं (किसी भी एक रूप को अन्य दो रूपों के पदों में व्यक्त किया जा सकता है।)

   इस प्रकार अवमंदित सरल आवर्त गति समीकरण (14.31) सही अर्थों में सरल आवर्त गति नहीं होती। यह केवल

$2m/b$ से बहुत छोटे समय अन्तरालों के लिए ही सन्निकटतः सरल आवर्त गति होती है, यहाँ b अवमंदन नियतांक है।

10. प्रणोदित दोलनों में, कण की स्थायी अवस्था गति (प्रणोदित दोलनों की समाप्ति के पश्चात्) एक ऐसी सरल आवर्त गति होती है जिसकी आवृत्ति उस कण की प्राकृतिक आवृत्ति ω नहीं होती वरन् प्रणोदित दोलन उत्पन्न करने वाले बाह्य बल की आवृत्ति ω_d होती है।
11. शून्य अवमंदन की आदर्श अवस्था में न होने की स्थिति में अनुनाद पर सरल आवर्त गति का आयाम अनंत होता है। यह कोई समस्या नहीं है, क्योंकि सभी वास्तविक निकायों में कुछ न कुछ अवमंदन अवश्य ही होता है, चाहे यह छोटा ही क्यों न हो।
12. प्रणोदित दोलनों के अधीन, कण की सरल आवर्त गति की कला प्रणोदित दोलन उत्पन्न करने वाले बाह्य बल की कला से भिन्न होती है।

अभ्यास

14.1 नीचे दिए गए उदाहरणों में कौन आवर्ती गति को निरूपित करता है ?

(i) किसी तैराक द्वारा नदी के एक तट से दूसरे तट तक जाना और अपनी एक वापसी यात्रा पूरी करना।

(ii) किसी स्वतंत्रतापूर्वक लटकाए गए दंड चुंबक को उसकी N-S दिशा से विस्थापित कर छोड़ देना।

(iii) अपने द्रव्यमान केंद्र के परितः घूर्णी गति करता कोई हाइड्रोजन अणु।

(iv) किसी कमान से छोड़ा गया तीर।

14.2 नीचे दिए गए उदाहरणों में कौन (लगभग) सरल आवर्त गति को तथा कौन आवर्ती परंतु सरल आवर्त गति नहीं निरूपित करते हैं ?

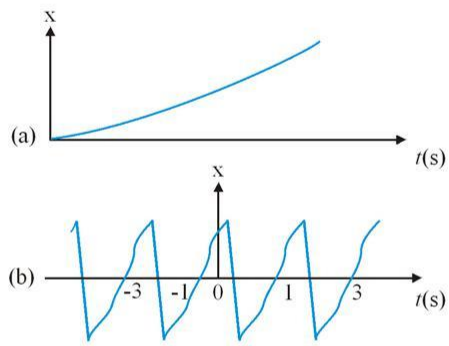
(i) पृथ्वी की अपने अक्ष के परितः घूर्णन गति।

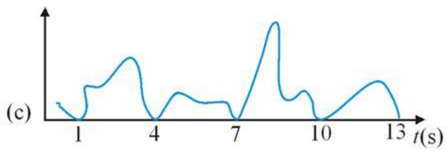
(ii) किसी U-नली में दोलायमान पारे के स्तंभ की गति।

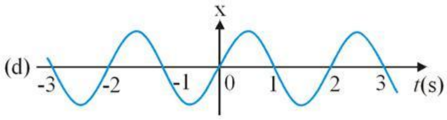
(iii) किसी चिकने वक्रीय कटोरे के भीतर एक बॉल बेयरिंग की गति जब उसे निम्नतम बिंदु से कुछ ऊपर के बिंदु से मुक्त रूप से छोड़ा जाए।

(iv) किसी बहुपरमाणुक अणु की अपनी साम्यावस्था की स्थिति के परितः व्यापक कंपन।

14.3 चित्र 14.24 में किसी कण की रैखिक गति के लिए चार x-t आरेख दिए गए हैं। इनमें से कौन-सा आरेख आवर्ती गति का निरूपण करता है ? उस गति का आवर्तकाल क्या है (आवर्ती गति वाली गति का)।







चित्र 14.24

14.4 नीचे दिए गए समय के फलनों में कौन (a) सरल आवर्त गति (b) आवर्ती परंतु सरल आवर्त गति नहीं, तथा (c) अनावर्ती गति का निरूपण करते हैं। प्रत्येक आवर्ती गति का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए : (ω कोई धनात्मक अचर है।)

(a) $\sin \omega t - \cos \omega t$

(b) $\sin^3 \omega t$

(c) $3 \cos \left(\frac{\pi}{4} - 2\omega t\right)$

(d) $\cos \omega t + \cos 3\omega t + \cos 5\omega t$

(e) $\exp(-\omega^2 t^2)$

(f) $1 + \omega t + \omega^2 t^2$

14.5 कोई कण एक दूसरे से 10 cm दूरी पर स्थित दो बिंदुओं A तथा B के बीच रैखिक सरल आवर्त गति कर रहा है। A से B की ओर की दिशा को धनात्मक दिशा मानकर वेग, त्वरण तथा कण पर लगे बल के चिह्न ज्ञात कीजिए जबकि यह कण

(a) A सिरे पर है,

(b) B सिरे पर है,

(c) A की ओर जाते हुए AB के मध्य बिंदु पर है,

(d) A की ओर जाते हुए B से 2 cm दूर है,

(e) B की ओर जाते हुए A से 3 cm दूर है, तथा

(f) A की ओर जाते हुए B से 4 cm दूर है।

14.6 नीचे दिए गए किसी कण के त्वरण a तथा विस्थापन x के बीच संबंधों में से किससे सरल आवर्त गति संबद्ध है :

(a) $a = 0.7\, x$

(b) $a = -200\, x^2$

(c) $a = -10\, x$

(d) $a = 100\, x^3$

14.7 सरल आवर्त गति करते किसी कण की गति का वर्णन नीचे दिए गए विस्थापन फलन द्वारा किया जाता है,

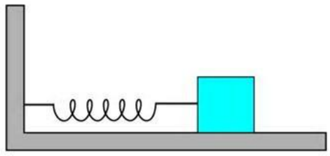
$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

यदि कण की आरंभिक ($t = 0$) स्थिति 1 cm तथा उसका आरंभिक वेग π cm s^{-1} है, तो कण का आयाम तथा आरंभिक

कला कोण क्या है ? कण की कोणीय आवृत्ति π s^{-1} है। यदि सरल आवर्त गति का वर्णन करने के लिए कोज्या (cos) फलन के स्थान पर हम ज्या (sin) फलन चुनें; $x = B \sin (\omega t + \alpha)$, तो उपरोक्त आरंभिक प्रतिबंधों में कण का आयाम तथा आरंभिक कला कोण क्या होगा ?

14.8 किसी कमानीदार तुला का पैमाना 0 से 50 kg तक अंकित है और पैमाने की लंबाई 20 cm है। इस तुला से लटकाया गया कोई पिण्ड, जब विस्थापित करके मुक्त किया जाता है, 0.6 s के आवर्तकाल से दोलन करता है। पिंड का भार कितना है ?

14.9 1200 N m^{-1} कमानी-स्थिरांक की कोई कमानी चित्र 14.25 में दर्शाए अनुसार किसी क्षैतिज मेज से जड़ी है। कमानी के मुक्त सिरे से 3 kg द्रव्यमान का कोई पिण्ड जुड़ा है। इस पिण्ड को एक ओर 2.0 cm दूरी तक खींच कर मुक्त किया जाता है,



चित्र 14.25

(i) पिण्ड के दोलन की आवृत्ति,

(ii) पिण्ड का अधिकतम त्वरण, तथा

(iii) पिण्ड की अधिकतम चाल ज्ञात कीजिए।

14.10 अभ्यास 14.9 में, मान लीजिए जब कमानी अतानित अवस्था में है तब पिण्ड की स्थिति $x = 0$ है तथा बाएँ से दाएँ की दिशा x-अक्ष की धनात्मक दिशा है। दोलन करते पिण्ड के विस्थापन x को समय के फलन के रूप मे दर्शाइए, जबकि विराम घड़ी को आरंभ ($t = 0$) करते समय पिण्ड,

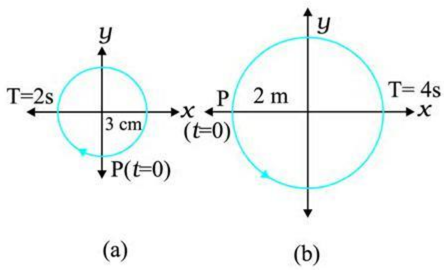
(a) अपनी माध्य स्थिति,

(b) अधिकतम तानित स्थिति, तथा

(c) अधिकतम संपीडन की स्थिति पर है।

सरल आवर्त गति के लिए ये फलन एक दूसरे से आवृत्ति में, आयाम में अथवा आरंभिक कला में किस रूप में भिन्न हैं ?

14.11 चित्र 14.26 में दिए गए दो आरेख दो वर्तुल गतियों के तदनुरूपी हैं। प्रत्येक आरेख पर वृत्त की त्रिज्य, परिक्रमण-काल, आरंभिक स्थिति और परिक्रमण की दिशा दर्शायी गई है। प्रत्येक प्रकरण में, परिक्रमण करते कण के त्रिज्य-सदिश के x-अक्ष पर प्रक्षेप की तदनुरूपी सरल आवर्त गति ज्ञात कीजिए।



चित्र 14.26

14.12 नीचे दी गई प्रत्येक सरल आवर्त गति के लिए तदनुरूपी निर्देश वृत्त का आरेख खींचिए। घूर्णी कण की आरंभिक (t = 0) स्थिति, वृत्त की त्रिज्या तथा कोणीय चाल दर्शाइए। सुगमता के लिए प्रत्येक प्रकरण में परिक्रमण की दिशा वामावर्त लीजिए। (x को cm में तथा t को s में लीजिए।)

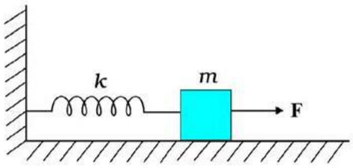
(a) $x = -2 \sin (3t + \pi/3)$

(b) $x = \cos (\pi/6 - t)$

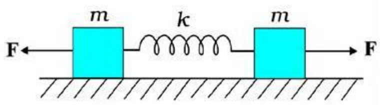
(c) $x = 3 \sin (2\pi t + \pi/4)$

(d) $x = 2 \cos \pi t$

14.13 चित्र 14.27(a) में k बल-स्थिरांक की किसी कमानी के एक सिरे को किसी दृढ़ आधार से जकड़ा तथा दूसरे मुक्त सिरे से एक द्रव्यमान m जुड़ा दर्शाया गया है। कमानी के मुक्त सिरे पर बल **F** आरोपित करने से कमानी तन जाती है। चित्र 14.30(b) में उसी कमानी के दोनों मुक्त सिरों से द्रव्यमान m जुड़ा दर्शाया गया है। कमानी के दोनों सिरों को चित्र 14.30 में समान बल **F** द्वारा तानित किया गया है।



(a)



(b)

चित्र 14.27

(a) दोनों प्रकरणों में कमानी का अधिकतम विस्तार क्या है?

(b) यदि (a) का द्रव्यमान तथा (b) के दोनों द्रव्यमानों को मुक्त छोड़ दिया जाए, तो प्रत्येक प्रकरण में दोलन का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए।

14.14 किसी रेलगाड़ी के इंजन के सिलिंडर हैड में पिस्टन का स्ट्रोक (आयाम का दो गुना) 1.0 m का है। यदि पिस्टन 200 rad/min की कोणीय आवृत्ति से सरल आवर्त गति करता है, तो उसकी अधिकतम चाल कितनी है ?

14.15 चंद्रमा के पृष्ठ पर गुरुत्वीय त्वरण 1.7 m s^{-2} है। यदि किसी सरल लोलक का पृथ्वी के पृष्ठ पर आवर्तकाल 3.5 s है, तो उसका चंद्रमा के पृष्ठ पर आवर्तकाल कितना होगा ? (पृथ्वी के पृष्ठ पर g = 9.8 m s^{-2})

14.16 नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) किसी कण की सरल आवर्त गति के आवर्तकाल का मान उस कण के द्रव्यमान तथा बल-स्थिरांक पर निर्भर करता है : $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ । कोई सरल लोलक सन्निकट सरल आवर्त गति करता है। तब फिर किसी लोलक का आवर्तकाल लोलक के द्रव्यमान पर निर्भर क्यों नहीं करता ?

(b) किसी सरल लोलक की गति छोटे कोण के सभी दोलनों के लिए सन्निकट सरल आवर्त गति होती है। बड़े कोणों के दोलनों के लिए एक अधिक गूढ़ विश्लेषण यह दर्शाता है कि T का मान $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ से अधिक होता है। इस

परिणाम को समझने के लिए किसी गुणात्मक कारण का चिंतन कीजिए ।

(c) कोई व्यक्ति कलाई घड़ी बाँधे किसी मीनार की चोटी से गिरता है । क्या मुक्त रूप से गिरते समय उसकी घड़ी यथार्थ समय बताती है ?

(d) गुरुत्व बल के अंतर्गत मुक्त रूप से गिरते किसी केबिन में लगे सरल लोलक के दोलन की आवृत्ति क्या होती है?

14.17 किसी कार की छत से l लंबाई का कोई सरल लोलक, जिसके लोलक का द्रव्यमान M है, लटकाया गया है । कार R त्रिज्या की वृत्तीय पथ पर एकसमान चाल v से गतिमान है । यदि लोलक त्रिज्य दिशा में अपनी साम्यावस्था की स्थिति के इधर-उधर छोटे दोलन करता है, तो इसका आवर्तकाल क्या होगा ?

14.18 आधार क्षेत्रफल A तथा ऊँचाई h के एक कॉर्क का बेलनाकार टुकड़ा ρ_l घनत्व के किसी द्रव में तैर रहा है । कॉर्क को थोड़ा नीचे दबाकर स्वतंत्र छोड़ देते हैं, यह दर्शाइए कि कॉर्क ऊपर-नीचे सरल आवर्त दोलन करता है जिसका आवर्तकाल

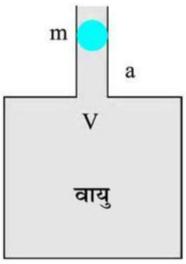
$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{h\rho}{\rho_l g}}$ है ।

यहाँ ρ कॉर्क का घनत्व है (द्रव की श्यानता के कारण अवमंदन को नगण्य मानिए) ।

14.19 पारे से भरी किसी U नली का एक सिरा किसी चूषण पंप से जुड़ा है, तथा दूसरा सिरा वायुमंडल में खुला छोड़ दिया गया है । दोनों स्तंभों में कुछ दाबांतर बनाए रखा जाता है । यह दर्शाइए कि जब चूषण पंप को हटा देते हैं, तब U नली में पारे का स्तंभ सरल आवर्त गति करता है ।

अतिरिक्त अभ्यास

14.20 चित्र 14.28 में दर्शाए अनुसार V आयतन के किसी वायु कक्ष की ग्रीवा (गर्दन) की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल a है। इस ग्रीवा में m द्रव्यमान की कोई गोली बिना किसी घर्षण के ऊपर-नीचे गति कर सकती है । यह दर्शाइए कि जब गोली को थोड़ा नीचे दबाकर मुक्त छोड़ देते हैं, तो वह सरल आवर्त गति करती है । दाब-आयतन विचरण को समतापी मानकर दोलनों के आवर्तकाल का व्यंजक ज्ञात कीजिए [चित्र 14.28 देखिए]।



चित्र 14.28

14.21 आप किसी 3000 kg द्रव्यमान के स्वचालित वाहन पर सवार हैं । यह मानिए कि आप इस वाहन की निलंबन प्रणाली के दोलनी अभिलक्षणों का परीक्षण कर रहे हैं । जब समस्त वाहन इस पर रखा जाता है, तब निलंबन 15 cm आनमित होता है । साथ ही, एक पूर्ण दोलन की अवधि में दोलन के आयाम में 50% घटोतरी हो जाती है । निम्नलिखित के मानों का आकलन कीजिए :

(a) कमानी स्थिरांक, तथा

(b) कमानी तथा एक पहिए के प्रघात अवशोषक तंत्र के लिए अवमंदन स्थिरांक b

यह मानिए कि प्रत्येक पहिया 750 kg द्रव्यमान वहन करता है ।

14.22 यह दर्शाइए कि रैखिक सरल आवर्त गति करते किसी कण के लिए दोलन की किसी अवधि की औसत गतिज ऊर्जा उसी अवधि की औसत स्थितिज ऊर्जा के समान होती है ।

14.23 10 kg द्रव्यमान की कोई वृत्तीय चक्रिका अपने केंद्र से जुड़े किसी तार से लटकी है । चक्रिका को घूर्णन देकर तार में ऐंठन उत्पन्न करके मुक्त कर दिया जाता है । मरोड़ी दोलन का आवर्तकाल 1.5 s है । चक्रिका की त्रिज्या 15 cm है । तार का मरोड़ी कमानी नियतांक ज्ञात कीजिए । [मरोड़ी कमानी नियतांक α संबंध $J = -\alpha\,\theta$ द्वारा परिभाषित किया जाता है, यहाँ J प्रत्यानयन बल युग्म है तथा θ ऐंठन कोण है]

14.24 कोई वस्तु 5 cm के आयाम तथा 0.2 सेकंड की आवृत्ति से सरल आवृत्ति गति करती है। वस्तु का त्वरण तथा वेग ज्ञात कीजिए जब वस्तु का विस्थापन (a) 5 cm (b) 3 cm (c) 0 cm हो।

14.25 किसी कमानी से लटका एक पिण्ड एक क्षैतिज तल में कोणीय वेग ω से घर्षण या अवमंदन रहित दोलन कर सकता है। इसे जब x_0 दूरी तक खींचते हैं और खींचकर छोड़ देते हैं तो यह संतुलन केन्द्र से समय $t = 0$ पर v_0 वेग से गुजरता है। प्राचल ω, x_0 तथा v_0 के पदों में परिणामी दोलन का आयाम ज्ञात करिये। [संकेत: समीकरण $x = a\cos(\omega t+\theta)$ से प्रारंभ कीजिए। ध्यान रहे कि प्रारंभिक वेग ऋणात्मक है।]

अध्याय 15

तरंगें

15.1 भूमिका

पिछले अध्याय में हमने ऐसे पिण्डों की गति के बारे में अध्ययन किया जो एकाकी दोलन करते हैं। यदि कोई निकाय इसी प्रकार के पिण्डों का समूह है, तो उस निकाय में क्या होगा? एक द्रव्यमान युक्त माध्यम इसी प्रकार के निकाय का उदाहरण है। इस प्रकार के माध्यम में प्रत्यास्थ बल माध्यम के अवयवों को एक-दूसरे से बाँध रखते हैं जिसके कारण किसी एक अवयव की गति दूसरे अवयव की गति को प्रभावित करती है। यदि आप एक छोटे कंकड़ को किसी तालाब के शांत जल में धीरे से गिराएँ, तो जल का पृष्ठ विक्षुब्ध हो जाता है । यह विक्षोभ किसी एक स्थान तक ही सीमित नहीं रहता, वरन् एक वृत्त के अनुदिश बाहर की ओर संचरित होता है। यदि आप इसी प्रकार तालाब में निरंतर कंकड़ गिराते रहें, तो आप यह देखेंगे कि तालाब के पृष्ठ के जिस बिंदु पर विक्षोभ उत्पन्न हुआ है वहाँ से यह विक्षोभ वृत्तों के रूप में तीव्रता से बाहर की ओर गति करता है । हमें ऐसा प्रतीत होता है जैसे विक्षोभ बिंदु से जल स्वयं बाहर की ओर गति कर रहा हो । यदि आप विक्षुब्ध पृष्ठ पर कुछ छोटे-छोटे कॉर्क के टुकड़े धीरे से रख दें, तो आप पाएँगे कि ये कॉर्क के टुकड़े अपने-अपने स्थानों पर ही ऊपर-नीचे गति करते हैं, परंतु विक्षोभ के केंद्र बिंदु से दूर नहीं जाते अर्थात् उनकी विक्षोभ के केंद्र से दूरी नियत बनी रहती है। इससे यह प्रदर्शित होता है कि जल का द्रव्यमान स्वयं वृत्तों के साथ बाहर की ओर गति नहीं करता, बस, एक गतिशील विक्षोभ उत्पन्न हो जाता है । इसी प्रकार जब हम बोलते हैं, तो ध्वनि हवा (माध्यम) में हमसे दूर जाती है । परंतु इस प्रक्रिया में (वायु) एक भाग से दूसरे भाग में प्रवाहित नहीं होती । वायु में उत्पन्न हुए विक्षोभ हमें स्पष्ट रूप से दिखाई नहीं देते, हमारे कानों अथवा माइक्रोफोनों द्वारा ही हम इनको जान पाते हैं। इस प्रकार के विक्षोभों के प्रतिरूप या पैटर्न जो द्रव्य के वास्तविक भौतिक स्थानांतरण अथवा समूचे द्रव्य के प्रवाह के बिना ही माध्यम के एक स्थान से दूसरे स्थान तक गति करते हैं, **तरंग** कहलाते हैं । इस अध्याय में हम तरंगों के विषय में अध्ययन करेंगे ।

तरंगों द्वारा एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक ऊर्जा तथा विक्षोभ के पैटर्न की सूचना का संचरण होता है। हमारा समस्त संचार-तंत्र तरंगों द्वारा संकेतों के संचरण पर निर्भर करता है। वाक् (बातचीत) का अर्थ है वायु में ध्वनि तरंगें उत्पन्न करना तथा श्रवण

उनके संसूचन को व्यक्त करता है। सूचना का आदान-प्रदान प्राय: विभिन्न प्रकार की तरंगों के माध्यम द्वारा होता है। उदाहरण के लिए ध्वनि तरंगों को सर्वप्रथम विद्युत संकेतों के रूप में परिवर्तित किया जा सकता है जिनसे विद्युत-चुंबकीय तरंगें जनित की जा सकती हैं जिनका संचरण प्रकाशिक रेशों की केबिल अथवा उपग्रह द्वारा हो सकता है। मूल संकेत के संसूचन में समान्यतया यही चरण व्युत्क्रम क्रम में अपनाए जाते हैं।

सभी तरंगों को संचरण के लिए माध्यम की आवश्यकता नहीं होती । हम जानते हैं कि प्रकाश तरंगें निर्वात से गमन कर सकती हैं । हमसे सैकड़ों प्रकाश वर्ष की दूरी पर स्थित तारों से उत्सर्जित प्रकाश अंतरतारकीय अंतरिक्ष, जो व्यावहारिक रूप से निर्वात ही है, से गमन करता हुआ हम तक पहुँचता है ।

किसी डोरी तथा जल में उत्पन्न तरंगों, ध्वनि तरंगों, भूकंपी तरंगों जैसी सुपरिचित तरंगें यांत्रिक तरंगों के रूप में जानी जाती हैं। इन सभी तरंगों के संचरण के लिए माध्यम की आवश्यकता होती है, ये बिना माध्यम के संचरित नहीं हो सकतीं। इनका संचरण माध्यम के कणों के दोलनों के कारण संभव हो पाता है तथा माध्यम के प्रत्यास्थ गुणों पर निर्भर करता है। विद्युत-चुंबकीय तरंगें सर्वथा भिन्न प्रकार की तरंगें होती हैं जिनके विषय में आप कक्षा 12 में अध्ययन करेंगे। विद्युत-चुंबकीय तरंगों के संचरण के लिए माध्यम का होना आवश्यक नहीं है– इनका संचरण निर्वात में भी होता है। प्रकाश, रेडियो तरंगें, X-किरणें सभी विद्युत-चुंबकीय किरणें हैं। निर्वात में सभी विद्युत-चुंबकीय तरंगों की चाल, c, समान होती है जिसका मान है:

$$c = 29,97,92,458 \text{ m s}^{-1} \qquad (15.1)$$

तीसरी प्रकार की एक अन्य तरंग है जिसे द्रव्य तरंग के नाम से जाना जाता है। यह द्रव्य के इलेक्ट्रॉन, प्रोटान, न्यूट्रान, परमाणु तथा अणु जैसे घटकों से संबद्ध हैं। ये तरंगें प्रकृति के क्वांटम यांत्रिकीय विवरण में प्रकट होती हैं जिसके विषय में आप अगली कक्षाओं में पढ़ेंगे । यद्यपि ये तरंगें संकल्पनात्मक रूप में यांत्रिक तथा विद्युत चुंबकीय तरंगों की तुलना में अधिक अमूर्त हैं, तथापि इनका अनुप्रयोग आधुनिक प्रौद्योगिकी की बहुत सी मूल युक्तियों में पाया जाता है; इलेक्ट्रॉन से संबद्ध द्रव्य तरंगों का उपयोग इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शी में किया जाता है ।

इस अध्याय में हम केवल यांत्रिक तरंगों के बारे में, जिनके संचरण के लिए द्रव्यात्मक माध्यम आवश्यक है, अध्ययन करेंगे ।

पुरातन काल से ही हमारी कला तथा साहित्य पर तरंगों का सौंदर्यबोधात्मक प्रभाव दृष्टिगोचर होता है, फिर भी तरंग गति का वैज्ञानिक विश्लेषण सर्वप्रथम सत्रहवीं शताब्दी में किया गया था । क्रिश्चियन हाइगेन्स (1629-1695), राबर्ट हुक तथा आइज़क न्यूटन कुछ ऐसे प्रसिद्ध भौतिकविद हैं जिनके नाम तरंग गति की भौतिकी से संबद्ध हैं । कमानी से बँधे पिण्डों के दोलनों की भौतिकी तथा सरल लोलक की भौतिकी के पश्चात् ही तरंगों की भौतिकी को समझा गया । प्रत्यास्थ माध्यमों में तरंगों का आवर्ती दोलनों के साथ अंतरंग संबंध होता है । (तानित डोरियाँ, कुंडलित कमानियाँ, वायु आदि प्रत्यास्थ माध्यमों के उदाहरण हैं ।) इस संबंध की व्याख्या हम सरल उदाहरणों द्वारा करेंगे ।

चित्र 15.1 में दर्शाए अनुसार एक दूसरे से संबद्ध कमानियों की व्यवस्था पर विचार कीजिए । यदि इसके एक सिरे की कमानी को यकायक खींचकर छोड़ दें, तो उत्पन्न विक्षोभ दूसरे सिरे तक गमन करता है । इस प्रक्रिया में क्या होता है ? यकायक खींचने पर पहली कमानी अपनी साम्यावस्था की लंबाई से विक्षोभित होती है । चूँकि दूसरी कमानी पहली कमानी से संबद्ध है, अत: उसमें तनाव अथवा संपीडन होता है और इस प्रकार यह प्रक्रिया आगे बढ़ती जाती है । यहाँ विक्षोभ तो एक सिरे से दूसरे तक संचरित हो जाता है, परंतु प्रत्येक कमानी अपनी साम्यावस्था की स्थिति के इधर-उधर ही लघु दोलन करती रहती है । ऐसे ही एक व्यावहारिक उदाहरण के रूप में रेलवे स्टेशन पर विराम की स्थिति में खड़ी किसी रेलगाड़ी पर विचार कीजिए । रेलगाड़ी के विभिन्न

चित्र 15.1 एक-दूसरे से संबद्ध कमानियों का संग्रह । सिरे A को यकायक खींचा जाता है; तब विक्षोभ दूसरे सिरे तक संचरित हो जाता है ।

डिब्बे, कमानी युग्मकों द्वारा एक-दूसरे से युग्मित होते हैं । जब इन डिब्बों के किसी एक सिरे से किसी इंजन को जोड़ते हैं, तो वह अपने से अगले डिब्बे को धक्का देता है तथा यह धक्का एक डिब्बे से दूसरे डिब्बे में, दूसरे से फिर तीसरे में, इसी प्रकार आगे संचरित होते हुए आखिरी डिब्बे तक पहुँच जाता है, लेकिन समस्त रेलगाड़ी अपने ही स्थान पर खड़ी रहती है ।

आइए, अब हम वायु में ध्वनि तरंगों के संचरण पर विचार करते हैं । जैसे ही कोई ध्वनि तरंग वायु से होकर गुजरती है, तो वह उस स्थान की वायु के छोटे से क्षेत्र को संपीडित अथवा विस्तारित करती है । इसके कारण उस छोटे क्षेत्र की वायु के घनत्व में, मान लीजिए ($\delta\rho$), परिवर्तन होता है । दाब, प्रति एकांक क्षेत्रफल पर आरोपित बल होता है, अत: कमानी की ही भाँति

इस स्थिति में भी विक्षोभ के अनुक्रमानुपात में 'प्रत्यानयन बल' उत्पन्न हो जाता है । यहाँ इस प्रकरण में, घनत्व में परिवर्तन, कमानी में उत्पन्न संपीडन अथवा विस्तारण के समरूप है । यदि किसी क्षेत्र को संपीडित किया जाता है, तो उस क्षेत्र के अणु बाहर निकलकर समीपवर्ती क्षेत्र में जाने का प्रयास करते हैं । इस प्रकार, समीपवर्ती क्षेत्र में घनत्व बढ़ता है, अथवा उस क्षेत्र में 'संपीडन' उत्पन्न होता है जिसके फलस्वरूप पूर्ववर्ती क्षेत्र में 'विरलन' उत्पन्न हो जाता है । यदि कोई क्षेत्र अपने चारों ओर के क्षेत्रों की तुलना में विरलित हो, तो उस क्षेत्र के चारों ओर के परिवेश की वायु उस क्षेत्र में प्रवेश करके विरलन को समीपवर्ती क्षेत्र की ओर धकेल देती है । इस प्रकार, संपीडन अथवा विरलन एक क्षेत्र से दूसरे क्षेत्र की ओर गति करते हैं, जिसके कारण वायु में विक्षोभ का संचरण संभव हो पाता है ।

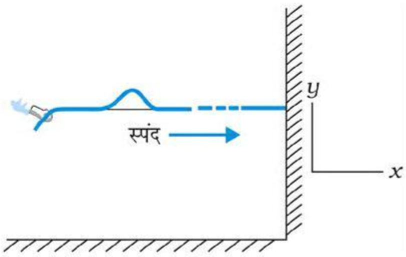
ठोसों में भी इसी के सदृश तर्क दिया जा सकता है । क्रिस्टलीय ठोसों में परमाणु अथवा परमाणुओं के समूह आवर्ती जालकों में व्यवस्थित होते हैं । इनमें, प्रत्येक परमाणु अथवा परमाणुओं का समूह, अपने चारों ओर के परमाणुओं द्वारा आरोपित बलों के कारण, साम्यावस्था में होता है । यदि अन्य परमाणुओं को स्थिर रखते हुए किसी एक परमाणु को विस्थापित किया जाए, तो ठीक उसी प्रकार जैसा कि कमानी के प्रकरण में था, इस स्थिति में भी एक प्रत्यानयन बल उत्पन्न हो जाता है । अत: हम जालक (lattice) के परमाणुओं को अंत्य बिंदुओं की भाँति ले सकते हैं तथा परमाणु-युगलों के बीच कमानियाँ लगी मान सकते हैं ।

अब हम इस अध्याय के अगले अनुभागों में तरंगों के विभिन्न अभिलाक्षणिक गुणों की चर्चा करेंगे ।

15.2 अनुप्रस्थ तथा अनुदैर्घ्य तरंगें

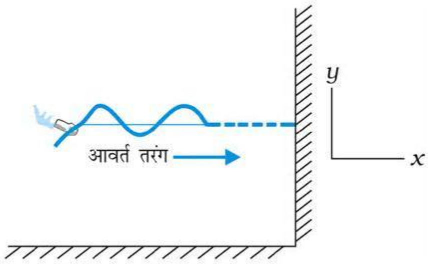
हम जानते हैं कि यांत्रिक तरंगों की गति में माध्यम के घटक दोलन करते हैं। यदि माध्यम के घटक तरंग की गति की दिशा के लंबवत् दोलन करते हैं तो ऐसी तरंग को हम अनुप्रस्थ तरंग कहते हैं। यदि माध्यम के घटक तरंग की गति की दिशा के अनुदिश दोलन करते हैं तो तरंग को अनुदैर्घ्य तरंग के रूप में जाना जाता है।

चित्र 15.2 में किसी डोरी के अनुदिश एक ऐसे स्पंद को गति करते दिखाया गया है जिसे डोरी को एक बार ऊपर-नीचे झटकने के बाद उत्पन्न किया गया है। यदि स्पंद के आमाप की तुलना में डोरी की लंबाई अत्यधिक हो तो उसके दूसरे सिरे तक पहुँचने से पहले ही स्पंद का अवमंदन हो जाएगा। अत: दूसरे सिरे



चित्र 15.2 जब किसी तानित डोरी के अनुदिश (x-अक्ष) कोई एकल स्पंद गतिशील होता है तो डोरी का कोई प्रतिरूपी अवयव ऊपर-नीचे (y-अक्ष) दोलन करता है ।

पर स्पंद के परावर्तन को अनदेखा किया जा सकता है। चित्र 15.3 में भी ऐसी ही एक स्थिति प्रदर्शित की गई है अंतर केवल इतना है कि इसमें बाह्य कारक द्वारा डोरी के एक सिरे पर ऊपर-नीचे की ओर सतत आवर्ती ज्यावक्रीय झटके प्रदान किए जा रहे हैं।



चित्र 15.3 किसी डोरी के अनुदिश प्रेषित कोई आवर्त (ज्यावक्रीय) तरंग अनुप्रस्थ तरंग का एक उदाहरण है। तरंग के क्षेत्र में डोरी का कोई प्रतिरूपी अवयव तरंग की गमन दिशा के लंबवत् अपनी साम्यावस्था के सापेक्ष दोलन करता है।

इस प्रकार से डोरी में उत्पन्न विक्षोभ का परिणाम उसमें प्रग्रामी ज्यावक्रीय तरंग होता है। दोनों ही परिस्थितियों में माध्यम के अवयव अपनी माध्य साम्यावस्था के इर्द-गिर्द दोलन करते हैं जबकि स्पंद अथवा तरंग उनसे संचरित होती है। दोलन डोरी में तरंग की गति की दिशा के लंबवत् हैं, अत: यह अनुप्रस्थ तरंग का एक उदाहरण है।

हम किसी तरंग पर दो प्रकार से विचार कर सकते हैं। हम किसी निश्चित काल-क्षण पर आकाश में तरंग का चित्रण कर

सकते हैं। इससे हमें किसी काल-क्षण पर तरंग की आकृति मिल जाएगी। एक अन्य विधि तरंग की किसी स्थान विशेष पर विचार करना है अर्थात् हम अपना ध्यान डोरी के किसी निश्चित अवयव पर केंद्रित करें तथा समय के साथ इसके दोलनों को देखें।

चित्र 15.4 में अनुदैर्घ्य तरंगों के सबसे सामान्य उदाहरण ध्वनि तरंगों की स्थिति प्रदर्शित की गई है। वायु से भरे किसी लंबे पाइप के एक सिरे पर एक पिस्टन लगा है। पिस्टन को एक बार अंदर की ओर धकेलते और फिर बाहर की ओर खींचने से संपीडन

चित्र 15.4 पिस्टन को आगे-पीछे गति कराकर वायु से भरी नली में ध्वनि तरंग उत्पन्न की जाती है। चूँकि वायु-अवयव के दोलन तरंग गति की दिशा के समांतर हैं, अत: यह अनुदैर्घ्य तरंग है।

(उच्च घनत्व) तथा विरलन (न्यून घनत्व) का स्पंद उत्पन्न हो जाएगा। यदि पिस्टन को अंदर की ओर धकेलने तथा बाहर की ओर खींचने का क्रम सतत तथा आवर्ती (ज्यावक्रीय) हो तो एक ज्यावक्रीय तरंग उत्पन्न होगी जो पाइप की लंबाई के अनुदिश वायु में गमन करेगी। स्पष्ट रूप से यह अनुदैर्घ्य तरंग का उदाहरण है।

उपरोक्त वर्णित तरंगें, चाहे वह अनुप्रस्थ हों अथवा अनुदैर्घ्य, प्रगामी तरंगें हैं क्योंकि वह माध्यम के एक बिन्दु से दूसरे बिंदु तक गमन करती हैं। जैसा कि पहले बताया गया है, वह द्रव्य जिससे तरंग संचरित होती है, गति नहीं करता है। उदाहरणार्थ, किसी धारा में जल की पूर्ण रूप से गति होती है। परन्तु, किसी जल तरंग में विक्षोभ गति करते हैं न कि पूर्ण रूप से जल। इसी प्रकार, पवन (वायु का पूर्ण रूप से गति) तथा ध्वनि तरंग को एक नहीं समझना चाहिए– ध्वनि तरंग में विक्षोभ (दाब घनत्व में) का वायु में संचरण होता है वायु माध्यम पूर्ण रूपेण गति नहीं करता है।

यांत्रिक तरंगें माध्यम के प्रत्यास्थ गुणधर्म से संबंधित हैं। अनुप्रस्थ तरंगों में माध्यम के अवयव संचरण की दिशा के लंबवत दोलन करते हैं जिसमें आकृति में परिवर्तन होता है अर्थात माध्यम के प्रत्येक अवयव में अपरूपण विकृति होती है। ठोसों एवं डोरियों में अपरूपण गुणांक होता है अर्थात ये अपरूपक प्रतिबलों का प्रतिपालन कर सकते हैं। तरलों का अपना कोई आकार नहीं होता है इसलिए तरल अपरूपक प्रतिबल का प्रतिपालन नहीं कर सकते हैं। अत: अनुप्रस्थ तरंगें ठोसों एवं डोरियों (तनाव में) में संभव हैं परन्तु तरलों में नहीं। यथा, ठोसों तथा तरलों दोनों में आयतन प्रत्यास्थता गुणांक होता है अर्थात ये संपीडन विकृति का प्रतिपालन कर सकते हैं। चूंकि अनुदैर्घ्य तरंगें संपीडन विकृति (दाब) से संबंधित हैं, ये ठोसों तथा तरलों दोनों में संचरण कर सकती हैं। अत: स्टील की छड़ (जिसमें अपरूपण तथा आयतन प्रत्यास्थता गुणांक दोनों होता है) में अनुदैर्घ्य तथा अनुप्रस्थ दोनों प्रकार की तरंगें संचरित हो सकती हैं। परन्तु वायु में केवल अनुदैर्घ्य दाब तरंगों (ध्वनि) का संचरण संभव है। जब स्टील की छड़ जैसे माध्यम में अनुदैर्घ्य एवं अनुप्रस्थ दोनों प्रकार की तरंगें संचरित होती हैं तो उनकी चाल भिन्न हो सकती है क्योंकि दोनों भिन्न प्रत्यास्थता गुणांक के फलस्वरूप हैं।

उदाहरण 15.1 नीचे तरंग गति के कुछ उदाहरण दिए गए हैं, प्रत्येक स्थिति में यह बताइए कि क्या तरंग गति अनुप्रस्थ है, अनुदैर्घ्य है अथवा दोनों का संयोजन है :

(a) किसी लंबी कुंडलित कमानी के एक सिरे को एक ओर विस्थापित करने पर उस कमानी की किसी विभंग (ऐंठन) की गति।

(b) द्रव से भरे किसी सिलिंडर में इसके पिस्टन को आगे-पीछे करके सिलिंडर में उत्पन्न तरंगें।

(c) जल के पृष्ठ पर चलती मोटरबोट द्वारा उत्पन्न तरंगें।

(d) किसी कंपायमान क्वार्ट्ज़ क्रिस्टल द्वारा वायु में उत्पन्न पराश्रव्य तरंगें।

हल

(a) अनुप्रस्थ

(b) अनुदैर्घ्य

(c) अनुप्रस्थ तथा अनुदैर्घ्य

(d) अनुदैर्घ्य

15.3 प्रगामी तरंगों में विस्थापन संबंध

किसी प्रगामी तरंग के गणितीय विवरण के लिए, हमें स्थिति x तथा समय t दोनों के किसी फलन की आवश्यकता होती है। प्रत्येक क्षण पर यह फलन तरंग की उस क्षण पर आकृति का विवरण देता है। साथ ही दी हुई प्रत्येक स्थिति पर यह फलन उस स्थिति पर माध्यम की अवयव की गति का विवरण भी देता है। यदि हम किसी ज्यावक्रीय प्रगामी तरंग (ऐसी एक तरंग चित्र 15.3 में दर्शायी गई है) का वर्णन

करना चाहते हैं तो संलग्न फलन भी ज्यावक्रीय होना चाहिए। सुविधा के लिए हम किसी अनुप्रस्थ तरंग पर विचार करेंगे जिससे यदि माध्यम के किसी अवयव की स्थिति को x से निरूपित करें तो अवयव का माध्य स्थिति से विस्थापन को y से निरूपित करना होगा। किसी ज्यावक्रीय प्रगामी तरंग को तब निम्न रूप से वर्णित करते हैं

$$y\,(x,\,t) = a \sin\,(k\,x - \omega t + \phi) \qquad (15.2)$$

ज्या फलन के कोणांक में पद ϕ का तात्पर्य है कि हम ज्या और कोज्या फलनों के रैखिक संयोजन पर विचार कर रहे हैं :

$$y(x,\,t) = A \sin\,(kx - \omega t) + B \cos\,(kx - \omega t) \qquad (15.3)$$

तब समीकरण (15.2) एवं (15.3) से

$$a = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{तथा} \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$$

समीकरण (15.2) क्यों ज्यावक्रीय प्रगामी तरंग निरूपित करता है यह समझने के लिए किसी निश्चित क्षण, मान लीजिए $t = t_0$, पर विचार करें। तब समीकरण (15.2) में ज्या फलन का कोणांक (kx + स्थिरांक) होगा। अतः तरंग का आकार (किसी निश्चित क्षण पर) x के फलन के रूप में ज्या तरंग है। इसी प्रकार, किसी निश्चित स्थिति $x = x_0$ पर विचार करें। तब समीकरण (15.2) में ज्या फलन का कोणांक एक स्थिरांक $-\omega t$ है। अतः किसी निश्चित स्थिति पर विस्थापन y समय के साथ ज्यावक्रीय रूप से परिवर्तित होता है। अर्थात, विभिन्न स्थितियों पर माध्यम के अवयव सरल आवर्त गति करते हैं। ध्यान दीजिए कि जैसे t का मान बढ़ता है, x का मान भी धनात्मक दिशा में बढ़ेगा जिससे $kx - \omega t + \phi$ का मान अचर रहे। अतः समीकरण (15.2) x - अक्ष के धनात्मक दिशा के अनुदिश ज्यावक्रीय (आवर्त) तरंग निरूपित करता है। इसके विपरीत, फलन

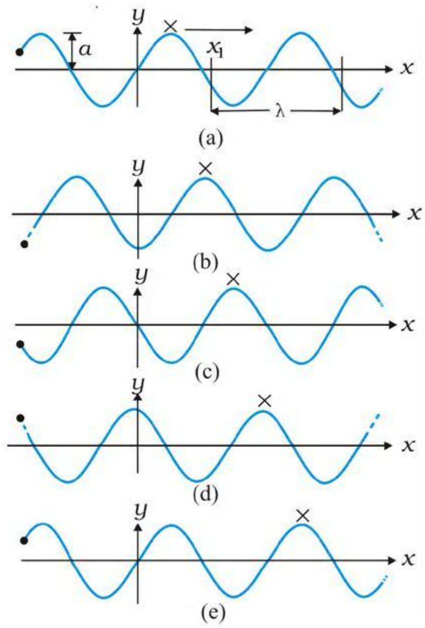
$$y(x,\,t) = a \sin\,(kx + \omega t + \phi) \qquad (15.4)$$

x-अक्ष की ऋणात्मक दिशा के अनुदिश गतिशील तरंग को निरूपित करता है। चित्र 15.5 समीकरण (15.2) के विभिन्न भौतिक राशियों के नाम दर्शाता है जिसको हम अब परिभाषित करेंगे।

$y(x,t)$	:	स्थिति x तथा समय t के फलन के रूप में विस्थापन
a	:	तरंग का आयाम
ω	:	तरंग की कोणीय आवृत्ति
k	:	कोणीय तरंग संख्या
$kx - \omega t + \phi$	:	आरंभिक कला कोण ($a+x = 0$, $t = 0$)

चित्र 15.5 समीकरण (15.2) के मानक चिह्नों की परिभाषा।

चित्र 15.6 समान अंतराल पर पाँच भिन्न मानों के लिए समीकरण (15.2) के आलेख दर्शाता है। किसी तरंग में अधिकतम धनात्मक विस्थापन वाले बिंदु को शीर्ष कहते हैं तथा अधिकतम ऋणात्मक विस्थापन वाले बिंदु को गर्त कहते हैं। यह देखने के लिए कि कोई तरंग कैसे गति करती है हम शीर्ष पर ध्यान केन्द्रित कर सकते हैं और फिर देखें कि यह शीर्ष समय के साथ कैसे गति करता है। चित्र में इसे शीर्ष पर क्रास (×) से दर्शाया गया है। इसी प्रकार हम माध्यम के किसी निश्चित स्थिति, मान लीजिए



चित्र 15.6 भिन्न समयों पर x-अक्ष की धनात्मक दिशा के अनुदिश गतिशील कोई आवर्ती तरंग

x अक्ष के मूल बिंदु पर किसी अवयव की गति पर विचार कर सकते हैं। इसे चित्र पर ठोस बिन्दु (•) से दर्शाया गया है। चित्र 15.6 के आलेख दर्शाते हैं कि मूल बिंदु पर ठोस बिंदु (•) समय के साथ आवर्ती रूप से गति करता है। अर्थात, तरंग के गति के साथ मूल बिंदु पर स्थित कण अपनी माध्य स्थिति के पारित: दोलन करता है। यह किसी अन्य स्थिति के कण के लिए भी सत्य है। हम यह भी देखते हैं कि जितने समय में ठोस बिंदु (•) एक पूर्ण दोलन करता है उतने में शीर्ष एक निश्चित दूरी चल लेता है।

चित्र 15.6 के आलेखों के आधार पर अब हम समीकरण (15.2) की विभिन्न राशियों को परिभाषित करेंगे

15.3.1 आयाम तथा कला

समीकरण (15.2) में, चूंकि ज्या फलन का मान +1 तथा –1 के बीच परिवर्तित होता है, विस्थापन $y(x,t)$ का मान a तथा $-a$ के बीच परिवर्तित होता है। हम यदि a को धनात्मक अचर मानें तो व्यापकता का कोई ह्रास नहीं होता है। तब a माध्यक के किसी अवयव का अपने माध्य स्थिति से अधिकतम विस्थापन दर्शाता है। ध्यान दें कि विस्थापन y धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है परंतु a धनात्मक है। a को तरंग का *आयाम* कहते हैं।

समीकरण (15.2) के कोणांक की राशि $(kx - \omega t + \phi)$ को तरंग की कला कहते हैं। दिये हुए आयाम a के लिए, किसी स्थिति एवं समय पर कला तरंग का विस्थापन निर्धारित करता है। स्पष्टत: $x = 0$ तथा $t = 0$ पर कला ϕ है। अत: ϕ को आरंभिक कला कोण कहते हैं। x- अक्ष पर मूल बिंदु तथा आरंभिक क्षण का इस प्रकार चुनाव सदैव ही संभव होता है कि $\phi = 0$ । अत: समीकरण (15.2) में $\phi = 0$ लेने पर व्यापकता का कोई ह्रास नहीं होता है।

15.3.2 तरंगदैर्घ्य तथा कोणीय तरंग संख्या

समान कला के दो बिंदुओं के बीच की न्यूनतम दूरी को तरंगदैर्घ्य कहते हैं और इसे सामान्यत: λ से दर्शाते हैं। सुविधा के लिए हम समान कला वाले बिंदुओं को शीर्ष या गर्त ले सकते हैं। तब तरंगदैर्घ्य दो क्रमागत शीर्षों अथवा गर्तों के बीच की दूरी है। समीकरण (15.2) में $\phi = 0$ लेने पर, $t = 0$ पर विस्थापन होगा

$$y(x, 0) = a \sin kx \qquad (15.5)$$

चूंकि कोण में 2π से प्रत्येक परिवर्तन पर ज्या फलन का मान वही रहता है :

$$\sin kx = \sin(kx + 2n\pi) = \sin k\left[x + \frac{2n\pi}{k}\right]$$

अर्थात बिंदुओं x तथा $x + \frac{2n\pi}{k}$ a पर विस्थापन समान होते हैं – यहाँ $n = 1, 2, 3, ...$ । समान विस्थापन किसी दिये हुए क्षण पर वाले बिंदुओं के मध्य न्यूनतम दूरी $n = 1$ लेने पर प्राप्त होती है। λ तब दिया जाता है समीकरण

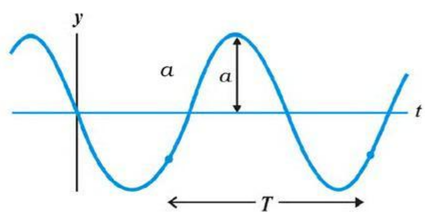
$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \text{ या } k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (15.6)$$

k को **संचरण स्थिरांक** अथवा **कोणीय तरंग संख्या** कहते हैं । इसका SI मात्रक रेडियन प्रति मीटर अथवा rad m^{-1} है।*

15.3.3 आवर्तकाल, कोणीय आवृत्ति तथा आवृत्ति

चित्र 15.7 में एक ज्यावक्रीय आलेख दिखाया गया है। यह किसी निश्चित क्षण पर तरंग का आकार नहीं दर्शाता है बल्कि माध्यम के एक अवयव (किसी निश्चित स्थिति पर) का समय के साथ विस्थापन दर्शाता है। सुविधा के लिए हम समीकरण (15.2) में ϕ=0 लेते हैं और अवयव (मान लीजिए x=0 पर) की गति पर ध्यान देते हैं। तब हमें प्राप्त होता है

$$\begin{aligned} y(0,t) &= a \sin(-\omega t) \\ &= -a \sin \omega t \end{aligned}$$



चित्र 15.7 जब तरंग डोरी में से गुजरती है तो किसी निश्चित स्थिति पर डोरी का अवयव आयाम a से समय के साथ दोलन करता है।

तरंग के दोलन का आवर्त काल डोरी के किसी अवयव द्वारा एक पूर्ण दोलन में लिया गया समय है। अर्थात्

$$\begin{aligned} -a \sin \omega t &= -a \sin \omega(t + T) \\ &= -a \sin(\omega t + \omega T) \end{aligned}$$

चूंकि ज्या फलन प्रत्येक 2π कोण पर पुनरावृत्ति करता है,

$$\omega T = 2\pi, \text{ या } \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (15.7)$$

ω को तरंग की **कोणीय आवृत्ति** कहते हैं । इसका SI मात्रक रेडियन प्रति सेकंड अथवा rad s^{-1} है। किसी तरंग की आवृत्ति ν प्रति सेकंड दोलनों की संख्या है। अत:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad (15.8)$$

*यहाँ भी rad को छोड़ सकते हैं और मात्रक को केवल m^{-1} से व्यक्त कर सकते हैं। अत:, k, इकाई लंबाई में समा सकने वाली तरंगों की संख्या का 2π से गुणा करने पर प्राप्त होने वाली m^{-1} SI मात्रक में मापी जाने वाली राशि है।

ν को हर्ट्ज (Hz) में मापते हैं।

उपर्युक्त चर्चा में सदैव ही किसी डोरी के अनुदिश गतिशील तरंग अथवा अनुप्रस्थ तरंग का संदर्भ लिया गया है । अनुदैर्घ्य तरंग में माध्यम के किसी अवयव में तरंग संचरण की दिशा के समांतर विस्थापन होता है । समीकरण (15.2) में किसी अनुदैर्घ्य तरंग के लिए विस्थापन फलन इस प्रकार लिखा जाता है,

$$s(x, t) = a \sin (kx - \omega t + \phi) \qquad (15.9)$$

यहाँ $s(x, t)$ स्थिति x तथा समय t पर माध्यम के किसी अवयव का तरंग संचरण की दिशा में विस्थापन है । समीकरण (15.9) में a विस्थापन आयाम है। अन्य सभी राशियों के वही अर्थ हैं जो अनुप्रस्थ तरंग के प्रकरण में थे । केवल एक ही अंतर है कि विस्थापन फलन $y(x, t)$ के स्थान पर फलन $s(x, t)$ लिया गया है।

उदाहरण 15.2 : किसी डोरी के अनुदिश गमन करती तरंग का विवरण इस प्रकार दिया गया है,

$y(x, t) = 0.005 \sin (80.0\, x - 3.0\, t)$

यहाँ आंकिक स्थिरांक SI मात्रकों में हैं (0.005 m, 80.0 rad/m तथा 3.0 rad/s)। तरंग का (a) आयाम, (b) तरंगदैर्घ्य (c) आवर्तकाल एवं आवृत्ति परिकलित कीजिए। दूरी $x = 30.0$ cm तथा समय $t = 20$ s पर तरंग का विस्थापन y भी परिकलित कीजिए ।

हल इस विस्थापन की तुलना समीकरण (15.2) से करने पर

$$y (x, t) = a \sin (kx - \omega t)$$

हमें निम्नलिखित मान प्राप्त होते हैं,

(a) तरंग का आयाम = 0.005 m = 5 mm

(b) कोणीय तरंग संख्या = 80.0 m^{-1} तथा कोणीय आवृत्ति $\omega = 30\ s^{-1}$

अब हम समीकरण (15.6) के द्वारा तरंगदैर्घ्य λ तथा k में संबंध लिखते हैं

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{80.0\ m^{-1}} = 7.85\ cm$$

(c) अब हम नीचे दिए गए T तथा ω में संबंध द्वारा T का मान ज्ञात करते हैं,

$$T = 2\pi/\omega = \frac{2\pi}{3.0\ s^{-1}} = 2.09\ s$$

अब चूँकि आवृत्ति $\nu = 1/T$
$= 0.48$ Hz

दूरी $x = 30.0$ cm तथा समय $t = 20$ s पर विस्थापन

$$y = 0.005 m \sin (80.0 \times 0.3 - 3.0 \times 20)$$
$$= 0.005 m \sin (-36 + 12\pi) = (0.005 m) \sin (1.699)$$
$$= (0.005\ m) \sin (97°) \simeq 5\ mm$$

15.4 प्रगामी तरंग की चाल

किसी प्रगामी तरंग की चाल निरूपित करने के लिए हम तरंग के किसी बिन्दु (किसी कला कोण द्वारा अभिलक्षित) पर ध्यान केंद्रित कर सकते हैं और देखते हैं कि यह बिंदु समय के साथ किस तरह गमन करता है। तरंग के शीर्ष की गति पर ध्यान देना सुविधाजनक होता है। चित्र 15.8 में दो विभिन्न समयों, जिनके बीच Δt का लघु समय अंतराल है, पर तरंग का आकार दर्शाया गया है। समस्त तरंग पैटर्न दाईं ओर (x-अक्ष की धनात्मक दिशा) Δx दूरी चलता है। वास्तव में, क्रास ($\times$) द्वारा दर्शाया शीर्ष समय Δt में दूरी Δx चलता है। इस प्रकार तरंग की चाल $\Delta x/\Delta t$ है। किसी अन्य कला वाले बिंदु पर भी हम क्रास ($\times$) लगा सकते हैं। यह उसी वेग υ से गमन करेगा (अन्यथा तरंग पैटर्न अपरिवर्तित नहीं रहेगा)। तरंग पर किसी निश्चित कला बिंदु की गति को दिया जाता है

$$kx - \omega t = \text{नियतांक} \qquad (15.10)$$

अत: जब समय t बदलता है, तो निश्चित कला बिंदु की स्थिति x भी इस प्रकार बदलती है कि कला कोणांक अचर रहे। अत:

$$kx - \omega t = k (x+\Delta x) - \omega (t + \Delta t)$$

या $\quad k\Delta x - \omega \Delta t = 0$

$\Delta x, \Delta t$ का अल्पतम मान लेने पर

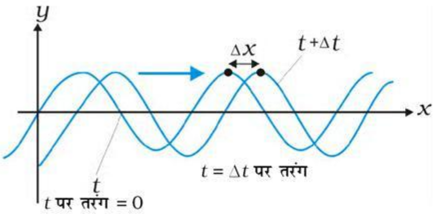
$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \upsilon \qquad (15.11)$$

ω को T से तथा k को λ से संबंधित करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\upsilon = \frac{2\pi\omega}{2\pi k} = \lambda \nu = \frac{\lambda}{T} \qquad (15.12)$$

समीकरण (15.12) सभी प्रगामी तरंगों के लिए एक व्यापक संबंध है। यह बताती है कि माध्यम के किसी अवयव के एक

पूर्ण दोलन काल में तरंग पैटर्न एक तरंगदैर्घ्य के बराबर दूरी तय करती है। ध्यान दीजिए कि किसी यांत्रिक तरंग की चाल माध्यम के जड़त्वीय गुणों (डोरी के लिए रैखिक द्रव्यमान घनत्व, सामान्यतया द्रव्यमान घनत्व) तथा प्रत्यास्थ गुणों (रैखिक निकायों के लिए यंग प्रत्यास्थता गुणांक/अपरूपण गुणांक, आयतन प्रत्यास्थता गुणांक) द्वारा निर्धारित होता है। माध्यम चाल निर्धारित करता है। यथा समीकरण (15.2) एक निश्चित चाल के लिए तरंगदैर्घ्य और आवृत्ति का संबंध देता है। वास्तव में, जैसा पहले बताया जा चुका है, माध्यम में अनुप्रस्थ तथा अनुदैर्घ्य दोनों तरंगें संभव हैं तथा इनकी चाल उसी माध्यम में अलग-अलग होगी। इस अध्याय के अनुवर्ती उपभागों में कुछ माध्य यांत्रिक तरंगों की चाल के लिए हम विशिष्ट व्यंजक प्राप्त करेंगे।

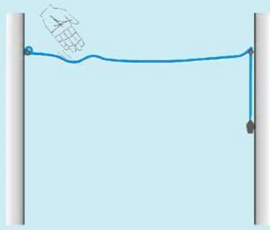


चित्र 15.8 समय t से t+Δt तक किसी आवृत्ति तरंग का गमन, जहाँ Δt लघु समय अंतराल है। तरंग पैटर्न समस्त रूप से दाईं ओर स्थानांतरित हो जाता है। तरंग का शीर्ष (या निश्चित कला वाला कोई और बिंदु) समय Δt में दूरी Δx गमन करता है।

15.4.1 तनित डोरी पर अनुप्रस्थ तरंग की चाल

किसी यांत्रिक तरंग की चाल विक्षोभ के कारण माध्यम में उत्पन्न प्रत्यानयन बल और जड़त्वीय गुणों (द्रव्यमान घनत्व) द्वारा निर्धारित होती है। चाल प्रथम कारक से अनुलोम रूप से तथा दूसरे कारक से प्रतिलोम रूप से संबंधित होती है। किसी डोरी पर तरंग के लिए प्रत्यानयन बल डोरी में तनाव T प्रदान करता है। इस संदर्भ में जड़त्वीय गुण रैखिक द्रव्यमान घनत्व μ है जो डोरी के द्रव्यमान m को उसकी लंबाई l से विभाजित करने पर प्राप्त होता है। न्यूटन के गतिकीय नियमों का उपयोग करके किसी डोरी पर तरंग की चाल के लिए यथार्थ सूत्र प्राप्त किया जा सकता है परन्तु यह उत्पत्ति इस पुस्तक की सीमा के बाहर है। अत: हम विमीय विश्लेषण का उपयोग करेंगे। परन्तु हम यह जान चुके हैं कि केवल विमीय विश्लेषण से यथार्थ सूत्र नहीं प्राप्त हो सकता है। इस विधि से प्राप्त संबंध में स्थिरांक संबंधी अनिश्चितता रहती है। μ की विमा $[ML^{-1}]$ है तथा T की बल की, अर्थात $[MLT^{-2}]$ है। हमें इन विमाओं को इस प्रकार

किसी रस्सी पर स्पंद का संचरण



किसी रस्सी पर एक स्पंद का संचरण आप आसानी से देख सकते हैं। आप एक दृढ़ परिसीमा से इस स्पंद का परिवर्तन होना भी देख सकते हैं और इसके गमन वेग की गणना भी कर सकते हैं। इसके लिए आपको 1 से 3 cm व्यास के एक रस्से, दो हुकों और कुछ भारों की आवश्यकता होगी। आप यह प्रयोग अपनी कक्षा में भी कर सकते हैं और प्रयोगशाला में भी।

1 से 3 cm व्यास की लंबी रस्सी लीजिए। किसी सभागार या प्रयोगशाला के आमने-सामने की दीवारों पर दो हुक लगाकर इसका एक सिरा एक हुक से कस कर बाँध दीजिए और दूसरे सिरे को सामने वाले हुक से गुजार कर इस पर कोई भार (1 से 5kg) लटकाइये। दीवारों के बीच की दूरी 3 से 5 मीटर हो सकती है। एक छड़ लीजिए और रस्सी के एक सिरे के पास इस पर ज़ोर से प्रहार कीजिए। इससे रस्सी पर एक स्पंद बनेगा जो फिर इस पर दूसरे सिरे तक जाएगा। आप इसे दूसरे सिरे तक जाकर परावर्तित होता हुआ देख सकते हैं। आप आपाती स्पंद और परावर्तित स्पंद की कलाओं का संबंध भी जाँच सकते हैं। स्पंद के समाप्त होने से पहले आप इसके दो-तीन परावर्तन होते देख सकते हैं। एक स्टॉपवाच (विराम घड़ी) की सहायता से आप स्पंद द्वारा एक दीवार से दूसरी दीवार की दूरी तक चलने में लगा समय ज्ञात कर सकते हैं और फिर इसके वेग की गणना कर सकते हैं। इसकी तुलना समीकरण (15.14) द्वारा प्राप्त मान से कीजिए।

ऐसा ही किसी संगीत वाद्य के पतले धात्विक तंतु के मामले में भी होता है। मुख्य अंतर बस यह है कि तंतु का प्रति इकाई द्रव्यमान कम होने के कारण इस पर स्पंद का वेग मोटी रस्सी पर इसके वेग की तुलना में काफी अधिक होता है। रस्सी पर स्पंद का वेग कम होने के कारण इसे देखा जा सकता है और इसलिए मापन सुविधाजनक और सटीक हो जाता है।

संयोजित करना है कि चाल की विमा [LT^{-1}] प्राप्त हो। हम आसानी से देख सकते हैं कि अनुपात T/μ में यही विमा है

$$\frac{[MLT^{-2}]}{[ML^{-1}]} = [L^2T^{-2}]$$

अत:, यदि T तथा μ ही प्रासंगिक भौतिक राशियाँ हैं तो

$$v = C\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (15.13)$$

जहाँ C विमाहीन स्थिरांक है, जिसे विमीय विश्लेषण द्वारा निर्धारित करना संभव नहीं है । वास्तव में यथार्थ सूत्र में C का मान 1 है। अत: तानित डोरी में अनुप्रस्थ तरंग की चाल

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (15.14)$$

ध्यान दीजिए कि चाल v माध्यम के गुण T और μ (T बाहरी बल के कारण तानित डोरी का अभिलक्षण है) पर तरंग की तरंगदैर्घ्य या आवृत्ति पर स्वत: निर्भर नहीं करती है। आगे की कक्षाओं में आप ऐसी तरंगों के बारे में पढ़ेंगे जिनकी चाल आवृत्ति से स्वतंत्र नहीं है। दो कारकों λ तथा ν उत्पन्न तरंग की आवृत्ति विक्षोभ के स्रोत पर निर्भर करता है। माध्यम में किसी निश्चित चाल तथा आवृत्ति के लिए, समीकरण (15.12) तरंगदैर्घ्य का निर्धारण करता है:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} \qquad (15.15)$$

उदाहरण 15.3 : 0.72 m लंबे किसी स्टील के तार का द्रव्यमान 5.0×10^{-3} kg है । यदि तार पर तनाव 60 N है, तो तार पर अनुप्रस्थ तरंगों की चाल क्या है ?

हल: तार की प्रति एकांक लंबाई का द्रव्यमान

$$\mu = \frac{5.0\times10^{-3}\,\text{kg}}{0.72\text{ m}}$$

$$= 6.9\times10^{-3}\text{ kg m}^{-1}$$

तनाव, T = 60 N

तार पर अनुप्रस्थ तरंगों की चाल,

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{60\text{ N}}{6.9\times10^{-3}\text{ kg m}^{-1}}} = 93\text{ m s}^{-1}$$

15.4.2 अनुदैर्घ्य तरंग की चाल - ध्वनि की चाल

किसी अनुदैर्घ्य तरंग में माध्यम के अवयव तरंग संचरण की दिशा में अपनी स्थिति के आगे-पीछे दोलन करते हैं । हम पहले भी देख चुके हैं कि ध्वनि तरंगें वायु के लघु आयतन-अवयवों के संपीडनों तथा विरलनों के रूप में गमन करती हैं । संपीडन विकृति में प्रतिबल का निर्धारण करने वाली प्रत्यास्थ गुणधर्म माध्यम का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक है जिसे इस प्रकार परिभाषित करते हैं,

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} \qquad (15.16)$$

यहाँ दाब में परिवर्तन ΔP आयतन विकृति $\Delta V/V$ उत्पन्न करता है। B की विमा वही है जो दाब की है और SI मात्रक में इसे पास्कल (Pa) में व्यक्त करते हैं। तरंग के संचरण के लिए प्रासंगिक जड़त्वीय गुण द्रव्यमान घनत्व ρ है जिसकी विमा [ML^{-3}] है । हम आसानी से देख सकते हैं कि राशि B/ρ में उपेक्षित विमा है :

$$\frac{[M\,L^{-1}\,T^{-2}]}{[M\,L^{-3}]} = [L^2\,T^{-2}] \qquad (15.17)$$

अत:, यदि B तथा ρ ही प्रासंगिक भौतिक राशियाँ हैं तो

$$v = C\sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad (15.18)$$

यहाँ C एक स्थिरांक है जिसे विमीय विश्लेषण द्वारा निर्धारित करना संभव नहीं है। यथार्थ उत्पत्ति से C=1 प्राप्त होता है । अत: किसी माध्यम में अनुदैर्घ्य तरंगों की चाल के लिए व्यापक सूत्र है:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad (15.19)$$

किसी ठोस छड़ जैसे रैखीय माध्यम के लिए, छड़ में पार्श्वीय प्रसार नगण्य होता है और हमें छड़ को केवल अनुदैर्घ्य विकृति पर विचार करने की आवश्यकता होती है। इस प्रकरण में, प्रासंगिक प्रत्यास्थता गुणांक 'यंग गुणांक' है जिसकी विमा आयतन-प्रत्यास्थता गुणांक की विमा है। इस प्रकरण के लिए विमीय विश्लेषण पहले जैसा है और हमें समीकरण (15.18) जैसी समीकरण प्राप्त होती है जिसमें अनिर्धारित स्थिरांक C होता है जिसका मान यथार्थ उत्पत्ति से 1 प्राप्त होता है। इस प्रकार किसी ठोस छड़ में अनुदैर्घ्य तरंग की चाल निम्नलिखित संबंध द्वारा व्यक्त की जाती है:

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \qquad (15.20)$$

यहाँ Y छड़ के पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक है । सारणी 15.1 में विभिन्न माध्यमों में ध्वनि की चाल दर्शायी गई है।

सारणी 15.1 कुछ माध्यमों में ध्वनि की चाल

माध्यम	चाल ($m s^{-1}$)
गैसें	
वायु (0°C)	331
वायु (20°C)	343
हीलियम	965
हाइड्रोजन	1284
द्रव	
जल (0°C)	1402
जल (20°C)	1482
समुद्र-जल	1522
ठोस	
ऐलुमिनियम	6420
कॉपर (ताँबा)	3560
स्टील	5941
ग्रेनाइट	6000
वल्केनाइज्ड रबर	54

द्रवों तथा ठोसों में ध्वनि की चाल गैसों की तुलना में अधिक है। [ध्यान दें कि ठोसों के प्रकरण में, प्रासंगिक चाल ठोस में अनुदैर्घ्य तरंग की चाल है]। इसका कारण यह है कि द्रवों व ठोसों को गैसों की तुलना में संपीडित करना अधिक कठिन होता है। अत: इनके आयतन प्रत्यास्थता गुणांक के मान अधिक होते हैं। यह कारण गैसों से उनके घनत्व अधिक होने को निरस्त करता है।

किसी गैस में ध्वनि के चाल का आकलन हम आदर्श गैस सन्निकटन में कर सकते हैं। किसी आदर्श गैस (देखें अध्याय 11) के लिए दाब P, आयतन V तथा ताप T के नीचे संबंध इस प्रकार व्यक्त किया जाता है:

$$PV = Nk_BT \tag{15.21}$$

यहाँ N गैस में अणुओं की संख्या, k_B बोल्ट्ज़मान नियतांक तथा T गैस का केल्विन में ताप है । अत: किसी समतापी परिवर्तन के लिए समीकरण (15.21) से हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है

$$V\Delta P + P\Delta V = 0$$

अथवा $$-\frac{\Delta P}{\Delta V/V} = P$$

अत: समीकरण (15.16) में यह मान प्रतिस्थापित करने पर,

$$B = P$$

अत: समीकरण (15.19) से किसी आदर्श गैस में अनुदैर्घ्य तरंगों की चाल,

$$v = \sqrt{\frac{P}{\rho}} \tag{15.22}$$

इस संबंध को सर्वप्रथम न्यूटन ने स्थापित किया था, अत: इसे न्यूटन का सूत्र भी कहते हैं ।

▶ **उदाहरण 15.4** न्यूटन के सूत्र का उपयोग करके मानक ताप एवं दाब (STP) पर वायु में ध्वनि की चाल का आकलन कीजिए । वायु के 1 मोल का द्रव्यमान 29.0×10^{-3} kg है ।

हल : हम जानते हैं कि किसी भी गैस के 1 मोल का STP पर आयतन 22.4 लीटर होता है । अत: वायु का STP पर घनत्व

$$\rho_0 = \frac{\text{1 मोल वायु का द्रव्यमान}}{\text{STP पर 1 मोल वायु का आयतन}}$$

$$= \frac{29.0 \times 10^{-3}\,\text{kg}}{22.4 \times 10^{-3}\,\text{m}^3}$$

$$= 1.29\ \text{kg m}^{-3}$$

किसी माध्यम से ध्वनि की चाल के लिए न्यूटन के सूत्र के अनुसार हमें STP पर वायु में ध्वनि के वेग का निम्नलिखित मान प्राप्त होता है,

$$v = \left[\frac{1.01 \times 10^5\,\text{N m}^{-2}}{1.29\,\text{kg m}^{-3}}\right]^{1/2} = 280\ \text{m s}^{-1} \tag{15.23}$$ ◀

समीकरण (15.23) से प्राप्त वायु में ध्वनि की चाल का मान, सारणी 15.1 में दिए गए प्रयोगों द्वारा प्राप्त वायु में ध्वनि की चाल के मान 331 $m s^{-1}$ की तुलना में 15% कम है। आखिर हमसे कहाँ गलती हुई? यदि हम न्यूटन की इस मूल कल्पना का परीक्षण करें जिसमें न्यूटन ने ध्वनि संचरण के समय माध्यम में दाब में होने वाले परिवर्तन को समतापी माना, तो हम यह पाते हैं कि उनकी यह कल्पना सही नहीं थी । लाप्लास ने यह बताया कि ध्वनि संचरण के समय माध्यम में दाब-परिवर्तन इतनी तीव्र गति से होते हैं कि ऊष्मा प्रवाह के लिए ताप को स्थायी बनाए रखने का आवश्यक समय उपलब्ध नहीं हो पाता। फलस्वरूप यह परिवर्तन समतापी नहीं होते वरन् रुद्धोष्म

(adiabatic) होते हैं । रुद्धोष्म प्रक्रियाओं के लिए आदर्श गैसों पर निम्न संबंध लागू होता है

PV^{γ} = स्थिरांक

अथवा $\Delta(PV^{\gamma}) = 0$

$$P\gamma V^{\gamma-1}\Delta V + V^{\gamma}\Delta P = 0$$

इस प्रकार, आदर्श गैस के लिए रुद्धोष्म आयतन प्रत्यास्थता गुणांक

$$B_{ad} = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} = \gamma P$$

यहाँ γ गैस की दो विशिष्ट ऊष्माओं का अनुपात C_p/C_v है । अत: वायु में ध्वनि की चाल,

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \qquad (15.24)$$

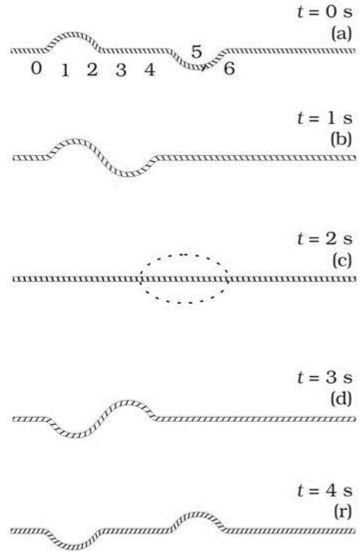
न्यूटन के सूत्र में इस संशुद्धि को **लाप्लास संशोधन** कहते हैं । वायु के लिए $\gamma = 7/5$, अत: अब यदि हम STP पर वायु में ध्वनि की चाल के आकलन के लिए समीकरण (15.24) का प्रयोग करें तो ध्वनि की चाल का मान 331.3 m s^{-1} प्राप्त होता है, जो मापित चाल से मेल खाता है ।

15.5 तरंगों के अध्यारोपण का सिद्धांत

जब विपरीत दिशाओं में गमन करती दो तरंग स्पंद एक दूसरे को पार करते हैं तो क्या होता है? यह देखा जाता है कि पार करने के बाद भी तरंग स्पंद अपना व्यष्टित्व बनाए रखती है। परंतु, अतिव्यापन के दौरान, तरंग पैटर्न दोनों तरंग स्पंदों से भिन्न होता है। चित्र 15.9 बराबर एवं विपरीत आकारों वाले दो तरंग स्पंदों के एक दूसरे की ओर गमन की स्थिति दर्शाता है। जब स्पंद अतिव्याप्ति होते हैं तो परिणामी विस्थापन पृथक-पृथक स्पंदों के कारण विस्थापनों का बीजगणितीय योग होता है। इस प्रकार जोड़ना तरंगों का **अध्यारोपण का सिद्धांत** कहलाता है। इस सिद्धांत के अनुसार, प्रत्येक स्पंद इस प्रकार गमन करता है मानो दूसरे स्पंद विद्यमान नहीं हैं। अत: माध्यम के अवयव दोनों के कारण विस्थापित होते हैं और चूंकि विस्थापन धनात्मक या ऋणात्मक हो सकते हैं, नेट विस्थापन दोनों विस्थापनो का बीजगणितीय योग होता है। चित्र 15.9 विभिन्न समयों पर तरंग आकार का आलेख दर्शाता है। आलेख (c) में विशेष प्रभाव पर ध्यान दें : दोनों स्पंदों के कारण पृथक-पृथक उत्पन्न विस्थापन एक दूसरे को ठीक से निरस्त कर देते हैं तथा प्रत्येक बिंदु पर कुल विस्थापन शून्य है।

अध्यारोपण के सिद्धांत को गणितीय रूप में व्यक्त करने के लिए, मान लीजिए $y_1(x, t)$ तथा $y_2(x, t)$ माध्यम के किसी अवयव के विस्थापन हैं, जो यदि तरंग अलग-अलग गमन करती तो उस अवयव के होते। यदि दो तरंगें किसी क्षेत्र में एक साथ पहुंचती हैं और अतिव्यापित होती हैं तो नेट विस्थापन $y(x, t)$ होगा

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \qquad (15.25)$$



चित्र 15.9 समान एवं विपरीत विस्थापन वाली विपरीत दिशा में गमन करती दो स्पंद। आलेख (c) में दोनों स्पंदों के अतिव्यापन से शून्य विस्थापन होता है।

यदि किसी माध्यम में एक ही क्षण दो अथवा अधिक तरंगें गमन कर रहीं हैं तो उनका परिणामी तरंग रूप दोनों तरंगों के पृथक-पृथक तरंग फलनों का योग होता है । अर्थात यदि गतिशील तरंगों के तरंग फलन इस प्रकार हैं,

$y_1 = f_1(x - vt)$,

$y_2 = f_2(x - vt)$,

....

....

$y_n = f_n(x - vt)$,

तब माध्यम में विक्षोभ का वर्णन करने वाला तरंग फलन इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$$y = f_1(x - vt) + f_2(x - vt) + \ldots\ldots\ldots + f_n(x - vt)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i(x - vt) \qquad (15.26)$$

अध्यारोपण का सिद्धांत व्यतिकरण की परिघटना का मूल है।

सरलता के लिए, किसी तानित डोरी के अनुदिश गमन करती दो आवर्ती प्रगामी तरंगों पर विचार करिये। दोनों तरंगों की कोणीय आवृत्तियाँ ω समान हैं तथा कोणीय तरंग संख्या k भी समान है। अतः इनके तरंगदैर्घ्य भी समान हैं। इनकी तरंग चाल भी समान होगी। मान लीजिए कि इनके आयाम समान हैं तथा दोनों x-अक्ष के धनात्मक दिशा में गमन करती हैं। इन तरंगों में अन्तर केवल आरंभिक कला में है। समीकरण (15.2) के अनुसार इन दोनों तरंगों को इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$y_1(x, t) = a \sin(kx - \omega t) \qquad (15.27)$$

और $$y_2(x, t) = a \sin(kx - \omega t + \phi) \qquad (15.28)$$

अब अध्यारोपण के सिद्धांत का प्रयोग करने पर, नेट विस्थापन इस प्रकार व्यक्त किया जाता है :

$$y(x, t) = a \sin(kx - \omega t) + a \sin(kx - \omega t + \phi) \quad (15.29)$$

$$\alpha\left[2\sin\left[\frac{(kx-\omega t)+(kx-\omega t+\phi)}{2}\right]\cos\frac{\phi}{2}\right] \qquad (15.30)$$

यहाँ हमने $(\sin A + \sin B)$ के लिए त्रिकोणमिति के सुपरिचित सूत्र का प्रयोग किया है। अतः

$$y\ (x,t) = \left[2a\cos\frac{1}{2}\phi\right]\sin\left(kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi\right) \quad (15.31)$$

समीकरण (15.31) यह दर्शाता है कि परिणामी तरंग भी, x-अक्ष की धनात्मक दिशा में गमन करती आवर्ती तरंग है जिसकी आवृत्ति तथा तरंगदैर्घ्य दोनों तरंगों के समान है। परन्तु इसका कलान्तर $\phi/2$ है। महत्वपूर्ण तथ्य यह है कि इसका आयाम दोनों घटक तरंगों के बीच कलान्तर ϕ का फलन है :

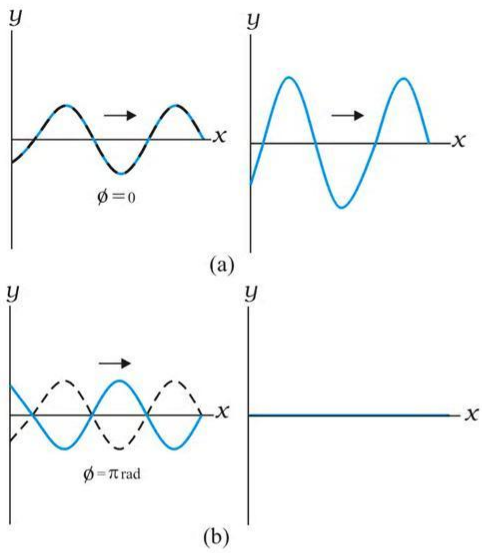
$$A(\phi) = 2a\cos\frac{1}{2}\phi \qquad (15.32)$$

यदि $\phi = 0$, अर्थात् दोनों तरंगें समान कला में हैं,

$$y(x,t) = 2\,a \sin(kx - \omega t) \qquad (15.33)$$

अर्थात् परिणामी तरंग का आयाम $2a$ है, जो A के संभावित मानों में अधिकतम है। $\phi = \pi$ के लिए, दोनों तरंगें पूर्णतः एक दूसरे से विपरीत कलाओं में होती हैं तथा परिणामी तरंग का आयाम सर्वत्र हर क्षण शून्य होता है :

$$y(x, t) = 0 \qquad (15.34)$$



चित्र 15.10 अध्यारोपण के सिद्धांत के अनुसार समान आयाम तथा तरंगदैर्घ्य वाले दो आवृत्ति तरंगों का परिणामी तरंग। परिणामी तरंग का आयाम कलांतर ϕ पर निर्भर करता है। यह कलांतर (a) के लिए शून्य है तथा (b) के लिए π।

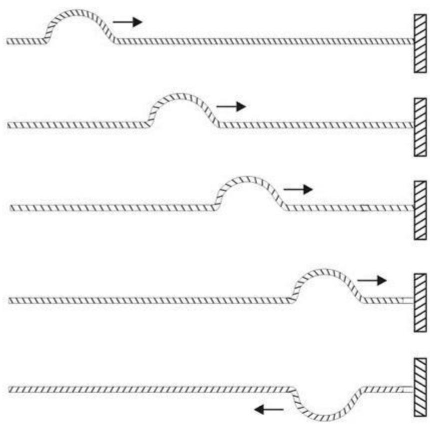
समीकरण (15.33) दो तरंगों का संपोषी व्यतिकरण दर्शाता है। इस प्रकरण में दोनों आयाम जुड़ जाते हैं। समीकरण (15.34) दो तरंगों का विनाशी व्यतिकरण दर्शाता है जिसमें परिणामी तरंग में दोनों आयाम का अंतर होता है। चित्र 15.10 व्यतिकरण के इन दोनों प्रकरणों को दर्शाता है जो अध्यारोपण के सिद्धांत का परिणाम है।

15.6 तरंगों का परावर्तन

पिछले अनुभागों में हमने अपरिबद्ध माध्यमों में तरंग संचरण की चर्चा की । क्या होता है जब कोई स्पंद अथवा तरंग किसी परिसीमा का सामना करती है ? यदि परिसीमा दृढ़ है तो स्पंद

अथवा तरंग परावर्तित हो जाती है। प्रतिध्वनि की परिघटना दृढ़ परिसीमा से परावर्तन का उदाहरण है। यदि परिसीमा पूर्णत: दृढ़ नहीं है, अथवा वह किन्हीं दो भिन्न प्रत्यास्थ माध्यमों के बीच अंतरापृष्ठ है, तो स्थिति कुछ जटिल हो जाती है। इस स्थिति में आपतित तरंग का कुछ भाग परावर्तित हो जाता है तथा कुछ भाग दूसरे माध्यम में पारगमित हो जाता है। यदि कोई तरंग दो भिन्न माध्यमों की परिसीमा पर तिरछी आपतित होती है तो पारगमित तरंग को **अपवर्तित तरंग** कहते हैं। आपतित एवं अपवर्तित तरंगें स्नेल के अपवर्तन के नियमों का पालन करती हैं, तथा आपतित एवं परावर्तित तरंगें परावर्तन के सामान्य नियमों का पालन करती हैं।

चित्र 15.11 किसी तानित डोरी के अनुदिश गमन करती तथा परिसीमा से परावर्तित होती तरंग दर्शाता है। यदि मान लें कि परिसीमा द्वारा ऊर्जा का कोई अवशोषण नहीं होता है तो परावर्तित तरंग का आकार वही होता है जो आपतित स्पंद का है परंतु परावर्तन से इसके कला में π या 180^o का कलांतर उत्पन्न हो जाता है। इसका कारण यह है कि परिसीमा दृढ़ है तथा परिसीमा पर सभी क्षणों पर विक्षोभ का विस्थापन शून्य होना चाहिए। अध्यारोपण के सिद्धांत के अनुसार, यह तभी संभव है जब आपतित एवं परावर्तित तरंगों में π कलांतर हो ताकि परिणामी विस्थापन शून्य हो। यह तर्क दृढ़ दीवार में परिसीमा प्रतिबंध पर आधारित है। इस परिणाम को हम गतिकीय दृष्टि से भी प्राप्त कर सकते हैं। जब स्पंद दीवार पर पहुँचता है तो वह दीवार पर बल आरोपित करता है। न्यूटन के तीसरे नियम के अनुसार दीवार



चित्र 15.11 किसी दृढ़ परिसीमा से स्पंद का परावर्तन।

डोरी पर परिणाम में समान तथा दिशा में विपरीत बल आरोपित करती है। परिणामस्वरूप परावर्तित स्पंद उत्पन्न होता है जिसकी कला में π का अंतर होता है।

इसके विपरीत, यदि परिसीमा बिंदु दृढ़ नहीं है और गति के लिए पूर्ण रूप से स्वतंत्र है (जैसे एक डोरी एक ऐसे छल्ले से बंधी है जो किसी छड़ पर स्वतंत्र रूप से गति कर सके) तो परावर्तित स्पंद की कला तथा आयाम (मान लें ऊर्जा ह्रास न हो) वही हैं जो आपतित स्पंद के हैं। नेट परिसीमा पर अधिकतम विस्थापन तब प्रत्येक स्पंद के आयाम का दो गुना है। अदृढ़ परिसीमा का उदाहरण आर्गन पाइप का खुला सिरा है।

संक्षेप में, किसी प्रगामी तरंग या स्पंद की किसी दृढ़ परिसीमा से परावर्तन में π कलांतर उत्पन्न होता है तथा खुले परिसीमा से परावर्तन में कोई कलांतर उत्पन्न नहीं होता है। इस कथन को गणितीय रूप में व्यक्त करने के लिए, मान लीजिए आपतित तरंग को इस प्रकार निरूपित करते हैं :

$$y_i\,(x,\,t) = a \sin\,(kx - \omega t)$$

तब, दृढ़ परिसीमा से परावर्तन के लिए, परावर्तित तरंग को इस प्रकार निरूपित करते हैं,

$$y_r\,(x,\,t) = a \sin\,(kx + \omega t + \pi)$$

$$= -a \sin\,(kx + \omega t) \qquad (15.35)$$

किसी खुली परिसीमा से परावर्तन के लिए, परावर्तित तरंग को इस प्रकार निरूपित करते हैं,

$$y_r\,(x,\,t) = a \sin\,(kx + \omega t) \qquad (15.36)$$

स्पष्टत: दृढ़ परिसीमा पर $y = y_i + y_r = 0$ सभी बलों पर।

15.6.1 अप्रगामी तरंगें तथा प्रसामान्य विधाएँ

पिछले अनुभाग में हमने एक सिरे पर परिसीमित निकाय पर विचार किया । परंतु ऐसी कई सुपरिचित स्थितियाँ हैं (जैसे दोनों सिरों पर परिबद्ध डोरी अथवा परिमित लम्बाई का वायु कॉलम) जिसमें परावर्तन दो या अधिक सिरों पर होता है। उदाहरण के लिए, किसी डोरी में दाईं और गमन करती तरंग एक सिरे से परावर्तित होती है। यह परावर्तित तरंग दूसरी दिशा में गमन करके दूसरे सिरे से परावर्तित होती है। यह प्रक्रिया तब तक चलती रहती है जब तक डोरी में एक अपरिवर्ती तरंग पैटर्न न बन जाय। ऐसे तरंग पैटर्न अप्रगामी तरंगें कहलाते हैं। गणितीय रूप में इसे व्यक्त करने के लिए,

x-अक्ष की धनात्मक दिशा में गमन करती किसी तरंग तथा x-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में गमन करती समान आयाम एवं तरंगदैर्घ्य वाली परावर्तित तरंग पर विचार कीजिए। $\phi = 0$ के लिए समीकरण (15.2) और (15.4) से

$y_1\,(x,\,t) = a \sin\,(kx - \omega t)$

$y_2\,(x,\,t) = a \sin\,(kx + \omega t)$

तब, अध्यारोपण के सिद्धांत के अनुसार प्राप्त परिणामी तरंग इस प्रकार व्यक्त की जाती है,

$$y\,(x,\,t) = y_1\,(x,\,t) + y_2\,(x,\,t)$$
$$= a\,[\sin\,(kx - \omega t) + \sin\,(kx + \omega t)]$$

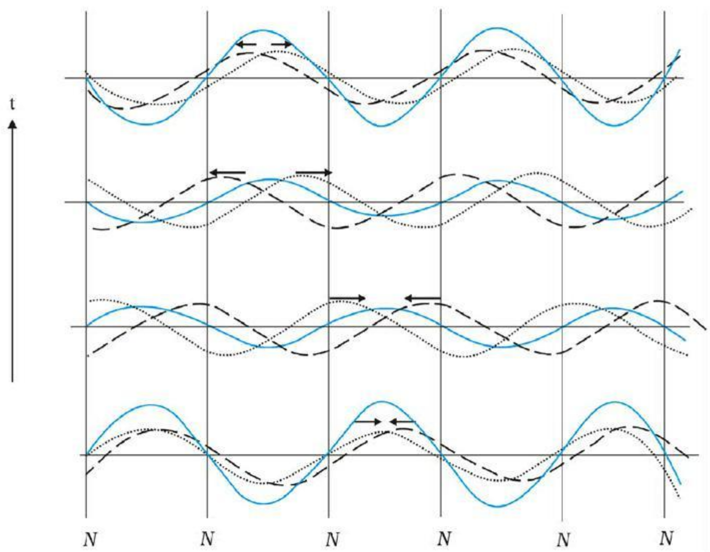
सुपरिचित त्रिकोणमितीय तत्समक

$\sin\,(A + B) + \sin\,(A - B) = 2 \sin A \cos B$, का उपयोग करने पर

$$y\,(x,t) = 2\,a \sin\,kx \cos\,\omega t \qquad (15.37)$$

समीकरण (15.37) द्वारा निरूपित तरंग पैटर्न तथा समीकरण (15.2) अथवा समीकरण (15.4) द्वारा निरूपित तरंगों के बीच महत्वपूर्ण अंतर पर ध्यान दें। समीकरण (15.37) में पद kx एवं ωt अलग-अलग विद्यमान हैं, न कि $(kx - \omega t)$ के संयोजन के रूप में। इस तरंग का आयाम $2a \sin kx$ है। अत: इस तरंग पैटर्न में, आयाम प्रत्येक बिंदु पर भिन्न होता है परन्तु डोरी का प्रत्येक अवयव समान कोणीय आवृत्ति ω या आवर्त काल से दोलन करता है। तरंग के विभिन्न अवयवों के दोलन में कोई कलांतर नहीं होता है। डोरी पूर्ण रूप से विभिन्न बिंदुओं पर विभिन्न आयामों से एक ही कला में दोलन करती है। तरंग पैटर्न न तो बाईं ओर और न दाईं ओर गमन करता है। अत: इन्हें अप्रगामी तरंगें कहते हैं। किसी निश्चित स्थिति पर इसका आयाम निश्चित होता है परंतु जैसा पहले बताया गया है विभिन्न स्थितियों पर आयाम भिन्न होता है। जिन बिंदुओं पर आयाम शून्य होता है उन्हें **निस्पंद** कहते हैं तथा जिन बिंदुओं पर अधिकतम होता है उन्हें **प्रस्पंद** कहते हैं। चित्र 15.12 विपरीत दिशाओं में गमन करती दो तरंगों के अध्यारोपण के फलस्वरूप परिणामी अप्रगामी तरंग दर्शाता है।

अप्रगामी तरंगों का सबसे महत्वपूर्ण लक्षण यह है कि निकाय के दोलन की संभावित तरंग दैर्घ्यों या आवृत्तियों के मान, परिसीमा प्रतिबंध के कारण, प्रतिबंधित होते हैं। निकाय किसी स्वेच्छ आवृत्ति से दोलन नहीं कर सकता है (इसकी तुलना



चित्र 15.12 विपरीत दिशाओं में गमन करती दो आवर्ती तरंगों के अध्यारोपण से उत्पन्न अप्रगामी तरंगें। ध्यान दें कि निस्पंदों (शून्य विस्थापन वाले बिंदु) की स्थिति सभी समयों पर अपरिवर्तित रहती है।

आवर्ती प्रगामी तरंग से करें) वरन् इसकी दोलन की आवृत्तियाँ स्वाभाविक आवृत्तियों का एक समुच्चय होती हैं। इन आवृत्तियों को दोलन का **प्रसामान्य विधा** कहते हैं। अब हम दोनों सिरों पर परिबद्ध किसी तानित डोरी के लिए प्रसामान्य विधा का निर्धारण करेंगे।

समीकरण (15.37) से निस्पंद की स्थितियों (जहाँ आयाम शून्य होता है) में

$\sin kx = 0$

अर्थात् $kx = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3...$

चूंकि $k = 2\pi/\lambda$ है, अत:

$$x = n\frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3... \qquad (15.38)$$

स्पष्टत: दो क्रमागत निस्पंदों के बीच की दूरी $\frac{\lambda}{2}$ होती है। उसी प्रकार स्पंदों की स्थितियों (जहाँ आयाम अधिकतम होते हैं) में $\sin kx$ का मान अधिकतम होता है :

$|\sin kx| = 1$

अर्थात् $kx = (n + \frac{1}{2})\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3...$

$k = 2\pi/\lambda$ लेने पर

$$x = (n+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3... \qquad (15.39)$$

पुन: दो क्रमागत प्रस्पंदों के बीच की दूरी $\lambda/2$ होती है। समीकरण (15.38) का उपयोग दोनों सिरों पर परिबद्ध L लंबाई के तानित डोरी के लिए कर सकते हैं। यदि एक सिरे पर $x = 0$ मान लें तो परिसीमा प्रतिबंध होंगे $x = 0$ तथा $x = L$ पर निस्पंद होंगे। $x = 0$ प्रतिबंध की पहले से संतुष्टि होती है। $x = L$ निस्पंद प्रतिबंध के लिए आवश्यक है कि लंबाई L तरंगदैर्घ्य λ से निम्न प्रकार से संबंधित हो

$$L = n\frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, 3... \qquad (15.40)$$

अत: L लंबाई की डोरी पर सीमित तरंगदैर्घ्य की अप्रगामी तरंगें बन सकती हैं जिनका मान निम्नलिखित संबंध द्वारा प्राप्त किया जाता है,

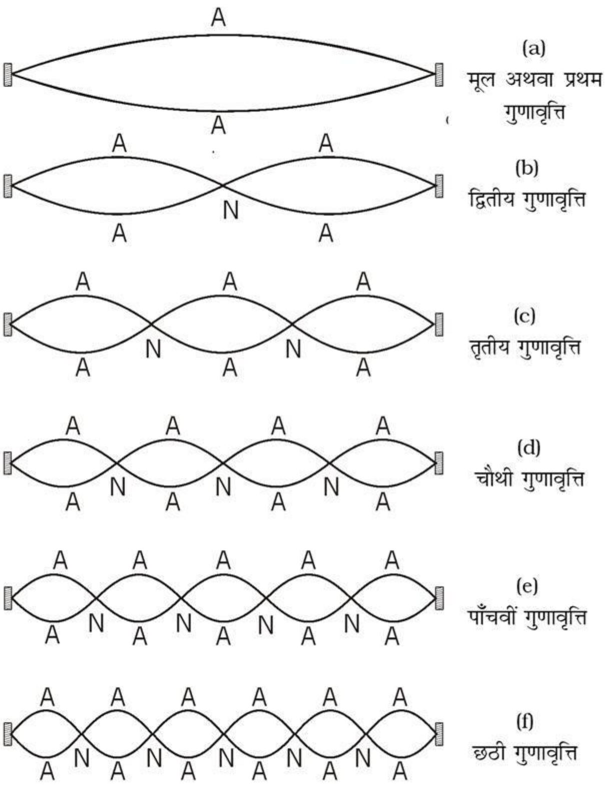
$$\lambda = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3... \qquad (15.41)$$

तदनुरूपी आवृत्तियों के मान होंगे

$$\nu = n\frac{v}{2L}, \quad n = 1, 2, 3... \qquad (15.42)$$

इस प्रकार हमने निकाय के दोलन की स्वाभाविक आवृत्तियाँ अथवा सामान्य विधा निर्धारित कर लिया है। किसी निकाय की न्यूनतम संभावित स्वाभाविक आवृत्ति को निकाय की *मूल विधा* या *प्रथम गुणावृत्ति* कहते हैं। दोनों सिरों पर परिबद्ध L लंबाई के तानित डोरी के लिए $\nu = \frac{v}{2L}$ जो समीकरण (15.42) में $n = 1$ के संगत है। यहाँ v माध्यम के लक्षणों पर आधारित तरंग की चाल है। $n = 2$ की दोलन विधा को द्वितीय गुणावृत्ति कहते हैं। $n = 3$ के तदनुरूपी तृतीय गुणावृत्ति होती है और इसी प्रकार अगली गुणावृत्तियाँ होती हैं। इन विधाओं से संबद्ध आवृत्तियों को ν_n ($n = 1, 2, ...$) द्वारा चिह्नित किया जाता है।

चित्र 15.13 में दोनों सिरों पर परिबद्ध तानित डोरी में प्रथम छ: गुणावृत्तियाँ दर्शायी गई हैं ।



चित्र 15.13 दोनों सिरों पर परिबद्ध तानित डोरी में दोलन की प्रथम छ: गुणावृत्तियाँ।

यह आवश्यक नहीं है कि कोई तानित डोरी इन विधाओं में से किसी विधा में कंपन करे। सामान्यतया किसी डोरी का कंपन विभिन्न विधाओं का अध्यारोपण होता है। कुछ विधाएँ अधिक प्रबलता से उत्तेजित हो सकती हैं और कुछ कम प्रबलता से। सितार व वायलिन जैसे वाद्य यंत्र इस सिद्धांत पर आधारित हैं। कौन सी विधा दूसरी विधा से अधिक उत्तेजित है यह इस बात पर निर्भर करता है कि डोरी को किस बिंदु पर झंकृत किया गया है।

अब हम किसी ऐसे निकाय के कंपनों की विधाओं का अध्ययन करेंगे जिनका एक सिरा बंद है जबकि दूसरा सिरा मुक्त है। अंशत: जल से भरी लम्बी काँच की नलिका का वायु कॉलम ऐसे निकाय का एक उदाहरण है। वायु कॉलम में जल को छूने वाले सिरे पर निस्पंद होता है तथा खुले सिरे पर प्रस्पंद होता है। निस्पंद पर दाब में परिवर्तन अधिकतम होते हैं जबकि विस्थापन न्यूनतम (शून्य) होता है। इसके विपरीत खुले सिरे पर जहाँ प्रस्पंद होते हैं, न्यूनतम दाब परिवर्तन होते हैं तथा विस्थापन का आयाम अधिकतम होता है। जल के संपर्क वाले सिरे को $x = 0$ लेने पर निस्पंद प्रतिबंध (समीकरण 15.38) की स्वत: संतुष्टि होती है। यदि दूसरा सिरा $x = L$ प्रस्पंद हो तो समीकरण (15.39) से यह परिणाम निकलता है कि

$$L = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}, \qquad n = 0, 1, 2, 3...$$

संभावित तरंगदैर्घ्य निम्नलिखित संबंध से प्रतिबंधित होगी

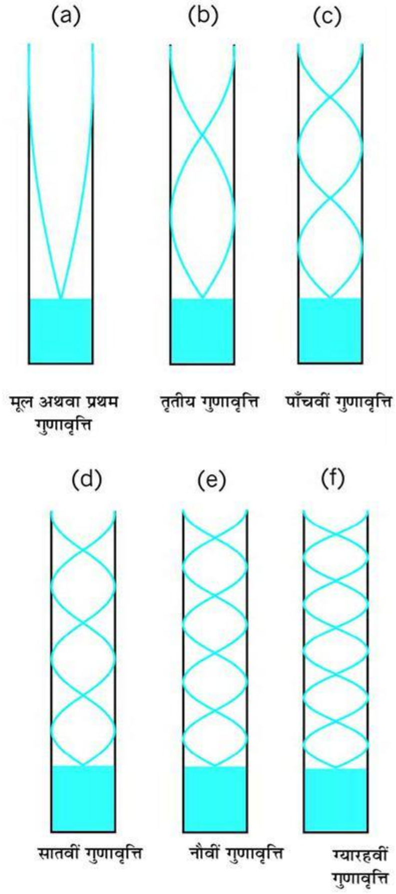
$$\lambda = \frac{2L}{(n+1/2)}, \qquad n = 0, 1, 2, 3... \qquad (15.43)$$

निकाय की सामान्य विधाएँ स्वाभाविक आवृत्तियाँ इस प्रकार व्यक्त की जाती हैं :

$$\nu = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{v}{2L}, \; n = 0, 1, 2, 3... \quad (15.44)$$

मूल विधा $n = 0$ के संगत है और यह $\frac{v}{4L}$ है। अन्य उच्च आवृत्तियाँ मूल आवृत्ति की विषम गुणावृत्तियाँ अर्थात् $3\frac{v}{4L}$, $5\frac{v}{4L}$ आदि होती हैं ।

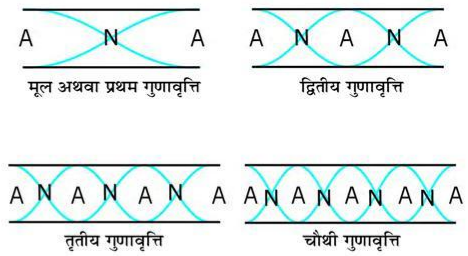
चित्र 15.14 एक सिरे पर खुले तथा दूसरे सिरे पर बंद वायु कॉलम के प्रथम छ: विषम गुणावृत्तियाँ दर्शाता है। दोनों सिरों पर खुले पाइप के लिए प्रत्येक सिरे पर प्रस्पंद होता है। इस प्रकार यह स्पष्ट है कि दोनों सिरों पर खुले वायु कॉलम में सभी



चित्र 15.14 *एक सिरे से खुले तथा दूसरे सिरे पर बंद किसी वायु-कॉलम की कुछ प्रसामान्य विधाएँ। केवल विषम विधाएँ संभव हैं।*

गुणावृत्तियाँ उत्पन्न होती हैं (देखें चित्र 15.15)। उपरोक्त वर्णित निकायों, डोरी एवं वायु कॉलम में प्रणोदित दोलन (अध्याय 14) उत्पन्न हो सकते हैं। यदि बाह्य आवृत्ति निकाय की स्वाभाविक आवृत्ति के बराबर होती है तो निकाय में **अनुनाद** उत्पन्न होता है।

किसी पात्र की परिधि से दृढ़तापूर्वक परिबद्ध वृत्ताकार झिल्ली, उदाहरणार्थ, तबले की झिल्ली के कंपनों की प्रसामान्य विधाओं का निर्धारण इस परिसीमा शर्त के द्वारा किया जाता है कि झिल्ली की परिधि पर स्थित कोई भी बिंदु कंपन नहीं करता। इस निकाय के कंपन की प्रसामान्य विधाओं की आवृत्तियों का आकलन अधिक जटिल कार्य है । इस समस्या में



चित्र 15.15 किसी खुले पाइप में अप्रगामी तरंगें । पहली चार गुणावृत्तियाँ दर्शायी गई हैं ।

दो विमाओं में तरंग संचरण सम्मिलित होता है । फिर भी इसमें अन्तर्निहित भौतिकी वही है ।

> **उदाहरण 15.5** दोनों सिरों से खुले किसी पाइप की लंबाई 30.0 cm है । 1.1 kHz आवृत्ति के स्रोत द्वारा इस पाइप की कौन-सी गुणावृत्ति विधा को अनुनाद द्वारा उत्तेजित किया जाता है ? यदि इस पाइप के एक सिरे को बंद कर दिया जाए तो क्या हम फिर भी इसी स्रोत द्वारा अनुनाद सुन सकते हैं ? वायु में ध्वनि की चाल 330 m s^{-1} है ।

हल: खुले पाइप के कंपन की पहली कुछ विधाएँ चित्र 15.15 में दर्शायी गई हैं । पहली गुणावृत्ति की आवृत्ति,

$$\nu_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L} \quad \text{(खुला पाइप)}$$

यहाँ L पाइप की लंबाई है । n वीं गुणावृत्ति की आवृत्ति

$$\nu_n = \frac{nv}{2L} \quad (n = 1, 2, 3...) \ \text{(खुला पाइप)}$$

यहाँ $L = 30.0$ cm, $v = 330$ m s^{-1}

$$\nu_n = \frac{n \times 330 \ \ \text{m s}^{-1}}{2 \times 0.3 \ \ \text{m}} = 550 \ \ n \text{s}^{-1}$$

स्पष्ट है कि 1.1 kHz आवृत्ति का स्रोत, अनुनाद द्वारा ν_2 आवृत्ति अर्थात् द्वितीय गुणावृत्ति को उत्तेजित करेगा ।

अब यदि पाइप का एक सिरा बंद है तब समीकरण (15.40) से यह परिणाम निकलता है कि इस पाइप की मूल आवृत्ति,

$$\nu_1 = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{4L} \quad \text{(एक सिरे पर बंद पाइप)}$$

इस पाइप में केवल विषम संख्या की गुणावृत्तियाँ ही विद्यमान होती हैं :

$$\nu_3 = \frac{3v}{4L}, \ \nu_5 = \frac{5v}{4L} \ \text{तथा इसी प्रकार आगे भी...।}$$

$L = 30$ cm तथा $v = 300$ m s^{-1} के लिए, एक सिरे से बंद पाइप की मूल आवृत्ति 275 Hz है तथा स्रोत की आवृत्ति चतुर्थ गुणावृत्ति के तदनुरूपी है। चूँकि यह गुणावृत्ति पाइप के कंपन की संभावित विधा नहीं है, अत: इस स्रोत के साथ पाइप का एक सिरा बंद करने पर कोई अनुनाद सुनाई नहीं देगा। ◄

15.7 विस्पंदें

विस्पंद तरंगों के व्यतिकरण से उत्पन्न एक रोचक परिघटना है। जब लगभग सन्निकट आवृत्ति (परंतु बराबर नहीं) वाली दो आवर्त ध्वनि तरंगें एक ही समय सुनाई देती हैं तो हमें समान आवृत्ति (दोनों सन्निकट आवृत्तियों का औसत) सुनाई देता है परन्तु हमें कुछ और भी सुनाई देता है। हमें ध्वनि की तीव्रता में धीरे-धीरे घटाव और बढ़ाव सुनाई देता है जिसकी आवृत्ति दो सन्निकट आवृत्तियों के अंतर के बराबर होती है। संगीतज्ञ इस परिघटना का उपयोग अपने वाद्यों के समस्वरण में करते हैं। वे अपने यंत्र को तब तक समस्वरक करते रहते हैं जब तक उनके सुग्राही कानों को कोई विस्पंद सुनाई न दे।

इस घटना की गणितीय विवेचना के लिए, हम दो लगभग बराबर कोणीय आवृत्तियों ω_1 एवं ω_2 की आवर्ती ध्वनि तरंगों पर विचार करते हैं तथा सुविधा के लिए स्थिति को $x = 0$ मान लें। समीकरण (15.2) में कला का एक समुचित मान ($\phi = \pi/2$ प्रत्येक तरंग के लिए) तथा बराबर आयाम लेने पर हमें प्राप्त होता है :

$$s_1 = a \cos \omega_1 t \ \text{तथा} \ s_2 = a \cos \omega_2 t \qquad (15.45)$$

यहाँ पर हमने प्रतीक y के स्थान पर s का उपयोग किया है क्योंकि हम अनुदैर्घ्य न कि अनुप्रस्थ विस्थापन की बात कर रहे हैं। मान लीजिए कि दोनों आवृत्तियों में ω_1 थोड़ी बड़ी है। अध्यारोपण के सिद्धांत के अनुसार, परिणामी विस्थापन को हम इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$s = s_1 + s_2 = a(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)$$

cos A + cos B के सुपरिचित त्रिकोणमितीय सर्वसमिका का उपयोग करने पर

$$s = 2a \cos \frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2} \cos \frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} \qquad (15.46)$$

यदि हम $\omega_b = \dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ तथा $\omega_a = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ लिखें तब समीकरण (15.46) को इस प्रकार लिख सकते हैं :

संगीत स्तंभ

मंदिरों में, स्तंभों पर बनी संगीत वाद्य बजाती मानवमूर्तियाँ अक्सर देखने में आती हैं, लेकिन, ये स्तंभ, स्वयं संगीत शायद ही कहीं उत्पन्न करते हों। तमिलनाडु के नेल्ल्याप्पर मंदिर में एकल शिला में उत्कीर्णित ऐसे स्तंभों का समूह है जिनको धीरे से टकटकाने पर, भारतीय शास्त्रीय संगीत के मूल स्वर-सा, रे, गा, मा, पा, धा, नी, सा, उत्पन्न होते हैं। इन स्तंभों के कंपन उनमें इस्तेमाल किए गए पत्थर की प्रत्यास्थता, घनत्व और स्तंभ के आकार पर निर्भर करते हैं।

संगीत स्तंभों को तीन श्रेणियों में बाँटा जा सकता है : पहली श्रेणी में है **श्रुति स्तंभ** जो प्राथमिक स्वर-सरगम उत्पन्न करते हैं, दूसरी श्रेणी है **गण-थूंगल** की जो रागों की मूल धुनें उत्पन्न करते हैं और तीसरी श्रेणी है **लय थूंगल** की, यह वह स्तंभ है जो थाप लगाने पर ताल उत्पन्न करते हैं। नेल्ल्याप्पर मंदिर के स्तंभ श्रुति एवं लय श्रेणी के हैं।

पुरातत्ववेत्ता मानते हैं कि नेल्ल्याप्पर मंदिर पाण्डयन कुल के शासकों द्वारा सातवीं शताब्दी में बनवाये गए थे।

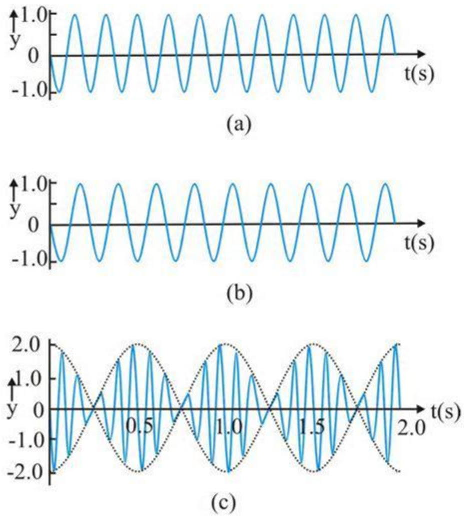
नेल्ल्याप्पर मंदिर तथा दक्षिण भारत में बने कई दूसरे मंदिरों (जैसे हम्पी (देखिये चित्र), कन्याकुमारी और तिरुअनन्तपुरम् के मंदिर) में लगे संगीत-स्तंभ हमारे देश की ही विशिष्टता है और दुनिया के किसी भी भाग में ये नहीं पाए जाते।

$$s = [2\,a \cos \omega_b t] \cos \omega_a t \qquad (15.47)$$

यदि $|\omega_1 - \omega_2| << \omega_1, \omega_2$; $\omega_a >> \omega_b$ है, तब समीकरण (15.47) से निष्कर्ष निकलता है, परिणामी तरंग औसत कोणीय आवृत्ति ω_a से दोलन करता है परन्तु इसका आयाम समय के साथ अचर नहीं है जैसा कि एक शुद्ध आवर्त तरंग के प्रकरण में होता है। जब भी $\cos \omega_b t$ का मान + 1 अथवा −1 होता है आयाम अधिकतम होता है। दूसरे शब्दों में, परिणामी तरंग की तीव्रता में आवृत्ति $2\,\omega_b = \omega_1 - \omega_2$ से उतार-चढ़ाव होता है। चूंकि $\omega = 2\pi\nu$ विस्पंद ν_{beat} को इस प्रकार व्यक्त करते हैं,

$$\nu_{beat} = \nu_1 - \nu_2 \qquad (15.48)$$

11 Hz तथा 9 Hz के दो आवृत्ति तरंगों से उत्पन्न विस्पंद की परिघटना चित्र 15.16 दर्शाता है। परिणामी तरंग का आयाम 2Hz की आवृत्ति पर विस्पंद दर्शाता है।



चित्र 15.16 *(a) 11 Hz आवृत्ति की गुणावृत्ति तरंग का आलेख (b) 9 Hz आवृत्ति की गुणावृत्ति तरंग का आलेख (c) तरंगों (a) तथा (b) का अध्यारोपण से उत्पन्न 2 Hz आवृत्ति का विस्पंद दर्शाता है।*

उदाहरण 15.6 दो सितारों की डोरियाँ A तथा B एक साथ 'धा' स्वर बजा रहीं हैं तथा स्वरों में थोड़ा अंतर होने के कारण 5 Hz आवृत्ति के विस्पंद उत्पन्न कर रही हैं। डोरी B के तनाव में कुछ वृद्धि करने पर विस्पंद की आवृत्ति घटकर 3 Hz रह जाती है। यदि A की आवृत्ति 427 Hz है, तो B की मूल आवृत्ति ज्ञात कीजिए।

हल : डोरी में तनाव बढ़ाने पर उसकी कंपन की आवृत्ति बढ़ जाती है। यदि डोरी B की मूल आवृत्ति (ν_B) A की आवृत्ति (ν_A) से अधिक है, तब ν_B में और वृद्धि होने पर विस्पंदों की आवृत्ति

बढ़नी चाहिए, परंतु विस्पंद-आवृत्ति में गिरावट पाई गई। अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि $\nu'_B < \nu'_A$। चूँकि $\nu'_A - \nu'_B$ = 5Hz, तथा ν'_A = 427 Hz, अतः डोरी B की मूल आवृत्ति ν'_B = 422 Hz ◂

15.8 डॉप्लर प्रभाव

यह हमारे दैनिक जीवन का अनुभव है कि जब कोई सीटी बजाती हुई तीव्रगामी रेलगाड़ी हमसे दूर जाती है, उस सीटी के तारत्व (अथवा आवृत्ति) में कमी होती जाती है। जब हम तीव्र गति से किसी ध्वनि-स्रोत के निकट जाते हैं, तब सुनाई देने वाली ध्वनि का तारत्व ध्वनि-स्रोत के वास्तविक तारत्व से अधिक प्रतीत होता है। इसके विपरीत जब कोई प्रेक्षक ध्वनि-स्रोत से दूर हटता जाता है, तो प्रेक्षित तारत्व ध्वनि-स्रोत के वास्तविक तारत्व से कम होता है। इस गति संबंधी आवृत्ति परिवर्तन को **डॉप्लर प्रभाव** कहते हैं। आस्ट्रिया के भौतिकविद जोहान क्रिश्चियन डॉप्लर ने सर्वप्रथम सन् 1842 ई. में इस प्रभाव को प्रस्तावित किया। सन् 1845 में हालैंड में बाईस बैलो ने इसका प्रायोगिक परीक्षण किया। डॉप्लर प्रभाव एक तरंग-परिघटना है, यह केवल ध्वनि तरंगों पर ही लागू नहीं होता, बल्कि यह सभी विद्युत चुंबकीय तरंगों पर भी लागू होता है। लेकिन, हम यहाँ केवल ध्वनि तरंगों पर ही विचार करेंगे।

हम तीन विभिन्न परिस्थितियों में आवृत्ति में परिवर्तन का विश्लेषण करेंगे : (1) प्रेक्षक स्थिर है परंतु स्रोत गतिशील है, (2) प्रेक्षक गतिशील है परंतु स्रोत स्थिर है, तथा (3) प्रेक्षक तथा स्रोत दोनों गतिशील हैं। प्रेक्षक तथा माध्यम के बीच सापेक्ष गति होने अथवा न होने के कारण परिस्थितियाँ (1) व (2) एक दूसरे से भिन्न हैं। अधिकांश तरंगों को संचरण के लिए माध्यम की आवश्यकता होती है; फिर भी, विद्युत चुंबकीय तरंगों को संचरण के लिए माध्यम की आवश्यकता नहीं होती। यदि कोई माध्यम न हो, तो इन दोनों परिस्थितियों में भेद करने का कोई उपाय नहीं होने के कारण, चाहे प्रेक्षक गतिशील हो अथवा स्रोत, डॉप्लर-विस्थापन समान होता है।

15.8.1 स्रोत गतिशील; प्रेक्षक स्थिर

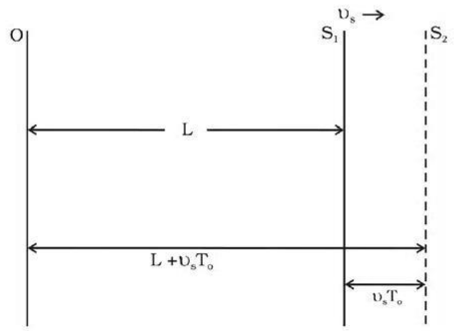
वेग की दिशा के संबंध में हम यह परिपाटी बना लेते हैं कि प्रेक्षक से स्रोत की ओर वेग धनात्मक है। अब हम एक स्रोत S पर विचार करते हैं जो υ_s वेग से गतिमान है और प्रेक्षक एक ऐसे फ्रेम में स्थिर है जिसमें माध्यम भी स्थिर है। मान लीजिए कि कोई तरंग, जिसकी माध्यम के सापेक्ष विराम अवस्था स्थिति प्रेक्षक द्वारा मापी गई कोणीय आवृत्ति ω तथा आवर्तकाल T_0 है, की चाल υ है। हम मानते हैं कि प्रेक्षक के पास एक संसूचक

खुले पाइप में ध्वनि का परावर्तन

जब खुले पाइप में चलता हुआ वायु का, उच्च दाब वाला कोई स्पंद इसके दूसरे सिरे पर पहुँचता है, तो इसका संवेग वायु को खुले में खींच निकालता है इसलिए यहाँ दाब तेजी से गिरकर वायुमण्डलीय दाब के बराबर हो जाता है। परिणामस्वरूप इस स्पंद के पीछे आने वाली कुछ वायु भी बाहर निकल जाती है। पाइप में इस सिरे पर कम दाब, पाइप में, इससे ऊपर की कुछ वायु को नीचे खींचता है। इससे कम दाब का यह क्षेत्र ऊपर की ओर चलता है।

परिणामतः नीचे की ओर चलता हुआ उच्च दाब का स्पंद, न्यून दाब के वायु स्पंद में बदल कर ऊपर की ओर चलता है। हम कहते हैं कि दाब तरंग खुले सिरे से परावर्तित होती है तो इसकी कला में 180° का अंतर आ जाता है। बाँसुरी जैसे खुले ऑर्गन पाइप में अप्रगामी तरंगों का बनना इसी प्रक्रम का परिणाम है।

तुलना के लिए देखें, कि जब उच्च दाब का वायु स्पंद, बंद सिरे पर पहुँचता है, तो क्या होता है: बंद सिरे से टकराकर वायु विपरीत दिशा में वापस लौटती है। यहाँ हम कहते हैं कि दाब तरंग बिना किसी कलांतर के परिवर्तित होती है।



चित्र 15.17 *विराम की स्थिति में O पर खड़े प्रेक्षक से परे υ_s चाल से गतिशील कोई स्रोत बिंदु S_1 पर एक तरंग-शिखर उत्सर्जित करता है। यही स्रोत O, $\upsilon_s T_0$ दूरी चलने के पश्चात् बिंदु S_2 से दूसरा तरंग-शिखर उत्सर्जित करता है।*

(detector) है जो इसके पास पहुँचने वाले प्रत्येक तरंग-शिखर (crest) को गिनता है । समय $t = 0$ पर जब स्रोत बिंदु S_1 पर अवस्थित है (देखें चित्र 15.17), स्रोत एक तरंग-शिखर उत्सर्जित करता है । इस समय ($t = 0$) पर स्रोत प्रेक्षक से L दूरी पर है । यह तरंग-शिखर प्रेक्षक के पास समय $t_1 = (L/v)$ पर पहुँचता है । समय $t = T_0$ पर स्रोत प्रेक्षक की ओर $v_s T_0$ दूरी चल लेता है और बिंदु S_2 पर पहुँच जाता है जिसकी प्रेक्षक से दूरी $(L+v_s T_0)$ है। बिंदु S_2 पर स्रोत एक और (दूसरा) तरंग-शिखर उत्सर्जित करता है। यह दूसरा तरंग-शिखर प्रेक्षक तक समय t_2 पर पहुँचता है,

$$t_2 = T_0 + \frac{(L + v_s T_0)}{v}$$

समय nT_0 पर स्रोत $(n+1)$ वाँ तरंग-शिखर उत्सर्जित करता है जो प्रेक्षक तक जिस समय t_n पर पहुँचता है उसे इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं,

$$t_{n+1} = nT_0 + \frac{(L + nv_s T_0)}{v}$$

अतः समय अंतराल

$$\left[nT_0 + \frac{(L + nv_s T_0)}{v} - \frac{L}{v}\right]$$

में प्रेक्षक का संसूचक n तरंग-शिखर गिनता है तथा प्रेक्षक तरंग का आवर्तकाल T नीचे दिए अनुसार रिकार्ड करता है

$$T = \left[nT_0 + \frac{(L + nv_s T_0)}{v} - \frac{L}{v}\right]/n$$

$$= T_0 + \frac{v_s T_0}{v}$$

$$= T_0\left(1 + \frac{v_s}{v}\right) \qquad (15.49)$$

समीकरण (15.49) को हम आवृत्ति के पदों में भी लिख सकते हैं । यदि ν_0 वह आवृत्ति है जो स्रोत एवं प्रेक्षक दोनों के विराम में होने पर मापी गई है तथा ν वह प्रेक्षित आवृत्ति है जो स्रोत के गतिशील होने पर है, तो प्रेक्षित आवृत्ति,

$$\nu = \nu_0\left(1 + \frac{v_s}{v}\right)^{-1} \qquad (15.50)$$

यदि तरंग चाल v की तुलना में स्रोत की चाल v_s का मान कम है तो द्विपद प्रसरण के $\frac{v_s}{v}$ से उच्चतर घातों के पदों को न लेकर, समीकरण (15.50) को सन्निकटतः इस प्रकार लिख सकते हैं,

$$\nu = \nu_0\left(1 - \frac{v_s}{v}\right) \qquad (15.51)$$

यदि स्रोत प्रेक्षक की ओर आ रहा हो तो v_s को $(-v_s)$ से प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं :

$$\nu = \nu_0\left(1 + \frac{v_s}{v}\right) \qquad (15.52)$$

अतः जब कोई ध्वनि स्रोत किसी प्रेक्षक से दूर जाता है तब उस स्थिति की तुलना में जब यह विराम पर था, प्रेक्षक अपेक्षाकृत कम आवृत्ति मापता है। जब स्रोत उसकी ओर चलता है तो यह तरंगों की आवृत्ति अधिक मापता है।

15.8.2 प्रेक्षक गतिशील; स्रोत स्थिर

अब उस स्थिति में, जब प्रेक्षक स्रोत की ओर v_0 चाल से गतिमान हो, तथा स्रोत विराम में हो, तो डॉप्लर विस्थापन को व्युत्पन्न करने के लिए हमें दूसरे ढंग से आगे बढ़ना होगा । हम गतिशील प्रेक्षक के निर्देश फ्रेम में कार्य करेंगे । इस निर्देश फ्रेम में स्रोत तथा प्रेक्षक चाल v_0 से समीप आते हैं तथा तरंग के समीप आने की चाल $v_0 + v$ है । पिछली परिस्थिति में जो ढंग अपनाया गया था उसी को इस परिस्थिति में भी अपनाने पर हम यह पाते हैं कि पहले तरंग शिखर तथा $(n+1)$ वें तरंग शिखर के प्रेक्षक तक पहुँचने के बीच समय अंतराल इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है,

$$t_{n+1} - t_1 = n\,T_0 - \frac{n\,v_0 T_0}{v_0 + v}$$

अतः, प्रेक्षक द्वारा मापा गया तरंग का आवर्त काल

$$T = T_0\left(1 - \frac{v_0}{v_0 + v}\right)$$

$$= T_0\left(1 + \frac{v_0}{v}\right)^{-1}$$

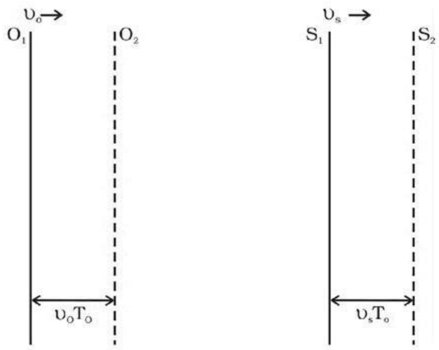
आवृत्ति के पदों में इसे इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं,

$$\nu = \nu_0\left(1 + \frac{v_0}{v}\right) \qquad (15.53)$$

यदि $\frac{v_0}{v}$ का मान कम है, तब डॉप्लर विस्थापन लगभग वही होगा, चाहे प्रेक्षक गति करे अथवा स्रोत, क्योंकि समीकरण (15.53) तथा सन्निकट संबंध (15.51) समान हैं ।

15.8.3 स्रोत तथा प्रेक्षक दोनों गतिशील हैं

अब हम डॉप्लर प्रभाव के लिए, स्रोत तथा प्रेक्षक दोनों को गतिशील लेकर व्यापक व्यंजक व्युत्पन्न करेंगे। पहले की तरह हम प्रेक्षक से स्रोत की दिशा को धनात्मक दिशा मानेंगे। मान लीजिए चित्र 15.18 की भाँति स्रोत तथा प्रेक्षक क्रमशः υ_s तथा υ_0 वेग से गतिशील हैं, माना समय $t = 0$ पर प्रेक्षक O_1 पर तथा स्रोत $S_1(O)$ की बाईं ओर है। माध्यम के सापेक्ष स्थिर एक प्रेक्षक देखता है कि स्रोत वेग ν, आवृति ν और आवर्त काल T_0 की तरंग उत्सर्जित करता है। $t = 0$ पर जब स्रोत पहला तरंग शिखर उत्सर्जित करता हो उस समय प्रेक्षक O_1 की स्रोत S_1 से दूरी L है। अब चूँकि प्रेक्षक गतिशील है, इसलिए तरंग की प्रेक्षक के सापेक्ष



चित्र 15.18 υ_0 चाल से गतिमान प्रेक्षक υ_s चाल से गतिमान स्रोत। समय $t = 0$ पर दोनों की अवस्थितियाँ क्रमशः O_1 तथा S_1 है जब स्रोत ध्वनि (जिसका माध्यम के सापेक्ष वेग υ है) का पहला तरंग-शिखर उत्सर्जित करता है। एक आवर्त काल के बाद ($t = T_0$) प्रेक्षक $\upsilon_0 T_0$ दूरी चलकर O_2 पर तथा स्रोत $\upsilon_s T_0$ दूरी चलकर S_2 पर पहुँच जाते हैं, जब स्रोत अगला तरंग-शिखर उत्सर्जित करता है।

चाल $(\upsilon + \upsilon_0)$ है। अतः पहला तरंग-शिखर प्रेक्षक पर समय $t_1 = L/(\upsilon + \upsilon_0)$ पर पहुँचता है। समय $t = T_0$ पर प्रेक्षक तथा स्रोत दोनों ही अपनी नयी स्थितियों क्रमशः O_2 तथा S_2 पर पहुँच जाते हैं। प्रेक्षक तथा स्रोत के बीच की नयी दूरी, $O_2S_2 = [L + (\upsilon_0 - \upsilon_s)/T_0]$ है। S_2 पर स्रोत दूसरा तरंग-शिखर उत्सर्जित कर देता है। यह तरंग-शिखर प्रेक्षक तक समय t_2 पर पहुँचता है जिसे इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है,

$$t_2 = T_0 + [L - (\upsilon_s - \upsilon_0)T_0]/(\upsilon + \upsilon_0)$$

समय nT_0 पर, स्रोत $(n+1)$ वाँ तरंग-शिखर उत्सर्जित कर देता है जो समय t_{n+1} पर प्रेक्षक पर पहुँचता है जिसे इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं,

$$t_{n+1} = nT_o + [L - n(\upsilon_s + \upsilon_o)T_o)]\ /(\upsilon + \upsilon_o)$$

अतः समय अंतराल, $(t_{n+1} - t)$

$$nT_0 + [L + n(\upsilon_s + \upsilon_0)T_0]/(\upsilon + \upsilon_0) - L/(\upsilon + \upsilon_0)$$

में प्रेक्षक n तरंग-शिखर गिनता है तथा प्रेक्षक तरंग का आवर्तकाल T रिकार्ड करता है जिसे इस संबंध द्वारा व्यक्त किया जाता है

$$T = T_0\left(1 + \frac{\upsilon_s - \upsilon_0}{\upsilon + \upsilon_0}\right)$$

$$= T_0\left(\frac{\upsilon + \upsilon_s}{\upsilon + \upsilon_0}\right) \qquad (15.54)$$

आवृत्ति के पदों में प्रेषक द्वारा प्रेक्षित आवृत्ति को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं,

$$\nu = \nu_0\left(\frac{\upsilon + \upsilon_0}{\upsilon + \upsilon_s}\right) \qquad (15.55)$$

सोचिए कि सीधी पटरियों पर चलती हुई किसी रेलगाड़ी में एक महिला यात्री बैठी है। माना कि वह रेलगाड़ी के ड्राइवर द्वारा बजायी गई सीटी की ध्वनि सुनती है। वह क्या आवृत्ति सुनेगी? यहाँ स्रोत और प्रेक्षक दोनों ही समान वेग से चल रहे हैं अतः आवृत्ति में कोई अंतर नहीं आएगा और यात्री वही प्राकृतिक आवृत्ति सुनेगी जो स्रोत उत्पन्न कर रहा है। लेकिन रेल की पटरियों के पास खड़ा कोई प्रेक्षक प्राकृतिक आवृत्ति से अधिक आवृत्ति नोट करेगा जब रेलगाड़ी उसकी ओर आती है और कम आवृत्ति नोट करेगा जब रेलगाड़ी उससे दूर जाती है।

ध्यान दें कि हमने प्रेक्षक से स्रोत की दिशा को धनात्मक दिशा कहा है। इसलिए यदि प्रेक्षक स्रोत की ओर चल रहा है तो υ_0 का मान धनात्मक है जबकि यदि वह स्रोत S से दूर जा रहा हो तो υ_0 का मान ऋणात्मक है। दूसरी ओर यदि S प्रेक्षक O से दूर जा रहा है तो υ_s का मान धनात्मक है जबकि यदि वह O की ओर आ रहा है तो υ_s का मान ऋणात्मक है। स्रोत द्वारा उत्सर्जित ध्वनि सभी दिशाओं में गमन करती है। इस ध्वनि का जो भाग प्रेक्षक की ओर आता है उसको ही वह संसूचित करता

डॉप्लर प्रभाव के अनुप्रयोग

गतिमान पिण्डों की आवृत्तियों में, डॉप्लर प्रभाव के कारण आने वाले अंतर का उपयोग, सेना, औषधि विज्ञान, खगोलिकी जैसे विविध क्षेत्रों में पिण्डों का वेग मापने के लिए किया जाता है। इसका उपयोग पुलिस यह जाँचने के लिए भी करती है कि कोई गाड़ी गतिसीमा से अधिक गति से तो नहीं चलाई जा रही।

ज्ञात आवृत्ति की ध्वनि या विद्युत चुंबकीय तरंगों को गतिमान पिण्ड की ओर भेजा जाता है। मॉनीटरिंग स्टेशन पर, पिण्ड द्वारा परावर्तित तरंगें प्राप्त करके इनकी आवृत्ति ज्ञात की जाती है। इन दो आवृत्तियों का अंतर **डॉप्लर विस्थापन** कहलाता है।

हवाई अड्डों पर वायुयानों के मार्गदर्शन के लिए, सेना में शत्रु यानों के संसूचन के लिए इस विधि का उपयोग किया जाता है। खगोल भौतिकीविद तारों का वेग मापने के लिए इसका उपयोग करते हैं।

डॉक्टर लोग हृदय स्पंदनों और शरीर के विभिन्न अंगों में रक्त प्रवाह का अध्ययन करने के लिए इसका उपयोग करते हैं। यहाँ वे पराध्वनि तरंगों का उपयोग करते हैं और सामान्य व्यवहार में इसे **सोनोग्राफी** कहा जाता है। पराध्वनि तरंगें व्यक्ति के शरीर में प्रवेश करती हैं और इनमें से कुछ परावर्तित हो जाती हैं तथा रक्त की गति और हृदय के वाल्वों के स्पंदन के विषय में जानकारी प्रदान करती है, इसमें भ्रूण के हृदय का स्पंदन भी शामिल है। हृदय से परावर्तित तरंगों से जो चित्र बनता है उसे **इकोकार्डियोग्राम** कहा जाता है।

है। इसी कारण प्रत्येक स्थितियों में प्रेक्षक के सापेक्ष ध्वनि का वेग $(v + v_0)$ होता है।

▶ *उदाहरण 15.7 :* कोई रॉकेट 200 m s^{-1} की चाल से किसी लक्ष्य की ओर गतिमान है । गति करते समय यह 1000 Hz आवृत्ति की तरंग उत्सर्जित करता है । इस ध्वनि का कुछ भाग लक्ष्य पर पहुँच कर प्रतिध्वनि के रूप में वापस रॉकेट की ओर परावर्तित हो जाता है । (a) लक्ष्य द्वारा संसूचित ध्वनि की आवृत्ति, तथा (b) रॉकेट द्वारा संसूचित प्रतिध्वनि की आवृत्ति परिकलित कीजिए ।

हल : (a) इस प्रश्न में प्रेक्षक स्थिर है तथा स्रोत प्रेक्षक की ओर 200 m s^{-1} चाल से गतिशील है, क्योंकि यह वेग, ध्वनि वेग (= 330 ms^{-1}) के साथ तुलनीय है। अतः हम यहाँ समीकरण (15.50) का उपयोग करेंगे न कि सन्निकट समीकरण (15.51) का। यहाँ क्योंकि स्रोत स्थिर लक्ष्य की ओर चल रहा है v_s के स्थान पर $(-v_s)$ प्रतिस्थापित करेंगे। इस प्रकार समीकरण (15.50) से

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{v_s}{v}\right)^{-1}$$

$$= 1000\text{ Hz} \times \left(1 - \frac{200\ \text{m s}^{-1}}{330\ \text{m s}^{-1}}\right)^{-1}$$

$$= 2540\text{ Hz}$$

(b) यहाँ इस प्रश्न में अब लक्ष्य स्रोत है (क्योंकि यह प्रतिध्वनि का स्रोत है) तथा रॉकेट का संसूचक अब एक संसूचक अथवा प्रेक्षक (क्योंकि यह संसूचन भी करता है) है । अतः $v_s = 0$ एवं v_0 का मान धनात्मक है। अब स्रोत (लक्ष्य) द्वारा उत्सर्जित ध्वनि की आवृत्ति ν है जो कि लक्ष्य द्वारा अवरुद्ध आवृत्ति है । यहाँ हम स्रोत की मूल आवृत्ति ν_0 का उपयोग नहीं कर सकते । अतः रॉकेट से जुड़े संसूचक द्वारा रिकार्ड की गई आवृत्ति

$$\nu' = \nu\left(\frac{v + v_0}{v}\right)$$

$$= 2540\text{ Hz} \times \left(\frac{200\ \text{ms}^{-1} + 330\text{m s}^{-1}}{300\text{m s}^{-1}}\right)$$

$$= 4080\text{ Hz}$$

◀

सारांश

1. *यांत्रिक तरंगें* द्रव्यात्मक माध्यमों में विद्यमान रह सकती हैं तथा ये न्यूटन के गति के नियमों द्वारा संनियमित होती हैं ।
2. *अनुप्रस्थ तरंगें* वे तरंगें होती हैं जिनमें माध्यम के कण तरंग संचरण की दिशा के लंबवत् दोलन करते हैं ।
3. *अनुदैर्ध्य तरंगें* वे तरंगें होती हैं जिनमें माध्यम के कण तरंग संचरण की दिशा के अनुदिश दोलन करते हैं ।
4. *प्रगामी तरंग* वह तरंग होती है जो माध्यम के एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक गमन करती है ।
5. धनात्मक x-दिशा में संचरित ज्यावक्रीय तरंग का *विस्थापन* इस प्रकार व्यक्त किया जाता है–

$$y(x, t) = a \sin(kx - \omega t + \phi)$$

यहाँ a तरंग का आयाम, k कोणीय तरंग संख्या, ω कोणीय आवृत्ति, $(kx - \omega t + \phi)$ कला, तथा ϕ कला-नियतांक अथवा प्रारंभिक कला कोण है ।

6. किसी प्रगामी तरंग का तरंगदैर्ध्य λ, उसके किन्हीं ऐसे दो क्रमागत बिंदुओं के बीच की दूरी के बराबर होती है जो किसी क्षण पर समान कला में होते हैं। अप्रगामी तरंगों के लिए यह दो क्रमागत निस्पंदों अथवा प्रस्पंदों के बीच की दूरी के दोगुने के बराबर होती है।
7. किसी तरंग के *आवर्तकाल* T को उस समय द्वारा परिभाषित किया जाता है जिसमें माध्यम का कोई अवयव अपना एक दोलन पूर्ण करता है। यह तरंग की कोणीय आवृत्ति ω से इस प्रकार संबंधित होता है

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

8. किसी तरंग की *आवृत्ति* ν को $1/T$ के रूप में परिभाषित किया जाता है तथा आवृत्ति व कोणीय आवृत्ति में निम्नलिखित संबंध होता है :

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

9. प्रगामी तरंग की *चाल* $v = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{\lambda}{T} = \lambda\nu$
10. किसी तानित डोरी पर *अनुप्रस्थ तरंग की चाल* उस डोरी के गुणों से निर्धारित होती है । यदि किसी डोरी में तनाव T है तथा डोरी का रैखिक द्रव्यमान घनत्व μ है तो उस डोरी में अनुप्रस्थ तरंग की चाल,

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

11. *ध्वनि तरंगें* अनुदैर्ध्य यांत्रिक तरंगें होती हैं जो ठोसों, द्रवों तथा गैसों में गमन कर सकती हैं। यदि किसी माध्यम का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक B तथा घनत्व ρ है तो उस माध्यम में ध्वनि तरंगों की चाल

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

धातु की छड़ में अनुदैर्ध्य तरंगों की चाल

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

किसी गैस में, चूँकि $B = \gamma P$, अतः ध्वनि की चाल

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

यहाँ γ गैस की दो विशिष्ट ऊष्माओं का अनुपात $(\gamma = C_p/C_v)$, ρ गैस का घनत्व तथा P गैस का दाब है ।

12. जब दो या अधिक तरंगें किसी माध्यम से गमन करती हैं, तब माध्यम के किसी अवयव का विस्थापन प्रत्येक तरंग के

विस्थापनों का बीजगणितीय योग होता है । इसे तरंगों के *अध्यारोपण का सिद्धांत* कहते हैं ।

$$y = \sum_{i=1}^{n} f_i \,(x - vt)$$

13. एक ही डोरी पर गमन करती दो ज्यावक्रीय तरंगें अध्यारोपण के सिद्धांत के अनुसार संकलन अथवा निरसन द्वारा व्यतिकरण की परिघटना प्रदर्शित करती हैं । यदि समान आयाम a तथा समान आवृत्ति वाली परंतु कला में कला-नियतांक ϕ के अंतर वाली दो तरंगें एक ही दिशा में गतिमान हैं तो उनके व्यतिकरण का परिणाम एक एकल तरंग होती हैं जिसकी आवृत्ति भी उनके समान होती है :

$$y(x,t) = \left[2a \cos\frac{1}{2}\phi\right] \sin\left(kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi\right)$$

यदि $\phi = 0$ अथवा 2π का पूर्णांक गुणज हो तो तरंगें एकदम समान कला में होती हैं तथा व्यतिकरण संपोषी होता है; यदि $\phi = \pi$ अथवा π रेडियन का विषम गुणज हो तो तरंगें एकदम विपरीत कलाओं में होती है तथा व्यतिकरण विनाशी होता है ।

14. किसी प्रगामी तरंग का किसी दृढ़ परिसीमा अथवा बंद सिरे पर परावर्तन कला-उत्क्रमण के साथ होता है, परंतु किसी खुली परिसीमा पर यह परावर्तन बिना किसी कला-परिवर्तन के होता है ।

किसी आपतित तरंग के लिए

$y_i\,(x, t) = a \sin\,(kx - \omega t)$

दृढ़ परिसीमा से परावर्तित तरंग के लिए

$y_r\,(x, t) = -\,a \sin\,(kx + \omega t)$

खुली परिसीमा से परावर्तित तरंग के लिए

$y_r\,(x, t) = a \sin\,(kx + \omega t)$

15. विपरीत दिशाओं में गतिशील दो सर्वसम तरंगों के व्यतिकरण से अप्रगामी तरंगें उत्पन्न होती हैं । दोनों सिरों पर परिबद्ध तानित डोरी में उत्पन्न अप्रगामी तरंगों को इस प्रकार व्यक्त किया जाता है

$y\,(x, t) = [2\,a \sin\,kx] \cos\,\omega t$

अप्रगामी तरंगों का एक अभिलक्षण यह है कि इनमें शून्य विस्थापन की निश्चित अवस्थितियाँ जिन्हें निस्पंद कहते हैं तथा अधिकतम विस्थापन की निश्चित अवस्थितियाँ जिन्हें प्रस्पंद कहते हैं, होती हैं । दो क्रमागत निस्पंदों अथवा दो क्रमागत प्रस्पंदों के बीच की दूरी होती है ।

L लंबाई की तानित डोरी जो दोनों सिरों पर परिबद्ध हो, निम्नलिखित आवृत्तियों से कंपन करती है :

$$\nu = n\frac{v}{2L}, \; n = 1, 2, 3....$$

यहाँ v तरंग की डोरी पर गमन की चाल है । इस संबंध से प्राप्त आवृत्तियों को सेट निकाय के कंपन अथवा दोलन की *प्रसामान्य विधाएँ* कहते है । निम्नतम आवृत्ति से दोलन की विधा *मूल विधा* अथवा *प्रथम गुणावृत्ति* कहलाती है । $n = 2$ की दोलन विधा को *द्वितीय गुणावृत्ति* कहते हैं, और इसी प्रकार क्रम बढ़ता जाता है ।

L लंबाई की कोई नली जिसका एक सिरा बंद तथा दूसरा सिरा खुला हो, जैसे वायु-कॉलम, निम्नलिखित आवृत्तियों से कंपन करता है :

$$\nu = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{v}{2L}, \; n = 0, 1, 2, 3....$$

उपरोक्त संबंध द्वारा निरूपित आवृत्तियों का सेट इस प्रकार के निकाय के दोलन की *प्रसामान्य विधाएँ* होती हैं । इस संबंध द्वारा $n = 0$ के लिए प्राप्त निम्नतम आवृत्ति $v/4L$ है, जो इस प्रकार के निकाय की मूल विधा अथवा प्रथम गुणावृत्ति होती है ।

16. दोनों सिरों से परिबद्ध L लंबाई की तानित डोरी अथवा एक सिरे से बंद तथा दूसरे सिरे पर मुक्त वायु-कॉलम जिन आवृत्तियों से कंपन करते हैं उन्हें इन निकायों की प्रसामान्य विधाएँ कहते हैं । इनमें से प्रत्येक आवृत्ति निकाय की *अनुनाद आवृत्ति* होती है ।

17. *विस्पंद* तब उत्पन्न होते हैं जब बहुत कम अंतर की दो आवृत्तियों ν_1 तथा ν_2 की तरंगें एक साथ संसूचित की जाती हैं। विस्पंद आवृत्ति इस प्रकार व्यक्त की जाती है,

$$\nu_{beat} = \nu_1 \sim \nu_2$$

18. माध्यम के सापेक्ष ध्वनि स्रोत अथवा प्रेक्षक O की गति के कारण किसी तरंग की प्रेक्षित आवृत्ति में परिवर्तन होना *डॉप्लर प्रभाव* कहलाता है। ध्वनि के लिए प्रेक्षित आवृत्ति को ध्वनि स्रोत की आवृत्ति ν_0 के पदों में व्यक्त किया जाता है

$$\nu = \nu_0 \left[\frac{v + v_0}{v + v_s}\right]$$

यहाँ v माध्यम में ध्वनि की चाल, v_0 माध्यम के सापेक्ष प्रेक्षक की चाल तथा v_s माध्यम के सापेक्ष ध्वनि-स्रोत का वेग है । इस सूत्र का उपयोग करते समय, OS की दिशा में वेग धनात्मक और विपरीत दिशा में ऋणात्मक लिए जाएँगे।

भौतिक राशि	प्रतीक	विमाएँ	मात्रक	टिप्पणी
तरंगदैर्घ्य	λ	[L]	m	एक ही क्षण पर समान कला के दो क्रमागत बिंदुओं के बीच की दूरी
संचरण नियतांक	k	[L^{-1}]	m^{-1}	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$
तरंग चाल	v	[LT^{-1}]	$m\ s^{-1}$	$\nu = v\lambda$
विस्पंद आवृत्ति	ν_{beat}	[T^{-1}]	s^{-1}	दो निकट आवृत्तियों की अध्यारोपित तरंगों की आवृत्तियों का अंतर

विचारणीय विषय

1. तरंग किसी माध्यम में समूचे द्रव्य की गति नहीं है । पवन वायु में ध्वनि तरंग से भिन्न होती है । पवन में एक स्थान से दूसरे स्थान तक वायु की गति सम्मिलित होती है । ध्वनि तरंग में वायु की परतों का संपीडन तथा विरलन सम्मिलित होता है ।
2. तरंग में एक स्थान से दूसरे स्थान तक ऊर्जा स्थानांतरित होती है न कि द्रव्य ।
3. माध्यम के निकटतम दोलनी भागों के बीच आद्योपांत (शुरू से अंत तक) प्रत्यास्थ बलों के युग्मन के कारण ऊर्जा स्थानांतरण होता है ।
4. अनुप्रस्थ तरंगों का संचरण केवल उन्हीं माध्यमों में हो सकता है जिनमें अपरूपण प्रत्यास्थता गुणांक हो, उदाहरणार्थ ठोस । अनुदैर्घ्य तरंगों को आयतन प्रत्यास्थता गुणांक की आवश्यकता होती है, अत: ये तरंगें सभी माध्यमों-ठोस, द्रव तथा गैस में संभव होती हैं ।
5. दी गई आवृत्ति की किसी सरल आवर्त प्रगामी तरंग में सभी कणों का आयाम समान होता है, परंतु किसी दिए गए नियत समय पर उनकी कलाएँ भिन्न होती हैं । किसी अप्रगामी तरंग में किसी निश्चित क्षण पर सभी कणों की कलाएँ समान होती हैं परंतु उनके आयाम भिन्न होते हैं ।

6. किसी माध्यम में विराम की स्थिति वाले प्रेक्षक के सापेक्ष उस माध्यम में किसी यांत्रिक तरंग की चाल (v) केवल माध्यम के प्रत्यास्थ तथा अन्य गुणों (जैसे द्रव्यमान घनत्व) पर निर्भर करती है । यह ध्वनि-स्रोत के वेग पर निर्भर नहीं करती ।
7. माध्यम के सापेक्ष v_0 वेग से गतिशील किसी प्रेक्षक के लिए प्रत्यक्ष रूप से तरंग की चाल v से भिन्न होती है तथा यह चाल $v \pm v_0$ होती है ।

अभ्यास

15.1 2.50 kg द्रव्यमान की 20 cm लंबी तानित डोरी पर 200 N बल का तनाव है । यदि इस डोरी के एक सिरे को अनुप्रस्थ झटका दिया जाए तो उत्पन्न विक्षोभ कितने समय में दूसरे सिरे तक पहुँचेगा ?

15.2 300 m ऊँची मीनार के शीर्ष से गिराया गया पत्थर मीनार के आधार पर बने तालाब के पानी से टकराता है । यदि वायु में ध्वनि की चाल 340 m s^{-1} है तो पत्थर के टकराने की ध्वनि मीनार के शीर्ष पर पत्थर गिराने के कितनी देर बाद सुनाई देगी ? (g = 9.8 m s^{-2})

15.3 12.0 m लंबे स्टील के तार का द्रव्यमान 2.10 kg है । तार में तनाव कितना होना चाहिए ताकि उस तार पर किसी अनुप्रस्थ तरंग की चाल 20 °C पर शुष्क वायु में ध्वनि की चाल (343 m s^{-1}) के बराबर हो ।

15.4 सूत्र का उपयोग करके स्पष्ट कीजिए कि वायु में ध्वनि की चाल क्यों

(a) दाब पर निर्भर नहीं करती,

(b) ताप के साथ बढ़ जाती है, तथा

(c) आर्द्रता के साथ बढ़ जाती है ?

15.5 आपने यह सीखा है कि एक विमा में कोई प्रगामी तरंग फलन $y = f(x, t)$ द्वारा निरूपित की जाती है जिसमें x तथा t को $x - vt$ अथवा $x + vt$ अर्थात् $y = f(x \pm vt)$ संयोजन में प्रकट होना चाहिए । क्या इसका प्रतिलोम भी सत्य है ? नीचे दिए गए y के प्रत्येक फलन का परीक्षण करके यह बताइए कि वह किसी प्रगामी तरंग को निरूपित कर सकता है:

(a) $(x - vt)^2$

(b) $\log[(x+vt)/x_0]$

(c) $1/(x + vt)$

15.6 कोई चमगादड़ वायु में 1000 k Hz आवृत्ति की पराश्रव्य ध्वनि उत्सर्जित करता है । यदि यह ध्वनि जल के पृष्ठ से टकराती है, तो (a) परावर्तित ध्वनि तथा (b) पारगमित ध्वनि की तरंगदैर्घ्य ज्ञात कीजिए । वायु तथा जल में ध्वनि की चाल क्रमश: 340 m s^{-1} तथा 1486 m s^{-1} है ।

15.7 किसी अस्पताल में ऊतकों में ट्यूमरों का पता लगाने के लिए पराश्रव्य स्कैनर का प्रयोग किया जाता है । उस ऊतक में ध्वनि में तरंगदैर्घ्य कितनी है जिसमें ध्वनि की चाल 1.7 k m s^{-1} है ? स्कैनर की प्रचालन आवृत्ति 4.2 MHz है ।

15.8 किसी डोरी पर कोई अनुप्रस्थ गुणावृत्ति तरंग का वर्णन

$$y(x, t) = 3.0 \sin(36\,t + 0.018\,x + \pi/4)$$

द्वारा किया जाता है । यहाँ x तथा y सेंटीमीटर में तथा t सेकंड में है । x की धनात्मक दिशा बाएँ से दाएँ है ।

(a) क्या यह प्रगामी तरंग है अथवा अप्रगामी ? यदि यह प्रगामी तरंग है तो इसकी चाल तथा संचरण की दिशा क्या है ?

(b) इसका आयाम तथा आवृत्ति क्या है ?

(c) उद्गम के समय इसकी आरंभिक कला क्या है ?

(d) इस तरंग में दो क्रमागत शिखरों के बीच की न्यूनतम दूरी क्या है ?

15.9 प्रश्न 15.8 में वर्णित तरंग के लिए x = 0 cm, 2 cm तथा 4 cm के लिए विस्थापन (y) और समय (t) के बीच ग्राफ आलेखित कीजिए । इन ग्राफों की आकृति क्या है ? आयाम, आवृत्ति अथवा कला में से किन पहलुओं में प्रगामी तरंग में दोलनी गति एक बिंदु से दूसरे बिंदु पर भिन्न है ?

15.10 प्रगामी गुणावृत्ति तरंग

$y\ (x, t) = 2.0 \cos 2\pi\ (10\ t - 0.0080\ x + 0.35)$

जिसमें x तथा y को m में तथा t को s में लिया गया है, के लिए उन दो दोलनी बिंदुओं के बीच कलांतर कितना है जिनके बीच की दूरी है

(a) 4 m

(b) 0.5 m

(c) $\lambda/2$

(d) $\frac{3\lambda}{4}$

15.11 दोनों सिरों पर परिबद्ध किसी तानित डोरी पर अनुप्रस्थ विस्थापन को इस प्रकार व्यक्त किया गया है

$$y(x, t) = 0.06 \sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right) \cos\ (120\ \pi\ t)$$

जिसमें x तथा y को m तथा t को s में लिया गया है। इसमें डोरी की लंबाई 1.5 m है जिसकी संहति 3.0×10^{-2} kg है। निम्नलिखित का उत्तर दीजिए :

(a) यह फलन प्रगामी तरंग अथवा अप्रगामी तरंग में से किसे निरूपित करता है ?

(b) इसकी व्याख्या विपरीत दिशाओं में गमन करती दो तरंगों के अध्यारोपण के रूप में करते हुए प्रत्येक तरंग की तरंगदैर्घ्य, आवृत्ति तथा चाल ज्ञात कीजिए।

(c) डोरी में तनाव ज्ञात कीजिए।

15.12 (i)प्रश्न 15.11 में वर्णित डोरी पर तरंग के लिए बताइए कि क्या डोरी के सभी बिंदु समान (a) आवृत्ति, (b) कला, (c) आयाम से कंपन करते हैं ? अपने उत्तरों को स्पष्ट कीजिए।

(ii)एक सिरे से 0.375 m दूर के बिंदु का आयाम कितना है ?

15.13 नीचे किसी प्रत्यास्थ तरंग (अनुप्रस्थ अथवा अनुदैर्घ्य) के विस्थापन को निरूपित करने वाले x तथा t के फलन दिए गए हैं। यह बताइए कि इनमें से कौन (i) प्रगामी तरंग को, (ii) अप्रगामी तरंग को, (iii) इनमें से किसी भी तरंग को नहीं निरूपित करता है

(a) $y = 2 \cos\ (3x) \sin 10\ t$

(b) $y = 2\sqrt{x - vt}$

(c) $y = 3 \sin\ (5x - 0.5\ t) + 4 \cos\ (5x - 0.5t)$

(d) $y = \cos x \sin t + \cos 2x \sin 2t$

15.14 दो दृढ़ टेकों के बीच तानित तार अपनी मूल विधा में 45 Hz आवृत्ति से कंपन करता है। इस तार का द्रव्यमान 3.5×10^{-2} kg तथा रैखिक द्रव्यमान घनत्व 4.0×10^{-2} kg m^{-1} है। (a) तार पर अनुप्रस्थ तरंग की चाल क्या है, तथा (b) तार में तनाव कितना है ?

15.15 एक सिरे पर खुली तथा दूसरे सिरे पर चलायमान पिस्टन लगी 1 m लंबी नलिका, किसी नियत आवृत्ति के स्रोत (340 Hz आवृत्ति का स्वरित्र द्विभुज) के साथ, जब नलिका में वायु कॉलम 25.5 cm अथवा 79.3 cm होता है तब अनुनाद दर्शाती है। प्रयोगशाला के ताप पर वायु में ध्वनि की चाल का आकलन कीजिए। कोर-प्रभाव को नगण्य मान सकते हैं।

15.16 100 cm लंबी स्टील-छड़ अपने मध्य बिंदु पर परिबद्ध है। इसके अनुदैर्घ्य कंपनों की मूल आवृत्ति 2.53 kHz है। स्टील में ध्वनि की चाल क्या है ?

15.17 20 cm लंबाई के पाइप का एक सिरा बंद है। 430 Hz आवृत्ति के स्रोत द्वारा इस पाइप की कौन-सी गुणावृत्ति विधा अनुनाद द्वारा उत्तेजित की जाती है ? यदि इस पाइप के दोनों सिरे खुले हों तो भी क्या यह स्रोत इस पाइप के साथ अनुनाद करेगा ? वायु में ध्वनि की चाल 340 m s^{-1} है।

15.18 सितार की दो डोरियाँ A तथा B एक साथ 'गा' स्वर बजा रही हैं तथा थोड़ी-सी बेसुरी होने के कारण 6 Hz आवृत्ति के विस्पंद उत्पन्न कर रही हैं। डोरी A का तनाव कुछ घटाने पर विस्पंद की आवृत्ति घटकर 3 Hz रह जाती है। यदि A की मूल आवृत्ति 324 Hz है तो B की आवृत्ति क्या है ?

15.19 स्पष्ट कीजिए क्यों (अथवा कैसे) :

(a) किसी ध्वनि तरंग में विस्थापन निस्पंद दाब प्रस्पंद होता है और विस्थापन प्रस्पंद दाब निस्पंद होता है।

(b) आँख न होने पर भी चमगादड़ अवरोधकों की दूरी, दिशा, प्रकृति तथा आकार सुनिश्चित कर लेते हैं।

(c) वायलिन तथा सितार के स्वरों की आवृत्तियाँ समान होने पर भी हम दोनों से उत्पन्न स्वरों में भेद कर लेते हैं।

(d) ठोस अनुदैर्ध्य तथा अनुप्रस्थ दोनों प्रकार की तरंगों का पोषण कर सकते हैं जबकि गैसों में केवल अनुदैर्ध्य तरंगें ही संचरित हो सकती हैं, तथा

(e) परिक्षेपी माध्यम में संचरण के समय स्पंद की आकृति विकृत हो जाती है।

15.20 रेलवे स्टेशन के बाह्य सिगनल पर खड़ी कोई रेलगाड़ी शांत वायु में 400 Hz आवृत्ति की सीटी बजाती है। (i) प्लेटफॉर्म पर खड़े प्रेक्षक के लिए सीटी की आवृत्ति क्या होगी जबकि रेलगाड़ी (a) 10 m s^{-1} चाल से प्लेटफॉर्म की ओर गतिशील है, तथा (b) 10 m s^{-1} चाल से प्लेटफॉर्म से दूर जा रही है ? (ii) दोनों ही प्रकरणों में ध्वनि की चाल क्या है ? शांत वायु में ध्वनि की चाल 340 m s^{-1} लीजिए।

15.21 स्टेशन यार्ड में खड़ी कोई रेलगाड़ी शांत वायु में 400 Hz आवृत्ति की सीटी बजा रही है। तभी 10 m s^{-1} चाल से यार्ड से स्टेशन की ओर वायु बहने लगती है। स्टेशन के प्लेटफॉर्म पर खड़े किसी प्रेक्षक के लिए ध्वनि की आवृत्ति, तरंगदैर्घ्य तथा चाल क्या हैं ? क्या यह स्थिति तथ्यत: उस स्थिति के समरूप है जिसमें वायु शांत हो तथा प्रेक्षक 10 m s^{-1} चाल से यार्ड की ओर दौड़ रहा हो ? शांत वायु में ध्वनि की चाल 340 m s^{-1} ले सकते हैं।

अतिरिक्त अभ्यास

15.22 किसी डोरी पर कोई प्रगामी गुणावृत्ति तरंग इस प्रकार व्यक्त की गई है

$$y\,(x,\,t) = 7.5 \sin\,(0.0050\,x + 12\,t + \pi/4)$$

(a) $x = 1$ cm तथा $t = 1$ s पर किसी बिंदु का विस्थापन तथा दोलन की चाल ज्ञात कीजिए। क्या यह चाल तरंग संचरण की चाल के बराबर है ?

(b) डोरी के उन बिंदुओं की अवस्थिति ज्ञात कीजिए जिनका अनुप्रस्थ विस्थापन तथा चाल उतनी ही है जितनी $x = 1$ cm पर स्थित बिंदु की समय $t = 2$ s, 5 s तथा 11 s पर है।

15.23 ध्वनि का कोई सीमित स्पंद (उदाहरणार्थ सीटी की 'पिप') माध्यम में भेजा जाता है। (a) क्या इस स्पंद की कोई निश्चित (i) आवृत्ति, (ii) तरंगदैर्घ्य, (iii) संचरण की चाल है ? (b) यदि स्पंद दर 1 स्पंद प्रति 20 सेकंड है अर्थात् सीटी प्रत्येक 20 s के पश्चात् सेकंड के कुछ अंश के लिए बजती है, तो सीटी द्वारा उत्पन्न स्वर की आवृत्ति (1/20) Hz अथवा 0.05 Hz है ?

15.24 8.0×10^{-3} kg m^{-1} रैखिक द्रव्यमान घनत्व की किसी लंबी डोरी का एक सिरा 256 Hz आवृत्ति के विद्युत चालित स्वरित्र द्विभुज से जुड़ा है। डोरी का दूसरा सिरा किसी स्थिर घिरनी के ऊपर गुजरता हुआ किसी तुला के पलड़े से बँधा है जिस पर 90 kg के बाट लटके हैं। घिरनी वाला सिरा सारी आवक ऊर्जा को अवशोषित कर लेता है जिसके कारण इस सिरे से परावर्तित तरंगों का आयाम नगण्य होता है। $t = 0$ पर डोरी के बाएँ सिरे (द्विभुज वाले सिरे) $x = 0$ पर अनुप्रस्थ विस्थापन शून्य है ($y = 0$) तथा वह y की धनात्मक दिशा के अनुदिश गतिशील है। तरंग का आयाम 5.0 cm है। डोरी पर इस तरंग का वर्णन करने वाले अनुप्रस्थ विस्थापन y को x तथा t के फलन के रूप में लिखिए।

15.25 किसी पनडुब्बी से आबद्ध कोई 'सोनार' निकाय 40.0 kHz आवृत्ति पर प्रचालन करता है। कोई शत्रु-पनडुब्बी 360 km h^{-1} चाल से इस सोनार की ओर गति करती है। पनडुब्बी से परावर्तित ध्वनि की आवृत्ति क्या है? जल में ध्वनि की चाल 1450 m s^{-1} लीजिए।

15.26 भूकंप पृथ्वी के भीतर तरंगें उत्पन्न करते हैं। गैसों के विपरीत, पृथ्वी अनुप्रस्थ (*S*) तथा अनुदैर्घ्य (*P*) दोनों प्रकार की तरंगों की अनुभूति कर सकती है। *S* तरंगों की प्रतिरूपी चाल लगभग 4.0 km s^{-1}, तथा *P* तरंगों की प्रतिरूपी चाल लगभग 8.0 km s^{-1} है। कोई भूकंप-लेखी किसी भूकंप की *P* तथा *S* तरंगों को रिकार्ड करता है। पहली *P* तरंग पहली *S* तरंग की तुलना में 4 मिनट पहले पहुँचती है। यह मानते हुए कि तरंगें सरल रेखा में गमन करती हैं यह ज्ञात कीजिए कि भूकंप घटित होने वाले स्थान की दूरी क्या है।

15.27 कोई चमगादड़ किसी गुफा में फड़फड़ाते हुए पराश्रव्य ध्वनि उत्पन्न करते हुए उड़ रहा है। मान लीजिए चमगादड़ द्वारा उत्सर्जित पराश्रव्य ध्वनि की आवृत्ति 40 kHz है। किसी दीवार की ओर सीधा तीव्र झपट्टा मारते समय चमगादड़ की चाल ध्वनि की चाल की 0.03 गुनी है। चमगादड़ द्वारा सुनी गई दीवार से परावर्तित ध्वनि की आवृत्ति क्या है?