Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਗਣਿਤ

(ਗਿਆਰ੍ਹਵੀਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਲਈ)

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

ਸਾਹਿਬਜ਼ਾਦਾ ਅਜੀਤ ਸਿੰਘ ਨਗਰ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

© ਪੰਜਾਬ ਸਰਕਾਰ

ਪਹਿਲਾ ਐਡੀਸ਼ਨ 2016 .... 10,000 ਕਾਪੀਆਂ

[This book has been adopted with the kind permission of the
National Council of Educational Research and Training, New Delhi]

All rights, including those of translation, reproduction
and annotation etc., are reserved by the
Punjab Government.

ਸੰਯੋਜਕ : ਪ੍ਰਿਤਪਾਲ ਸਿੰਘ ਕਥੂਰੀਆ
ਵਿਸ਼ਾ ਮਾਹਿਰ
ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

ਚਿੱਤਰਕਾਰ : ਮਨਜੀਤ ਸਿੰਘ ਢਿੱਲੋਂ (ਆਰਟਿਸਟ)
ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

ਚੇਤਾਵਨੀ

1. ਕੋਈ ਵੀ ਏਜੰਸੀ-ਹੋਲਡਰ ਵਾਧੂ ਪੈਸੇ ਵਸੂਲਣ ਦੇ ਮੰਤਵ ਨਾਲ਼ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ 'ਤੇ ਜਿਲਦ-ਸਾਜ਼ੀ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦਾ। (ਏਜੰਸੀ-ਹੋਲਡਰਾਂ ਨਾਲ਼ ਹੋਏ ਸਮਝੌਤੇ ਦੀ ਧਾਰਾ ਨੰ. 7 ਅਨੁਸਾਰ)
2. ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਦੁਆਰਾ ਛਪਵਾਈਆਂ ਅਤੇ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੇ ਜਾਲ੍ਹੀ/ਨਕਲੀ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਨਾਂ (ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ) ਦੀ ਛਪਾਈ, ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਨ, ਸਟਾਕ ਕਰਨਾ, ਜਮ੍ਹਾਂਖੋਰੀ ਜਾਂ ਵਿਕਰੀ ਆਦਿ ਕਰਨਾ ਭਾਰਤੀ ਦੰਡ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਫ਼ੌਜਦਾਰੀ ਜੁਰਮ ਹੈ।
(ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਦੀਆਂ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਬੋਰਡ ਦੇ 'ਵਾਟਰ ਮਾਰਕ' ਵਾਲ਼ੇ ਕਾਗਜ਼ ਉੱਪਰ ਹੀ ਛਪਵਾਈਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਮੁੱਲ : ₹ 198.00

ਸਕੱਤਰ, ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ, ਵਿੱਦਿਆ ਭਵਨ, ਫੇਜ਼-8, ਸਾਹਿਬਜ਼ਾਦਾ ਅਜੀਤ ਸਿੰਘ ਨਗਰ-160062 ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਅਤੇ ਮੈਸ. ਨੋਵਾ ਪਬਲੀਕੇਸ਼ਨਜ਼, ਸੀ-51, ਫੋਕਲ ਪੁਆਇੰਟ ਐਕਸਟੈਨਸ਼ਨ, ਜਲੰਧਰ ਦੁਆਰਾ ਛਾਪੀ ਗਈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਦੋ ਸ਼ਬਦ

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਅਤੇ ਪਾਠ-ਕ੍ਰਮ ਨੂੰ ਸੋਧਣ ਅਤੇ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਦੇ ਕੰਮ ਵਿੱਚ ਜੁੱਟਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਅੱਜ ਜਿਸ ਦੌਰ ਵਿੱਚੋਂ ਅਸੀਂ ਲੰਘ ਰਹੇ ਹਾਂ ਉਸ ਵਿੱਚ ਬੱਚਿਆਂ ਨੂੰ ਸਹੀ ਵਿੱਦਿਆ ਦੇਣਾ ਮਾਪਿਆਂ ਅਤੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੀ ਸਾਂਝੀ ਜ਼ਿੰਮੇਵਾਰੀ ਬਣਦੀ ਹੈ। ਇਸੇ ਜ਼ਿੰਮੇਵਾਰੀ ਅਤੇ ਵਿੱਦਿਅਕ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨੂੰ ਸਮਝਦਿਆਂ ਵਿਗਿਆਨ ਵਿਸ਼ੇ ਦੇ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਅਤੇ ਪਾਠ-ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਨੈਸ਼ਨਲ ਕਰੀਕੁਲਮ ਫਰੇਮਵਰਕ-2005 ਅਨੁਸਾਰ ਕੁਝ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕੀਤੇ ਜਾ ਰਹੇ ਹਨ।

ਸਕੂਲ ਕਰੀਕੁਲਮ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਦਾ ਯੋਗਦਾਨ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਲੋੜੀਂਦੇ ਨਤੀਜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਚੰਗੀ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਦਾ ਹੋਣਾ ਪਹਿਲੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਵਿਸ਼ਾ ਸਮੱਗਰੀ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ਼ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਤਰਕ ਸ਼ਕਤੀ ਤਾਂ ਪ੍ਰਫੁੱਲਿਤ ਹੋਵੇਗੀ ਹੀ ਸਗੋਂ ਵਿਸ਼ੇ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੀ ਯੋਗਤਾ ਵਿੱਚ ਵੀ ਵਾਧਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਅਭਿਆਸ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਮਾਨਸਿਕ ਪੱਧਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਤਿਆਰ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਇਹ ਪੁਸਤਕ ਰਾਸ਼ਟਰੀ ਵਿੱਦਿਆ ਖੋਜ ਅਤੇ ਸਿਖਲਾਈ ਸੰਸਥਾ (ਐਨ.ਸੀ.ਈ.ਆਰ.ਟੀ.) ਵੱਲੋਂ ਗਿਆਰ੍ਹਵੀਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਲਈ ਤਿਆਰ ਕੀਤੀ ਗਈ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਦੀ ਪੁਸਤਕ ਦੀ ਅਨੁਸਾਰਤਾ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਕਦਮ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਇਕਸਾਰਤਾ ਲਿਆਉਣ ਲਈ ਚੁੱਕਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਜੋ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਰਾਸ਼ਟਰੀ ਪੱਧਰ ਦੇ ਇਮਤਿਹਾਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਔਕੜ ਨਾ ਆਵੇ।

ਇਸ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਨੂੰ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਅਤੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਉਪਯੋਗੀ ਬਣਾਉਣ ਦਾ ਭਰਪੂਰ ਯਤਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਪੁਸਤਕ ਨੂੰ ਹੋਰ ਚੰਗੇਰਾ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚੋਂ ਆਏ ਸੁਝਾਵਾਂ ਦਾ ਸਤਿਕਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ।

ਚੇਅਰਪਰਸਨ

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

NCERT ਦੀ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਕਮੇਟੀ

ਪ੍ਰਧਾਨ, ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਗਣਿਤ ਦੀਆਂ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੀ ਸਲਾਹਕਾਰ ਕਮੇਟੀ

ਜੇ. ਵੀ. ਨਾਰਲੀਕਾਰ, ਇਮੇਰਿਟਸ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਅੰਤਰ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ ਕੇਂਦਰ ਖਗੋਲ ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਖਗੋਲ ਭੌਤਿਕੀ, (IUCCA), ਗਣੇਸ਼ ਖੰਡ, ਪੂਨਾ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ, ਪੂਨਾ।

ਮੁੱਖ ਸਲਾਹਕਾਰ

ਪੀ. ਕੇ. ਜੈਨ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਦਿੱਲੀ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ, ਦਿੱਲੀ।

ਮੁੱਖ ਕੋਆਰਡੀਨੇਟਰ

ਹੁਕਮ ਸਿੰਘ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ. ਈ. ਐਸ. ਐਮ., ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।

ਮੈਂਬਰ

— ਆਸ਼ੂਤੋਸ਼ ਕੇ. ਵਲਝਵਾਰ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ. ਈ. ਐਸ. ਐਮ., ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਏ. ਕੇ. ਰਾਜਪੂਤ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਖੇਤਰੀ ਸਿੱਖਿਆ ਸੰਸਥਾਨ, ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਉਦੈ ਸਿੰਘ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਡੀ. ਈ. ਐਸ. ਐਮ., ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਐਸ. ਕੇ. ਐਸ. ਗੌਤਮ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ. ਈ. ਐਸ. ਐਮ., ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਐਮ. ਬੀ. ਤ੍ਰਿਪਾਠੀ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਰਾਜ ਪ੍ਰਤਿਭਾ ਵਿਕਾਸ ਵਿਦਿਆਲਯ, ਸੂਰਜਮਲ ਬਿਹਾਰ, ਦਿੱਲੀ।
— ਪ੍ਰਦਿੱਤੋ ਹਰੇ, ਵਰਿਸ਼ਟ ਗਣਿਤ ਅਧਿਆਪਕ, ਸਰਲਾ ਬਿਡ੍ਹਲਾ ਅਕੈਡਮੀ ਬੰਗਲੌਰ, ਕਰਨਾਟਕਾ।
— ਬੀ. ਐੱਸ. ਪੀ. ਰਾਜੂ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਖੇਤਰੀ ਸਿੱਖਿਆ ਸੰਸਥਾਨ, ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਸੰਜੇ ਕੁਮਾਰ ਸਿੰਹਾ, ਪੀ. ਜੀ. ਟੀ., ਸੰਸਕ੍ਰਿਤ ਸਕੂਲ, ਚਾਣਕਯਪੁਰੀ ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਸੰਜੇ ਮੁਦਗਲ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਸੀ. ਆਈ. ਈ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਸੀ. ਆਰ. ਪ੍ਰਦੀਪ, ਸਹਾਇਕ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਗਣਿਤ ਵਿਭਾਗ, ਭਾਰਤੀ ਵਿਗਿਆਨ ਸੰਸਥਾਨ, ਬੰਗਲੌਰ, ਕਰਨਾਟਕਾ।
— ਸੁਜਾਤਾ ਵਰਮਾ, ਰੀਡਰ, ਇ. ਗਾ. ਮੁ. ਵਿ. ਵਿ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਸਨੇਹਾ ਟਾਇਟਸ, ਗਣਿਤ ਅਧਿਆਪਕ, ਆਦਿਤੀ ਮਾਲਯਾ ਸਕੂਲ ਇਲਹਾਰਿਕਾ, ਬੰਗਲੌਰ, ਕਰਨਾਟਕਾ।

ਮੈਂਬਰ ਕੋਆਰਡੀਨੇਟਰ

— ਬੀ. ਪੀ. ਸਿੰਘ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ. ਈ. ਐਸ. ਐਮ., ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

PSEB ਦੀ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਸੋਧ ਕਮੇਟੀ

ਮੈਂਬਰ

— ਸ. ਅਵਤਾਰ ਸਿੰਘ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਕੰਨਿਆ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ, ਖੰਨਾ ਰੋਡ, ਸਮਰਾਲਾ, (ਲੁਧਿਆਣਾ)।

— ਸ੍ਰੀ ਆਰ. ਕੇ. ਗੋਇਲ, ਰਿਟਾਇਰਡ (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਾਹਮਣੇ ਮਨਸਾ ਦੇਵੀ ਮੰਦਿਰ, ਚੱਕਰੀਆਂ ਰੋਡ, ਮਾਨਸਾ।

— ਸ੍ਰੀ ਵੈਭਵ ਵਿਆਸ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਗੌਰਮਿੰਟ ਮਲਟੀਪਰਪਜ਼ ਸਕੂਲ ਪਾਸੀ ਰੋਡ, ਪਟਿਆਲਾ।

— ਸ. ਪਰਵਿੰਦਰ ਸਿੰਘ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ (ਲੜਕੇ) ਅਬੋਹਰ, (ਫਾਜ਼ਿਲਕਾ)।

— ਸ੍ਰੀ ਨੀਰਜ ਸ਼ਰਮਾ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ, ਮਹਿੰਦਰਗੰਜ ਰਾਜਪੁਰਾ, ਪਟਿਆਲਾ।

— ਸ. ਵਿਕਰਮ ਸੇਠੀ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ, ਕਰਨੀਖੇੜਾ, (ਫਾਜ਼ਿਲਕਾ)।

— ਸ੍ਰੀਮਤੀ ਸ਼ੈਲੀ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ, ਫੇਜ਼-3ਬੀ-1, ਐੱਸ. ਏ. ਐੱਸ. ਨਗਰ।

— ਸ੍ਰੀਮਤੀ ਬੰਬੀਤਾ ਭੰਡਾਰੀ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ, ਸਹੌੜਾ, ਐੱਸ. ਏ. ਐੱਸ. ਨਗਰ)।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਵਿਸ਼ਾ ਸੂਚੀ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਧਿਆਇ 1

ਸਮੂਹ (Sets)

❖*In these days of conflict between ancient and modern studies; there must surely be something to be said for a study which did not begin with Pythagoras and will not end with Einstein; but is the oldest and the youngest.* — *G.H. HARDY* ❖

1.1 ਭੂਮਿਕਾ

Georg Cantor (1845-1918)

ਵਰਤਮਾਨ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਲਈ ਸਮੂਹਾਂ (Sets) ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਮੂਲਭੂਤ (Fundamental) ਹੈ। ਅੱਜ ਕੱਲ੍ਹ ਇਸ ਧਾਰਨਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਗਣਿਤ ਦੀ ਹਰ ਇੱਕ ਸ਼ਾਖਾ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਸਮੂਹਾਂ (Sets) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਸੰਬੰਧ (Relation) ਅਤੇ ਫ਼ਲਨ (Function) ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਕੀਤੀ ਜਾ ਰਹੀ ਹੈ। ਜਿਮਾਇਤੀ (Geometry), ਅਨੁਕ੍ਰਮ (Sequence) ਅਤੇ ਸੰਭਾਵਨਾ (Probability) ਆਦਿ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਲਈ ਸਮੂਹਾਂ (Sets) ਦੇ ਗਿਆਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਸਮੂਹ (Set) ਸਿਧਾਂਤ ਦਾ ਵਿਕਾਸ ਜਰਮਨ ਦੇ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸ਼ਤਰੀ Georg Cantor (1845-1918) ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਉਸਦੀ ਸਮੂਹਾਂ (Sets) ਨਾਲ ਪਹਿਲੀ ਵਾਰ ਜਾਣ ਪਹਿਚਾਣ ਹੋਈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਮੂਹਾਂ (Sets) ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਕੁੱਝ ਮੁੱਢਲੀਆਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਅਤੇ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ।

1.2 ਸਮੂਹ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਨਿਰੂਪਣ (Sets and their Representations)

ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਅਕਸਰ ਇੱਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਇਕੱਠ (ਸੰਗ੍ਰਹਿ) ਦੀ ਗੱਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਤਾਸ਼ ਦੀ ਗੱਠੀ, ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਭੀੜ, ਕ੍ਰਿਕਟ ਟੀਮ ਆਦਿ। ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਵੀ ਅਸੀਂ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸੰਗ੍ਰਹਿਆਂ (ਇਕੱਠਾਂ) ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਬਿੰਦੂਆਂ, ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਆਦਿ। ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸੰਗ੍ਰਹਿਆਂ (ਇੱਕਠਾਂ) ਬਾਰੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ :

(i) 10 ਤੋਂ ਘੱਟ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਭਾਵ 1, 3, 5, 7, 9

(ii) ਭਾਰਤ ਦੀਆਂ ਨਦੀਆਂ

(iii) ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦੇ ਸਵਰ, ਭਾਵ *a, e, i, o, u*

(iv) ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ

(v) ਸੰਖਿਆ 210 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ, ਭਾਵ 2, 3, 5 ਅਤੇ 7

(vi) ਸਮੀਕਰਣ $x^2 - 5x + 6 = 0$, ਦੇ ਹੱਲ (ਭਾਵ ਮੂਲ) ਅਰਥਾਤ 2 ਅਤੇ 3

ਉਪਰ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਵਸਤੂਆਂ ਦਾ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ (Well defined) ਇੱਕ ਇਕੱਠ (ਸੰਗ੍ਰਹਿ) ਹੈ। ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਤੈਅ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦਿੱਤੀ ਖ਼ਾਸ ਵਸਤੂ ਇਸ ਇੱਕਠ (ਸੰਗ੍ਰਹਿ) ਵਿੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਨੀਲ ਨਦੀ ਭਾਰਤ ਦੀਆਂ ਨਦੀਆਂ ਦੇ ਇਕੱਠ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਆਉਂਦੀ ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ ਗੰਗਾ ਨਦੀ ਇਸ ਇਕੱਠ ਦਾ ਹਿੱਸਾ ਹੈ।

ਹੇਠਾਂ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੇ ਰਹੇ ਹਾਂ :

N : ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ

Z : ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (ਪੂਰਨ ਅੰਕਾਂ) ਦਾ ਸਮੂਹ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Q : ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ

R : ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ

$\mathbf{Z}^+$: ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (ਪੂਰਨ ਅੰਕਾਂ) ਦਾ ਸਮੂਹ

$\mathbf{Q}^+$: ਧਨਾਤਮਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ

$\mathbf{R}^+$: ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਮੂਹਾਂ ਲਈ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਕਰਦੇ ਰਹਾਂਗੇ।

ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਵਿਸ਼ਵ ਦੇ ਪੰਜ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਚਰਚਿਤ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀਆਂ ਜਾਂ ਸ਼ਾਸ਼ਤਰੀਆਂ ਦਾ ਇਕੱਠ (Collection) ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਚਰਚਿਤ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ ਜਾਂ ਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਨਿਰਣਾ ਕਰਨ ਦਾ ਮਾਪਦੰਡ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਤੋਂ ਦੂਸਰੇ ਵਿਅਕਤੀ ਅਨੁਸਾਰ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇਕੱਠ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇਕੱਠ ਨੂੰ ਸਮੂਹ ਕਹਾਂਗੇ।

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਤੇ ਧਿਆਨ ਦਿਉ :

(i) ਵਸਤੂਆਂ (Objects), ਤੱਤਾਂ (elements) ਅਤੇ ਹਿੱਸੇਦਾਰ (members) ਸਮਾਨ ਅਰਥ ਵਾਲੇ ਸ਼ਬਦ ਹਨ।

(ii) ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦੇ ਵੱਡੇ ਅੱਖਰਾਂ ਭਾਵ A, B, C, X, Y, Z, ਆਦਿ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(iii) ਸਮੂਹ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦੇ ਛੋਟੇ ਅੱਖਰਾਂ ਭਾਵ *a, b, c, x, y, z,* ਆਦਿ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ a, ਸਮੂਹ A ਦਾ ਇੱਕ ਤੱਤ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ a, ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ ਹੈ। ਯੂਨਾਨੀ ਨਿਸ਼ਾਨ $\in$ (epsilon) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਸ਼ਬਦ "ਹਿੱਸਾ ਹੈ ਜਾਂ ਵਿੱਚ ਹੈ" ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ $a \in$ A। ਜੇਕਰ b, ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ $b \notin$ A ਅਤੇ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਾਂ ਕਿ "b ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ".

ਇਸ ਲਈ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦੇ ਸਵਰਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ V ਲਈ, $a \in$ V ਪਰ $b \notin$ V। 30 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ P ਲਈ $3 \in$ P ਪਰ $15 \notin$ P।

ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਦੇ ਦੋ ਤਰੀਕੇ ਹਨ :

(i) ਰੋਸਟਰ ਜਾਂ ਸਾਰਣੀਬੱਧ ਰੂਪ (Roster or tabular form)

(ii) ਸਮੂਹ-ਨਿਰਮਾਣ ਰੂਪ (Set-builder form)

(i) ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮੂਹ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਸੂਚੀਬੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ-ਦੂਸਰੇ ਨਾਲੋਂ ਅਰਧ ਵਿਰਾਮ (ਕੋਮੇ) ਨਾਲ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਨੂੰ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਬਰੈਕਟ (ਘੁੰਡੀਦਾਰ) { } ਦੇ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ 7 ਤੋਂ ਛੋਟੀਆਂ ਧਨਾਤਮਕ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ {2, 4, 6} ਲਿਖਾਂਗੇ। ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਜਾ ਰਹੀਆਂ ਹਨ:

(a) 42 ਨੂੰ ਭਾਗ ਕਰਨ ਵਾਲੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ {1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42}

ਟਿੱਪਣੀ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਤਰਤੀਬ ਕੋਈ ਮਾਇਨੇ ਨਹੀਂ ਰੱਖਦੀ। ਇਸ ਲਈ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਅਸੀਂ {1, 3, 7, 21, 2, 6, 14, 42} ਵੀ ਲਿੱਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

(b) ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸਵਰਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ $\{a, e, i, o, u\}$.

(c) ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ {1, 3, 5, . . .} ਨਾਲ ਦਰਸਾਵਾਂਗੇ। ਅੰਤ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ, ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਅਨੰਤ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ ਲੱਗਿਆਂ ਇਹ ਗੱਲ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖੀ ਜਾਵੇ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੀ ਤੱਤ ਨੂੰ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਨਹੀਂ ਲਿਖਦੇ। ਭਾਵ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਸ਼ਬਦ 'SCHOOL' ਵਿੱਚ ਵਰਤੇ ਅੱਖਰਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸਮੂਹ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ{S, C, H, O, L} ਜਾਂ {H, O, L, C, S} ਲਿਖਾਂਗੇ। ਇੱਥੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦੀ ਤਰਤੀਬ ਕੋਈ ਮਾਇਨੇ ਨਹੀਂ ਰੱਖਦੀ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

(ii) ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮੂਹ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਾਂਝੀ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜੋ ਸਮੂਹ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਸਮੂਹ $\{a, e, i, o, u\}$, ਵਿੱਚ ਸਾਰੇ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਸਾਂਝੀ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਹੈ, ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰ ਇੱਕ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦਾ ਇੱਕ ਸਵਰ ਹੈ ਅਤੇ ਹੋਰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਦੇ ਅੱਖਰ ਵਿੱਚ ਇਹ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਸਮੂਹ ਨੂੰ V ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

V = $\{x : x$ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦਾ ਇੱਕ ਸਵਰ ਹੈ$\}$

ਇੱਥੇ ਧਿਆਨ ਦੇਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਸਮੂਹ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਵਰਨਣ ਕਰਨ ਲਈ ਚਿੰਨ੍ਹ x (ਕਈ ਹੋਰ ਚਿੰਨ੍ਹ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ y, z ਆਦਿ ਵੀ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ) ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਦੁਬਿੰਦੀ (colon) " : ". ਦਾ ਚਿੰਨ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਦੁਬਿੰਦੀ ਦੇ ਚਿੰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਸਮੂਹ ਵਿਚਲੇ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਧਰਮ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਫਿਰ ਸਾਰੇ ਕਥਨ ਨੂੰ ਘੁੰਢੀਦਾਰ (ਵਿਚਕਾਰਲੀ) ਬਰੈਕਟ ({ }) ਦੇ ਅੰਦਰ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਸਮੂਹ V ਦੇ ਵਰਨਣ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ "ਸਾਰੇ ਅੱਖਰ x ਦਾ ਸਮੂਹ ਜਿੱਥੇ ਕਿ x ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦਾ ਇੱਕ ਸਵਰ ਹੈ।" ਇਸ ਵਰਨਣ ਵਿੱਚ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਬਰੈਕਟ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ "ਸਾਰਿਆਂ x ਦੇ ਸਮੂਹ", ਦੁਬਿੰਦੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ "ਜਿੱਥੇ ਕਿ" ਦੇ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ :

A = $\{x : x$ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $3 < x < 10\}$ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾਵੇਗਾ। "ਸਾਰਿਆਂ x ਦਾ ਸਮੂਹ ਜਿਥੇ ਕਿ x ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ x, 3 ਅਤੇ 10 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 4, 5, 6, 7, 8 ਅਤੇ 9 ਸਮੂਹ A ਦੇ ਤੱਤ ਹਨ।

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ (*a*), (*b*) ਅਤੇ (*c*) ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ A, B ਅਤੇ C ਨਾਲ ਦਰਸਾਈਏ ਤਾਂ A, B ਅਤੇ C ਨੂੰ ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

A= $\{x : x$ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ 42 ਨੂੰ ਭਾਗ ਕਰਦੀ ਹੈ$\}$

B= $\{y : y$ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦਾ ਇੱਕ ਸਵਰ ਹੈ$\}$

C= $\{z : z$ ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ$\}$

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਸਮੀਕਰਣ $x^2 + x - 2 = 0$ ਦੇ ਹੱਲ ਨੂੰ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਅਸੀਂ

$(x - 1)\ (x + 2) = 0$ ਵੀ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ $x = 1, -2$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਹੱਲ ਨੂੰ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ $\{1, -2\}$ ਲਿਖਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਸਮੂਹ $\{x : x$ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $x^2 < 40\}$ ਨੂੰ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

ਹੱਲ : ਲੋੜੀਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਸਮੂਹ A = $\{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$ ਨੂੰ ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਸਮੂਹ A ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

A = $\{x : x$ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ ਹੈ$\}$

ਦੂਸਰੇ ਢੰਗ ਨਾਲ ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ?

A = $\{x : x = n^2$, ਜਿੱਥੇ ਕਿ $n \in \mathbf{N}\}$

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਸਮੂਹ $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}\}$ ਨੂੰ ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੂਹ ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਤੱਤ ਦਾ ਅੰਸ਼ ਉਸਦੇ ਹਰ ਤੋਂ 1 ਛੋਟਾ ਹੈ। ਇਹ ਵੀ ਕਿ, ਅੰਸ਼ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜੋ 1 ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਪਰ 6 ਤੋਂ ਵੱਧ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਾਂਗੇ :

$$\left\{x : x = \frac{n}{n+1}, \text{ ਜਿੱਥੇ ਕਿ } n \text{ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ } 1 \le n \le 6\right\}$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਖੱਬੇ ਹੱਥ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਸਮੂਹਾਂ ਨਾਲ ਮਿਲਾਨ ਕਰੋ :

(i) {P, R, I, N, C, A, L} (a) { x : x ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ 18 ਨੂੰ ਭਾਗ ਕਰਦੀ ਹੈ।}

(ii) { 0 } (b) { x : x ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $x^2 - 9 = 0$}

(iii) {1, 2, 3, 6, 9, 18} (c) {x : x ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $x + 1 = 1$}

(iv) {3, –3} (d) {x : x ਸ਼ਬਦ PRINCIPAL ਦਾ ਇੱਕ ਅੱਖਰ ਹੈ}

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ (d), ਵਿੱਚ ਸ਼ਬਦ PRINCIPAL ਦੇ ਨੌਂ ਅੱਖਰ ਹਨ ਅਤੇ ਦੋ ਅੱਖਰ P ਅਤੇ I ਦੁਹਰਾਏ ਗਏ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ (i) ਦਾ ਸਹੀ ਮਿਲਾਨ (d) ਨਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ (ii) ਦਾ ਮਿਲਾਨ (c) ਨਾਲ ਕਿਉਂਕਿ $x + 1 = 1$ ਤੋਂ $x = 0$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ 1, 2 ,3, 6, 9, 18 ਸਾਰੇ 18 ਨੂੰ ਭਾਗ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ (iii) ਦਾ ਮਿਲਾਨ (a) ਨਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਆਖ਼ਰ ਵਿੱਚ $x^2 - 9 = 0$ ਤੋਂ $x = 3, -3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ (iv) ਦਾ ਮਿਲਾਨ (b) ਨਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 1.1

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਸਮੂਹ ਹਨ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦਾ ਕਾਰਣ ਵੀ ਦੱਸੋ।

(i) J ਅੱਖਰ ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਸਾਲ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮਹੀਨਿਆਂ ਦਾ ਸੰਗ੍ਰਹਿ।

(ii) ਭਾਰਤ ਦੇ ਦਸ ਸੱਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਪ੍ਰਤਿਭਾਸ਼ਾਲੀ ਲੇਖਕਾਂ ਦਾ ਸੰਗ੍ਰਹਿ (ਇੱਕਠ)।

(iii) ਸੰਸਾਰ ਦੇ ਵਧੀਆ ਗਿਆਰਾਂ ਬੱਲੇਬਾਜ਼ਾਂ ਦਾ ਇਕੱਠ।

(iv) ਤੁਹਾਡੀ ਜਮਾਤ ਦੇ ਸਾਰੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਇਕੱਠ।

(v) 100 ਤੋਂ ਘੱਟ ਸਾਰੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਇਕੱਠ।

(vi) ਲੇਖਕ ਮੁਨਸ਼ੀ ਪ੍ਰੇਮ ਚੰਦ ਦੁਆਰਾ ਲਿਖੇ ਨਾਵਲਾਂ ਦਾ ਇਕੱਠ।

(vii) ਸਾਰੀਆਂ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਇਕੱਠ।

(viii) ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦਾ ਇਕੱਠ।

(ix) ਸੰਸਾਰ ਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਖ਼ਤਰਨਾਕ ਜਾਨਵਰਾਂ ਦਾ ਇੱਕਠ।

2. ਜੇਕਰ A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, ਹੋਵੇ ਤਾਂ $\in$ ਜਾਂ $\notin$ ਚਿੰਨ੍ਹ ਨਾਲ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਖ਼ਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਨੂੰ ਭਰੋ :

(i) 5 ... A (ii) 8 ... A (iii) 0 ... A

(iv) 4 ... A (v) 2 ... A (vi) 10 ... A

3. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ :

(i) A = {x : x ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $-3 < x < 7$}

(ii) B = {x : x ਇੱਕ 6 ਤੋਂ ਘੱਟ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ}

(iii) C = {x : x ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 8 ਹੈ}

(iv) D = {x : x, 60 ਨੂੰ ਭਾਗ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ}

(v) E = ਸ਼ਬਦ TRIGONOMETRY ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ

(vi) F = ਸ਼ਬਦ BETTER ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ

4. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ :

(i) {3, 6, 9, 12} (ii) {2, 4, 8, 16, 32} (iii) {5, 25, 125, 625}

(iv) {2, 4, 6, . . .} (v) {1,4,9, . . .,100}

5. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਸੂਚੀਬੱਧ ਕਰੋ :

(i) A = {x : x ਇਕ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ}

(ii) B = {x : x ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $-\frac{1}{2} < x < \frac{9}{2}$}

(iii) C = {x : x ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $x^2 \le 4$ ਹੈ}

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

(iv) D = {x : x ਸ਼ਬਦ "LOYAL" ਦਾ ਇੱਕ ਅੱਖਰ ਹੈ}

(v) E = {x : x ਸਾਲ ਦਾ ਮਹੀਨਾ ਹੈ ਜਿਸਦੇ 31 ਦਿਨ ਨਹੀਂ ਹਨ}

(vi) F = {x : x ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਨਣਮਾਲਾ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਅੰਜਨ ਹੈ ਜੋ k ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਆਉਂਦਾ ਹੈ}

6. ਖੱਬੇ ਹੱਥ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੇ ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਮਿਲਾਨ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿੱਚ ਲਿਖੇ ਸਮੂਹਾਂ ਨਾਲ ਕਰੋ।

(i) {1, 2, 3, 6}	(a) {x : x, 6 ਨੂੰ ਭਾਗ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ}
(ii) {2, 3}	(b) {x : x, 10 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ}
(iii) {M,A,T,H,E,I,C,S}	(c) {x : x ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ 6 ਨੂੰ ਭਾਗ ਕਰਦੀ ਹੈ}
(iv) {1, 3, 5, 7, 9}	(d) {x : x ਸ਼ਬਦ MATHEMATICS ਦਾ ਇੱਕ ਅੱਖਰ ਹੈ}

1.3 ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ (The Empty Set)

ਮੰਨ ਲਓ ਸਮੂਹ

A = { x : x ਮੌਜੂਦਾ ਸਮੇਂ ਜਮਾਤ XI ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਰਿਹਾ ਇੱਕ ਸਕੂਲ ਦਾ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹੈ}

ਅਸੀਂ ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ ਜਾ ਕੇ ਮੌਜੂਦਾ ਸਮੇਂ XI ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਰਹੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਗਿਣ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੂਹ A ਵਿਚਲੇ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਦੂਸਰਾ ਸਮੂਹ B ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :

B = { x : x ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹੈ ਜੋ ਮੌਜੂਦਾ ਸਮੇਂ X ਅਤੇ XI ਦੋਹਾਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਰਿਹਾ ਹੈ}

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇੱਕੋ ਸਮੇਂ ਦੋਹਾਂ ਜਮਾਤਾਂ ਗਿਆਰ੍ਹਵੀਂ ਅਤੇ ਦਸਵੀਂ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਪੜ੍ਹ ਸਕਦਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੂਹ B ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਤੱਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1 ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਤੱਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ, ਨੂੰ ਖ਼ਾਲੀ ਸਮੂਹ ਜਾਂ ਸਿਫ਼ਰ ਸਮੂਹ (null set or void set) ਆਖਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਅਨੁਸਾਰ, B ਇੱਕ ਖ਼ਾਲੀ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ A ਇੱਕ ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਖ਼ਾਲੀ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਚਿੰਨ੍ਹ ϕ ਜਾਂ{ } ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਕੁਝ ਖ਼ਾਲੀ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੇ ਰਹੇ ਹਾਂ :

(i) ਮੰਨ ਲਓ A = {x : $1 < x < 2$, x ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ}। ਇੱਥੇ A ਇੱਕ ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ 1 ਅਤੇ 2 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ।

(ii) B = {x : $x^2 - 2 = 0$ ਅਤੇ x ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ} ਇੱਥੇ B ਇੱਕ ਖ਼ਾਲੀ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਮੀਕਰਨ $x^2 - 2 = 0$ ਕਿਸੇ ਵੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ x ਨਾਲ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ।

(iii) C = {x : x, 2 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਜਿਸਤ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ}। ਇੱਥੇ C ਇੱਕ ਖ਼ਾਲੀ ਸਮੂਹ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਸਿਰਫ਼ 2 ਹੀ ਜਿਸਤ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

(iv) D = { x : $x^2 = 4$, x ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ }। ਇੱਥੇ D ਇੱਕ ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $x^2 = 4$ ਕਿਸੇ ਵੀ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ x ਨਾਲ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ।

1.4 ਸੀਮਿਤ ਅਤੇ ਅਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ (Finite and Infinite Sets)

ਮੰਨ ਲਓ A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {a, b, c, d, e, g}

ਅਤੇ C = { ਮੌਜੂਦਾ ਸਮੇਂ ਦੁਨੀਆਂ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਹਿੱਸਿਆਂ ਵਿੱਚ ਰਹਿ ਰਹੇ ਆਦਮੀ}

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ A ਵਿੱਚ 5 ਤੱਤ ਅਤੇ B ਵਿੱਚ 6 ਤੱਤ ਹਨ। C ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਤੱਤ ਹਨ ? ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਨੂੰ C ਵਿੱਚ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਪਰ ਇਹ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗੀ, ਜਿਹੜੀ ਬਹੁਤ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗੀ। ਇੱਕ ਸਮੂਹ S ਵਿੱਚ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਸਮੂਹ ਦੇ ਵਿੱਚ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਕਿੰਨੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ n (S) ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ n (S) ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇ ਤਾਂ S ਇੱਕ ਨਾਂ ਖ਼ਾਲੀ (non-empty) ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਹੈ।

ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਕਰੋ। ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ, ਅਣਗਿਣਤ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਇੱਕ ਅਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹ A, B ਅਤੇ C ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਹਨ ਅਤੇ $n(A) = 5$, $n(B) = 6$ ਅਤੇ $n(C)$ = ਕੋਈ ਸੀਮਿਤ ਸੰਖਿਆ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2 ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਜੋ ਖ਼ਾਲੀ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਜਿਸ ਦੇ ਤੱਤ ਗਿਣਨਯੋਗ ਹੋਣ ਨੂੰ ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਸਮੂਹ ਅਸੀਮਿਤ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਕਰੀਏ :

(i) ਮੰਨ ਲਉ W ਹਫ਼ਤੇ ਵਿੱਚ ਅਉਣ ਵਾਲੇ ਦਿਨਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਤਾਂ W ਇੱਕ ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਹੈ।

(ii) ਮੰਨ ਲਉ, S ਸਮੀਕਰਣ $x^2 - 16 = 0$ ਦੇ ਹੱਲਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਤਾਂ S ਇੱਕ ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਹੈ।

(iii) ਮੰਨ ਲਉ, G ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਤਾਂ G ਇੱਕ ਅਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਹੈ।

ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਸਮੂਹ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ { } ਬਰੈਕਟ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ { } ਵਿੱਚ ਲਿਖਣਾ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਅਣਗਿਣਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਅਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਉਸਦੇ ਕੁੱਝ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੂਹ ਦੀ ਬਣਤਰ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਲੱਗ ਜਾਵੇ ਅਤੇ ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਆਖਿਰ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂ ਲਗਾ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ$\{1, 2, 3 \ldots\}$ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ, $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਇਹ ਸਾਰੇ ਸਮੂਹ ਅਸੀਮਤ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ ਸਾਰੇ ਅਸੀਮਤ ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਸਮੂਹ ਦੇ ਤੱਤ ਕਿਸੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਨਮੂਨੇ ਦੇ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਸੀਮਿਤ ਹਨ ਅਤੇ ਕਿਹੜੇ ਅਸੀਮਿਤ, ਦੱਸੋ :

(i) $\{x : x \in$ N ਅਤੇ $(x - 1)(x - 2) = 0\}$

(ii) $\{x : x \in$ N ਅਤੇ $x^2 = 4\}$

(iii) $\{x : x \in$ N ਅਤੇ $2x - 1 = 0\}$

(iv) $\{x : x \in$ N ਅਤੇ x ਅਭਾਜ ਹੈ$\}$

(v) $\{x : x \in$ N ਅਤੇ x ਟਾਂਕ ਹੈ$\}$

ਹੱਲ : (i) ਦਿੱਤਾ ਸਮੂਹ = $\{1, 2\}$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸੀਮਿਤ ਹੈ।

(ii) ਦਿੱਤਾ ਸਮੂਹ = $\{2\}$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸੀਮਿਤ ਹੈ।

(iii) ਦਿੱਤਾ ਸਮੂਹ = ϕ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸੀਮਿਤ ਹੈ।

(iv) ਦਿੱਤਾ ਸਮੂਹ, ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਉਂਕਿ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਣਗਿਣਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਸਮੂਹ ਅਸੀਮਿਤ ਹੈ।

(v) ਕਿਉਂਕਿ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਣਗਿਣਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਸਮੂਹ ਅਸੀਮਿਤ ਹੈ।

1.5 ਬਰਾਬਰ ਸਮੂਹ (Equal Sets)

ਦਿੱਤੇ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਲਈ, ਜੇਕਰ A ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਤੱਤ, B ਦਾ ਤੱਤ ਵੀ ਹੋਵੇ ਅਤੇ B ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਤੱਤ, A ਦਾ ਤੱਤ ਵੀ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਸਮੂਹ A ਅਤੇ B ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਸਮੂਹ ਕਹਾਂਗੇ। ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਦੋਵਾਂ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਤੱਤ ਉਹੀ ਹੋਣਗੇ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 3 ਦੋ ਸਮੂਹ A ਅਤੇ B ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਤੱਤ ਬਿਲਕੁਲ ਉਹੀ ਹੋਣ ਅਤੇ ਅਸੀਂ A = B ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ A ਅਤੇ B ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹਨ ਅਤੇ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ $A \neq B$.

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ :

(i) ਮੰਨ ਲਉ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ਅਤੇ $B = \{3, 1, 4, 2\}$ ਤਾਂ A = B

(ii) ਮੰਨ ਲਉ A ਉਹਨਾਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜੋ 6 ਤੋਂ ਛੋਟੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ P, 30 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਤਾਂ A ਅਤੇ P ਬਰਾਬਰ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ ਸਿਰਫ਼ 2, 3 ਅਤੇ 5 ਹੀ 30 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹ ਸਾਰੇ 6 ਤੋਂ ਛੋਟੇ ਵੀ ਹਨ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਟਿੱਪਣੀ ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਜਾਂ ਵੱਧ ਤੱਤ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਆਉਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਸਮੂਹ ਬਦਲਦਾ ਨਹੀਂ, ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਸਮੂਹ $A = \{1, 2, 3\}$ ਅਤੇ $B = \{2, 2, 1, 3, 3\}$ ਤਾਂ A ਅਤੇ B ਬਰਾਬਰ ਸਮੂਹ ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ A ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਤੱਤ B ਵਿੱਚ ਅਤੇ B ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਤੱਤ A ਵਿੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਲਿਖਣ ਲੱਗਿਆ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾਉਂਦੇ ਨਹੀਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਬਰਾਬਰ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਜੇਕਰ ਹਨ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਕਾਰਣ ਵੀ ਦੱਸੋ ?

$A = \{0\}$, $B = \{x : x > 15$ ਅਤੇ $x < 5\}$,

$C = \{x : x - 5 = 0\}$, $D = \{x : x^2 = 25\}$,

$E = \{x : x$ ਸਮੀਕਰਨ $x^2 - 2x - 15 = 0$ ਦਾ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੱਲ ਹੈ$\}$

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $0 \in A$ ਅਤੇ 0 ਕਿਸੇ ਵੀ ਹੋਰ ਸਮੂਹ B, C, D ਅਤੇ E, ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $A \neq B$, $A \neq C$, $A \neq D$, $A \neq E$ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $B = \phi$ ਹੈ, ਪਰ ਕੋਈ ਵੀ ਸਮੂਹ ਖ਼ਾਲੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $B \neq C$, $B \neq D$, $B \neq E$ ਹੈ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $C = \{5\}$ ਪਰ $-5 \in D$, ਇਸ ਲਈ $C \neq D$.

ਕਿਉਂਕਿ $E = \{5\}$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $C = E$ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $D = \{-5, 5\}$ ਹੈ ਅਤੇ $E = \{5\}$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $D \neq E$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਰਾਬਰ ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਹੀ ਜੋੜਾ ਹੈ ਜੋ C ਅਤੇ E ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਜੋੜਾ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰੋ।

(i) X, ਸ਼ਬਦ "ALLOY" ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਅਤੇ B, ਸ਼ਬਦ "LOYAL" ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ।

(ii) $A = \{n : n \in Z$ ਅਤੇ $n^2 \leq 4\}$ ਅਤੇ $B = \{x : x \in R$ ਅਤੇ $x^2 - 3x + 2 = 0\}$

ਹੱਲ : (i) ਸਾਡੇ ਕੋਲ $X = \{A, L, L, O, Y\}$, $B = \{L, O, Y, A, L\}$ ਹੈ ਤਾਂ X ਅਤੇ B ਬਰਾਬਰ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਤੱਤ ਦੇ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਆਉਣ ਨਾਲ ਸਮੂਹ ਬਦਲਦਾ ਨਹੀਂ, ਇਸ ਲਈ

$$X = \{A, L, O, Y\} = B$$

(ii) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$ ਕਿਉਂਕਿ $0 \in A$ ਅਤੇ $0 \notin B$, ਇਸ ਲਈ A ਅਤੇ B ਸਮੂਹ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 1.2

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀਆਂ ਖ਼ਾਲੀ ਸਮੂਹ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹਨ :
   (i) ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਜੋ 2 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
   (ii) ਜਿਸਤ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ
   (iii) $\{ x : x$ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, $x < 5$ ਅਤੇ $x > 7 \}$
   (iv) $\{ y : y$ ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ$\}$
2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਸਮੂਹ ਸੀਮਿਤ ਜਾਂ ਅਸੀਮਤ ਹਨ :
   (i) ਸਾਲ ਦੇ ਮਹੀਨਿਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ
   (ii) $\{1, 2, 3, \ldots\}$
   (iii) $\{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$
   (iv) 100 ਤੋਂ ਵੱਧ ਸਾਰੀਆਂ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ
   (v) 99 ਤੋਂ ਛੋਟੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ
3. ਦੱਸੋਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਸਮੂਹ ਸੀਮਿਤ ਹਨ ਅਤੇ ਕਿਹੜੇ ਅਸੀਮਿਤ :
   (i) x – ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ
   (ii) ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ
   (iii) 5 ਦੇ ਗੁਣਜ ਵਾਲੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ
   (iv) ਧਰਤੀ ਤੇ ਰਹਿਣ ਵਾਲੇ ਜਾਨਵਰਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ
   (v) ਉਹਨਾਂ ਚੱਕਰਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਜੋ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ (0,0) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੇ ਹਨ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

4. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਦੱਸੋ ਕਿ A = B ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ :

(i) $A = \{ a, b, c, d \}$ $\quad B = \{ d, c, b, a \}$

(ii) $A = \{ 4, 8, 12, 16 \}$ $\quad B = \{ 8, 4, 16, 18\}$

(iii) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ $\quad B = \{ x : x$ ਇਕ ਧਨਾਤਮਕ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $x \leq 10$ ਹੈ$\}$

(iv) $A = \{ x : x,$ 10 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ$\}$, $\quad B = \{ 10, 15, 20, 25, 30, . . . \}$

5. ਕੀ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਬਰਾਬਰ ਹਨ ? ਕਾਰਨ ਦੱਸੋ।

(i) $A = \{2, 3\}$, $\quad B = \{x : x$ ਸਮੀਕਰਨ $x^2 + 5x + 6 = 0$ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ$\}$

(ii) $A = \{ x : x$ ਸ਼ਬਦ FOLLOW ਦਾ ਇੱਕ ਅੱਖਰ ਹੈ$\}$

$B = \{ y : y$ ਸ਼ਬਦ WOLF ਦਾ ਇੱਕ ਅੱਖਰ ਹੈ$\}$

6. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਬਰਾਬਰ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਪਤਾ ਕਰੋ :

$A = \{ 2, 4, 8, 12\}$, $B = \{ 1, 2, 3, 4\}$, $C = \{ 4, 8, 12, 14\}$, $D = \{ 3, 1, 4, 2\}$

$E = \{-1, 1\}$, $F = \{ 0, a\}$, $G = \{1, -1\}$, $H = \{ 0, 1\}$

1.6 ਉਪ ਸਮੂਹ (Sub-sets)

ਮੰਨ ਲਓ ਸਮੂਹ X = ਤੁਹਾਡੇ ਸਕੂਲ ਦੇ ਸਾਰੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਅਤੇ Y = ਤੁਹਾਡੀ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਰਹੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ Y ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਤੱਤ, X ਦਾ ਤੱਤ ਵੀ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ Y, X ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ। Y, X ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਚਿੰਨ੍ਹ $Y \subset X$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। $\subset$ ਚਿੰਨ “ਉਪ ਸਮੂਹ” ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਾਂ “ਵਿੱਚ ਹੈ” ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 4 ਇੱਕ ਸਮੂਹ A ਨੂੰ ਸਮੂਹ B ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਕਹਾਂਗੇ ਜੇਕਰ A ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ, B ਵਿੱਚ ਹੋਣ।

ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, $A \subset B$ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ $a \in A$, ਤਾਂ $a \in B$ ਹੋਵੇ। ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਚਿੰਨ “$\Rightarrow$” ਜਿਸਦਾ ਮਤਲਬ “ਭਾਵ ਹੈ” ਜਾਂ “ਇਸਤੋਂ” ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਸੁਵਿਧਾਜਨਕ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਚਿੰਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਅਸੀਂ ਉਪ ਸਮੂਹ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :

$$A \subset B \text{ ਜੇਕਰ } a \in A \Rightarrow a \in B$$

ਅਸੀਂ ਉਪਰੋਕਤ ਕਥਨ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ, “A, B ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ *a*, A ਦਾ ਇੱਕ ਤੱਤ ਹੈ ਭਾਵ ਹੈ *a*, B ਦਾ ਵੀ ਇੱਕ ਤੱਤ ਹੈ।” ਜੇਕਰ A, B ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਨਾਂ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਲਿਖਾਂਗੇ $A \not\subset B$।

ਸਾਨੂੰ ਧਿਆਨ ਦੇਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ A ਨੂੰ B ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੋਣ ਲਈ A ਦੇ ਸਾਰੇ (ਭਾਵ ਹਰ ਇੱਕ) ਤੱਤ B ਵਿੱਚ ਵੀ ਹੋਣ। ਇਹ ਸੰਭਵ ਹੈ ਕਿ B ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਤੱਤ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ A ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ B ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਤੱਤ, A ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਫਿਰ $B \subset A$ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ A ਅਤੇ B ਇੱਕੋ-ਜਿਹੇ ਸਮੂਹ ਹੋਣਗੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $A \subset B$ ਅਤੇ $B \subset A \Leftrightarrow A = B$, ਜਿੱਥੇ “$\Leftrightarrow$” ਦੋ ਤਰਫਾ ਸ਼ਰਤ (two way implications) ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ ’ਤੇ ‘ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ ਜੇਕਰ’ ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। (ਛੋਟੇ-ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਨੂੰ “iff” ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ)।

ਉਪਰੋਕਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਹਰ ਇਕ ਸਮੂਹ A ਆਪਣੇ ਆਪ ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਭਾਵ $A \subset A$. ਕਿਉਂਕਿ ਖ਼ਾਲੀ ਸਮੂਹ ϕ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਤੱਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਨਾਲ ਸਹਿਮਤ ਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ϕ ਹਰ ਇਕ ਸਮੂਹ ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

(i) ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ **Q** ਦਾ ਸਮੂਹ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ **R** ਦੇ ਸਮੂਹ ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ $\mathbf{Q} \subset R$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

(ii) ਜੇਕਰ ਸਮੂਹ A, 56 ਦੇ ਸਾਰੇ ਭਾਜਕਾਂ ਦਾ ਹੈ ਅਤੇ B, 56, ਦੇ ਸਾਰੇ ਅਭਾਜ ਭਾਜਕਾਂ ਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ B, A ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਅਸੀਂ $B \subset A$ ਲਿਖਾਂਗੇ।

(iii) ਜੇਕਰ $A = \{1, 3, 5\}$ ਅਤੇ $B = \{x : x$ ਇੱਕ 6 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ$\}$ ਤਾਂ $A \subset B$ ਅਤੇ $B \subset A$ । ਇਸ ਲਈ $A = B$.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

(iv) ਮੰਨ ਲਓ A = { a, e, i, o, u} ਅਤੇ B = { a, b, c, d} ਤਾਂ A, B ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ B ਵੀ A ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ A ਅਤੇ B ਦੋ ਸਮੂਹ ਹਨ। ਜੇਕਰ $A \subset B$ ਅਤੇ $A \neq B$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ A ਨੂੰ B ਦਾ ਉਚਿਤ ਉਪ ਸਮੂਹ ਕਹਾਂਗੇ ਅਤੇ B ਨੂੰ A ਦਾ ਸੁਪਰ ਸਮੂਹ (superset) ਕਹਾਂਗੇ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਜੇਕਰ

A = {1, 2, 3} ਅਤੇ B = {1, 2, 3, 4} ਹੋਵੇ ਤਾਂ A, B ਦਾ ਉਚਿਤ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇਗਾ।

ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ ਸਿਰਫ ਇੱਕ ਹੀ ਤੱਤ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਉਸਨੂੰ ਇਕ ਤੱਤ (Singleton) ਸਮੂਹ ਆਖਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ { a } ਇੱਕ ਤੱਤ ਸਮੂਹ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਮੰਨ ਲਉ ਸਮੂਹ

$$\phi, A = \{1, 3\}, \quad B = \{1, 5, 9\}, \quad C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹ ਜੋੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਚਿੰਨ੍ਹ $\subset$ ਜਾਂ $\not\subset$ ਲਗਾਉ :

(i) ϕ . . . B (ii) A . . . B (iii) A . . . C (iv) B . . . C

ਹੱਲ : (i) $\phi \subset B$ ਕਿਉਂਕਿ ϕ ਹਰ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ।

(ii) $A \not\subset B$ ਕਿਉਂਕਿ $3 \in A$ ਪਰ $3 \notin B$

(iii) $A \subset C$ ਕਿਉਂਕਿ $1, 3 \in A$ ਅਤੇ C ਵਿੱਚ ਵੀ ਹਨ।

(iv) $B \subset C$, ਕਿਉਂਕਿ, B ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ, C ਦੇ ਵਿੱਚ ਮੌਜੂਦ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਮੰਨ ਲਓ A = { a, e, i, o, u} ਅਤੇ B = { a, b, c, d}. ਕੀ A, B ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ ? ਨਹੀਂ (ਕਿਉਂ ਨਹੀਂ ?) ਕੀ B, A ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ ? ਨਹੀਂ (ਕਿਉਂ ਨਹੀਂ ?)

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਮੰਨ ਲਓ A, B ਅਤੇ C ਤਿੰਨ ਸਮੂਹ ਹਨ, ਜੇਕਰ $A \in B$ ਅਤੇ $B \subset C$, ਕੀ $A \subset C$ ਠੀਕ ਹੈ ? ਜੇਕਰ ਨਹੀਂ, ਤਾਂ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿਓ।

ਹੱਲ : ਨਹੀਂ, ਮੰਨ ਲਓ $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}, 2\}$ ਅਤੇ $C = \{\{1\}, 2, 3\}$। ਇੱਥੇ $A \in B$ ਕਿਉਂਕਿ $A = \{1\}$ ਅਤੇ $B \subset C$ ਪਰ $A \not\subset C$। ਕਿਉਂਕਿ $1 \in A$ ਪਰ $1 \notin C$ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਸਮੂਹ ਦਾ ਇੱਕ ਤੱਤ ਕਦੇ ਵੀ ਆਪਣਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ।

1.6.1 ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹ (Subsets of set of real numbers)

ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਭਾਗ 1.6 ਵਿੱਚ ਦੱਸਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ **R** ਦੇ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਦੇ ਨਾਮ ਦੇ ਰਹੇ ਹਾਂ।

ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ $\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ $\mathbf{Q} = \{ x : x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbf{Z}$ ਅਤੇ $q \neq 0\}$

ਜਿਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ " **Q** ਉਹ ਸਾਰੀਆਂ x ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਜਿਥੇ x ਬਰਾਬਰ ਹੈ $\frac{p}{q}$ ਅਤੇ p, q ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ q ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।" **Q** ਦੇ ਮੈਂਬਰ -5 (ਜਿਸਨੂੰ ਅਸੀਂ $-\frac{5}{1}$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ), $\frac{5}{7}$, $3\frac{1}{2}$ (ਜਿਸਨੂੰ $\frac{7}{2}$ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ) ਅਤੇ $-\frac{11}{3}$।

ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ **T**, ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਇਹ ਉਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਤਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਪਰ ਪਰਿਮੇਯ ਨਹੀਂ, ਇਸ ਲਈ $\mathbf{T} = \{x : x \in \mathbf{R}$ ਅਤੇ $x \notin \mathbf{Q}\}$।

ਉਪਰੋਕਤ ਉਪ ਸਮੂਹਾਂ ਤੋਂ ਹੇਠ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਬਣਦੇ ਹਨ :

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}, \mathbf{T} \subset \mathbf{R}, \mathbf{N} \not\subset \mathbf{T}.$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

1.6.2 R ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਵਿੱਚ (Intervals as subsets of R) ਮੰਨ ਲਉ $a, b \in \mathbf{R}$ ਅਤੇ $a < b$ ਤਾਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ $\{y : a < y < b\}$ ਨੂੰ ਖੁਲ੍ਹਾ ਅੰਤਰਾਲ (open interval) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ (a, b) ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। a ਅਤੇ b ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਇਸ ਸਮੂਹ (a, b) ਦੇ ਵਿੱਚ ਹਨ, ਪਰ a, b ਖੁਦ ਇਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਉਹ ਅੰਤਰਾਲ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੋਣ ਨੂੰ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ (closed interval) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ $[a, b]$ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $[a, b] = \{x : a \le x \le b\}$

ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਾਲ ਵੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿਹੜੇ ਇੱਕ ਸਿਰੇ ਤੋਂ ਬੰਦ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਤੋਂ ਖੁੱਲੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਭਾਵ

$[a, b) = \{x : a \le x < b\}$ ਇੱਕ a ਤੋਂ b ਦਾ ਖੁੱਲ੍ਹਾ ਅੰਤਰਾਲ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ a ਹੈ, ਪਰ b ਨਹੀਂ ਹੈ।

$(a, b] = \{x : a < x \le b\}$ ਇੱਕ a ਤੋਂ b ਦਾ ਖੁੱਲ੍ਹਾ ਅੰਤਰਾਲ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ b ਹੈ, ਪਰ a ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਹਨਾਂ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦੀ ਮਦਦ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਦੂਸਰੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਵੀ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਜੇਕਰ $A = (-3, 5)$ ਅਤੇ $B = [-7, 9]$, ਤਾਂ $A \subset B$। ਸਮੂਹ $[0, \infty)$, ਅ-ਰਿਣਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜਦਕਿ $(-\infty, 0)$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਸਮੂਹ $(-\infty, \infty)$ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਦੇ ਵਿੱਚ, ਜੋ ਕਿ $-\infty$ ਤੋਂ ∞ ਤੱਕ ਹੈ, ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਤੇ, ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਨੂੰ **R** ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤਰ 1.1 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 1.1

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਅਨੰਤ ਬਿੰਦੂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਸਮੂਹ $\{x : x \in \mathbf{R}, -5 < x \le 7\}$ ਜੋ ਕਿ ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਹੈ, ਇਸ ਨੂੰ ਅੰਤਰਾਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $(-5, 7]$ ਤੋਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਅੰਤਰਾਲ $[-3, 5)$ ਨੂੰ ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $\{x : -3 \le x < 5\}$ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਸੰਖਿਆ $(b - a)$ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਅੰਤਰਾਲ (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$ ਜਾਂ $(a, b]$ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

1.7 ਘਾਤ ਸਮੂਹ (Power Set)

ਮੰਨ ਲਓ ਸਮੂਹ $\{1, 2\}$, ਹੁਣ ਇਸ ਸਮੂਹ $\{1, 2\}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਉਪ ਸਮੂਹ ਲਿਖੋ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ϕ ਹਰ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ϕ, $\{1, 2\}$ ਦਾ ਵੀ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\{1\}$ ਅਤੇ $\{2\}$ ਵੀ $\{1, 2\}$ ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹਰ ਇਕ ਸਮੂਹ ਆਪਣੇ ਆਪ ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $\{1, 2\}$ ਵੀ $\{1, 2\}$ ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੂਹ $\{1, 2\}$ ਦੇ ਕੁੱਲ ਚਾਰ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹਨ, ਜੋ ਕਿ ϕ, $\{1\}$, $\{2\}$ ਅਤੇ $\{1, 2\}$ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਉਪ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ $\{1, 2\}$ ਦਾ ਘਾਤ ਸਮੂਹ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 5 ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ A ਦੇ ਸਾਰੇ ਉਪ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਇਕੱਠ ਨੂੰ A ਦਾ ਘਾਤ ਸਮੂਹ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਨੂੰ P(A) ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। P(A) ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਤੱਤ, ਇਕ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਉਪਰੋਕਤ ਤੋਂ ਜੇਕਰ $A = \{1, 2\}$ ਤਾਂ

$$P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \text{ ਹੈ।}$$

ਇਹ ਵੀ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $n[P(A)] = 4 = 2^2$

ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਜੇਕਰ A ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਕਿ $n(A) = m$, ਤਾਂ ਇਹ ਦਿਖਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ $n[P(A)] = 2^m$।

1.8 ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ (Universal Set)

ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਮੂਲਭੂਤ (basic) ਸਮੂਹ ਦੇ ਤੱਤ ਅਤੇ ਉਪ ਸਮੂਹਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਨਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਕਿ ਇਸ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਸੰਗਿਕ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਸਾਡੀ ਰੁਚੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਸਮੂਹ ਆਦਿ। ਇਸ ਮੂਲਭੂਤ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ U ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਸਾਰੇ ਉਪ ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਅੱਖਰਾਂ A, B ਅਤੇ C ਆਦਿ ਦੁਆਰਾ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਲਈ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ **R**, ਵੀ ਇੱਕ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਮਨੁੱਖੀ ਜਨਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਲਈ ਸੰਸਾਰ ਦੀ ਸਾਰੀ ਜਨਸੰਖਿਆ ਦਾ ਸਮੂਹ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇਗਾ।

ਅਭਿਆਸ 1.3

1. ਖ਼ਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਵਿੱਚ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ $\subset$ ਜਾਂ $\not\subset$ ਦਾ ਵਰਤੋਂ ਕਰੋ ਤਾਂ ਜੋ ਕਥਨ ਸਹੀ ਹੋਣ :

(i) $\{2, 3, 4\} \ldots \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (ii) $\{a, b, c\} \ldots \{b, c, d\}$

(iii) $\{x : x$ ਤੁਹਾਡੇ ਸਕੂਲ ਦੀ XI ਜਮਾਤ ਦਾ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹੈ $\} \ldots \{x : x$ ਤੁਹਾਡੇ ਸਕੂਲ ਦਾ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹੈ$\}$

(iv) $\{x : x$ ਕਿਸੇ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਹੈ$\} \ldots \{x : x$ ਉਸੇ ਹੀ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 1 ਇਕਾਈ ਹੈ।$\}$

(v) $\{x : x$ ਕਿਸੇ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ$\} \ldots \{x : x$ ਕਿਸੇ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ$\}$

(vi) $\{x : x$ ਕਿਸੇ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ$\} \ldots \{x : x$ ਉਸੇ ਹੀ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ$\}$

(vii) $\{x : x$ ਇਕ ਜਿਸਤ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ$\} \ldots \{x : x$ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ$\}$

2. ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਝੂਠ :

(i) $\{a, b\} \not\subset \{b, c, a\}$ (ii) $\{a, e\} \subset \{x : x$ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦਾ ਇੱਕ ਸਵਰ ਹੈ$\}$

(iii) $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 3, 5\}$ (iv) $\{a\} \subset \{a, b, c\}$

(v) $\{a\} \in \{a, b, c\}$

(vi) $\{x : x$ ਇੱਕ 6 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਜਿਸਤ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ$\} \subset \{x : x$ ਇੱਕ 36 ਨੂੰ ਭਾਗ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ$\}$

3. ਮੰਨ ਲਓ $A = \{1, 2, \{3, 4\}, 5\}$ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਦੱਸੋ ਕਿ ਕਿਹੜਾ ਕਥਨ ਠੀਕ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਉਂ ?

(i) $\{3, 4\} \subset A$ (ii) $\{3, 4\} \in A$ (iii) $\{\{3, 4\}\} \subset A$

(iv) $1 \in A$ (v) $1 \subset A$ (vi) $\{1, 2, 5\} \subset A$

(vii) $\{1, 2, 5\} \in A$ (viii) $\{1, 2, 3\} \subset A$ (ix) $\phi \in A$

(x) $\phi \subset A$ (xi) $\{\phi\} \subset A$

4. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹ ਲਿਖੋ :

(i) $\{a\}$ (ii) $\{a, b\}$ (iii) $\{1, 2, 3\}$ (iv) ϕ

5. P(A) ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਤੱਤ ਹੋਣਗੇ ਜੇਕਰ if $A = \phi$?

6. ਹੇਠਾਂ ਦਿਤਿਆਂ ਨੂੰ ਅੰਤਰਾਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ :

(i) $\{x : x \in R, -4 < x \leq 6\}$ (ii) $\{x : x \in R, -12 < x < -10\}$

(iii) $\{x : x \in R, 0 \leq x < 7\}$ (iv) $\{x : x \in R, 3 \leq x \leq 4\}$

7. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਨੂੰ ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ :

(i) $(-3, 0)$ (ii) $[6, 12]$ (iii) $(6, 12]$ (iv) $[-23, 5)$

8. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਤੁਸੀਂ ਕਿਸ ਨੂੰ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਲਈ ਪ੍ਰਸਤਾਵਿਤ ਕਰੋਗੇ :

(i) ਸਮਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ (ii) ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ

9. ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹਾਂ $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ ਅਤੇ $C = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, ਲਈ ਤਿੰਨਾਂ ਸਮੂਹਾਂ A, B ਅਤੇ C ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਸਮੂਹਾਂ ਵਿਚੋਂ ਕਿਸ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਮੰਨਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(i) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (ii) ϕ

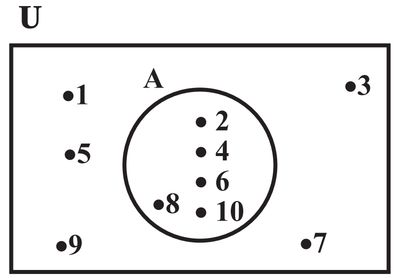
(iii) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (iv) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

1.9 ਵੇਨ ਚਿੱਤਰ (Venn Diagrams)

ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੁਆਰਾ ਦਿਖਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ **ਵੇਨ ਚਿੱਤਰ** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਵੇਨ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦਾ ਨਾਮ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਤਰਕ ਸ਼ਾਸਤਰੀ John-Venn (1834 ਈ. ਤੋਂ 1883 ਈ.) ਦੇ ਨਾਮ ਤੇ ਰੱਖਿਆ ਗਿਆ। ਇਸ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਆਇਤ ਅਤੇ ਬੰਦ ਵਕਰ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਚੱਕਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਆਇਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

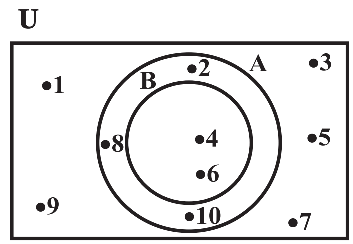


ਚਿੱਤਰ 1.2

ਵੇਨ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ, ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਉਸਦੇ ਅਨੁਸਾਰੀ ਚੱਕਰਾਂ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 1.2 ਅਤੇ 1.3)

ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ 1 ਚਿੱਤਰ 1.2 ਵਿੱਚ U = {1,2,3, ..., 10} ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ A = {2,4,6,8,10} ਇੱਕ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ।

ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ 2 ਚਿੱਤਰ 1.3 ਵਿੱਚ U = {1,2,3, ..., 10} ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ A = {2,4,6,8,10} ਅਤੇ B = {4, 6} ਉਪ ਸਮੂਹ ਹਨ ਅਤੇ $B \subset A$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 1.3

ਪਾਠਕ ਵੇਨ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਨਾਲ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇਖਣਗੇ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਸੰਘ (Union), ਕਾਟ (intersection) ਅਤੇ ਅੰਤਰ (difference) ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

1.10 ਸਮੂਹਾਂ 'ਤੇ ਕਿਰਿਆਵਾਂ (Operations on Sets)

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ, ਘਟਾਉ, ਗੁਣਾ ਅਤੇ ਭਾਗ ਦੀਆਂ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਾਲ ਪੂਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ, ਜਿਸ ਨਾਲ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਇਕ ਹੋਰ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਈ ਸੀ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 5 ਅਤੇ 13 ਤੇ ਜੋੜ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਸੰਖਿਆ 18 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਫਿਰ ਤੋਂ, ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸੰਖਿਆ 5 ਅਤੇ 13 ਤੇ ਗੁਣਾ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਸੰਖਿਆ 65 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਕੁਝ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਜਿੰਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ ਤੇ ਕਰਨ ਤੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਸਮੂਹ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਸਮੂਹਾਂ ਤੇ ਹੋਣ ਵਾਲੀਆਂ ਕੁਝ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇਵਾਂਗੇ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਧਰਮਾਂ (Properties) ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਉਲੇਖ ਕਿਸੇ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਰਾਂਗੇ।

1.10.1 ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਸੰਘ (Union of sets) : ਮੰਨ ਲਉ A ਅਤੇ B ਦੋ ਸਮੂਹ ਹਨ। A ਅਤੇ B ਦੀ ਸੰਘ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ A ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਅਤੇ B ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਸਾਂਝੇ ਤੱਤ ਇੱਕ ਹੀ ਵਾਰ ਲਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਸੰਘ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਚਿੰਨ੍ਹ '$\cup$' ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਚਿੰਨ੍ਹ ਦੇ ਰੂਪ ਅਸੀਂ $A \cup B$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ "A ਸੰਘ B" ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਮੰਨ ਲਓ A = { 2, 4, 6, 8} ਅਤੇ B = { 6, 8, 10, 12} ਤਾਂ $A \cup B$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $A \cup B$ = { 2, 4, 6, 8, 10, 12}, $A \cup B$ ਲਿਖਣ ਲੱਗਿਆਂ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਸਾਂਝੇ ਤੱਤ (elements) 6 ਅਤੇ 8 ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਵਾਰ ਹੀ ਲਿਖੇ ਜਾਣਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਮੰਨ ਲਓ A = { *a, e, i, o, u* } ਅਤੇ B = { *a, i, u* } ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $A \cup B = A$

ਹੱਲ : ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ $A \cup B$ = { *a, e, i, o, u* } = A

ਇਸ ਉਦਾਹਰਣ ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ A ਦੀ ਉਸਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹ B ਨਾਲ ਸੰਘ, ਸਮੂਹ A ਹੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਭਾਵ ਜੇਕਰ $B \subset A$, ਤਾਂ $A \cup B = A$

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਮੰਨ ਲਓ X = {ਰਾਮ, ਗੀਤਾ, ਅਕਬਰ} ਜਮਾਤ XI ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜੋ ਸਕੂਲ ਦੀ ਹਾਕੀ ਟੀਮ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ Y = {ਗੀਤਾ, ਡੇਵਿਡ, ਅਸ਼ੋਕ} XI ਜਮਾਤ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਜੋ ਸਕੂਲ ਦੀ ਫੁੱਟਬਾਲ ਟੀਮ ਵਿੱਚ ਹਨ। $X \cup Y$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਸਮੂਹ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਵੀ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $X \cup Y$ = {ਰਾਮ, ਗੀਤਾ, ਅਕਬਰ, ਡੇਵਿਡ, ਅਸ਼ੋਕ}. ਇਹ ਜਮਾਤ XI ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਜੋ ਸਕੂਲ ਦੀ ਜਾਂ ਤਾਂ ਹਾਕੀ ਟੀਮ ਵਿੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਫੁੱਟਬਾਲ ਟੀਮ ਵਿੱਚ ਜਾਂ ਦੋਹਾਂ ਟੀਮਾਂ ਵਿੱਚ।

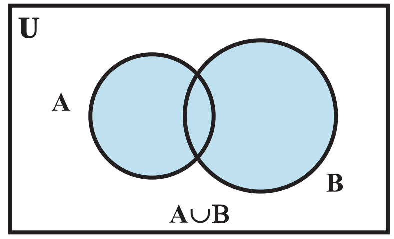
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਸੰਘ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 6 ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਸੰਘ ਦਾ ਸਮੂਹ ਇੱਕ ਸਮੂਹ C ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਉਹ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੋ ਜਾਂ ਤਾਂ A ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਾਂ B ਵਿੱਚ (ਜੋ ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚ ਹਨ, ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰਦੇ ਹੋਏ)। ਚਿੰਨ੍ਹਾਤਮਕ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਅਸੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ $A \cup B = \{x : x \in A$ ਜਾਂ $x \in B\}$ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਸੰਘ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 1.4 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਗਏ ਵੇਨ ਚਿੱਤਰ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 1.4 ਵਿੱਚ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਹਿੱਸਾ (shaded portion) $A \cup B$ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 1.4

ਸੰਘ ਦੀਆਂ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਗੁਣਧਰਮ (Some Properties of the Operation of Union)

(i) $A \cup B = B \cup A$ ਕ੍ਰਮਵਟਾਂਦਰਾ ਨਿਯਮ (Commutative law)

(ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਨਿਯਮ (Associative law)

(iii) $A \cup \phi = A$ ਤਤਸਮਕ ਤੱਤ ਦਾ ਨਿਯਮ (Law of identity element, ϕ is the identity of $\cup$)

(iv) $A \cup A = A$ ਵਰਗਸਮ ਨਿਯਮ (Idempotent law)

(v) $U \cup A = U$ U ਦਾ ਨਿਯਮ (Law of U)

1.10.2 ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਕਾਟ (Intersection of sets) ਸਮੂਹ A ਅਤੇ B ਦੀ ਕਾਟ ਉਹਨਾਂ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜੋ A ਅਤੇ B ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚ ਸਾਂਝੇ ਹਨ। ਚਿੰਨ੍ਹ $\cap$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਾਟ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਦੀ ਕਾਟ ਉਹ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ A ਅਤੇ B ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਸਾਂਝੇ ਤੱਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਚਿੰਨ੍ਹਾਤਮਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ $A \cap B = \{x : x \in A$ ਅਤੇ $x \in B\}$.

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਉਦਹਾਰਣ 12 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਨੂੰ ਲਉ ਅਤੇ $A \cap B$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

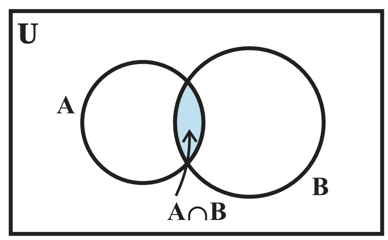
ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਸਿਰਫ਼ 6 ਅਤੇ 8 ਹੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਤੱਤ ਹਨ ਜੋ A ਅਤੇ B ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚ ਸਾਂਝੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ $A \cap B = \{6, 8\}$

ਉਦਾਹਰਣ 16 : ਉਦਾਹਰਣ 14 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹਾਂ X ਅਤੇ Y ਨੂੰ ਲਉ ਅਤੇ $X \cap Y$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤੱਤ ਗੀਤਾ ਹੀ ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚ ਸਿਰਫ਼ ਸਾਂਝਾ ਤੱਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $X \cap Y = \{$ ਗੀਤਾ$\}$.

ਉਦਾਹਰਣ 17 : ਮੰਨ ਲਓ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ਅਤੇ $B = \{2, 3, 5, 7\}$. $A \cap B$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $A \cap B = B$

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $A \cap B = \{2, 3, 5, 7\} = B$। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $B \subset A$ ਅਤੇ $A \cap B = B$.



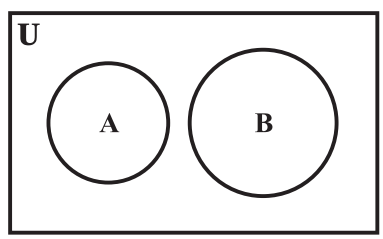
ਚਿੱਤਰ 1.5

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 7 ਸਮੂਹ A ਅਤੇ B ਦੀ ਕਾਟ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਜੋ A ਅਤੇ B ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚ ਹੋਣ। ਚਿੰਨ੍ਹਾਤਮਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ ਅਤੇ } x \in B\}$$

ਚਿੱਤਰ 1.5 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਭਾਗ, A ਅਤੇ B ਦੀ ਕਾਟ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਦੋ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਹੋਣ ਕਿ $A \cap B = \phi$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ A ਅਤੇ B ਨੂੰ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਸਮੂਹ (disjoint sets) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 1.6

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਮੰਨ ਲਉ $A = \{2, 4, 6, 8\}$ ਅਤੇ $B = \{1, 3, 5, 7\}$ ਹੈ ਤਾਂ A ਅਤੇ B ਨਾ-ਜੁੜੇ ਸਮੂਹ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ ਕੋਈ ਵੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਤੱਤ ਨਹੀਂ, ਜੋ A ਅਤੇ B ਵਿੱਚ ਸਾਂਝਾ ਹੋਵੇ। ਨਾ-ਜੁੜੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਵੇਨ ਚਿੱਤਰ ਰਾਹੀਂ ਚਿੱਤਰ 1.6 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਦਿਖਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ A ਅਤੇ B ਨਾ-ਜੁੜੇ ਸਮੂਹ ਹਨ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਕਾਟ ਦੀਆਂ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਗੁਣਧਰਮ (Some Properties of Operation of Intersection)

(i) $A \cap B = B \cap A$ ਕ੍ਰਮਵਟਾਂਦਰਾ ਨਿਯਮ (Commutative law)

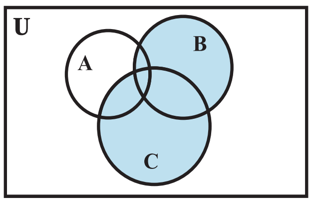
(ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਨਿਯਮ (Associative law)

(iii) $\phi \cap A = \phi$, $U \cap A = A$ ϕ ਅਤੇ U ਦਾ ਨਿਯਮ (Law of ϕ and U)

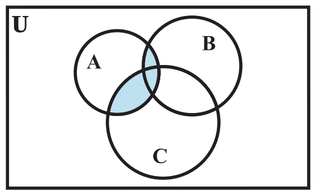
(iv) $A \cap A = A$ ਵਰਗਸਮ ਨਿਯਮ (Idempotent law)

(v) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ਵੰਡ ਦਾ ਨਿਯਮ (Distributive law) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $\cup$ ਤੇ $\cap$ ਵੰਡਿਆ ਹੈ।

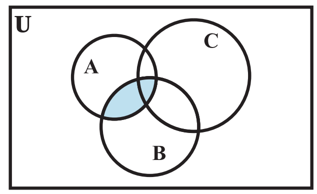
ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਵੇਨ ਚਿੱਤਰਾਂ (ਚਿੱਤਰ 1.7 (i) ਤੋਂ (v)) ਤੋਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।



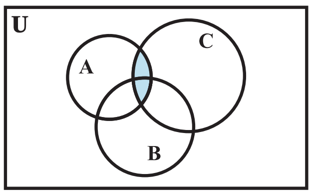
(i) **(B∪C)**



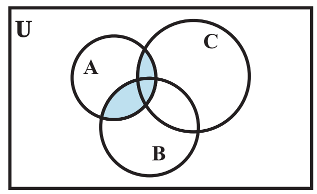
(ii) **A∩(B∪C)**



(iii) **(A∩B)**



(iv) **(A∩C)**



(v) **(A∩B)** ∪ (A∩C)

ਚਿੱਤਰ 1.7 (i) ਤੋਂ (v)

1.10.3 ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ (Difference of sets) ਸਮੂਹ A ਅਤੇ B ਦਾ ਅੰਤਰ ਉਹਨਾਂ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜੋ A ਵਿੱਚ ਤਾਂ ਹਨ ਪਰ B ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਚਿੰਨ੍ਹਾਤਮਕ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ $A - B$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ "A ਘਟਾਉ B" ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 18 : ਮੰਨ ਲਉ = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$. ਤਾਂ $A - B$ ਅਤੇ $B - A$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $A - B = \{1, 3, 5\}$ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ 1, 3, 5 ਤੱਤ A ਵਿੱਚ ਹਨ ਪਰ B ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ ਅਤੇ $B - A = \{8\}$, ਕਿਉਂਕਿ 8 ਤੱਤ B ਵਿੱਚ ਹੈ ਪਰ A ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $A - B \neq B - A$

ਉਦਾਹਰਣ 19 : ਮੰਨ ਲਉ $V = \{a, e, i, o, u\}$ ਅਤੇ $B = \{a, i, k, u\}$ ਤਾਂ $V - B$ ਅਤੇ $B - V$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

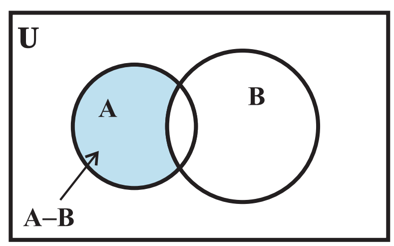
ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $V - B = \{e, o\}$ ਕਿਉਂਕਿ ਤੱਤ e, o ਸਮੂਹ V ਵਿੱਚ ਹਨ ਪਰ B ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ ਅਤੇ $B - V = \{k\}$, ਕਿਉਂਕਿ ਤੱਤ k, B ਵਿੱਚ ਹੈ ਪਰ V ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $V - B \neq B - V$ ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਰੂਪ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੁਬਾਰਾ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

$A - B = \{x : x \in A$ ਅਤੇ $x \notin B\}$

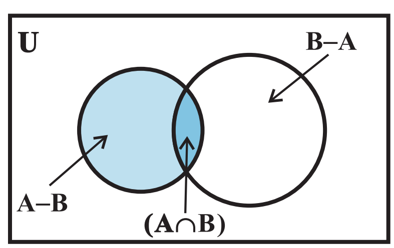
ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਅੰਤਰ ਨੂੰ ਵੇਨ ਚਿੱਤਰ 1.8 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਛਾਇਆਅੰਕਿਤ ਹਿੱਸਾ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਅੰਤਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 1.8

ਟਿੱਪਣੀ : ਸਮੂਹ $A - B$, $A \cap B$ ਅਤੇ $B - A$ ਸਾਰੇ ਸਮੂਹ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਸਮੂਹ ਹਨ। ਭਾਵ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਕਾਟ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 1.9 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 1.9

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਭਿਆਸ 1.4

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹਰ ਇੱਕ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦਾ ਸੰਘ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) X = {1, 3, 5} Y = {1, 2, 3}

(ii) A = [a, e, i, o, u} B = {a, b, c}

(iii) A = {x : x ਇੱਕ 3 ਦੀ ਗੁਣਜ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ}

B = {x : x ਇੱਕ 6 ਤੋਂ ਘੱਟ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ}

(iv) A = {x : x ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $1 < x \leq 6$ }

B = {x : x ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $6 < x < 10$ }

(v) A = {1, 2, 3}, B = ϕ

2. ਮੰਨ ਲਓ A = { a, b }, B = {a, b, c} ਕੀ $A \subset B$? $A \cup B$ ਕੀ ਹੈ ?

3. ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਦੋ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਹਨ ਕਿ $A \subset B$ ਤਾਂ $A \cup B$ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ?

4. ਜੇਕਰ A = {1, 2, 3, 4}, B = {3, 4, 5, 6}, C = {5, 6, 7, 8 } ਅਤੇ D = { 7, 8, 9, 10 } ਹੈ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $A \cup B$ (ii) $A \cup C$ (iii) $B \cup C$ (iv) $B \cup D$

(v) $A \cup B \cup C$ (vi) $A \cup B \cup D$ (vii) $B \cup C \cup D$

5. ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਦੀ ਕਾਟ ਪਤਾ ਕਰੋ :

6. ਜੇਕਰ A = { 3, 5, 7, 9, 11 }, B = {7, 9, 11, 13}, C = {11, 13, 15} ਅਤੇ D = {15, 17}; ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $A \cap B$ (ii) $B \cap C$ (iii) $A \cap C \cap D$

(iv) $A \cap C$ (v) $B \cap D$ (vi) $A \cap (B \cup C)$

(vii) $A \cap D$ (viii) $A \cap (B \cup D)$ (ix) $(A \cap B) \cap (B \cup C)$

(x) $(A \cup D) \cap (B \cup C)$

7. ਜੇਕਰ A = {x : x ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ }, B = {x : x ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ}, C = {x : x ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ} ਅਤੇ D = {x : x ਇਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ}, ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $A \cap B$ (ii) $A \cap C$ (iii) $A \cap D$

(iv) $B \cap C$ (v) $B \cap D$ (vi) $C \cap D$

8. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੇ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਸਮੂਹ ਹਨ :

(i) {1, 2, 3, 4} ਅਤੇ {x : x ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $4 \leq x \leq 6$ }

(ii) { a, e, i, o, u } ਅਤੇ { c, d, e, f }

(iii) {x : x ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ } ਅਤੇ {x : x ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ}

9. ਜੇਕਰ A = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21}, B = { 4, 8, 12, 16, 20 },

C = { 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 }, D = {5, 10, 15, 20 } ਹੈ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) A – B (ii) A – C (iii) A – D (iv) B – A

(v) C – A (vi) D – A (vii) B – C (viii) B – D

(ix) C – B (x) D – B (xi) C – D (xii) D – C

10. ਜੇਕਰ X= { a, b, c, d } ਅਤੇ Y = { f, b, d, g}, ਤਾ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) X – Y (ii) Y – X (iii) $X \cap Y$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

11. ਜੇਕਰ **R** ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇ ਅਤੇ **Q** ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇ ਤਾਂ **R** – **Q** ਪਤਾ ਕਰੋ ?

12. ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਦੱਸੋ ਕਿ ਕਿਹੜੇ ਸਹੀ ਹਨ ਅਤੇ ਕਿਹੜੇ ਗ਼ਲਤ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦਾ ਕਾਰਣ ਵੀ ਲਿਖੋ :

(i) $\{2, 3, 4, 5\}$ ਅਤੇ $\{3, 6\}$ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਸਮੂਹ ਹਨ।

(ii) $\{a, e, i, o, u\}$ ਅਤੇ $\{a, b, c, d\}$ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਸਮੂਹ ਹਨ।

(iii) $\{2, 6, 10, 14\}$ ਅਤੇ $\{3, 7, 11, 15\}$ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਸਮੂਹ ਹਨ।

(iv) $\{2, 6, 10\}$ ਅਤੇ $\{3, 7, 11\}$ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਸਮੂਹ ਹਨ।

1.11 ਸਮੂਹ ਦਾ ਪੂਰਕ (Complement of a Set)

ਮੰਨ ਲਓ U ਇਕ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ A, U ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਉਹ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜੋ 42 ਦੀਆਂ ਭਾਜਕ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ A = $\{x : x \in$ U ਅਤੇ x, 42 ਦੀ ਭਾਜਕ ਨਹੀਂ ਹੈ$\}$ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $2 \in$ U ਪਰ $2 \notin$ A, ਕਿਉਂਕਿ 2, 42 ਦਾ ਭਾਜਕ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $3 \in$ U ਪਰ $3 \notin$ A ਅਤੇ $7 \in$ U ਪਰ $7 \notin$ A। ਹੁਣ ਸਿਰਫ਼ 2, 3 ਅਤੇ 7 ਸਮੂਹ U ਦੇ ਉਹ ਤੱਤ ਹਨ ਜਿਹੜੇ A ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਤਿੰਨਾਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਭਾਵ $\{2, 3, 7\}$ ਨੂੰ U ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ A ਦਾ ਪੂਰਕ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ A′ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $A' = \{2, 3, 7\}$. ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ A′ = $\{x : x \in$ U ਅਤੇ $x \notin$ A $\}$ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ $A' = U - A$ ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ :

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 8 ਮੰਨ ਲਓ U ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ A, U ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ ਤਾਂ A ਦਾ ਪੂਰਕ ਸਮੂਹ U ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜੋ A ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਚਿੰਨਾਤਮਕ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇਸ ਨੂੰ U ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ A′ ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

A′ = $\{x : x \in$ U ਅਤੇ $x \notin$ A $\}$ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ $A' = U - A$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ A ਦੇ ਪੂਰਕ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਵਿਕਲਪ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ U ਅਤੇ ਸਮੂਹ A ਦੇ ਅੰਤਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੀ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 20 : ਮੰਨ ਲਓ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ਅਤੇ $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. A′ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ U ਦੇ 2, 4, 6, 8, 10 ਤੱਤ ਇਹੋ-ਜਿਹੇ ਹਨ, ਜੋ A ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ $A' = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

ਉਦਾਹਰਣ 21 : ਮੰਨ ਲਓ U ਇੱਕ ਸਹਿ ਸਿੱਖਿਆ (co-educational) ਸਕੂਲ ਦੀ ਜਮਾਤ XI ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਰਹੇ ਸਾਰੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ A ਜਮਾਤ XI ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਰਹੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਲੜਕੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। A′ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ A ਸਾਰੀਆਂ ਲੜਕੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ A′ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਰਹੇ ਸਾਰੇ ਲੜਕਿਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਜੇਕਰ A ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ U ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ ਤਾਂ A′ ਵੀ U ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਫਿਰ ਤੋਂ ਉਪਰੋਕਤ ਦਿੱਤੀ ਉਦਾਹਰਣ 20 ਤੋਂ $A' = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

ਇਸ ਲਈ (A′)′ = $\{x : x \in$ U ਅਤੇ $x \notin A'\} = \{1, 3, 5, 7, 9\} = A$

ਪੂਰਕ ਸਮੂਹ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ U ਦੇ ਕਿਸੇ ਉਪ ਸਮੂਹ ਲਈ $(A')' = A$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਅਗਲੀ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ $(A \cup B)'$ ਅਤੇ $A' \cap B'$ ਦਾ ਨਤੀਜਾ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 22 : ਮੰਨ ਲਉ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 3\}$ ਅਤੇ $B = \{3, 4, 5\}$ ਹੈ ਤਾਂ A′, B′, $A' \cap B'$, $A \cup B$ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

ਹੱਲ : ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ $A' = \{1, 4, 5, 6\}$, $B' = \{1, 2, 6\}$ ਇਸ ਲਈ $A' \cap B' = \{1, 6\}$ ਫਿਰ ਤੋਂ $A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$, ਇਸ ਲਈ $(A \cup B)' = \{1, 6\}$ ਤਾਂ

$$(A \cup B)' = \{1, 6\} = A' \cap B'$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

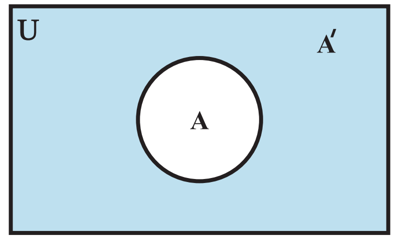
ਇਹ ਦਿਖਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਪਰਿਣਾਮ ਵਿਆਪਕ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵੀ ਠੀਕ ਹੈ। ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B, U ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੋਣ ਤਾਂ

$(A \cup B)' = A' \cap B'$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(A \cap B)' = A' \cup B'$। ਇਹਨਾਂ ਦੋ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਨੂੰ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ:

ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਸੰਘ ਦਾ ਪੂਰਕ, ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਪੂਰਕ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਕਾਟ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਕਾਟ ਦਾ ਪੂਰਕ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਪੂਰਕ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਸੰਘ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਡੀ. ਮਾਰਗਨਜ਼ ਨਿਯਮ (De Morgan's Laws) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਨਾਮ ਗਣਿਤਕਾਰ De Morgan ਦੇ ਨਾਮ ਤੇ ਰੱਖਿਆ ਗਿਆ।

ਸਮੂਹ A ਦੇ ਪੂਰਕ A′ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 1.10 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਵੇਨ ਚਿੱਤਰ ਰਾਹੀਂ ਦਿਖਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਭਾਗ ਸਮੂਹ A ਦੇ ਪੂਰਕ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 1.10

ਪੂਰਕ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਗੁਣਧਰਮ (Some Properties of Complement Sets)

1. ਪੂਰਕ ਨਿਯਮ, (i) $A \cup A' = U$ (ii) $A \cap A' = \phi$

2. ਡੀ ਮਾਰਗਨਜ਼ ਨਿਯਮ, (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

3. ਦੋਹਰਾ ਪੂਰਕ ਨਿਯਮ, $(A')' = A$

4. ਖ਼ਾਲੀ ਸਮੂਹ ਅਤੇ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਨਿਯਮ $\phi' = U$ ਅਤੇ $U' = \phi$

ਇਹਨਾਂ ਨਿਯਮਾਂ ਨੂੰ ਵੇਨ ਚਿੱਤਰਾਂ ਰਾਹੀਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 1.5

1. ਮੰਨ ਲਓ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ਅਤੇ $C = \{3, 4, 5, 6\}$ ਹੈ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ (i) A' (ii) B' (iii) $(A \cup C)'$ (iv) $(A \cup B)'$ (v) $(A')'$ (vi) $(B - C)'$

2. ਮੰਨ ਲਉ $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, ਤਾਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਪੂਰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $A = \{a, b, c\}$ (ii) $B = \{d, e, f, g\}$

(iii) $C = \{a, c, e, g\}$ (iv) $D = \{f, g, h, a\}$

3. ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਪੂਰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\{x : x$ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ$\}$

(ii) $\{x : x$ ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ $\}$

(iii) $\{x : x$,3 ਦਾ ਧਨਾਤਮਕ ਗੁਣਾਂਕ ਹੈ$\}$

(iv) $\{x : x$ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ $\}$

(v) $\{x : x$ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜੋ 3 ਅਤੇ 5 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੁੰਦੀ ਹੈ$\}$

(vi) $\{x : x$ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਹੈ $\}$ (vii) $\{x : x$ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੈ$\}$

(viii) $\{x : x + 5 = 8\}$ (ix) $\{x : 2x + 5 = 9\}$

(x) $\{x : x \geq 7\}$ (xi) $\{x : x \in N$ ਅਤੇ $2x + 1 > 10\}$

4. ਜੇਕਰ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$ ਅਤੇ $B = \{2, 3, 5, 7\}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ।

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

5. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਲਈ ਉਚਿਤ ਵੇਨ ਚਿੱਤਰ ਬਣਾਉ :

(i) $(A \cup B)'$, (ii) $A' \cap B'$, (iii) $(A \cap B)'$, (iv) $A' \cup B'$

6. ਮੰਨ ਲਓ U, ਸਮਤਲ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਜੇਕਰ A ਉਹਨਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਜਿੰਨ੍ਹਾ ਦਾ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਕੋਣ 60° ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ A′ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ?

7. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਸਹੀ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਖ਼ਾਲੀ ਸਥਾਨ ਭਰੋ :

(i) $A \cup A' = \ldots$ (ii) $\phi' \cap A = \ldots$

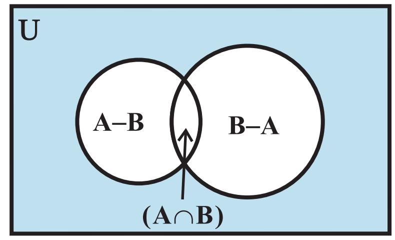
(iii) $A \cap A' = \ldots$ (iv) $U' \cap A = \ldots$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

1.12 ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਸੰਘ ਅਤੇ ਕਾਟ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਵਿਵਹਾਰਕ (ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ) ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Practical Problems on Union and Intersection of Two Sets)

ਪਹਿਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਸੰਘ, ਕਾਟ ਅਤੇ ਅੰਤਰ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹ ਚੁਕੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਦੇ ਜੀਵਨ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕੁੱਝ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੱਲ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੂਤਰਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਪਾਠ, ਸੰਭਾਵਨਾ (ਪਾਠ 16) ਵਿੱਚ ਵਰਤਾਂਗੇ।



ਚਿੱਤਰ 1.11

ਮੰਨ ਲਓ A ਅਤੇ B ਕੋਈ ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਹਨ। ਜੇਕਰ $A \cap B = \phi$, ਤਾਂ

(i) $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ ... (1)

$A \cup B$ ਦੇ ਤੱਤ ਜਾਂ A ਵਿੱਚ ਹੋਣਗੇ ਜਾਂ B ਵਿੱਚ ਪਰ ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੋਣਗੇ ਕਿਉਂਕਿ $A \cap B = \phi$। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ (1) ਨਤੀਜਾ ਤੁਰੰਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਦੋ ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਹਨ ਤਾਂ

(ii) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ... (2)

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਸਮੂਹ $A - B$, $A \cap B$ ਅਤੇ $B - A$ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਸਮੂਹ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਸੰਘ $A \cup B$ (ਚਿੱਤਰ 1.11) ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸ ਲਈ

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$$
$$= n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) + n(A \cap B) - n(A \cap B)$$
$$= n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$, ਜੋ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਜੇ A, B ਅਤੇ C ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਹਨ ਤਾਂ

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) \quad \text{... (3)}$$

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B \cup C) - n[A \cap (B \cup C)] \quad [(2) \text{ ਤੋਂ}]$$
$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n[A \cap (B \cup C)] \quad [(2) \text{ ਤੋਂ}]$$

ਕਿਉਂਕਿ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, ਇਸ ਤੋਂ

$$n[A \cap (B \cup C)] = n(A \cap B) + n(A \cap C) - n[(A \cap B) \cap (A \cap C)]$$
$$= n(A \cap B) + n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

ਇਸ ਤੋਂ (3) ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 23 : ਜੇਕਰ X ਅਤੇ Y ਦੋ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਹੋਣ ਕਿ $X \cup Y$ ਵਿੱਚ 50 ਤੱਤ, X ਵਿੱਚ 28 ਤੱਤ ਅਤੇ Y ਵਿੱਚ 32 ਤੱਤ ਹੋਣ ਤਾਂ $X \cap Y$ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਤੱਤ ਹੋਣਗੇ ?

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ :

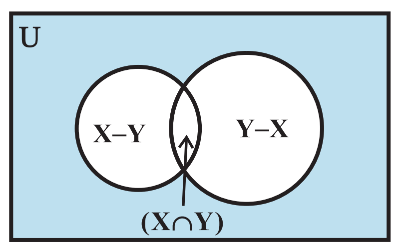
$n(X \cup Y) = 50$, $n(X) = 28$, $n(Y) = 32$, $n(X \cap Y) = ?$

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ :

$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$,

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$n(X \cap Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cup Y)$$
$$= 28 + 32 - 50 = 10$$



ਚਿੱਤਰ 1.12

ਦੂਸਰਾ ਤਰੀਕਾ : ਮੰਨ ਲਉ $n(X \cap Y) = k$, ਤਾਂ

$n(X - Y) = 28 - k$, $n(Y - X) = 32 - k$ (ਵੇਨ ਚਿੱਤਰ 1.12 ਤੋਂ)

ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $50 = n(X \cup Y) = n(X - Y) + n(X \cap Y) + n(Y - X)$

$= (28 - k) + k + (32 - k)$

ਇਸ ਲਈ, $k = 10$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 24 : ਇੱਕ ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ 20 ਅਧਿਆਪਕ ਹਨ ਜੋ ਗਣਿਤ ਜਾਂ ਭੌਤਿਕ ਵਿਗਿਆਨ ਪੜ੍ਹਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 12 ਗਣਿਤ ਪੜ੍ਹਾਉਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ 4 ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਭੌਤਿਕ ਵਿਗਿਆਨ ਦੋਵੇਂ ਪੜ੍ਹਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਕਿੰਨੇ ਭੌਤਿਕ ਵਿਗਿਆਨ ਪੜ੍ਹਾਉਂਦੇ ਹਨ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਗਣਿਤ ਪੜ੍ਹਾਉਣ ਵਾਲੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ M ਨਾਲ ਅਤੇ ਭੌਤਿਕ ਵਿਗਿਆਨ ਪੜ੍ਹਾਉਣ ਵਾਲੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ P ਨਾਲ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਵਿੱਚ ਸ਼ਬਦ 'ਜਾਂ' ਸਾਨੂੰ ਸੰਘ ਅਤੇ ਸ਼ਬਦ ਅਤੇ ਸਾਨੂੰ ਕਾਟ ਬਾਰੇ ਸੰਕੇਤ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$n(\mathrm{M} \cup \mathrm{P}) = 20,\ n(\mathrm{M}) = 12 \text{ ਅਤੇ } n(\mathrm{M} \cap \mathrm{P}) = 4$$

ਅਸੀਂ $n(\mathrm{P})$ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ!

ਨਤੀਜੇ

$$n(\mathrm{M} \cup \mathrm{P}) = n(\mathrm{M}) + n(\mathrm{P}) - n(\mathrm{M} \cap \mathrm{P})$$

ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$20 = 12 + n(\mathrm{P}) - 4$$

ਇਸ ਲਈ $n(\mathrm{P}) = 12$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਭੌਤਿਕ ਵਿਗਿਆਨ ਪੜ੍ਹਾਉਣ ਵਾਲੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 12 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 25 : 35 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ, 24 ਕ੍ਰਿਕਟ ਖੇਡਣਾ ਅਤੇ 16 ਫੁੱਟਬਾਲ ਖੇਡਣਾ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਹਰ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਖੇਡ ਖੇਡਣਾ ਜ਼ਰੂਰ ਪਸੰਦ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਦੱਸੋ ਕਿ ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਕ੍ਰਿਕਟ ਅਤੇ ਫੁੱਟਬਾਲ ਦੋਵੇਂ ਖੇਡਾਂ ਖੇਡਣੀਆਂ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ X ਉਹਨਾਂ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜੋ ਕ੍ਰਿਕਟ ਖੇਡਣਾ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ Y ਉਹਨਾਂ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜੋ ਫੁੱਟਬਾਲ ਖੇਡਣਾ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ। $\mathrm{X} \cup \mathrm{Y}$ ਉਹ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇਗਾ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਖੇਡ ਖੇਡਣੀ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ $\mathrm{X} \cap \mathrm{Y}$ ਉਹ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੋਵੇਂ ਖੇਡਾਂ ਖੇਡਣੀਆਂ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਦਿੱਤਾ ਹੈ $n(\mathrm{X}) = 24,\ n(\mathrm{Y}) = 16,\ n(\mathrm{X} \cup \mathrm{Y}) = 35,\ n(\mathrm{X} \cap \mathrm{Y}) = ?$

ਨਿਯਮ $n(\mathrm{X} \cup \mathrm{Y}) = n(\mathrm{X}) + n(\mathrm{Y}) - n(\mathrm{X} \cap \mathrm{Y})$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ

ਸਾਨੂੰ $35 = 24 + 16 - n(\mathrm{X} \cap \mathrm{Y})$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ $n(\mathrm{X} \cap \mathrm{Y}) = 5$

ਭਾਵ 5 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੋਵੇਂ ਖੇਡਾਂ ਖੇਡਣੀਆਂ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 26 : ਇਕ ਸਕੂਲ ਦੇ 400 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਸਰਵੇਖਣ ਕਰਨ ਤੇ 100 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਸੇਬ ਦਾ ਰਸ, 150 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਸੰਤਰੇ ਦਾ ਰਸ ਅਤੇ 75 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੋਵੇਂ ਰਸ ਪੀਣ ਵਾਲੇ ਮਿਲਦੇ ਹਨ। ਦੱਸੋ ਕਿ ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਹਨ ਜੋ ਨਾ ਤਾਂ ਸੇਬ ਦਾ ਰਸ ਪੀਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸੰਤਰੇ ਦਾ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ U ਉਹਨਾਂ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਸਰਵੇਖਣ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ A ਸੇਬ ਦਾ ਰਸ ਪੀਣ ਵਾਲੇ B ਸੰਤਰੇ ਦਾ ਰਸ ਪੀਣ ਵਾਲੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ

$$n(\mathrm{U}) = 400,\ n(\mathrm{A}) = 100,\ n(\mathrm{B}) = 150 \text{ ਅਤੇ } n(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 75$$

ਹੁਣ
$$\begin{aligned} n(\mathrm{A}' \cap \mathrm{B}') &= n(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})' \\ &= n(\mathrm{U}) - n(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \\ &= n(\mathrm{U}) - n(\mathrm{A}) - n(\mathrm{B}) + n(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \\ &= 400 - 100 - 150 + 75 = 225 \end{aligned}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 225 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਹਨ ਜੋ ਨਾ ਸੇਬ ਦਾ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸੰਤਰੇ ਦਾ ਰਸ ਪੀਂਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 27 : 200 ਵਿਅਕਤੀ ਕਿਸੇ ਚਮੜੀ ਦੇ ਰੋਗ ਤੋਂ ਪੀੜਤ ਹਨ, ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 120 ਵਿਅਕਤੀ ਰਸਾਇਣ C_1, 50 ਵਿਅਕਤੀ ਰਸਾਇਣ C_2, ਅਤੇ 30 ਵਿਅਕਤੀ ਰਸਾਇਣਾਂ C_1 ਅਤੇ C_2 ਦੋਵਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਹੋਏ ਹਨ, ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਹੋਏ ਹਨ :

(i) ਰਸਾਇਣ C_1 ਪਰ, ਰਸਾਇਣ C_2 ਨਹੀਂ (ii) ਰਸਾਇਣ C_2 ਪਰ, ਰਸਾਇਣ C_1 ਨਹੀਂ

(iii) ਰਸਾਇਣ C_1 ਜਾਂ ਰਸਾਇਣ C_2

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ U ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਉਹਨਾਂ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜੋ ਚਮੜੀ ਰੋਗ ਤੋਂ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਹਨ, A ਰਸਾਇਣ C_1 ਤੋਂ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਲੋਕਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਅਤੇ B ਰਸਾਇਣ C_2 ਤੋਂ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਲੋਕਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਤਾਂ $n(\text{U}) = 200$, $n(\text{A}) = 120$, $n(\text{B}) = 50$ ਅਤੇ $n(\text{A} \cap \text{B}) = 30$

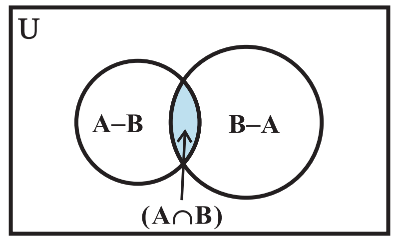
(i) ਚਿੱਤਰ 1.13 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਵੇਨ ਚਿੱਤਰ ਅਨੁਸਾਰ

$$\text{A} = (\text{A} - \text{B}) \cup (\text{A} \cap \text{B}).$$

$$n(\text{A}) = n(\text{A} - \text{B}) + n(\text{A} \cap \text{B})$$ (ਕਿਉਂਕਿ $(\text{A} - \text{B})$ ਅਤੇ $\text{A} \cap \text{B}$ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਹਨ)

ਜਾਂ $n(\text{A} - \text{B}) = n(\text{A}) - n(\text{A} \cap \text{B}) = 120 - 30 = 90$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਉਹਨਾਂ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਜੋ ਰਸਾਇਣ C_1 ਤੋਂ ਤਾਂ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਹਨ, ਪਰ C_2 ਤੋਂ ਨਹੀਂ, 90 ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 1.13

(ii) ਚਿੱਤਰ 1.13 ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ

$\text{B} = (\text{B} - \text{A}) \cup (\text{A} \cap \text{B})$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

ਅਤੇ $n(\text{B}) = n(\text{B} - \text{A}) + n(\text{A} \cap \text{B})$

(ਕਿਉਂਕਿ $\text{B} - \text{A}$ ਅਤੇ $\text{A} \cap \text{B}$ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਹਨ

ਜਾਂ $n(\text{B} - \text{A}) = n(\text{B}) - n(\text{A} \cap \text{B})$

$= 50 - 30 = 20$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਉਹਨਾਂ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਜੋ ਰਸਾਇਣ C_2 ਤੋਂ ਤਾਂ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਹਨ ਪਰ C_1 ਤੋਂ ਨਹੀਂ 20 ਹੈ।

(iii) ਰਸਾਇਣ C_1 ਜਾਂ ਰਸਾਇਣ C_2 ਤੋਂ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ,

ਭਾਵ $n(\text{A} \cup \text{B}) = n(\text{A}) + n(\text{B}) - n(\text{A} \cap \text{B})$

$= 120 + 50 - 30 = 140$

ਅਭਿਆਸ 1.6

1. ਮੰਨ ਲਉ X ਅਤੇ Y ਦੋ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਹਨ ਕਿ $n(\text{X}) = 17$, $n(\text{Y}) = 23$ ਅਤੇ $n(\text{X} \cup \text{Y}) = 38$ ਹੈ, $n(\text{X} \cap \text{Y})$ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਜੇਕਰ X ਅਤੇ Y ਦੋ ਸਮੂਹ ਹਨ ਅਤੇ $\text{X} \cup \text{Y}$ ਵਿੱਚ 18 ਤੱਤ ਹਨ, X ਵਿੱਚ 8 ਤੱਤ ਅਤੇ Y ਵਿੱਚ 15 ਤੱਤ ਹਨ। $\text{X} \cap \text{Y}$ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਤੱਤ ਹੋਣਗੇ ?
3. 400 ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਇਕੱਠ ਵਿੱਚ, 250 ਵਿਅਕਤੀ ਹਿੰਦੀ ਬੋਲ ਸਕਦੇ ਹਨ ਅਤੇ 200 ਵਿਅਕਤੀ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਬੋਲ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਕਿੰਨੇ ਵਿਅਕਤੀ ਹਿੰਦੀ ਅਤੇ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਦੋਵੇਂ ਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਬੋਲ ਸਕਦੇ ਹਨ ?
4. ਜੇਕਰ S ਅਤੇ T ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਹੋਣ ਕਿ S ਵਿੱਚ 21 ਤੱਤ, T ਵਿੱਚ 32 ਤੱਤ ਅਤੇ $\text{S} \cap \text{T}$ ਵਿੱਚ 11 ਤੱਤ ਹਨ। $\text{S} \cup \text{T}$ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਤੱਤ ਹੋਣਗੇ ?
5. ਜੇਕਰ X ਅਤੇ Y ਦੋ ਸਮੂਹ ਹੋਣ ਅਤੇ X ਵਿੱਚ 40 ਤੱਤ, $\text{X} \cup \text{Y}$ ਵਿੱਚ 60 ਤੱਤ ਅਤੇ $\text{X} \cap \text{Y}$ ਵਿੱਚ 10 ਤੱਤ ਹੋਣ ਤਾਂ Y ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਤੱਤ ਹੋਣਗੇ ?
6. 70 ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਇਕੱਠ ਵਿੱਚ, 37 ਵਿਅਕਤੀ ਕੌਫ਼ੀ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ 52 ਵਿਅਕਤੀ ਚਾਹ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਹਰ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਘੱਟੋਂ-ਘੱਟ ਇਹਨਾਂ ਦੋਵਾਂ ਪੀਣ ਵਾਲੇ ਪਦਾਰਥਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਨੂੰ ਜ਼ਰੂਰ ਪਸੰਦ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਕਿੰਨੇ ਵਿਅਕਤੀ ਹਨ ਜੋ ਕੌਫ਼ੀ ਅਤੇ ਚਾਹ ਦੋਨਾਂ ਨੂੰ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ ?
7. 65 ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਇਕੱਠ ਵਿੱਚ, 40 ਕ੍ਰਿਕਟ ਖੇਡਣਾ, 10 ਕ੍ਰਿਕਟ ਅਤੇ ਟੈਨਿਸ ਦੋਵੇਂ ਖੇਡਣਾ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਕਿੰਨੇ ਵਿਅਕਤੀ ਸਿਰਫ਼ ਟੈਨਿਸ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਕ੍ਰਿਕਟ ਨਹੀਂ। ਕਿੰਨੇ ਵਿਅਕਤੀ ਟੈਨਿਸ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ ?
8. ਇੱਕ ਕਮੇਟੀ ਵਿੱਚ 50 ਵਿਅਕਤੀ ਫਰੈਂਚ ਬੋਲਦੇ ਹਨ, 20 ਵਿਅਕਤੀ ਸਪੈਨਿਸ਼ ਬੋਲਦੇ ਹਨ ਅਤੇ 10 ਵਿਅਕਤੀ ਸਪੈਨਿਸ਼ ਅਤੇ ਫਰੈਂਚ ਦੋਵੇਂ ਬੋਲਦੇ ਹਨ। ਕਿੰਨੇ ਵਿਅਕਤੀ ਇਹਨਾਂ ਦੋਹਾਂ ਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋਂ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਭਾਸ਼ਾ ਬੋਲ ਸਕਦੇ ਹਨ ?

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 28 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਸ਼ਬਦ " CATARACT " ਲਿਖਣ ਵਾਲੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਅਤੇ ਸ਼ਬਦ "TRACT" ਲਿਖਣ ਵਾਲੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਇੱਕ ਹੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ X ਸ਼ਬਦ "CATARACT" ਲਿਖਣ ਵਾਲੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਤਾਂ

$$X = \{ C, A, T, R \}$$

ਮੰਨ ਲਓ Y ਸ਼ਬਦ " TRACT" ਲਿਖਣ ਵਾਲੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਤਾਂ

$$Y = \{ T, R, A, C, T \} = \{ T, R, A, C \}$$

ਕਿਉਂਕਿ X ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਤੱਤ Y ਵਿੱਚ ਹੈ ਅਤੇ Y ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਤੱਤ X ਵਿੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ $X = Y$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 29 : ਸਮੂਹ $\{ -1, 0, 1 \}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਉਪ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਬਣਾਉ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $A = \{ -1, 0, 1 \}$, A ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਤੱਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ, ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ ϕ ਹੈ। A ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤੱਤ ਹੈ $\{ -1 \}, \{ 0 \}, \{ 1 \}$ ਹਨ। A ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਦੋ ਤੱਤ ਹਨ $\{-1, 0\}, \{0,1\}, \{-1, 1\}$ ਹਨ। A ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਤੱਤ ਹਨ, ਖੁਦ A ਹੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ A ਦੇ ਸਾਰੇ ਉਪ ਸਮੂਹ ϕ $\{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{-1, 0\}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}$ ਅਤੇ $\{-1, 0, 1\}$ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 30 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $A \cup B = A \cap B$ ਤੋਂ ਭਾਵ $A = B$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $a \in A$ ਤਾਂ $a \in A \cup B$। ਕਿਉਂਕਿ $A \cup B = A \cap B$ ਇਸ ਲਈ $a \in A \cap B$ ਭਾਵ $a \in B$ ਇਸ ਲਈ $A \subset B$. ਇਸੇ ਹੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ $b \in B$ ਤਾਂ $b \in A \cup B$। ਕਿਉਂਕਿ

$A \cup B = A \cap B$, ਇਸ ਲਈ $b \in A \cap B$ ਇਸ ਲਈ $b \in A$. ਇਸ ਲਈ $B \subset A$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $A = B$

ਉਦਾਹਰਣ 31 : ਕਿਸੇ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਲਈ, ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$$

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $X \in P(A \cap B)$ ਤਾਂ $X \subset A \cap B$, ਇਸ ਲਈ $X \subset A$ ਅਤੇ $X \subset B$

$\therefore$ $X \in P(A)$ ਅਤੇ $X \in P(B)$

ਜਿਸਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ $X \in P(A) \cap P(B)$ ਇਸ ਤੋਂ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ $P(A \cap B) \subset P(A) \cap P(B)$

ਮੰਨ ਲਓ $Y \in P(A) \cap P(B)$ ਇਸ ਤੋਂ $Y \in P(A)$ ਅਤੇ $Y \in P(B)$

ਇਸ ਲਈ $Y \subset A$ ਅਤੇ $Y \subset B$ ਇਸ ਲਈ $Y \subset A \cap B$, ਇਸ ਤੋਂ ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $Y \in P(A \cap B)$

ਇਸ ਤੋਂ $P(A) \cap P(B) \subset P(A \cap B)$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

ਉਦਾਹਰਣ 32 : ਇੱਕ ਬਜ਼ਾਰ ਵਿੱਚ ਖੋਜ਼ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਸਮੂਹ ਨੇ 1000 ਗ੍ਰਾਹਕਾਂ ਦਾ ਸਰਵੇਖਣ ਕੀਤਾ ਅਤੇ ਦੱਸਿਆ ਕਿ 720 ਗ੍ਰਾਹਕ ਉਤਪਾਦ A ਨੂੰ ਅਤੇ 450 ਗ੍ਰਾਹਕ ਉਤਪਾਦ B ਨੂੰ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਦੋਹਾਂ ਉਤਪਾਦਾਂ ਨੂੰ ਪਸੰਦ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਗ੍ਰਾਹਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ U ਉਹਨਾਂ ਗ੍ਰਾਹਕਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਪੁੱਛੇ ਗਏ। S ਉਹਨਾਂ ਗ੍ਰਾਹਕਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜੋ ਉਤਪਾਦ A ਨੂੰ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ T ਉਹਨਾਂ ਗ੍ਰਾਹਕਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜੋ ਉਤਪਾਦ B ਨੂੰ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਦਿੱਤਾ ਹੈ $n(U) = 1000, n(S) = 720, n(T) = 450$

ਹੁਣ
$$n(S \cup T) = n(S) + n(T) - n(S \cap T)$$
$$= 720 + 450 - n(S \cap T) = 1170 - n(S \cap T)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $n(S \cup T)$ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੋਵੇਗਾ ਜਦੋਂ $n(S \cap T)$ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਵੇਗਾ, ਪਰ $S \cup T \subset U$ ਇਸ ਲਈ $n(S \cup T) \le n(U) = 1000$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $n(S \cup T)$ ਦਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮੁਲ 1000 ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ $n(S \cap T)$ ਦਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮੁੱਲ 170 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦੋਵਾਂ ਉਤਪਾਦਾਂ ਨੂੰ ਪਸੰਦ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਗ੍ਰਾਹਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 170 ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 33 : 500 ਕਾਰ ਮਾਲਕਾਂ ਤੋਂ ਪੁੱਛਣ ਤੇ ਇਹ ਪਤਾ ਲੱਗਿਆ ਕਿ, 400 ਕੋਲ A ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਕਾਰ ਹੈ, 200 ਕੋਲ B ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਅਤੇ 50 ਕੋਲ A ਅਤੇ B ਦੋਹਾਂ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਕਾਰ ਹੈ। ਕੀ ਇਹ ਅੰਕੜੇ ਸਹੀਂ ਹਨ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ, ਕਿ ਪੁਛਗਿੱਛ ਕੀਤੇ ਗਏ ਕਾਰ ਮਾਲਕਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ U ਹੈ, M ਉਹਨਾਂ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜੋ ਕਾਰ A ਦੇ ਮਾਲਕ ਹਨ ਅਤੇ S ਉਹਨਾਂ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜੋ ਕਾਰ B ਦੇ ਮਾਲਕ ਹਨ।

ਦਿੱਤਾ ਹੈ $n(\mathrm{U}) = 500$, $n(\mathrm{M}) = 400$, $n(\mathrm{S}) = 200$ ਅਤੇ $n(\mathrm{S} \cap \mathrm{M}) = 50$.

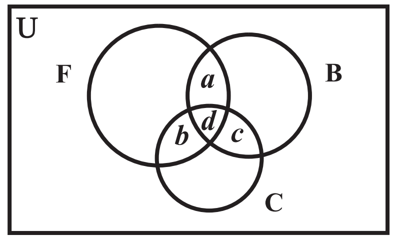
ਹੁਣ $n(\mathrm{S} \cup \mathrm{M}) = n(\mathrm{S}) + n(\mathrm{M}) - n(\mathrm{S} \cap \mathrm{M}) = 200 + 400 - 50 = 550$

ਪਰ $\mathrm{S} \cup \mathrm{M} \subset \mathrm{U}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਤੋਂ $n(\mathrm{S} \cup \mathrm{M}) \subset n \subset \mathrm{U})$.

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜੇ ਸਹੀ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 34 : ਇੱਕ ਕਾਲਜ ਵਿੱਚ ਫੁੱਟਬਾਲ ਲਈ 38, ਬਾਸਕਟ ਬਾਲ ਲਈ 15 ਅਤੇ ਕ੍ਰਿਕਟ ਦੇ ਲਈ 20 ਤਮਗੇ ਵੰਡੇ ਗਏ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਤਮਗੇ ਕੁੱਲ 58 ਲੋਕਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਨ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਤਿੰਨ ਲੋਕਾਂ ਨੂੰ ਤਿੰਨਾਂ ਖੇਡਾਂ ਲਈ ਮਿਲਨ ਤਾਂ ਕਿੰਨੇ ਲੋਕਾਂ ਨੂੰ ਤਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਿਰਫ਼ ਦੋ ਖੇਡਾਂ ਲਈ ਮਿਲੇ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ F, B ਅਤੇ C ਸਮੂਹ ਉਹਨਾਂ ਆਦਮੀਆਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ ਜਿੰਨ੍ਹਾਂ ਨੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਫੁੱਟਬਾਲ, ਬਾਸਕਟ ਬਾਲ ਅਤੇ ਕ੍ਰਿਕਟ ਵਿੱਚ ਤਮਗੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 1.14

ਤਾਂ $n(\mathrm{F}) = 38$, $n(\mathrm{B}) = 15$, $n(\mathrm{C}) = 20$

$n(\mathrm{F} \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = 58$ ਅਤੇ $n(\mathrm{F} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = 3$

ਹੁਣ $n(\mathrm{F} \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = n(\mathrm{F}) + n(\mathrm{B}) + n(\mathrm{C}) - n(\mathrm{F} \cap \mathrm{B}) - n(\mathrm{F} \cap \mathrm{C}) - n(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) + n(\mathrm{F} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C})$

ਇਸ ਤੋਂ $n(\mathrm{F} \cap \mathrm{B}) + n(\mathrm{F} \cap \mathrm{C}) + n(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = 18$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 1.14 ਵਿੱਚ ਵਿਖਾਈ ਵੇਨ ਚਿੱਤਰ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

ਇੱਥੇ a ਉਹਨਾਂ ਲੋਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਫੁੱਟਬਾਲ ਅਤੇ ਬਾਸਕਟਬਾਲ ਲਈ ਤਮਗੇ ਮਿਲੇ, b ਉਹਨਾਂ ਲੋਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਫੁੱਟਬਾਲ ਅਤੇ ਕ੍ਰਿਕਟ ਵਿੱਚ ਤਮਗੇ ਮਿਲੇ, c ਉਹਨਾਂ ਲੋਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਬਾਸਕਟ ਬਾਲ ਅਤੇ ਕ੍ਰਿਕਟ ਵਿੱਚ ਤਮਗੇ ਮਿਲੇ ਅਤੇ d ਉਹਨਾਂ ਲੋਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰੇ ਤਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚ ਤਮਗੇ ਮਿਲੇ।

ਇਸ ਲਈ $d = n(\mathrm{F} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = 3$ ਅਤੇ $a + b + d + d + c + d = 18$

ਇਸ ਲਈ $a + b + c = 9$,

ਜੋ ਉਹਨਾਂ ਲੋਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਖੇਡਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਹੀ ਦੋ ਖੇਡਾਂ ਵਿੱਚ ਤਮਗੇ ਮਿਲੇ।

ਪਾਠ 1 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚ ਕੌਣ ਕਿਸਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਨਿਰਣਾ ਕਰੋ :
$\mathrm{A} = \{ x : x \in \mathbf{R}$ ਅਤੇ x, $x^2 - 8x + 12 = 0$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ$\}$,
$\mathrm{B} = \{ 2, 4, 6 \}$, $\mathrm{C} = \{ 2, 4, 6, 8, \ldots \}$, $\mathrm{D} = \{ 6 \}$.

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹਰ ਇਕ ਲਈ ਦੱਸੋ ਕਿ ਕਿਹੜਾ ਕਥਨ ਠੀਕ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਹੜਾ ਗ਼ਲਤ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਠੀਕ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਇਹ ਗ਼ਲਤ ਹੈ ਤਾਂ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿਉ।
(i) ਜੇਕਰ $x \in \mathrm{A}$ ਅਤੇ $\mathrm{A} \in \mathrm{B}$, ਤਾਂ $x \in \mathrm{B}$
(ii) ਜੇਕਰ $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ ਅਤੇ $\mathrm{B} \in \mathrm{C}$, ਤਾਂ $\mathrm{A} \in \mathrm{C}$
(iii) ਜੇਕਰ $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ ਅਤੇ $\mathrm{B} \subset \mathrm{C}$, ਤਾਂ $\mathrm{A} \subset \mathrm{C}$
(iv) ਜੇਕਰ $\mathrm{A} \not\subset \mathrm{B}$ ਅਤੇ $\mathrm{B} \not\subset \mathrm{C}$, ਤਾਂ $\mathrm{A} \not\subset \mathrm{C}$
(v) ਜੇਕਰ $x \in \mathrm{A}$ ਅਤੇ $\mathrm{A} \not\subset \mathrm{B}$, ਤਾਂ $x \in \mathrm{B}$
(vi) ਜੇਕਰ$\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ ਅਤੇ $x \notin \mathrm{B}$, ਤਾਂ $x \notin \mathrm{A}$

3. ਮੰਨ ਲਓ A, B, ਅਤੇ C ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਹਨ ਕਿ $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{C}$ ਅਤੇ $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{C}$ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ $\mathrm{B} = \mathrm{C}$

4. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਚਾਰ ਸ਼ਰਤਾਂ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਤੁਲ (Equivalent) ਹਨ :
(i) $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ (ii) $\mathrm{A} - \mathrm{B} = \phi$ (iii) $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{B}$ (iv) $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A}$

5. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$, ਤਾਂ $\mathrm{C} - \mathrm{B} \subset \mathrm{C} - \mathrm{A}$

6. ਮੰਨ ਲਓ $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{B})$ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ $\mathrm{A} = \mathrm{B}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

7. ਕੀ ਕਿਸੇ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B, ਲਈ $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$ ਠੀਕ ਹੈ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦਾ ਕਾਰਣ ਦੱਸੋ।

8. ਕਿਸੇ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਲਈ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$A = (A \cap B) \cup (A - B)$ ਅਤੇ $A \cup (B - A) = (A \cup B)$

9. ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਸਿੱਧ ਕਰੋ

(i) $A \cup (A \cap B) = A$ (ii) $A \cap (A \cup B) = A$

10. ਇਹ ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਜੇਕਰ $A \cap B = A \cap C$ ਤਾਂ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ $B = C$

11. ਮੰਨ ਲਓ A ਅਤੇ B ਸਮੂਹ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ X ਲਈ $A \cap X = B \cap X = \phi$ ਅਤੇ $A \cup X = B \cup X$ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋਂ ਕਿ $A = B$

(ਸੰਕੇਤ $A = A \cap (A \cup X)$, $B = B \cap (B \cup X)$ ਅਤੇ ਵੰਡ ਨਿਯਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰੋ)

12. A, B ਅਤੇ C ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ $A \cap B$, $B \cap C$ ਅਤੇ $A \cap C$ ਖ਼ਾਲੀ ਸਮੂਹ ਨਾਂ ਹੋਣ ਅਤੇ $A \cap B \cap C = \phi$.

13. ਕਿਸੇ ਸੂਕਲ ਵਿੱਚ 600 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਤੇ ਕੀਤੇ ਸਰਵੇਖਣ ਅਨੁਸਾਰ, 150 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਚਾਹ, 225 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਕਾਫ਼ੀ ਅਤੇ 100 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੋਵੇ, ਚਾਹ ਅਤੇ ਕਾਫ਼ੀ ਪੀਣ ਵਾਲੇ ਮਿਲੇ। ਇਹ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨਾਂ ਤਾਂ ਚਾਹ ਪੀਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ, ਕੱਫ਼ੀ ?

14. ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਇੱਕਠ ਵਿੱਚ, 100 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹਿੰਦੀ ਜਾਣਦੇ ਹਨ, 50 ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਜਾਣਦੇ ਹਨ ਅਤੇ 25 ਦੋਵੇਂ ਭਾਸ਼ਾਵਾਂ। ਹਰ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਜਾਂ ਹਿੰਦੀ ਜਾਣਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ। ਇਕੱਠ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹਨ ?

15. 60 ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਤੇ ਕੀਤੇ ਸਰਵੇਖਣ ਅਨੁਸਾਰ ਇਹ ਦੇਖਿਆ ਗਿਆ ਕਿ 25 ਲੋਕ H ਅਖ਼ਬਾਰ, 26 ਲੋਕ ਅਖਬਾਰ T, 26 ਲੋਕ ਅਖ਼ਬਾਰ I, 9 ਲੋਕ H ਅਤੇ I ਦੋਵੇਂ, 11 ਲੋਕ H ਅਤੇ T ਦੋਵੇਂ, 8 ਲੋਕ T ਅਤੇ I ਦੋਵੇਂ ਅਤੇ 3 ਲੋਕ ਤਿੰਨੋਂ ਹੀ ਅਖ਼ਬਾਰਾਂ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਨ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਅਖ਼ਬਾਰ ਪੜ੍ਹਨ ਵਾਲੇ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ।

(ii) ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਅਖ਼ਬਾਰ ਪੜ੍ਹਨ ਵਾਲੇ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ।

16. ਇੱਕ ਸਰਵੇਖਣ ਵਿੱਚ ਇਹ ਦੇਖਿਆ ਗਿਆ ਕਿ 21 ਵਿਅਕਤੀ ਉਤਪਾਦ A, 26 ਵਿਅਕਤੀ ਉਤਪਾਦ B ਅਤੇ 29 ਵਿਅਕਤੀ ਉਤਪਾਦ C ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ 14 ਵਿਅਕਤੀ ਉਤਪਾਦ A ਅਤੇ B, 12 ਵਿਅਕਤੀ ਉਤਪਾਦ C ਅਤੇ A, 14 ਵਿਅਕਤੀ ਉਤਪਾਦ B ਅਤੇ C ਅਤੇ 8 ਵਿਅਕਤੀ ਤਿੰਨੋਂ ਹੀ ਉਤਪਾਦ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿੰਨੇ ਵਿਅਕਤੀ ਕੇਵਲ ਉਤਪਾਦ C ਨੂੰ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਸਮੂਹਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕੁਝ ਮੂਲਭੂਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਅਤੇ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਸਾਰ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ।

- ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਵਸਤੂਆਂ ਦਾ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਭਾਸ਼ਿਤ/ਸੁਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇਕੱਠ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਤੱਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ, ਖ਼ਾਲੀ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- ਇਕ ਸਮੂਹ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਨੂੰ ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਸਮੂਹ ਅਸੀਮਤ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਦੋ ਸਮੂਹ A ਅਤੇ B ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਬਿਲਕੁਲ ਇੱਕੋ-ਜਿਹੇ ਤੱਤ ਹੋਣ।
- ਇੱਕ ਸਮੂਹ A, ਸਮੂਹ B ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ A ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ B ਦੇ ਵੀ ਤੱਤ ਹੋਣ। ਅੰਤਰਾਲ R ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
- ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ A ਦਾ ਘਾਤ ਸਮੂਹ A ਦੇ ਸਾਰੇ ਉਪ ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਇਕੱਠ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ P(A) ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਦਾ ਸੰਘ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਤੱਤਾਂ ਤੋਂ ਬਣਿਆ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜਿਹੜੇ ਤੱਤ ਜਾਂ ਤਾਂ A ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਜਾਂ B ਵਿੱਚ।
- ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਦਾ ਕਾਟ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ A ਅਤੇ B ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚ (ਭਾਵ ਸਾਂਝੇ) ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਦਾ ਅੰਤਰ, ਜਦ A ਅਤੇ B ਇਸੇ ਹੀ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਹੋਣ, ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ A ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਪਰ B ਵਿੱਚ ਨਾ ਹੋਣ।
- ਕਿਸੇ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਲਈ, $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ਅਤੇ $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਦੋ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਹੋਣ ਕਿ $A \cap B = \phi$, ਤਾਂ

  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ ਅਤੇ

  ਜੇਕਰ $A \cap B \neq \phi$, ਤਾਂ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਜਰਮਨ ਦੇ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸਤਰੀ Georg Cantor (1845 ਈ : 1918 ਈ:) ਨੂੰ ਆਧੁਨਿਕ ਸਮੂਹ ਸਿਧਾਂਤ ਦੇ ਵੱਡੇ ਹਿੱਸੇ ਦਾ ਜਨਮਦਾਤਾ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸਮੂਹ ਸਿਧਾਂਤਾ ਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਖੋਜ (ਸ਼ੋਧ) ਪੱਤਰ 1874 ਈ : ਦੇ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਸਮੇਂ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ ਵਿੱਚ ਆਏ। ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਸਿਧਾਂਤ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਸਮਾਂ ਉਸ ਵਕਤ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਇਆ ਜਦੋਂ ਉਹ $a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲੀਆਂ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀਆਂ (trigonometric series) ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਰਹੇ ਸੀ। 1874 ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਆਪਣੇ ਇੱਕ ਸ਼ੋਧ (ਖੋਜ) ਪੱਤਰ ਵਿੱਚ ਇਹ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਕਿ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਾਲ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਸੰਗਤਤਾ (correspondence) ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਰੱਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ। 1879 ਈ: ਤੋਂ ਬਾਦ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਸ਼ੋਧ (ਖੋਜ) ਪੱਤਰ ਐਬਸਟਰੇਕਟ ਸਮੂਹਾਂ (abstract sets) ਦੇ ਗੁਣਧਰਮਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੇ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਹੋਏ।

Cantor's ਦੀ ਸੋਧ ਨੂੰ ਇੱਕ ਹੋਰ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ (ਸ਼ਾਸ਼ਤਰੀ) Richard Dade Kind (1831 ਈ.– 1916 ਈ.) ਨੇ ਪ੍ਰਸ਼ੰਸਾ ਯੋਗ ਢੰਗ ਨਾਲ ਸਵੀਕਾਰ ਕੀਤਾ। ਲੇਕਿਨ KRONECKOR (1810ਈ–1893ਈ) ਨੇ ਅਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੈਣ ਦੀ ਅਲੋਚਨਾ ਕੀਤੀ। ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਜਰਮਨ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸਤਰੀ Gottlob frege ਨੇ ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਸਮੂਹ ਸਿਧਾਂਤ ਨੂੰ ਤਰਕ ਸ਼ਾਸ਼ਤਰ ਦੇ ਨਿਯਮਾਂ ਵਿੱਚ ਪੇਸ਼ ਕੀਤਾ। ਉਸ ਸਮੇਂ ਤਕ ਪੂਰਾ ਸਮੂਹ ਸਿਧਾਂਤ ਸਾਰੇ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੇ ਅਸਤਿਤਵ (ਹੋਂਦ) ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਸੀ। ਇੱਕ ਪ੍ਰਸਿਧ ਅੰਗਰੇਜ਼ ਦਾਰਸ਼ਨਿਕ Bertand Russell (1872 ਈ. –1970 ਈ.) ਸਨ, ਜਿਨਾਂ ਨੇ 1902 ਈ. ਵਿੱਚ ਦੱਸਿਆ ਕਿ ਸਾਰੇ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੇ ਅਸਤਿਤਵ (ਹੋਂਦ) ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਇੱਕ ਵਿਰੋਧਾਭਾਸ ਨੂੰ ਜਨਮ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਪ੍ਰਸਿੱਧ Russel ਨੂੰ (Paradox) Paul R. Halmos ਦੇ ਇਸਦੇ ਬਾਰੇ ਆਪਣੀ ਪੁਸਤਕ "Naive Set Theory" ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਹੈ ਕਿ "ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਵਿੱਚ ਸਭ ਕੁਝ ਹੈ"।

ਇਕੱਲੇ Russel's ਪੈਰਾਡੋਕਸ (Paradox) ਹੀ ਨਹੀਂ ਸਨ ਜੋ ਸਮੂਹ ਸਿਧਾਂਤ ਵਿੱਚ ਸਾਹਮਣੇ ਆਏ। ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਪੈਰਾਡੋਕਸ (Paradoxes) ਕੁਝ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀਆਂ (mathematicians) ਅਤੇ ਤਰਕ ਸ਼ਾਸਤ੍ਰੀਆਂ ਨੇ ਪੇਸ਼ ਕੀਤੇ। ਇਹਨਾਂ ਲੜੀਵਾਰ ਪੈਰਾਡੋਕਸ (Paradoxes) ਦੇ ਸਿੱਟੇ ਵਜੋਂ ਪਹਿਲੀ ਸਵੈਸਿੱਧ (axiomatisation) ਸਮੂਹ ਸਿਧਾਂਤ ਬਾਰੇ 1908 ਵਿੱਚ Ernst Zermelo ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਹੋਈ। 1922ਈ. ਵਿੱਚ Abraham Fraenkel ਨੇ ਦੂਸਰਾ ਪ੍ਰਸਤਾਵ ਵੀ ਦਿੱਤਾ। 1925 ਈ. ਵਿੱਚ John Von Neumann ਨੇ ਲਗਾਤਰਤਾ ਦਾ ਸਪੱਸ਼ਟ ਰੂਪ (axiom) ਵਿੱਚ ਪੇਸ਼ ਕੀਤਾ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਦ 1937 ਈ. ਵਿੱਚ Paul Bernays ਨੇ ਸੰਤੋਖਜਨਕ ਸਵੈਸਿੱਧ (axiomatisation) ਪੇਸ਼ ਕੀਤੇ। Kurt Godel ਦੁਆਰਾ 1940 ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸੁਧਾਰ ਆਪਣੇ ਮੋਨੋਗਰਾਫ਼ (monograph) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ। ਇਸ ਸੁਧਾਰ ਨੂੰ Von Neumann-Berneys (VNG) ਜਾਂ Godel Benays (GB) ਸਮੂਹ ਸਿਧਾਂਤ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਇਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਕਠਨਾਈਆਂ ਦੇ ਬਾਵਜੂਦ, Cantor ਦੇ ਸਮੂਹ ਸਿਧਾਂਤ ਨੂੰ ਵਰਤਮਾਨ ਕਾਲ ਦੇ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅੱਜਕੱਲ ਗਣਿਤ ਦੇ ਜ਼ਿਆਦੀਆਂ ਸੰਕਲਪਨਾਵਾਂ ਅਤੇ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਨੂੰ ਸਮੂਹ ਸਿਧਾਂਤਕ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਪੇਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਨ।

— ❖ —

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਧਿਆਇ 2

ਸੰਬੰਧ ਅਤੇ ਫਲਨ

(Relations and Functions)

❖ *Mathematics is the indispensable instrument of all physical research. – BERTHELOT* ❖

2.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਗਣਿਤ ਦਾ ਬਹੁਤ ਸਾਰਾ ਭਾਗ ਪਰਿਵਰਤਨਸ਼ੀਲ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਪਹਿਚਾਣਯੋਗ ਕੜੀਆਂ ਦੇ ਨਮੂਨੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਹੈ। ਸਾਡੀ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਦੀ ਜ਼ਿੰਦਗੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸੰਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਚਿਤਰਣ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਨਮੂਨਿਆਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਭਰਾ ਅਤੇ ਭੈਣ, ਪਿਤਾ ਅਤੇ ਪੁੱਤਰ, ਅਧਿਆਪਕ ਅਤੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਆਦਿ। ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸਾਨੂੰ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਸੰਬੰਧ ਮਿਲਦੇ ਹਨ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੰਖਿਆ m, ਸੰਖਿਆ n ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਹੈ, ਰੇਖਾ l ਰੇਖਾ m ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ, ਸਮੂਹ A ਸਮੂਹ B ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੋ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਬਾਰੇ ਸਿਖਾਂਗੇ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇਹਨਾਂ ਜੋੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਵਾਲੀਆਂ ਦੋਵਾਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਬਾਰੇ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਾਂਗੇ। ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸੰਬੰਧਾਂ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ ਜੋ ਫਲਨ ਬਣਨ ਦੇ ਯੋਗ ਹਨ। ਫਲਨ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਇੱਕ ਵਸਤੂ ਤੋਂ ਦੂਸਰੀ ਵਸਤੂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤ ਅਨੁਸਾਰ ਸੰਖੇਪ ਸੰਗਤ ਪੈਦਾ ਕਰਦਾ ਹੈ।

G. W. Leibnitz (1646–1716)

2.2 ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨ (Cartesian Products of Sets)

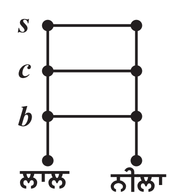
ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ A, ਦੋ ਰੰਗਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ B ਤਿੰਨ ਵਸਤੂਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ।

ਅਰਥਾਤ A = {ਲਾਲ, ਨੀਲਾ} ਅਤੇ B = {b, c, s},

ਇੱਥੇ b, c ਅਤੇ s ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਕਿਸੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਬੈਗ, ਕੋਟ ਅਤੇ ਕਮੀਜ਼ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦੋਹਾਂ ਸਮੂਹਾਂ ਤੋਂ ਕਿੰਨੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਰੰਗੀਨ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ ? ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਚਲਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ 6 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਜੋੜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ :

(ਲਾਲ, b), (ਲਾਲ, c), (ਲਾਲ, s), (ਨੀਲਾ, b), (ਨੀਲਾ, c), (ਨੀਲਾ, s)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਨੂੰ 6 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਜੋੜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 2.1)



ਚਿੱਤਰ 2.1

ਆਓ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਤੋਂ ਯਾਦ ਕਰੀਏ ਕਿ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮਬੱਧ (ordered) ਜੋੜਾ, ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਉਹ ਜੋੜਾ ਹੈ ਜਿਹੜੇ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ P ਅਤੇ Q ਵਿਚੋਂ ਜੋੜੇ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਛੋਟੀ ਬਰੈਕਟ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਖਾਸ ਤਰਤੀਬ ਵਿੱਚ ਇਕੱਠਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ (p,q), $p \in$ P ਅਤੇ $q \in$ Q। ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1 P ਅਤੇ Q ਦੋ ਸਮੂਹ ਜੋ ਖ਼ਾਲੀ ਨਹੀਂ ਦਿੱਤੇ ਹਨ, P ਅਤੇ Q ਦੀ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਗੁਣਾ P × Q ਉਹਨਾਂ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜਿਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾ ਤੱਤ P ਵਿੱਚੋਂ ਅਤੇ ਦੂਸਰਾ ਤੱਤ Q ਵਿੱਚੋਂ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਭਾਵ $P \times Q = \{ (p,q) : p \in P, q \in Q \}$

ਜੇਕਰ P ਅਤੇ Q ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇਗਾ ਤਾਂ P × Q ਵੀ ਇੱਕ ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇਗਾ ਭਾਵ, $P \times Q = \phi$

ਉਪਰੋਕਤ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

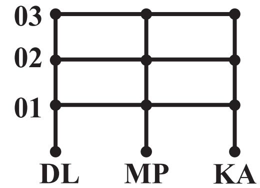
A × B = {ਲਾਲ, b), (ਲਾਲ, c), (ਲਾਲ, s), (ਨੀਲਾ, b), (ਨੀਲਾ, c), (ਨੀਲਾ, s)}.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਆਉ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹ ਲਉ :

A = {DL, MP, KA}, ਜਿੱਥੇ DL, MP, KA ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਦਿੱਲੀ, ਮੱਧ ਪ੍ਰਦੇਸ਼ ਅਤੇ ਕਰਨਾਟਕ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ B = {01,02, 03} ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਦਿੱਲੀ, ਮੱਧ ਪ੍ਰਦੇਸ਼ ਅਤੇ ਕਰਨਾਟਕ ਦੁਆਰਾ ਗੱਡੀਆਂ ਦੇ ਲਈ ਜਾਰੀ ਲਾਇਸੈਂਸ ਪਲੇਟ ਦੀ ਸੰਕੇਤਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।

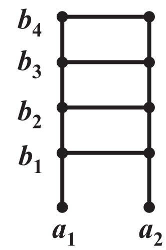


ਚਿੱਤਰ 2.2

ਜੇਕਰ ਤਿੰਨ ਰਾਜ ਦਿੱਲੀ, ਮੱਧ ਪ੍ਰਦੇਸ਼ ਅਤੇ ਕਰਨਾਟਕ ਗੱਡੀਆਂ ਦੇ ਲਾਇਸੈਂਸ ਪਲੇਟ ਦੇ ਲਈ ਸੰਕੇਤ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣਾ ਰਹੇ ਹੋਣ ਕਿ ਸੰਕੇਤ ਸਮੂਹ A ਦੇ ਤੱਤ ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਸਮੂਹਾਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਜੋੜੇ ਕੀ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਜੋੜਿਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ ਕਿੰਨ੍ਹੀ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 2.2) ?

ਉਪਲਬਧ ਜੋੜੇ (DL,01), (DL,02), (DL,03), (MP,01), (MP,02), (MP,03), (KA,01), (KA,02), (KA,03) ਹਨ। ਅਤੇ ਸਮੂਹ A ਅਤੇ ਸਮੂਹ B ਦੀ ਗੁਣਾ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ।

$A \times B$ = {(DL,01), (DL,02), (DL,03), (MP,01), (MP,02), (MP,03), (KA,01), (KA,02), (KA,03)}



ਚਿੱਤਰ 2.3

ਇੱਥੇ ਇਹ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਤੱਤ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਗੁਣਨ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ 9 ਜੋੜੇ ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ ਸਮੂਹ A ਅਤੇ B ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚ 3 ਤੱਤ ਹਨ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ 9 ਸੰਭਵ ਸੰਕੇਤ ਮਿਲਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਵੀ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਬਣਾਉਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਵੀ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਸੰਕੇਤ (DL, 01) ਸੰਕੇਤ (01, DL) ਦੇ ਬਰਾਬਰ (ਜਾਂ ਵਰਗਾ) ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਸਪਸ਼ਟੀਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਮੂਹ A= $\{a_1, a_2\}$ ਅਤੇ

B = $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ (ਚਿੱਤਰ 2.3) ਇੱਥੇ

$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_1, b_4), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (a_2, b_4)\}$.

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ 8 ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜੇ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੋਣ। ਇੱਥੇ ਇਹ ਸੱਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (a_1, b_2) ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਬਿੰਦੂ (b_2, a_1) ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਤੋਂ ਅਲੱਗ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ

(i) ਦੋ ਕ੍ਰਮਿਤ ਜੋੜੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਪਹਿਲੇ ਤੱਤ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਤੱਤ ਵੀ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ।

(ii) ਜੇਕਰ A ਦੇ ਵਿੱਚ p ਤੱਤ ਅਤੇ B ਦੇ ਵਿੱਚ q ਤੱਤ ਹੋਣ ਤਾਂ $A \times B$ ਵਿੱਚ pq ਤੱਤ ਹੋਣਗੇ। ਭਾਵ ਜੇਕਰ $n(A) = p$ ਅਤੇ $n(B) = q$, ਤਾਂ $n(A \times B) = pq$।

(iii) ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਜੋ ਨਾ ਖ਼ਾਲੀ ਸਮੂਹ ਹਨ ਅਤੇ A ਜਾਂ B ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਅਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਹੈ ਤਾਂ $A \times B$ ਵੀ ਅਸੀਮਿਤ ਹੋਵੇਗਾ।

(iv) $A \times A \times A = \{(a, b, c) : a, b, c \in A\}$, ਇੱਥੇ (a, b, c) ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਤ੍ਰਿੱਗੜੀ (triplet) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਜੇਕਰ $(x + 1, y - 2) = (3, 1)$, ਤਾਂ x ਅਤੇ y ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜੇ ਬਰਾਬਰ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਤੱਤ ਵੀ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣਗੇ।

ਇਸ ਲਈ $x + 1 = 3$ ਅਤੇ $y - 2 = 1$

ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $x = 2$ ਅਤੇ $y = 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਜੇਕਰ $P = \{a, b, c\}$ ਅਤੇ $Q = \{r\}$, ਹੋਵੇ ਤਾਂ $P \times Q$ ਅਤੇ $Q \times P$ ਸਮੂਹ ਬਣਾਉ। ਕੀ ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਗੁਣਾ ਬਰਾਬਰ ਹਨ ?

ਹੱਲ : ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਗੁਣਾ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ,

$P \times Q = \{(a, r), (b, r), (c, r)\}$ ਅਤੇ $Q \times P = \{(r, a), (r, b), (r, c)\}$

ਹੁਣ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜਿਆਂ ਦੀ ਬਰਾਬਰੀ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਜੋੜਾ (a, r) ਜੋੜਾ (r, a) ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $P \times Q \neq Q \times P$

ਭਾਵੇਂ ਦੋਵੇਂ ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਮੰਨ ਲਉ $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4\}$ ਅਤੇ $C = \{4,5,6\}$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $A \times (B \cap C)$ (ii) $(A \times B) \cap (A \times C)$

(iii) $A \times (B \cup C)$ (iv) $(A \times B) \cup (A \times C)$

ਹੱਲ : (i) ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਕਾਟ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ $(B \cap C) = \{4\}$

ਇਸ ਲਈ $A \times (B \cap C) = \{(1,4), (2,4), (3,4)\}$

(ii) ਹੁਣ $(A \times B) = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4)\}$

ਅਤੇ $(A \times C) = \{(1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6)\}$

ਇਸ ਲਈ $(A \times B) \cap (A \times C) = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$

(iii) ਕਿਉਂਕਿ $(B \cup C) = \{3, 4, 5, 6\}$, ਇਸ ਲਈ

$A \times (B \cup C) = \{(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$

(iv) ਭਾਗ (ii) ਵਿੱਚੋਂ ਸਮੂਹ $A \times B$ ਅਤੇ $A \times C$ ਨੂੰ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ, ਸਾਨੂੰ

$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$

ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਜੇਕਰ $P = \{1, 2\}$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ $P \times P \times P$ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $P \times P \times P = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,1), (2,2,2)\}$

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਜੇਕਰ $\mathbf{R}$ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਗੁਣਾ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ਅਤੇ $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉ।

ਹੱਲ : ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਗੁਣਾ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, ਸਮੂਹ $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}$ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਵਰਤੋਂ ਦੋ-ਵਿਮਾਈ ਆਕਾਸ਼ (two dimensional space) ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ। $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ਸਮੂਹ $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbf{R}\}$ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸਦੀ ਵਰਤੋਂ ਤ੍ਰੈ-ਵਿਮਾਈ ਆਕਾਸ਼ (three dimensional space) ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਜੇਕਰ $A \times B = \{(p, q), (p, r), (m, q), (m, r)\}$, ਹੋਵੇ ਤਾਂ A ਅਤੇ B ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : A = ਪਹਿਲੇ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ = $\{p, m\}$

B = ਦੂਸਰੇ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ = $\{q, r\}$

ਅਭਿਆਸ 2.1

1. ਜੇਕਰ $\left(\frac{x}{3}+1, y-\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$, ਹੈ ਤਾਂ x ਅਤੇ y ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਜੇਕਰ ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ 3 ਤੱਤ ਅਤੇ ਸਮੂਹ $B = \{3, 4, 5\}$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ $(A \times B)$ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਤੱਤ ਹੋਣਗੇ।
3. ਜੇਕਰ $G = \{7, 8\}$ ਅਤੇ $H = \{5, 4, 2\}$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ $G \times H$ ਅਤੇ $H \times G$ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਦੱਸੋ ਕਿ ਕਿਹੜੇ ਸਹੀ ਹਨ ਅਤੇ ਕਿਹੜੇ ਗ਼ਲਤ ਜੇਕਰ ਕਥਨ ਗ਼ਲਤ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦੀ ਜਗ੍ਹਾ ਤੇ ਸਹੀ ਕਥਨ ਲਿਖੋ :

   (i) ਜੇਕਰ $P = \{m, n\}$ ਅਤੇ $Q = \{n, m\}$, ਤਾਂ $P \times Q = \{(m, n), (n, m)\}$

   (ii) ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਦੋ ਸਮੂਹ ਹਨ ਅਤੇ ਖ਼ਾਲੀ ਨਹੀਂ ਹਨ ਤਾਂ $A \times B$ ਵੀ ਇੱਕ ਨਾ ਖ਼ਾਲੀ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜਿਆਂ (x, y) ਜਿਸ ਵਿੱਚ $x \in A$ ਅਤੇ $y \in B$ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇਗਾ।

   (iii) ਜੇਕਰ $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$, ਤਾਂ $A \times (B \cap \phi) = \phi$
5. ਜੇਕਰ $A = \{-1, 1\}$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ $A \times A \times A$ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਜੇਕਰ $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y)\}$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ A ਅਤੇ B ਪਤਾ ਕਰੋ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

7. ਮੰਨ ਲਓ $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{5, 6\}$ ਅਤੇ $D = \{5, 6, 7, 8\}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

(i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$. (ii) $A \times C$, $B \times D$ ਦਾ ਉਪਸਮੂਹ ਹੈ।

8. ਮੰਨ ਲਓ $A = \{1, 2\}$ ਅਤੇ $B = \{3, 4\}$ ਹੈ, ਤਾਂ $A \times B$ ਪਤਾ ਕਰੋ। $A \times B$ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੋਣਗੇ ? ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਤਿਆਰ ਕਰੋ।

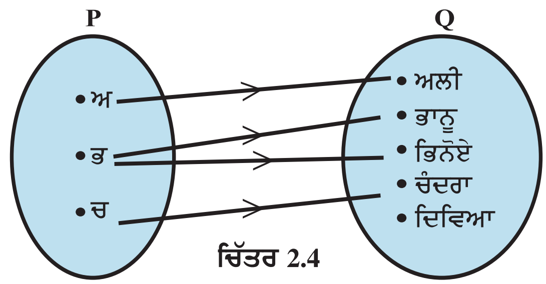
9. ਮੰਨ ਲਓ A ਅਤੇ B ਦੋ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਹਨ ਕਿ $n(A) = 3$ ਅਤੇ $n(B) = 2$ । ਜੇਕਰ $(x, 1), (y, 2), (z, 1)$ ਸਾਰੇ $A \times B$, ਵਿੱਚ ਹਨ ਤਾਂ A ਅਤੇ B ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ x, y ਅਤੇ z ਤਿੰਨੇ ਹੀ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤੱਤ ਹਨ।

10. $A \times A$ ਦੀ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਗੁਣਾ ਵਿੱਚ 9 ਤੱਤ ਹਨ, ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਦੋ $(-1, 0)$ ਅਤੇ $(0,1)$ ਪਤਾ ਹਨ। ਸਮੂਹ A ਅਤੇ $A \times A$ ਦੇ ਬਾਕੀ ਤੱਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2.3 ਸੰਬੰਧ (Relations)

ਦੋ ਸਮੂਹ P = {ਅ, ਭ, ਚ} ਅਤੇ Q = {ਅਲੀ, ਭਾਨੂੰ, ਭਿਨੋਏ, ਚੰਦਰਾ, ਦਿਵਿਆ} ਲਉ। P ਅਤੇ Q ਦੀ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਗੁਣਾ ਵਿੱਚ 15 ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜੇ ਹੋਣਗੇ ਜਿੰਨਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੂਚੀਬੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$P \times Q$ = {(ਅ, ਅਲੀ), (ਭ, ਭਾਨੂੰ), (ਭ, ਭਿਨੋਏ), ..., (ਚ, ਚੰਦਰਾ)}।



ਚਿੱਤਰ 2.4

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਹਰ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜੇ (x, y) ਲਈ ਪਹਿਲੇ ਤੱਤ x ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਤੱਤ y ਦੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ R ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਕੇ $P \times Q$ ਦਾ ਇੱਕ ਉਪ ਸਮੂਹ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

R = {(x,y): x, ਨਾਮ y ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਅੱਖਰ ਹੈ, $x \in P$ ਅਤੇ $y \in Q$}।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ R= {(ਅ, ਅਲੀ), (ਭ, ਭਾਨੂੰ), (ਭ, ਭਿਨੋਏ), (ਚ, ਚੰਦਰਾ)}

ਸੰਬੰਧ R ਦਾ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਚਿਤਰਣ (ਜਿਸ ਨੂੰ ਤੀਰ ਚਿੱਤਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ) ਚਿੱਤਰ 2.4 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2 ਕਿਸੇ ਨਾ-ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ A ਦਾ, ਨਾ-ਖ਼ਾਲੀ ਸਮੂਹ B ਨਾਲ ਸੰਬੰਧ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਗੁਣਾ $A \times B$ ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਉਪ ਸਮੂਹ $A \times B$ ਦੇ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਦੂਸਰਾ ਤੱਤ, ਪਹਿਲੇ ਤੱਤ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ (ਪਰਛਾਵਾਂ) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 3 ਸਮੂਹ A ਤੋਂ ਸਮੂਹ B ਦੇ ਸੰਬੰਧ R ਦੇ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਸਾਰਿਆਂ ਪਹਿਲੇ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਸੰਬੰਧ R ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ (domain) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 4 ਸਮੂਹ A ਤੋਂ ਸਮੂਹ B ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਦੇ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਸਾਰਿਆਂ ਦੂਸਰਿਆਂ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਸੰਬੰਧ R ਦੀ ਵਿਸਥਾਰ (range) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਸਾਰੇ ਸਮੂਹ B ਨੂੰ ਸੰਬੰਧ R ਦੀ ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਵਿਸਥਾਰ $\subseteq$ ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ (codomain)।

> **ਟਿੱਪਣੀ** (i) ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਤੌਰ 'ਤੇ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸਾਰਨੀ ਬੱਧ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਅਤੇ ਜਾਂ ਨਿਯਮਬੱਧ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
> (ii) ਇੱਕ ਤੀਰ ਚਿੱਤਰ ਕਿਸੇ (arrow diagram) ਸੰਬੰਧ ਦਾ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਚਿਤਰਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

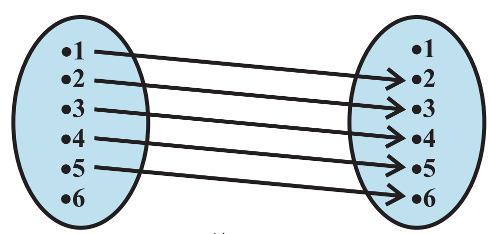
ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਮੰਨ ਲਓ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ਹੈ, ਤਾਂ A ਤੋਂ A ਤੱਕ ਦਾ ਇਕ ਸੰਬੰਧ $R = \{(x, y) : y = x + 1\}$ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰੋ।

(i) ਇਸ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਇੱਕ ਤੀਰ ਚਿੱਤਰ ਨਾਲ ਦਿਖਾਉ।

(ii) ਸੰਬੰਧ R ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ, ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਲਿਖੋ।

ਹੱਲ : (i) ਸੰਬੰਧ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ

$R = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}$



ਚਿੱਤਰ 2.5

ਇਸਦਾ ਤੀਰ ਚਿਤਰਣ, ਚਿੱਤਰ 2.5 ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ।

(ii) ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪ੍ਰਾਂਤ $=\{1, 2, 3, 4, 5,\}$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਸਥਾਰ $= \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ਅਤੇ ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

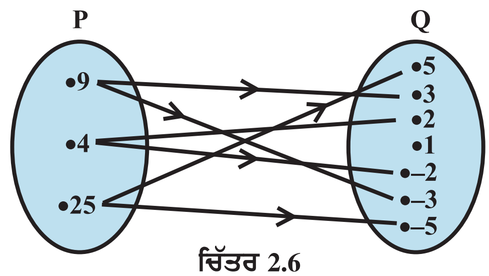
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਚਿੱਤਰ 2.6, ਸਮੂਹ P ਅਤੇ Q ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ (i) ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਰੂਪ (ii) ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ। ਇਸਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਕੀ ਹੈ?

ਹੱਲ : ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਸੰਬੰਧ R "x, y ਦਾ ਵਰਗ ਹੈ।"

(i) ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ R = {(x, y): x, y ਦਾ ਵਰਗ ਹੈ, $x \in$ P, $y \in$ **Q**}

(ii) ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ R = {(9, 3), (9, –3), (4, 2), (4, –2), (25, 5), (25, –5)}



ਚਿੱਤਰ 2.6

ਸੰਬੰਧ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ; {4, 9, 25} ਹੈ।

ਸੰਬੰਧ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ; {– 2, 2, –3, 3, –5, 5} ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਤੱਤ 1 ਦਾ ਸਮੂਹ P ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਸਮੂਹ Q, ਸੰਬੰਧ ਦੀ ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ ਹੈ।

> **ਟਿੱਪਣੀ** ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ A ਤੋਂ ਸਮੂਹ B ਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ A × B ਦੇ ਸੰਭਵ ਉਪ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜੇਕਰ n(A) = p ਅਤੇ n(B) = q ਤਾਂ n (A × B) = pq ਅਤੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ 2^{pq} ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਮੰਨ ਲਓ A = {1, 2} ਅਤੇ B = {3, 4} A ਤੋਂ B ਤੱਕ ਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ A × B = {(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)}

ਕਿਉਂਕਿ n (A×B) = 4, ਇਸ ਲਈ A × B ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹ 2^4 ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਲਈ A ਤੋਂ B ਤੱਕ ਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 2^4 ਹੈ।

> **ਟਿੱਪਣੀ** A ਤੋਂ A ਤੱਕ ਦੇ ਸੰਬੰਧ R ਨੂੰ A ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 2.2

1. ਮੰਨ ਲਓ A = {1, 2, 3,...,14} ਹੈ। A ਤੋਂ A ਤੱਕ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ R = {(x, y) : $3x - y = 0$, ਜਿੱਥੇ $x, y \in$ A}ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ। ਇਸਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ, ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਲਿਖੋ।

2. ਵਾਸਵਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ **N** ਤੇ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ R = {(x, y) : $y = x + 5$, x ਇੱਕ 4 ਤੋਂ ਘੱਟ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ $x, y \in$ **N**} ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ। ਇਸਨੂੰ ਸਾਰਨੀਬੱਧ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ। ਇਸਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਵੀ ਲਿਖੋ।

3. A = {1, 2, 3, 5} ਅਤੇ B = {4, 6, 9}ਹੈ। A ਤੋਂ B ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ R ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ ਕਿ R = {(x, y): x ਅਤੇ y ਦਾ ਅੰਤਰ ਟਾਂਕ ਹੈ, $x \in$ A ਅਤੇ $y \in$ B}, R ਨੂੰ ਸਾਰਨੀਬੱਧ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

4. ਚਿੱਤਰ 2.7, ਸਮੂਹਾਂ P ਅਤੇ Q ਵਿਚਕਾਰ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ (i) ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਰੂਪ (ii) ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ। ਇਸਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਵੀ ਲਿਖੋ।

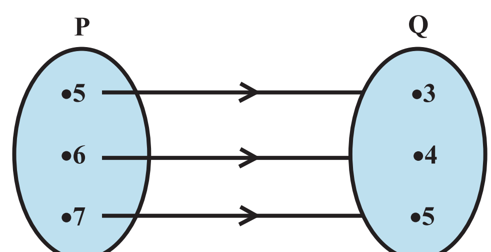
5. ਮੰਨ ਲਉ A = {1, 2, 3, 4, 6}। ਮੰਨ ਲਉ R, A ਤੇ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ ਜੋ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

R ={(a, b): a , $b \in$ A, b, a ਨਾਲ ਪੂਰਾ-ਪੂਰਾ ਭਾਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ}

(i) R ਨੂੰ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

(ii) R ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਲਿਖੋ।

(iii) R ਦੀ ਵਿਸਥਾਰ ਲਿਖੋ।



ਚਿੱਤਰ 2.7

6. ਸੰਬੰਧ R ਜੋ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ R = {$(x, x + 5)$: $x \in$ {0, 1, 2, 3, 4, 5}} ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. ਸੰਬੰਧ R = {(x, x^3) : x ਇੱਕ 10 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ} ਨੂੰ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

8. ਮੰਨ ਲਓ A = {x, y, z} ਅਤੇ B = {1, 2} ਹੈ। A ਤੋਂ B ਤੱਕ ਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9. ਮੰਨ ਲਓ R, **Z** ਤੇ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ, R = {(a,b): a, $b \in$ **Z**, $a - b$ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ}, R ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

2.4 ਫਲਨ (Functions)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਫਲਨ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ। ਇਹ ਗਣਿਤ ਦੀ ਇੱਕ ਬਹੁਤ ਹੀ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਧਾਰਨਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਫਲਨ ਨੂੰ ਇੱਕ ਨਿਯਮ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਤੱਤ ਤੋਂ ਨਵੇਂ ਤੱਤ ਉਤਪੰਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਫਲਨ ਨੂੰ ਸੂਚਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਸ਼ਬਦ ਪ੍ਰਤੀ ਚਿੱਤਰ (map) ਜਾਂ ਚਿਤਰਣ (mapping) ਆਦਿ ਵੀ ਵਰਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 5 ਸਮੂਹ A ਤੋਂ ਸਮੂਹ B ਤੱਕ ਦੇ ਸੰਬੰਧ f ਨੂੰ ਫਲਨ ਕਹਾਂਗੇ, ਜੇਕਰ ਸਮੂਹ A ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਤੱਤ ਦਾ ਸਮੂਹ B ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ ਹੋਵੇ।

ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਫਲਨ ਇੱਕ ਨਾ ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ A ਤੋਂ ਦੂਸਰੇ ਨਾ ਖ਼ਾਲੀ ਸਮੂਹ B ਤੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ f ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ A ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ f ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜਿਆਂ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਤੱਤ ਇੱਕੋ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ।

ਜੇਕਰ f, A ਤੋਂ B ਤੱਕ ਦਾ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ $(a, b) \in f$ ਤਾਂ $f(a) = b$, ਜਿੱਥੇ b ਨੂੰ f ਰਾਹੀਂ a ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ a ਨੂੰ f ਰਾਹੀਂ b ਦਾ ਪੂਰਵ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ (Pre image) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

A ਤੋਂ B ਤੱਕ ਦੇ ਫਲਨ f ਨੂੰ $f: A \to B$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਪਿਛਲੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖਦੇ ਹੋਏ, ਅਸੀਂ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਦਾਹਰਣ 7 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ ਫਲਨ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਤੱਤ 6 ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਉਦਾਹਰਣ 8 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਸੰਬੰਧ, ਫਲਨ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿਚਲੇ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ, ਉਦਾਹਰਣ 9 ਵਿਚਲਾ ਸੰਬੰਧ, ਫਲਨ ਨਹੀਂ ਹੈ (ਕਿਉਂ ?)। ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਸੰਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖਾਂਗੇ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਫਲਨ ਹਨ ਅਤੇ ਕੁਝ ਨਹੀਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਮੰਨ ਲਉ **N** ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। **N** ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ R ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ, $R = \{(x, y) : y = 2x, x, y \in \mathbf{N}\}$

R ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ, ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਕੀ ਹੈ ? ਕੀ ਇਹ ਸੰਬੰਧ, ਫਲਨ ਹੈ ?

ਹੱਲ : R ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ **N** ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਇਸਦੀ ਸਹਿ-ਪ੍ਰਾਂਤ ਵੀ **N** ਹੈ। ਵਿਸਥਾਰ (range) ਜਿਸਤ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ n ਦਾ ਇੱਕ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਹੀ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸੰਬੰਧ, ਫਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹਰ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਅਤੇ ਹਰ ਇੱਕ ਵਿੱਚ ਕਾਰਣਾਂ ਸਹਿਤ ਦੱਸੋ ਕਿ ਇਹ ਫਲਨ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ?

(i) $R = \{(2,1),(3,1), (4,2)\}$, (ii) $R = \{(2,2),(2,4),(3,3), (4,4)\}$

(iii) $R = \{(1,2),(2,3),(3,4), (4,5), (5,6), (6,7)\}$

ਹੱਲ : (i) ਕਿਉਂਕਿ R ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਤੱਤ 2, 3, 4 ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਹੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸੰਬੰਧ R ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ।

(ii) ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਹੀ ਪਹਿਲੇ ਤੱਤ ਦੇ, ਦੋ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ 2 ਅਤੇ 4 ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸੰਬੰਧ ਫਲਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iii) ਕਿਉਂਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਤੱਤ ਦਾ ਸਿਰਫ਼ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਹੀ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸੰਬੰਧ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 6 ਇੱਕ ਫਲਨ ਜਿਸਦੀ ਵਿਸਥਾਰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ **R** ਜਾਂ ਉਸਦਾ ਕੋਈ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸ ਨੂੰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਇਸਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ **R** ਜਾਂ **R** ਦਾ ਕੋਈ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਮੰਨ ਲਉ **N** ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ।

$f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(x) = 2x + 1$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਫਲਨ (real valued function) ਹੈ। ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰੋ।

x	1	2	3	4	5	6	7
y	$f(1) = ...$	$f(2) = ...$	$f(3) = ...$	$f(4) = ...$	$f(5) = ...$	$f(6) = ...$	$f(7) = ...$

ਹੱਲ : ਪੂਰੀ ਸਾਰਣੀ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇਗੀ :

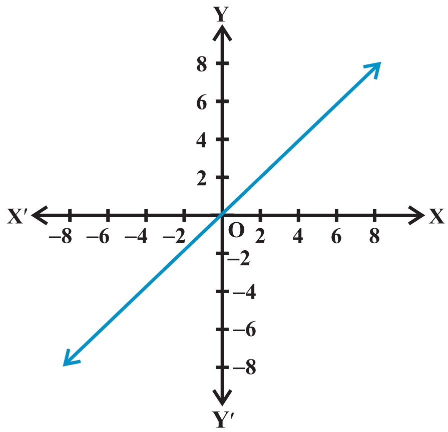
x	1	2	3	4	5	6	7
y	$f(1) = 3$	$f(2) = 5$	$f(3) = 7$	$f(4) = 9$	$f(5) = 11$	$f(6) = 13$	$f(7) = 15$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

2.4.1 ਕੁਝ ਫਲਨ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਆਲੇਖ (Some functions and their graphs)

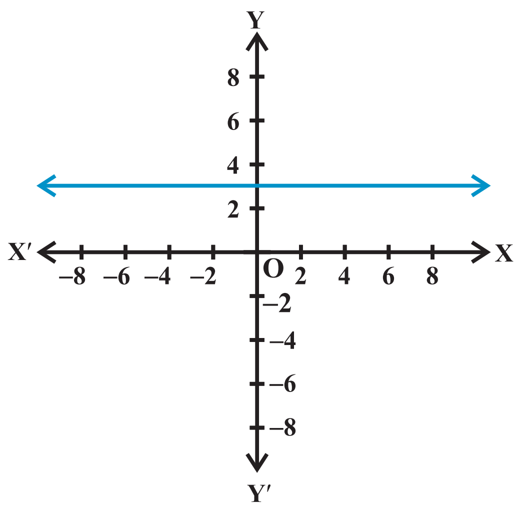
(i) **ਤਤਸਮਕ ਫਲਨ (Identity Function) :** ਮੰਨ ਲਉ **R** ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $y = f(x) = x$ ਹਰ ਇੱਕ $x \in \mathbf{R}$ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਫਲਨ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਨੂੰ ਤਤਸਮਕ ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇੱਥੇ f ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ **R** ਹੈ। ਇਸਦਾ ਆਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 2.8 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਸਿੱਧੀ (ਸਰਲ) ਰੇਖਾ ਹੈ। ਇਹ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।



$f(x) = x$

ਚਿੱਤਰ 2.8

(ii) **ਅਚੱਲ ਜਾਂ ਸਥਿਰ ਫਲਨ (Constant function) :** $y = f(x) = c$, ਜਿੱਥੇ c ਇੱਕ ਅਚੱਲ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰ ਇੱਕ $x \in \mathbf{R}$ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਫਲਨ ਹੈ। ਇੱਥੇ f ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ **R** ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਵਿਸਥਾਰ $\{c\}$ ਹੈ।



$f(x) = 3$

ਚਿੱਤਰ 2.9

ਇਸਦਾ ਆਲੇਖ, x ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਹੋਵੇਗੀ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਜੇਕਰ $f(x) = 3$ ਹਰ ਇੱਕ $x \in \mathbf{R}$ ਲਈ ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਆਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 2.9 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਹੋਵੇਗੀ।

(iii) **ਬਹੁਪਦ ਫਲਨ (Polynomial function) :** ਫਲਨ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ **R** ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ x ਲਈ $y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਅਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}$

$f(x) = x^3 - x^2 + 2$ ਅਤੇ $g(x) = x^4 + \sqrt{2}\,x$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ ਹਨ, ਜਦੋਂ ਕਿ $h(x) = x^{\frac{2}{3}} + 2x$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ ਨਹੀਂ ਹੈ। (ਕਿਉਂ ?)

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

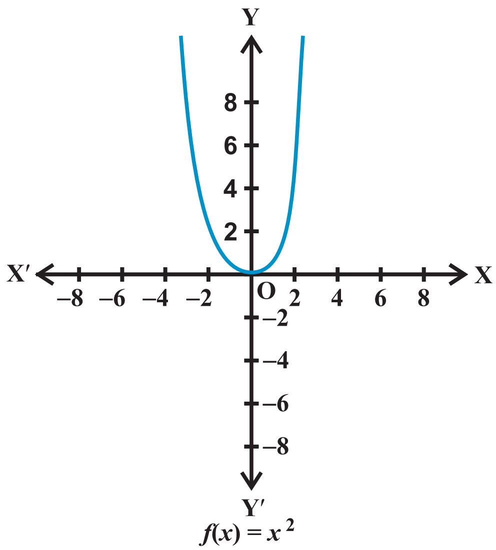
ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਫਲਨ f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਨੂੰ $y = f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ। ਇਸਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਪੂਰੀ ਕਰੋ। ਇਸ ਫਲਨ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਕੀ ਹੈ ? f ਦਾ ਆਲੇਖ ਵੀ ਬਣਾਉ।

x	– 4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$y = f(x) = x^2$									

ਹੱਲ : ਪੂਰੀ ਸਾਰਣੀ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

x	– 4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$y = f(x) = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

f ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ = $\{x : x \in \mathbf{R}\}$; f ਦੀ ਵਿਸਥਾਰ = $\{x^2 : x \in \mathbf{R}\}$ f ਦਾ ਆਲੇਖ, ਚਿੱਤਰ 2.10 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ।



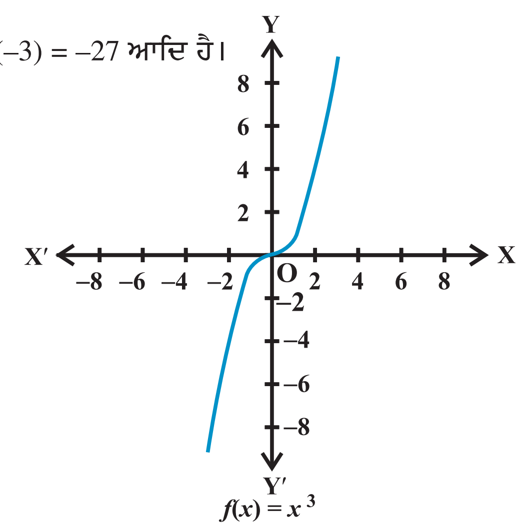
ਚਿੱਤਰ 2.10

ਉਦਾਹਰਣ 14 : $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਬਣਾਉ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$, $f(2) = 8$, $f(-2) = -8$, $f(3) = 27$; $f(-3) = -27$ ਆਦਿ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $f = \{(x, x^3) : x \in \mathbf{R}\}$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 2.11 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 2.11

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

(iv) **ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ (Rational functions):** $\frac{f(x)}{g(x)}$, ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਜਿੱਥੇ $f(x)$ ਅਤੇ $g(x)$ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਂਤ x ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ ਹਨ ਅਤੇ $g(x) \neq 0$

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਫਲਨ $f: \mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R}$ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ $f(x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbf{R} - \{0\}$ ਹੈ। ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਪੂਰੀ ਕਰੋ। ਇਸ ਫਲਨ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਕੀ ਹੈ

x	–2	–1.5	–1	–0.5	0.25	0.5	1	1.5	2
$y = \frac{1}{x}$	…	…	…	…	…	…	…	…	…

ਹੱਲ : ਪੂਰੀ ਕੀਤੀ ਸਾਰਣੀ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

x	–2	–1.5	–1	–0.5	0.25	0.5	1	1.5	2
$y = \frac{1}{x}$	– 0.5	– 0.67	–1	– 2	4	2	1	0.67	0.5

ਇਸਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ, ਸਿਫ਼ਰ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਵਿਸਥਾਰ ਵੀ ਸਿਫ਼ਰ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਹਨ। f ਦਾ ਆਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 2.12 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

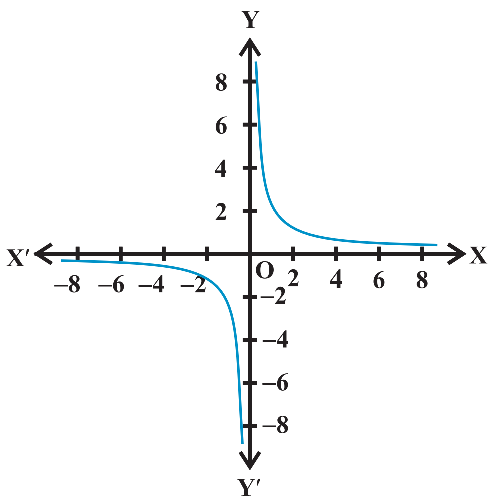


Fig 2.12 $f(x) = \frac{1}{x}$

ਚਿੱਤਰ 2.12

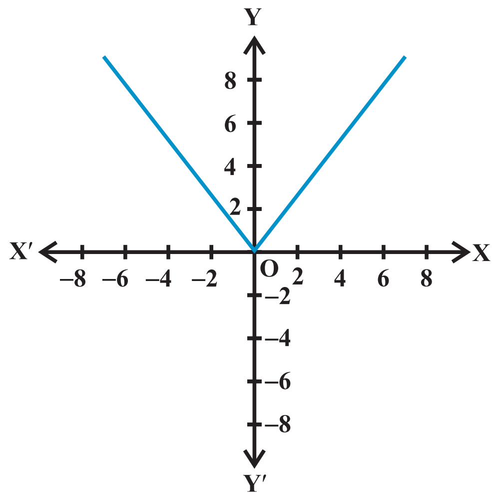
(v) **ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਪਾਂਕ (The Modulus function):** ਫਲਨ f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ਹਰ ਇੱਕ $x \in \mathbf{R}$ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ $f(x) = |x|$ ਨੂੰ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁੱਲ ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। x ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਅਰਿਣਾਤਮਕ ਮੁੱਲ ਲਈ $f(x) = x$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਪਰ x ਦੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ $f(x)$, x ਦੇ ਮੁੱਲ ਦਾ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ

$$f(x) = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਨਿਰਪੇਖ ਮੁੱਲ ਫਲਨ ਦਾ ਆਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 2.13 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



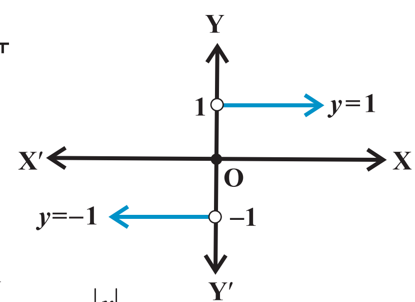
$f(x) = |x|$

ਚਿੱਤਰ 2.13

(vi) **ਸਿਗਨਮ ਫਲਨ (Signum function) :** ਫਲਨ f:**R**→**R**, ਜਿਸ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ਜੇਕਰ } x > 0 \\ 0, \text{ਜੇਕਰ } x = 0 \\ -1, \text{ਜੇਕਰ } x < 0 \end{cases}$$

ਹੈ, ਨੂੰ ਸਿਗਨਮ ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਸਿਗਨਮ ਫਲਨ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ R ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ {–1, 0, 1} ਹੈ। ਸਿਗਨਮ ਫਲਨ ਦਾ ਆਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 2.14 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ।



$f(x) = \frac{|x|}{x}, x \neq 0$ ਅਤੇ 0, $x = 0$ ਲਈ

ਚਿੱਤਰ 2.14

(vii) **ਅਧਿਕਤਮ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਫਲਨ (Greatest integer function) :** $f(x) = [x]$, $x \in \mathbf{R}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ f: **R** → **R**, x ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ x ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਅਧਿਕਤਮ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਮੁੱਲ ਧਾਰਨ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਫ਼ਲਨ ਨੂੰ ਅਧਿਕਤਮ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

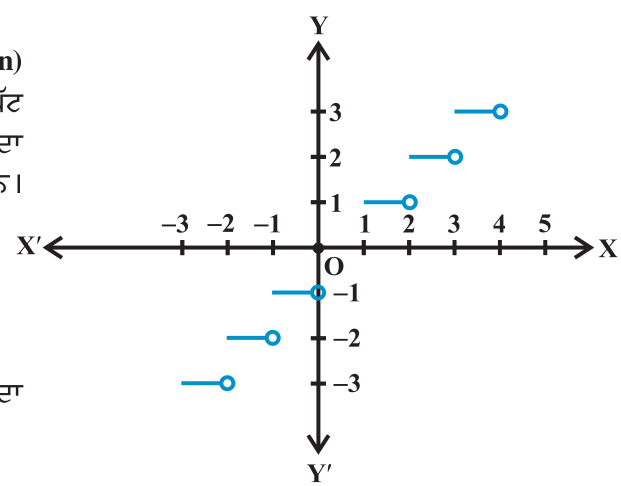
$[x]$ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

$[x] = -1$ ਜੇਕਰ $-1 \le x < 0$

$[x] = 0$ ਜੇਕਰ $0 \le x < 1$

$[x] = 1$ ਜੇਕਰ $1 \le x < 2$

$[x] = 2$ ਜੇਕਰ $2 \le x < 3$ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ, ਫਲਨ ਦਾ ਆਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 2.15 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ।



$f(x) = [x]$

ਚਿੱਤਰ 2.15

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

2.4.2 ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਬੀਜ ਗਣਿਤ (Algebra of real functions): ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ, ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਨੂੰ ਦੂਸਰੇ ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਕਿਸੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਅਦਿਸ਼ (scalar) (ਇੱਥੇ ਅਦਿਸ਼ ਤੋਂ ਭਾਵ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਤੋਂ ਹੈ) ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਨੂੰ ਦੂਸਰੇ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨਾ, ਸਿੱਖਾਂਗੇ।

(i) **ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ (Addition of two real functions) :** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f : X \to \mathbf{R}$ ਅਤੇ $g : X \to \mathbf{R}$ ਕੋਈ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਹਨ, ਇੱਥੇ $X \subset \mathbf{R}$ ਤਾਂ ਅਸੀਂ $(f + g): X \to \mathbf{R}$ ਨੂੰ ਸਾਰੀਆਂ $x \in X$ ਦੇ ਲਈ $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

(ii) **ਇਸ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਨੂੰ ਦੂਸਰੇ ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਉਣਾ (Subtraction of a real function from another) :** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f : X \to \mathbf{R}$ ਅਤੇ $g: X \to \mathbf{R}$ ਕੋਈ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਹਨ ਜਿੱਥੇ $X \subset \mathbf{R}$। ਤਾਂ ਅਸੀਂ $(f - g) : X \to \mathbf{R}$ ਨੂੰ ਸਾਰੇ $x \in X$ ਦੇ ਲਈ $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

(iii) **ਇੱਕ ਅਦਿਸ਼ (Scalar) ਨਾਲ ਗੁਣਾ (Multiplication by a scalar) :** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f : X \to \mathbf{R}$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਫਲਨ ਹਨ ਅਤੇ α ਇੱਕ ਅਦਿਸ਼ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਦਿਸ਼ ਦਾ ਮਤਲਬ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਗੁਣਨਫਲ αf, X ਤੋਂ R ਤੱਕ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ ਜੋ $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $x \in X$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iv) **ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ (Multiplication of two real functions):** ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨਾਂ $f : X \to \mathbf{R}$ ਅਤੇ $g : X \to \mathbf{R}$ ਤਾਂ ਗੁਣਨਫਲ (ਜਾਂ ਗੁਣਾ) ਇੱਕ ਫਲਨ $fg : X \to \mathbf{R}$ ਹੈ, ਜੋ ਸਾਰੇ $(fg)(x) = f(x)\, g(x)$, $x \in X$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਬਿੰਦੂ ਅਨੁਸਾਰ ਗੁਣਾ (Pointwise multiplication) ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

(v) **ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਭਾਗਫਲ (Quotient of two real functions) :** ਮੰਨ ਲਉ f ਅਤੇ g, $X \to \mathbf{R}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $X \subset \mathbf{R}$, f ਅਤੇ g ਦਾ ਭਾਗਫਲ ਜਿਸਨੂੰ $\frac{f}{g}$ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ, ਇਕ ਫਲਨ ਹੈ ਜੋ ਸਾਰੇ $x \in X$ ਜਿੱਥੇ $g(x) \neq 0$ ਦੇ ਲਈ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16 : ਮੰਨ ਲਓ $f(x) = x^2$ ਅਤੇ $g(x) = 2x + 1$, ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਫਲਨ ਹਨ ਤਾਂ

$$(f + g)(x),\ (f - g)(x),\ (fg)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x) \text{ ਪਤਾ ਕਰੋ।}$$

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$(f + g)(x) = x^2 + 2x + 1,\ (f - g)(x) = x^2 - 2x - 1,$$

$$(fg)(x) = x^2(2x + 1) = 2x^3 + x^2,\quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{2x+1},\ x \neq -\frac{1}{2}$$

ਉਦਾਹਰਣ 17 : ਮੰਨ ਲਓ $f(x) = \sqrt{x}$ ਅਤੇ $g(x) = x$ ਦੋ ਅਰਿਣਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਹਨ ਤਾਂ $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(fg)(x)$ ਅਤੇ $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ

$$(f + g)(x) = \sqrt{x} + x,\ (f - g)(x) = \sqrt{x} - x,$$

$$(fg)\,x = \sqrt{x}(x) = x^{\frac{3}{2}} \text{ ਅਤੇ } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} = x^{-\frac{1}{2}},\ x \neq 0$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਭਿਆਸ 2.3

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਫਲਨ ਹਨ ? ਕਾਰਨ ਦੱਸੋ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਫਲਨ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\{(2,1), (5,1), (8,1), (11,1), (14,1), (17,1)\}$

(ii) $\{(2,1), (4,2), (6,3), (8,4), (10,5), (12,6), (14,7)\}$

(iii) $\{(1,3), (1,5), (2,5)\}$

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $f(x) = -|x|$ (ii) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

3. ਇੱਕ ਫਲਨ f ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ $f(x) = 2x - 5$, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $f(0)$ (ii) $f(7)$ (iii) $f(-3)$

4. ਫਲਨ 't' ਜੋ ਸੈਲਸੀਅਸ ਤਾਪਮਾਨ ਦਾ ਫਾਰਨਹੀਟ ਤਾਪਮਾਨ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿ ਚਿਤਰਣ ਕਰਦਾ ਹੈ, $t(C) = \frac{9C}{5} + 32$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $t(0)$ (ii) $t(28)$ (iii) $t(-10)$ (iv) C ਦਾ ਮੁੱਲ ਜਦੋਂ $t(C) = 212$

5. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਵਿਸਥਾਰ ਪਤਾ ਕਰੋ :

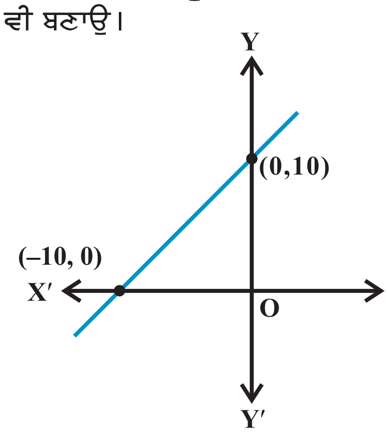
(i) $f(x) = 2 - 3x,\ x \in \mathbf{R},\ x > 0$

(ii) $f(x) = x^2 + 2$, x ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ

(iii) $f(x) = x$, x ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 18 : ਮੰਨ ਲਓ **R** ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ ਨੂੰ $f(x) = x + 10$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਆਲੇਖ ਵੀ ਬਣਾਉ।



$f(x) = x + 10$

ਚਿੱਤਰ 2.16

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $f(0) = 10, f(1) = 11, f(2) = 12, ..., f(10) = 20$, ਆਦਿ ਅਤੇ

$f(-1) = 9, f(-2) = 8, ..., f(-10) = 0$ ਆਦਿ

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ ਦੇ ਆਲੇਖ ਦਾ ਅਕਾਰ ਚਿੱਤਰ 2.16 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਰੂਪ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇਗਾ।

ਟਿੱਪਣੀ ਫਲਨ f, $f(x) = mx + c$, $x \in \mathbf{R}$, ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਰੇਖੀ ਫਲਨ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ m ਅਤੇ c ਅਚੱਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਉਪਰੋਕਤ ਫਲਨ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਫਲਨ ਦੀ ਉਦਾਹਰਣ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 19 : ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ R, **Q** ਤੋਂ **Q** ਵਿੱਚ R = $\{(a,b): a,b \in \mathbf{Q}$ ਅਤੇ $a-b \in \mathbf{Z}\}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

(i) $(a,a) \in$ R ਸਾਰੇ $a \in \mathbf{Q}$ ਦੇ ਲਈ

(ii) $(a,b) \in$ R ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ $(b, a) \in$ R

(iii) $(a,b) \in$ R ਅਤੇ $(b,c) \in$ R ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ $(a,c) \in$R

ਹੱਲ : (i) ਕਿਉਂਕਿ $a - a = 0 \in \mathbf{Z}$, ਇਸ ਤੋਂ ਸਿੱਟਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $(a, a) \in$ R ਹੋਵੇਗਾ।

(ii) $(a,b) \in$ R ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ $a - b \in \mathbf{Z}$, ਇਸ ਲਈ $b - a \in \mathbf{Z}$ ਹੋਵੇਗਾ, ਇਸ ਲਈ $(b, a) \in$ R

(iii) (a, b) ਅਤੇ $(b, c) \in$ R ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ $a - b \in \mathbf{Z}$, $b - c \in \mathbf{Z}$ ਹੁਣ

$a - c = (a - b) + (b - c) \in \mathbf{Z}$, ਇਸ ਲਈ $(a,c) \in$ R

ਉਦਾਹਰਣ 20 : ਮੰਨ ਲਓ $f = \{(1,1), (2,3), (0, -1), (-1, -3)\}$, **Z** ਤੋਂ **Z** ਤੱਕ ਦਾ ਇੱਕ ਰੇਖਿਕ ਫਲਨ ਹੈ, ਤਾਂ $f(x)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ f ਇੱਕ ਰੇਖਿਕ ਫਲ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $f(x) = mx + c$ ਹੁਣ ਕਿਉਂਕਿ $(1, 1), (0, -1) \in$ R,

$f(1) = m + c = 1$ ਅਤੇ $f(0) = c = -1$ ਇਸ ਤੋਂ $m = 2$ ਇਸ ਲਈ $f(x) = 2x - 1$

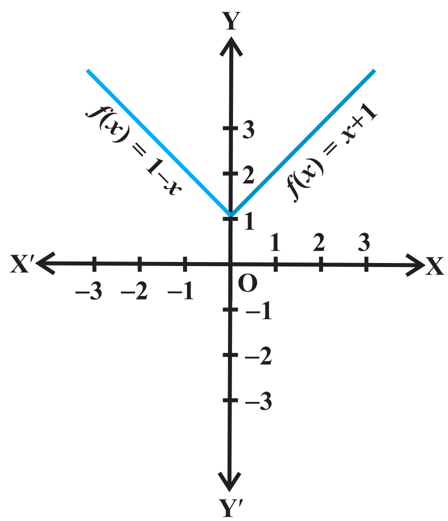
ਉਦਾਹਰਣ 21 : ਫਲਨ $f(x) = \dfrac{x^2+3x+5}{x^2-5x+4}$ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1)$, ਫਲਨ f ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸਿਰਫ਼ 4 ਅਤੇ 1 ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ f ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ $\mathbf{R} - \{1, 4\}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 22 : ਫਲਨ f,

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x<0 \\ 1 & , x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$$

ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। $f(x)$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚੋ।



ਚਿੱਤਰ 2.17

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $f(x) = 1 - x, x < 0$ ਇਸ ਤੋਂ

$f(-4) = 1 - (-4) = 5$

$f(-3) = 1 - (-3) = 4$

$f(-2) = 1 - (-2) = 3$

$f(-1) = 1 - (-1) = 2$ ਆਦਿ

ਅਤੇ $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4$

$f(4) = 5$ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ $f(x) = x + 1, x > 0$ ਲਈ

ਇਸ ਲਈ f ਦਾ ਆਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 2.17 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇਗਾ।

ਅਧਿਆਇ 2 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਸੰਬੰਧ f, $f(x) = \begin{cases} x^2, 0 \le x \le 3 \\ 3x, 3 \le x \le 10 \end{cases}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

ਸੰਬੰਧ g, $g(x) = \begin{cases} x^2, 0 \le x \le 2 \\ 3x, 2 \le x \le 10 \end{cases}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ f ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ g ਫਲਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

2. ਜੇਕਰ $f(x) = x^2$, ਤਾਂ $\dfrac{f(1.1) - f(1)}{(1.1 - 1)}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

3. ਫਲਨ $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 8x + 12}$ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. $f(x) = \sqrt{(x-1)}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ f ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. $f(x) = |x - 1|$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ f ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਮੰਨ ਲਓ $f = \left\{\left(x, \dfrac{x^2}{1+x^2}\right) : x \in \mathbf{R}\right\}$ ਇੱਕ **R** ਤੋਂ **R** ਤੱਕ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ। f ਦੀ ਵਿਸਥਾਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. ਮੰਨ ਲਓ $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $f(x) = x + 1$ ਅਤੇ $g(x) = 2x - 3$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ। $f + g$, $f - g$ ਅਤੇ $\dfrac{f}{g}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਮੰਨ ਲਓ $f = \{(1,1), (2,3), (0,-1), (-1, -3)\}$ **Z** ਤੋਂ **Z** ਤੱਕ $f(x) = ax + b$, ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ a, ਅਤੇ b ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। a ਅਤੇ b ਪਤਾ ਕਰੋ।

9. $R = \{(a, b) : a, b \in \mathbf{N}$ ਅਤੇ $a = b^2\}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ **N** ਤੋਂ **N** ਤੱਕ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ R ਹੈ। ਕੀ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ ?

(i) $(a,a) \in R$, ਸਾਰੇ $a \in \mathbf{N}$ ਲਈ (ii) $(a,b) \in R$, ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ $(b,a) \in R$

(iii) $(a,b) \in R$, $(b,c) \in R$ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ $(a,c) \in R$

ਹਰ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦਾ ਕਾਰਨ ਲਿਖੋ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

10. ਮੰਨ ਲਓ $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,5,9,11,15,16\}$ ਅਤੇ $f = \{(1,5), (2,9), (3,1), (4,5), (2,11)\}$

ਕੀ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਠੀਕ ਹਨ ?

(i) f ਇੱਕ A ਤੋਂ B ਤੱਕ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ (ii) f ਇੱਕ A ਤੋਂ B ਤੱਕ ਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

ਹਰ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰੋ।

11. ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ f, $f = \{(ab, a + b) : a, b \in \mathbf{Z}\}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ ਦਾ ਇੱਕ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਕਿ f, $\mathbf{Z}$ ਤੋਂ $\mathbf{Z}$ ਤੱਕ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰੋ।

12. ਮੰਨ ਲਓ $A = \{9,10,11,12,13\}$ ਅਤੇ $f : A \to \mathbf{N}$, $f(n) = n$ ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਅਭਾਜ ਭਾਜਕ ਹੈ। f ਦੀ ਵਿਸਥਾਰ (Range) ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸੰਬੰਧਾਂ ਅਤੇ ਫਲਨ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਦੀਆਂ ਮੁੱਖ ਗੱਲਾਂ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ।

- **ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜਾ** : ਕਿਸੇ ਖ਼ਾਸ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਇਕੱਠਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਜੋੜਾ।
- **ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਗੁਣਾ** ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਲਈ $A \times B$,

  $A \times B = \{(a, b): a \in A, b \in B\}$

  ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R}\}$

  ਅਤੇ $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y, z): x, y, z \in \mathbf{R}\}$
- ਜੇਕਰ $(a, b) = (x, y)$, ਤਾਂ $a = x$ ਅਤੇ $b = y$
- ਜੇਕਰ $n(A) = p$ ਅਤੇ $n(B) = q$, ਤਾਂ $n(A \times B) = pq$
- $A \times \phi = \phi$
- ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ $A \times B \neq B \times A$.
- **ਸੰਬੰਧ** ਸਮੂਹ A ਤੋਂ ਸਮੂਹ B ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਗੁਣਾ $A \times B$ ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜਿਸਨੂੰ $A \times B$ ਦੇ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਪਹਿਲੇ ਤੱਤ x ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਤੱਤ y ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਦਰਸਾ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- ਕਿਸੇ ਤੱਤ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ ਸੰਬੰਧ R ਤਹਿਤ y ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $(x, y) \in R$
- ਸੰਬੰਧ R ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ, R ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਗਏ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
- ਸੰਬੰਧ R ਦੀ ਵਿਸਥਾਰ, R ਵਿਚਲੇ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਤੱਤ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
- **ਫਲਨ** ਸਮੂਹ A ਤੋਂ ਸਮੂਹ B ਵਿੱਚ ਫਲਨ f ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸਮੂਹ A ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਤੱਤ x ਦਾ ਸਮੂਹ B ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ y ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ $f: A \to B$, ਜਿੱਥੇ $f(x) = y$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।
- ਫਲਨ f ਦੀ A ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ B ਸਹਿ-ਪ੍ਰਾਂਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
- ਫਲਨ f ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ, f ਦੇ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਕਿਸੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਦੋਵੇਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਜਾਂ ਉਸਦਾ ਇੱਕ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

◆ **ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਬੀਜਗਣਿਤ (Algebra of Functions)** ਫਲਨ $f : X \to \mathbf{R}$ ਅਤੇ $g : X \to \mathbf{R}$, ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), x \in X$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), x \in X$$

$$(f.g)(x) = f(x) .g(x), x \in X$$

$$(kf)(x) = k f(x), x \in X, k \text{ ਕੋਈ ਅੱਚਲ ਹੈ।}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in X, g(x) \neq 0$$

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

"Function" (ਫਲਨ) ਸ਼ਬਦ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ Gottfried Wiehelm Leibnitz (1646-1716 ਈ.) ਦੁਆਰਾ ਸੰਨ 1673 ਵਿੱਚ ਲਾਤੀਨੀ ਪਾਂਡੂਲਿਪੀ, ਲਿਖਤ (Latin manuscript) ਲਿਖਤ "Method's tangentium inversa seu de functionibus" ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਗਿਆ। Leibnitz ਨੇ ਇਸ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਅਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਨਾਤਮਕ ਭਾਵ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ। ਉਸਨੇ ਫਲਨ ਨੂੰ ਗਣਿਤਿਕ ਕੰਮ ਅਤੇ ਕਰਮਚਾਰੀ ਦੇ ਪਦਾਂ ਦੁਆਰਾ ਉਤਪੰਨ ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਵਕਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਮੰਨਿਆ।

5 ਜੁਲਾਈ 1968 ਵਿੱਚ John Bernoullc ਨੇ Leibnitz ਨੂੰ ਲਿਖੇ ਇੱਕ ਪੱਤਰ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੀ ਵਾਰ ਜਾਣ ਬੁਝ ਕੇ "Function" (ਫਲਨ) ਸ਼ਬਦ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਨਾਤਮਕ ਤੌਰ 'ਤੇ ਕੀਤੀ। ਉਸੇ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ Leibnitz ਨੇ ਆਪਣੀ ਸਹਿਮਤੀ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹੋਏ ਉੱਤਰ ਵੀ ਦਿੱਤਾ।

ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ "Function" (ਫਲਨ) ਸ਼ਬਦ ਸੰਨ 1779 ਨੂੰ "Champber's Cyclopaedia" ਵਿੱਚ ਪਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਫਲਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਅਤੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਾਂ ਅਚੱਲ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਸੰਯੁਕਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਣੇ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਨਾਤਮਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ (expressions) ਦੇ ਲਈ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ।

— ❖ —

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਧਿਆਇ 3

ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨ
(Trigonometric Functions)

❖*A mathematician knows how to solve a problem, he can not solve it. – MILNE* ❖

3.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਸ਼ਬਦ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦੋ ਗ੍ਰੀਕ ਸ਼ਬਦਾਂ 'trigon' ਅਤੇ 'metron' ਦੇ ਸੁਮੇਲ ਤੋਂ ਬਣਿਆ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਅਰਥ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਮਾਪਣਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਮੂਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਵਿਸ਼ੇ ਦਾ ਵਿਕਾਸ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਜਿਆਮਿਤੀ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਇਸਦਾ ਅਧਿਐਨ ਸਮੁੰਦਰੀ ਯਾਤਰਾਂਵਾਂ ਦੇ ਕਪਤਾਨਾਂ, ਸਰਵੇਅਰ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੇ ਨਵੇਂ ਭੂਮੀ ਭਾਗਾਂ ਦਾ ਚਿੱਤਰ ਤਿਆਰ ਕਰਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇੰਜੀਨੀਅਰਾਂ ਆਦਿ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਵਰਤਮਾਨ ਵਿੱਚ ਇਸਦਾ ਉਪਯੋਗ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਖੇਤਰਾਂ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਿਸਮੋਲੋਜੀ (Seismology) ਦਾ ਵਿਗਿਆਨ, ਬਿਜਲੀ ਸਰਕਟ ਦੇ ਡਿਜ਼ਾਇਨ ਤਿਆਰ ਕਰਨਾ, ਅਣੂ (atom) ਦੀ ਅਵਸਥਾ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰਨਾ, ਸਮੁੰਦਰ ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਜਵਾਰਭਾਟੇ ਦੀ ਉਚਾਈ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਪੂਰਣ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਉਣਾ, ਸੰਗੀਤਿਕ ਲੈਅ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਕਰਨਾ ਅਤੇ ਹੋਰ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਦੂਸਰੇ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

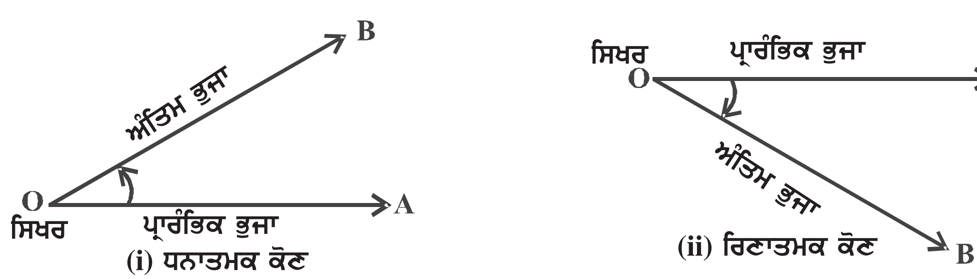
Arya Bhatt
(476-550)

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਨਿਊਨ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਨੁਪਾਤਾਂ, ਜਿਨਾਂ ਨੂੰ ਸਮਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਜਾਂ ਤਤਸਮਕਾਂ ਅਤੇ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਉਚਾਈ ਅਤੇ ਦੂਰੀ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਦਾ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਧਰਮਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

3.2 ਕੋਣ (Angles)

ਕੋਣ ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੀ ਕਿਰਣ ਦੇ ਉਸਦੇ ਆਰੰਭਿਕ ਜਾਂ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਜਾਂ ਪ੍ਰਾਰੰਭਿਕ (ਪਹਿਲੇ) ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਹੋਏ ਘੁਮਾਅ ਨੂੰ ਮਾਪਣਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿਰਣ ਦੇ ਘੁੰਮਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ "ਪ੍ਰਾਰੰਭਿਕ ਭੁਜਾ" (initial side) ਅਤੇ ਘੁੰਮਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਅੰਤਿਮ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਪਹੁੰਚੀ ਕਿਰਣ ਨੂੰ ਕੋਣ ਦੀ "ਅੰਤਿਮ ਭੁਜਾ" ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਕਿਰਣ ਜਿਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਘੁੰਮ ਰਹੀ ਹੈ, ਉਸ ਨੂੰ 'ਸਿਖਰ' ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਘੁੰਮਣ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਘੜੀ ਦੇ ਉਲਟ (anticlockwise) ਹੈ ਤਾਂ ਕੋਣ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਘੁੰਮਣ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਘੜੀ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ (clockwise) ਹੈ ਤਾਂ ਕੋਣ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ। (ਚਿੱਤਰ 3.1)

ਕਿਸੇ ਕੋਣ ਦਾ ਮਾਪ, ਘੁੰਮਣ ਦੀ ਉਹ ਮਾਤਰਾ ਹੈ ਜੋ ਪ੍ਰਾਰੰਭਿਕ ਸਥਿਤੀ ਤੋਂ ਅੰਤਿਮ ਸਥਿਤੀ ਤੱਕ ਘੁੰਮਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.1

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਕੋਣ ਨੂੰ ਮਾਪਣ ਦੀਆਂ ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਇਕਾਈਆਂ ਹਨ। ਕੋਣ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਇਸਦੀ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਦਾ ਸੁਝਾਅ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਚਿੱਤਰ 3.2 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਾਰੰਭਿਕ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਥਿਤੀ ਤੋਂ ਇਕ ਪੂਰੇ ਘੁਮਾਅ ਨੂੰ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਮੰਨਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

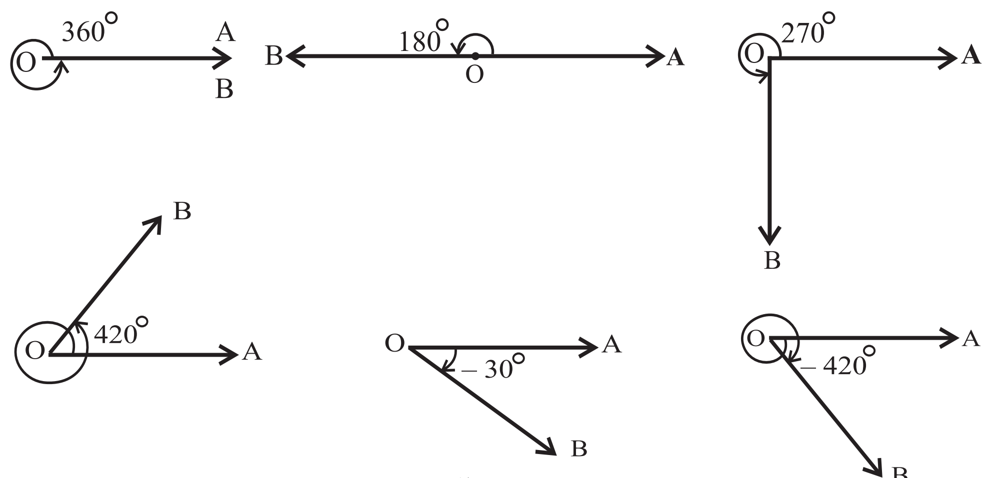
ਇਹ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵੱਡੇ ਕੋਣਾਂ ਲਈ ਸੁਵਿਧਾਜਨਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਬਹੁਤ ਤੇਜ਼ੀ ਨਾਲ ਘੁੰਮਣ ਵਾਲਾ ਪਹੀਆ (ਚੱਕਰ) ਇੱਕ ਸੈਕਿੰਡ ਵਿੱਚ 15 ਚੱਕਰ ਕੱਢਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕੋਣ ਨੂੰ ਮਾਪਣ ਨੂੰ ਹੋਰ ਦੋ ਪ੍ਰਚੱਲਿਤ ਇਕਾਈਆਂ ਜਿੰਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ 'ਡਿਗਰੀ ਮਾਪ ਅਤੇ ਰੇਡੀਅਨ' ਮਾਪ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ।

ਚਿੱਤਰ 3.2

3.2.1 ਡਿਗਰੀ ਮਾਪ (Degree measure) ਜੇਕਰ ਪ੍ਰਾਰੰਭਿਕ ਭੁਜਾ ਤੋਂ ਅੰਤਿਮ ਭੁਜਾ ਦਾ ਘੁਮਾਵ ਇੱਕ ਪੂਰੇ ਚੱਕਰ ਦਾ $\left(\frac{1}{360}\right)$ਵਾਂ ਭਾਗ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਕੋਣ ਦੇ ਮਾਪ ਨੂੰ 1 ਡਿਗਰੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ 1° ਲਿਖਦੇ ਹਨ। ਇੱਕ ਡਿਗਰੀ 60 ਮਿੰਟਾਂ ਵਿੱਚ ਅਤੇ 1 ਮਿੰਟ 60 ਸੈਕਿੰਡਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਕ ਡਿਗਰੀ ਦੇ 60ਵੇਂ ਭਾਗ ਨੂੰ 1 ਮਿੰਟ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਜਿਸ ਨੂੰ $1'$ ਲਿਖਦੇ ਹਨ ਅਤੇ 1 ਮਿੰਟ ਦੇ 60 ਵੇਂ ਭਾਗ ਨੂੰ 1 ਸੈਕਿੰਡ ਜਿਸ ਨੂੰ $1''$ ਲਿਖਦੇ ਹਨ।

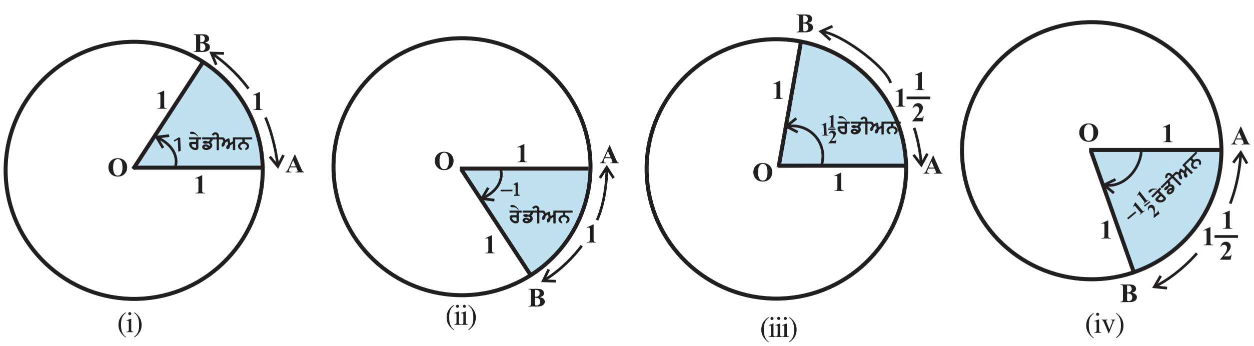
ਇਸ ਲਈ $\qquad 1^\circ = 60', \qquad 1' = 60''$

ਕੁਝ ਕੋਣ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਮਾਪ $360^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 420^\circ, -30^\circ, -420^\circ$ ਹੈ, ਚਿੱਤਰ 3.3 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 3.3

3.2.2 ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ (Radian measure) ਕੋਣ ਮਾਪਣ ਦੀ ਇਕ ਹੋਰ ਇਕਾਈ ਜਿਸਨੂੰ 'ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ' ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਵੀ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੀ ਚਾਪ ਦੁਆਰਾ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ (ਜਿਸਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 1 ਇਕਾਈ ਹੈ) ਦੇ ਮਾਪ ਨੂੰ ਇਕ ਰੇਡੀਅਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਚਿੱਤਰ 3.4 (i) ਤੋਂ (iv) ਵਿੱਚ OA ਅਰੰਭਿਕ ਜਾਂ ਪ੍ਰਾਰੰਭਿਕ ਅਤੇ OB ਅੰਤਿਮ ਭੁਜਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.4 (i) to (iv)

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

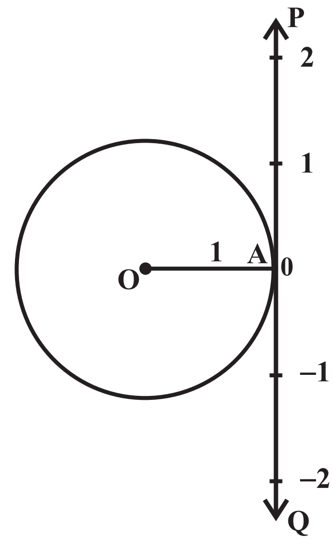
ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ 1ਰੇਡੀਅਨ, –1 ਰੇਡੀਅਨ, $1\frac{1}{2}$ ਰੇਡੀਅਨ ਅਤੇ $-1\frac{1}{2}$ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ ਵਾਲੇ ਕੋਣ ਦਿਖਾਏ ਗਏ ਹਨ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 1 ਇਕਾਈ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਘੇਰਾ 2π ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਆਰੰਭਿਕ ਭੁਜਾ ਦਾ ਪੂਰਾ ਚੱਕਰ ਕੇਂਦਰ ਤੇ 2π ਰੇਡੀਅਨ ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ r ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੀ ਚਾਪ, ਕੇਂਦਰ ਤੇ 1 ਰੇਡੀਅਨ ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈਆਂ ਵਾਲੀਆਂ ਚਾਪਾਂ, ਕੇਂਦਰ ਤੇ ਬਰਾਬਰ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚ, r ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੀ ਚਾਪ, ਕੇਂਦਰ ਤੇ ਇੱਕ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ l ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੀ ਚਾਪ ਕੇਂਦਰ ਤੇ $\frac{l}{r}$ ਰੇਡੀਅਨ ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਏਗੀ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ r ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਤੇ l ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੀ ਚਾਪ ਕੇਂਦਰ ਤੇ θ ਰੇਡੀਅਨ ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ $\theta = \frac{l}{r}$ ਜਾਂ $l = r\,\theta$.

3.2.3 ਰੇਡੀਅਨ ਅਤੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ (Relation between radian and real numbers)

ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਦਾ ਚੱਕਰ ਜਿਸਦਾ ਕੇਂਦਰ O ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਚੱਕਰ ਤੇ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ A ਹੈ। OA ਨੂੰ ਕੋਣ ਦੀ ਆਰੰਭਿਕ ਭੁਜਾ ਮੰਨੋ ਤਾਂ ਚੱਕਰ ਦੇ ਚਾਪ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਚਾਪ ਦੁਆਰਾ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਤੇ ਬਣਾਏ ਕੋਣ ਦੇ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗੀ। ਮੰਨ ਲਉ ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਿੰਦੂ A ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ PAQ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਬਿੰਦੂ A ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ 0 (ਸਿਫ਼ਰ) ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, AP ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ AQ ਰਿਣਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 3.5)। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਰੇਖਾ AP ਨੂੰ ਘੜੀ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਉਲਟ, ਚੱਕਰ ਦੇ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਘੁਮਾਈਏ ਅਤੇ AQ ਨੂੰ ਘੜੀ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਸਾਰ ਘੁਮਾਈਏ, ਤਾਂ ਹਰ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ, ਇੱਕ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ ਦੇ ਸੰਗਤ ਹੋਵੇਗੀ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਉਲਟ ਵੀ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ ਅਤੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਮੰਨਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.5

3.2.4 ਡਿਗਰੀ ਅਤੇ ਰੇਡੀਅਨ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ (Relation between degree and radian)

ਕਿਉਂਕਿ ਚੱਕਰ ਕੇਂਦਰ ਤੇ ਇੱਕ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਦਾ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ 2π ਅਤੇ ਡਿਗਰੀ ਮਾਪ 360° ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$$2\pi \text{ ਰੇਡੀਅਨ} = 360^\circ \qquad \text{ਜਾਂ} \qquad \pi \text{ ਰੇਡੀਅਨ} = 180^\circ$$

ਉਪਰੋਕਤ ਸੰਬੰਧ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ ਨੂੰ ਡਿਗਰੀ ਮਾਪ ਅਤੇ ਡਿਗਰੀ ਮਾਪ ਨੂੰ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। π ਦੇ ਲਗਭਗ ਮੁੱਲ $\frac{22}{7}$ ਨੂੰ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$1 \text{ ਰੇਡੀਅਨ} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ\ 16' \text{ ਲਗਭਗ}$$

ਅਤੇ $$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ ਰੇਡੀਅਨ} = 0.01746 \text{ ਰੇਡੀਅਨ ਲਗਭਗ}$$

ਕੁਝ ਆਮ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਡਿਗਰੀ ਮਾਪ ਅਤੇ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ ਵਿਚਲਾ ਸੰਬੰਧ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

ਡਿਗਰੀ	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
ਰੇਡੀਅਨ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਚਿੰਨਾਤਮਕ ਮਨੌਤ (Notational Convention)

ਕਿਉਂਕਿ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਜਾਂ ਤਾਂ ਡਿਗਰੀ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਰੇਡੀਅਨ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਦੋਂ ਕੋਣ $\theta°$ ਲਿਖਿਆ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਕੋਣ ਜਿਸਦਾ ਡਿਗਰੀ ਮਾਪ θ ਹੈ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਕੋਣ β ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕੋਣ ਜਿਸਦਾ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ β ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਜਦੋਂ ਕੋਣ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਸ਼ਬਦ ਰੇਡੀਅਨ ਲਿਖਣਾ ਛੱਡ ਦਿੰਦੇ ਹਨ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\pi = 180°$ ਅਤੇ $\frac{\pi}{4} = 45°$, ਇਸ ਵਿਚਾਰ ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ π ਅਤੇ $\frac{\pi}{4}$ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\text{ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ} = \frac{\pi}{180} \times \text{ਡਿਗਰੀ ਮਾਪ}$$

$$\text{ਡਿਗਰੀ ਮਾਪ} = \frac{180}{\pi} \times \text{ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ}$$

ਉਦਾਹਰਣ 1 : $40°\ 20'$ ਨੂੰ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $180° = \pi$ ਰੇਡੀਅਨ

ਇਸ ਲਈ $\quad 40°\ 20' = 40\frac{1}{3}$ ਡਿਗਰੀ $= \frac{\pi}{180} \times \frac{121}{3}$ ਰੇਡੀਅਨ $= \frac{121\pi}{540}$ ਰੇਡੀਅਨ

ਇਸ ਲਈ $\quad 40°\ 20' = \frac{121\pi}{540}$ ਰੇਡੀਅਨ

ਉਦਾਹਰਣ 2 : 6 ਰੇਡੀਅਨ ਨੂੰ ਡਿਗਰੀ ਮਾਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ π ਰੇਡੀਅਨ $= 180°$

ਇਸ ਲਈ $\quad 6$ ਰੇਡੀਅਨ $= \frac{180}{\pi} \times 6$ ਡਿਗਰੀ $= \frac{1080 \times 7}{22}$ ਡਿਗਰੀ

$= 343\frac{7}{11}$ ਡਿਗਰੀ $= 343° + \frac{7 \times 60}{11}$ ਮਿੰਟ $\quad$ [ਕਿਉਂਕਿ $1° = 60'$]

$= 343° + 38' + \frac{2}{11}$ ਮਿੰਟ $\quad$ [ਕਿਉਂਕਿ $1' = 60''$]

$= 343° + 38' + 10.9'' = 343° 38'\ 11''$ ਲਗਭਗ

ਇਸ ਲਈ $\quad 6$ ਰੇਡੀਅਨ $= 343°\ 38'\ 11''$ ਲਗਭਗ

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਉਸ ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ 37.4 ਸੈਂ. ਮੀ. ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੀ ਚਾਪ, ਚੱਕਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਤੇ $60°$ ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ($\pi = \frac{22}{7}$ ਵਰਤੋ)

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $l = 37.4$ ਸੈਂ. ਮੀ. ਅਤੇ $\theta = 60° = \frac{60\pi}{180}$ ਰੇਡੀਅਨ $= \frac{\pi}{3}$ ਰੇਡੀਅਨ

ਹੁਣ, $\quad r = \frac{l}{\theta}$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ

$$r = \frac{37.4 \times 3}{\pi} = \frac{37.4 \times 3 \times 7}{22} = 35.7 \text{ ਸੈਂ. ਮੀ.}$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਇੱਕ ਘੜੀ ਵਿੱਚ ਮਿੰਟਾਂ ਦੀ ਸੂਈ 1.5 ਸੈਂ. ਮੀ. ਲੰਬੀ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਨੋਕ 40 ਮਿੰਟਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰੇਗੀ। ($\pi = 3.14$ ਵਰਤੋ)

ਹੱਲ : 60 ਮਿੰਟਾਂ ਵਿੱਚ, ਘੜੀ ਦੀ ਮਿੰਟਾਂ ਵਾਲੀ ਸੂਈ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਪੂਰਾ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 40 ਮਿੰਟਾਂ ਵਿੱਚ, ਮਿੰਟਾਂ ਵਾਲੀ ਸੂਈ ਪੂਰੇ ਚੱਕਰ ਦਾ $\frac{2}{3}$ ਹਿੱਸਾ ਤੈਅ ਕਰੇਗੀ। ਇਸ ਲਈ $\theta = \frac{2}{3} \times 360°$ ਜਾਂ $\frac{4\pi}{3}$ ਰੇਡੀਅਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦੀ ਦੂਰੀ ਜੋ ਮਿੰਟਾਂ ਵਾਲੀ ਸੂਈ ਦੁਆਰਾ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ :

$$l = r\,\theta = 1.5 \times \frac{4\pi}{3} \text{ ਸੈਂ. ਮੀ.} = 2\pi \text{ ਸੈਂ. ਮੀ.} = 2 \times 3.14 \text{ ਸੈਂ. ਮੀ.} = 6.28 \text{ ਸੈਂ. ਮੀ.}$$

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਜੇਕਰ ਦੋ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀ ਲੰਬਾਈ ਦੀਆਂ ਚਾਪਾਂ ਦੋ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਤੇ 65° ਅਤੇ 110° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਦੋ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r_1 ਅਤੇ r_2 ਹਨ, ਦਿੱਤਾ ਹੈ

$$\theta_1 = 65° = \frac{\pi}{180} \times 65 = \frac{13\pi}{36} \text{ ਰੇਡੀਅਨ}$$

ਅਤੇ $$\theta_2 = 110° = \frac{\pi}{180} \times 110 = \frac{22\pi}{36} \text{ ਰੇਡੀਅਨ}$$

ਮੰਨ ਲਓ ਹਰ ਇੱਕ ਚਾਪ ਦੀ ਲੰਬਾਈ l ਹੈ, ਤਾਂ $l = r_1\theta_1 = r_2\theta_2$ ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ,

$$\frac{13\pi}{36} \times r_1 = \frac{22\pi}{36} \times r_2, \text{ ਭਾਵ, } \frac{r_1}{r_2} = \frac{22}{13}$$

ਇਸ ਲਈ $$r_1 : r_2 = 22 : 13$$

ਅਭਿਆਸ 3.1

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਡਿਗਰੀ ਮਾਪ ਵਾਲੇ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ।
   (i) 25° (ii) – 47°30′ (iii) 240° (iv) 520°
2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ ਦੇ ਸੰਗਤ ਡਿਗਰੀ ਮਾਪ ਪਤਾ ਕਰੋ ($\pi = \frac{22}{7}$ ਵਰਤੋ)
   (i) $\frac{11}{16}$ (ii) -4 (iii) $\frac{5\pi}{3}$ (iv) $\frac{7\pi}{6}$
3. ਇੱਕ ਪਹੀਆ ਇੱਕ ਮਿੰਟ ਵਿੱਚ 360 ਚੱਕਰ ਕੱਢਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਇੱਕ ਸੈਕਿੰਡ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਏਗਾ ?
4. ਇੱਕ 22 ਸੈਂ. ਮੀ. ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੀ ਚਾਪ, ਇੱਕ 100 ਸੈਂ. ਮੀ. ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਤੇ ਕਿੰਨੇ ਡਿਗਰੀ ਮਾਪ ਵਾਲਾ ਕੋਣ ਬਣਾਏਗੀ। ($\pi = \frac{22}{7}$ ਵਰਤੋ)
5. ਇਕ ਚੱਕਰ ਜਿਸਦਾ ਵਿਆਸ 40 ਸੈਂ. ਮੀ. ਹੈ, ਦੀ ਇੱਕ ਜੀਵਾ (ਵਤਰ) 20 ਸੈਂ. ਮੀ. ਲੰਬੀ ਹੈ। ਇਸ ਵਤਰ (ਜੀਵਾ) ਦੇ ਸੰਗਤ ਛੋਟੇ ਚਾਪ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਜੇਕਰ ਦੋ ਚੱਕਰਾਂ ਵਿੱਚ, ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੀਆਂ ਚਾਪਾਂ ਕੇਂਦਰ ਤੇ 60° ਅਤੇ 75° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਣ, ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. 75 ਸੈਂ. ਮੀ. ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਡੋਲਣ (Pendulum) ਦੇ ਇੱਕ ਸਿਰੇ ਤੋਂ ਦੂਸਰੇ ਸਿਰੇ ਤੱਕ ਝੂਲਣ (Swing) ਨਾਲ ਜੋ ਕੋਣ ਬਣਦਾ ਹੈ, ਉਸਨੂੰ ਰੇਡੀਅਨ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਚਾਪ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇ :
   (i) 10 ਸੈਂ. ਮੀ. (ii) 15 ਸੈਂ. ਮੀ. (iii) 21 ਸੈਂ. ਮੀ.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

3.3 ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨ (Trigonometric Functions)

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਨਿਊਨ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਨੂੰ ਸਮਕੋਣੀ ਤਿਕੋਣ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਵਜੋਂ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਕੋਣ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਨੁਪਾਤ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪੜਾਂਗੇ।

ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕੀ ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ, ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵਾਲਾ ਚੱਕਰ ਬਣਾਉ।

ਮੰਨ ਲਉ P (a, b) ਇਸ ਚੱਕਰ ਤੇ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਕੋਣ AOP = x ਰੇਡੀਅਨ ਹੈ। ਭਾਵ, ਚਾਪ AP ਦੀ ਲੰਬਾਈ = x (ਚਿੱਤਰ 3.6).

ਅਸੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $\cos x = a$ ਅਤੇ $\sin x = b$

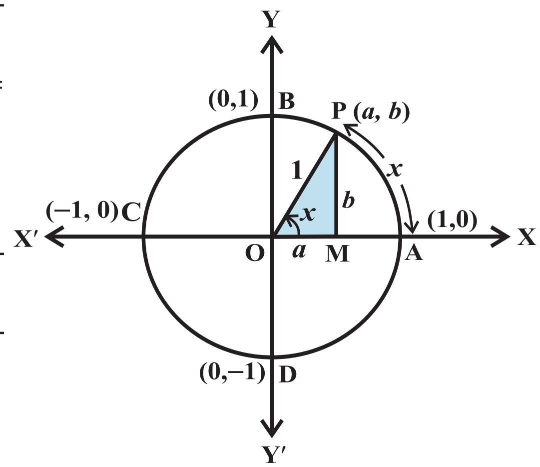
ਕਿਉਂਕਿ ΔOMP ਇੱਕ ਸਮਕੋਣੀ ਤਿਕੋਣ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$OM^2 + MP^2 = OP^2$ ਜਾਂ $a^2 + b^2 = 1$

ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਲਈ

$a^2 + b^2 = 1$ ਜਾਂ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਪੂਰਾ ਚੱਕਰ, ਚੱਕਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਤੇ 2π ਰੇਡੀਅਨ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ, $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$, $\angle AOC = \pi$ ਅਤੇ $\angle AOD = \frac{3\pi}{2}$.



ਚਿੱਤਰ 3.6

$\frac{\pi}{2}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਪੂਰਨ ਗੁਣਜਾਂ ਨੂੰ ਚੌਥਾਈਆਂ ਦੇ ਕੋਣ (Quadrantal angles) ਆਖਦੇ ਹਨ। A, B, C ਅਤੇ D ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ (1, 0), (0, 1), (–1, 0) ਅਤੇ (0, –1) ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਚੌਥਾਈਆਂ ਦੇ ਕੋਣ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$\cos 0° = 1 \qquad \sin 0° = 0$

$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \qquad \sin \frac{\pi}{2} = 1$

$\cos\pi = -1 \qquad \sin\pi = 0$

$\cos \frac{3\pi}{2} = 0 \qquad \sin \frac{3\pi}{2} = -1$

$\cos 2\pi = 1 \qquad \sin 2\pi = 0$

ਹੁਣ, ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਇੱਕ ਪੂਰਾ ਚੱਕਰ ਕੱਢੀਏ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਫਿਰ ਵਾਪਿਸ ਬਿੰਦੂ P ਤੇ ਆ ਜਾਵਾਂਗੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ x, 2π ਦੇ ਸੰਪੂਰਨ ਗੁਣਜ ਨਾਲ ਵੱਧਦੀ (ਜਾਂ ਘੱਟਦੀ) ਹੈ ਤਾਂ sine ਅਤੇ cosine ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਬਦਲਦਾ ਨਹੀਂ। ਇਸ ਲਈ $\sin(2n\pi + x) = \sin x$, $n \in \mathbf{Z}$, $\cos(2n\pi + x) = \cos x$, $n \in \mathbf{Z}$. ਫਿਰ ਤੋਂ

$\sin x = 0$, ਜੇਕਰ $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$, ਭਾਵ, ਜਦੋਂ x, π ਦਾ ਸੰਪੂਰਨ ਗੁਣਜ ਹੈ।

ਅਤੇ $\cos x = 0$, ਜੇਕਰ $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$ ਭਾਵ, $\cos x$ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ x, $\frac{\pi}{2}$ ਦਾ ਟਾਂਕ ਗੁਣਾਂਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$\sin x = 0$ ਤੋਂ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $x = n\pi$, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

$\cos x = 0$ ਤੋਂ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੂਸਰੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ sine ਅਤੇ cosine ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਾਂਗੇ :

$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$, $x \neq n\pi$, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $x \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$$, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, x \neq n\pi$$, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ x ਲਈ ਦੇਖਿਆ ਹੈ, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ (ਕਿਉਂ?)

$1 + \cot^2 x = \text{cosec}^2 x$ (ਕਿਉਂ?)

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ 0°, 30°, 45°, 60° ਅਤੇ 90° ਅਤੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਉਹ ਹੀ ਹੈ ਜੋ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

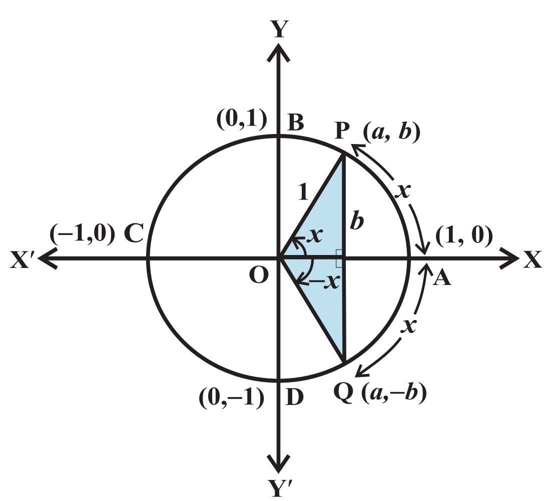
	0°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	– 1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	– 1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ	0	ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ	0

cosec x, sec x ਅਤੇ cot x ਦੇ ਮੁੱਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ sin x, cos x ਅਤੇ tan x ਦੇ ਉਲਟ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

3.3.1 ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹ (Sign of trigonometric functions) ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਤੇ ਜਿਸਦਾ ਕੇਂਦਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਉਪਰ ਹੈ, P (a, b) ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $\angle AOP = x$ ਜੇਕਰ $\angle AOQ = -x$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਬਿੰਦੂ Q ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(a, -b)$ ਹੋਣਗੇ (ਚਿੱਤਰ 3.7)। ਇਸ ਲਈ

$\cos(-x) = \cos x$

ਅਤੇ $\sin(-x) = -\sin x$



ਚਿੱਤਰ 3.7

ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P (a, b) ਲਈ $-1 \leq a \leq 1$ ਅਤੇ $-1 \leq b \leq 1$, ਇਸ ਲਈ x ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ $-1 \leq \cos x \leq 1$ ਅਤੇ $-1 \leq \sin x \leq 1$

ਅਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ $(0 < x < \frac{\pi}{2})$ ਵਿੱਚ a ਅਤੇ b ਦੋਵੇਂ ਧਨਾਤਮਕ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਦੂਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ $(\frac{\pi}{2} < x < \pi)$ a ਰਿਣਾਤਮਕ ਅਤੇ b ਧਨਾਤਮਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤੀਸਰੀ ਚੌਥਾਈ $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ ਵਿੱਚ a ਅਤੇ b ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਚੌਥੀ ਚੌਥਾਈ $(\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi)$ ਵਿੱਚ a ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ b

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $0 < x < \pi$, ਲਈ Sin x ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ $\pi < x < 2\pi$ ਵਿੱਚ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ cos x, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ਲਈ ਧਨਾਤਮਕ, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ਲਈ ਰਿਣਾਤਮਕ ਅਤੇ $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ ਲਈ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਅਸੀਂ ਸਾਰੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਚੌਥਾਈਆਂ ਵਿੱਚ ਨਿਸ਼ਾਨ ਜਾਣ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਸਾਰਣੀ ਹੈ :

	I	II	III	IV
sin x	+	+	–	–
cos x	+	–	–	+
tan x	+	–	+	–
cosec x	+	+	–	–
sec x	+	–	–	+
cot x	+	–	+	–

3.3.2 ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ (Domain and range of trigonometric functions) sine ਅਤੇ cosine ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ x ਲਈ

$$-1 \le \sin x \le 1 \text{ ਅਤੇ } -1 \le \cos x \le 1$$

ਇਸ ਲਈ $y = \sin x$ ਅਤੇ $y = \cos x$ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ $[-1, 1]$, ਦਾ ਅੰਤਰਾਲ ਹੈ, ਭਾਵ $-1 \le y \le 1$.

ਕਿਉਂਕਿ $\text{cosec } x = \frac{1}{\sin x}$, ਇਸ ਲਈ $y = \text{cosec } x$ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਸਮੂਹ $\{ x : x \in \mathbf{R}$ ਅਤੇ $x \ne n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਵਿਸਥਾਰ $\{y : y \in \mathbf{R}, y \ge 1$ ਜਾਂ $y \le -1\}$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $y = \sec x$ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਸਮੂਹ $\{x : x \in \mathbf{R}$ ਅਤੇ $x \ne (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}\}$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ $\{y : y \in \mathbf{R}, y \le -1$ ਜਾਂ $y \ge 1\}$ ਹੈ। $y = \tan x$ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਸਮੂਹ $\{x : x \in \mathbf{R}$ ਅਤੇ $x \ne (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। $y = \cot x$ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਸਮੂਹ $\{x : x \in \mathbf{R}$ ਅਤੇ $x \ne n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ x, 0 ਤੋਂ $\frac{\pi}{2}$ ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ, sin x, 0 ਤੋਂ 1 ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ। ਜਦੋਂ x, $\frac{\pi}{2}$ ਤੋਂ π ਤੱਕ ਵੱਧਦੀ ਹੈ, sin x, 1 ਤੋਂ 0 ਤੱਕ ਘੱਟਦਾ ਹੈ। ਤੀਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ x, π ਤੋਂ $\frac{3\pi}{2}$ ਤੱਕ ਵੱਧਦੀ ਹੈ, sin x, 0 ਤੋਂ -1 ਤੱਕ ਘੱਟਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਆਖ਼ਿਰ ਵਿੱਚ ਚੌਥੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ, sin x, -1 ਤੋਂ 0 ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ x, $\frac{3\pi}{2}$ ਤੋਂ 2π ਤੱਕ ਵੱਧਦੀ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਅਸੀਂ ਬਾਕੀ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਤੇ ਵੀ ਵਿਚਾਰ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਾਰਣੀ ਹੈ।

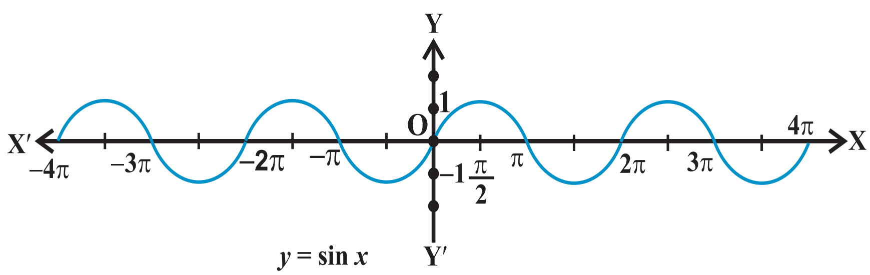
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

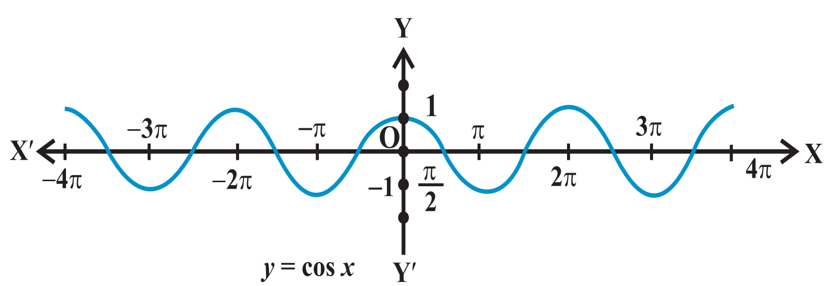
	I ਚੌਥਾਈ	II ਚੌਥਾਈ	III ਚੌਥਾਈ	IV ਚੌਥਾਈ
sin	0 ਤੋਂ 1 ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ	1 ਤੋਂ 0 ਤੱਕ ਘੱਟਦਾ ਹੈ	0 ਤੋਂ –1 ਤੱਕ ਘੱਟਦਾ ਹੈ	–1 ਤੋਂ 0 ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ
cos	1 ਤੋਂ 0 ਤੱਕ ਘੱਟਦਾ ਹੈ	0 ਤੋਂ – 1 ਤੱਕ ਘੱਟਦਾ ਹੈ	–1 ਤੋਂ 0 ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ	0 ਤੋਂ 1 ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ
tan	0 ਤੋਂ ∞ ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ	–∞ ਤੋਂ 0 ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ	0 ਤੋਂ ∞ ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ	–∞ ਤੋਂ 0 ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ
cot	∞ ਤੋਂ 0 ਤੱਕ ਘੱਟਦਾ ਹੈ	0 ਤੋਂ–∞ ਤੱਕ ਘੱਟਦਾ ਹੈ	∞ ਤੋਂ 0 ਤੱਕ ਘੱਟਦਾ ਹੈ	0 ਤੋਂ –∞ ਤੱਕ ਘੱਟਦਾ ਹੈ
sec	1 ਤੋਂ ∞ ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ	–∞ ਤੋਂ–1 ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ	–1 ਤੋਂ–∞ ਤੱਕ ਘੱਟਦਾ ਹੈ	∞ ਤੋਂ 1 ਤੱਕ ਘੱਟਦਾ ਹੈ
cosec	∞ ਤੋਂ 1ਤੱਕ ਘੱਟਦਾ ਹੈ	1 ਤੋਂ∞ ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ	–∞ ਤੋਂ–1 ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ	–1ਤੋਂ–∞ ਤੱਕ ਘੱਟਦਾ ਹੈ

ਟਿੱਪਣੀ ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ ਕਥਨ tan x , 0 ਤੋਂ ∞ (ਅਨੰਤ) ਤੱਕ ਜਦੋਂ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਜਦੋਂ x, 0 ਤੋਂ $\frac{\pi}{2}$ ਤੱਕ ਵੱਧਦਾ ਹੈ, tan x ਵੱਧਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਦੋਂ x, $\frac{\pi}{2}$ ਦੇ ਕੋਲ ਪਹੁੰਚਦਾ ਹੈ ਤਾਂ tan x ਦਾ ਮੁੱਲ ਬਹੁਤ ਵੱਧ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ cosec x, –1 ਤੋਂ – ∞ (ਰਿਣਾਤਮਕ ਅਨੰਤ) ਤੱਕ ਚੌਥੀ ਚੌਥਾਈ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ cosec x, $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ ਵਿੱਚ ਘੱਟਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਦੋਂ x, 2π ਕੋਲ ਪਹੁੰਚਦਾ ਹੈ ਤਾਂ cosec x ਬਹੁਤ ਜ਼ਿਆਦਾ ਰਿਣਾਤਮਕ ਮੁੱਲ ਲੈ ਲੈਂਦਾ ਹੈ। ਚਿੰਨ ∞ ਅਤੇ – ∞ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਫਲਨਾਂ ਅਤੇ ਚਲਾਂ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵਿਹਾਰ ਨੂੰ ਦੱਸਦੇ ਹਨ।

ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ sin x ਅਤੇ cos x ਦੇ ਮੁੱਲ ਅੰਤਰਾਲ 2π ਬਾਅਦ ਦੁਹਰਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ cosec x ਅਤੇ sec x ਦੇ ਮੁੱਲ ਵੀ ਅੰਤਰਾਲ 2π ਬਾਅਦ ਦੁਹਰਾਏ ਜਾਣਗੇ। ਅਗਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਾਂਗੇ ਕਿ $\tan (\pi + x) = \tan x$, ਇਸ ਲਈ tan x ਦਾ ਮੁੱਲ ਅੰਤਰਾਲ π ਬਾਅਦ ਦੁਹਰਾਏ ਜਾਣਗੇ। ਕਿਉਂਕਿ cot x, tan x ਦਾ ਉਲਟ ਹੈ, ਇਸਦੇ ਮੁਲ ਵੀ ਅੰਤਰਾਲ π ਬਾਅਦ ਦੁਹਰਾਏ ਜਾਣਗੇ। ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗਿਆਨ ਅਤੇ ਵਿਹਾਰ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਆਲੇਖ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :



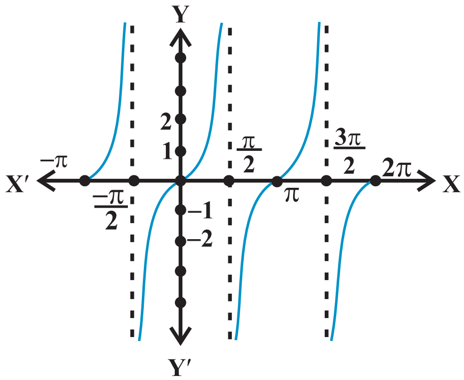
ਚਿੱਤਰ 3.8



ਚਿੱਤਰ 3.9

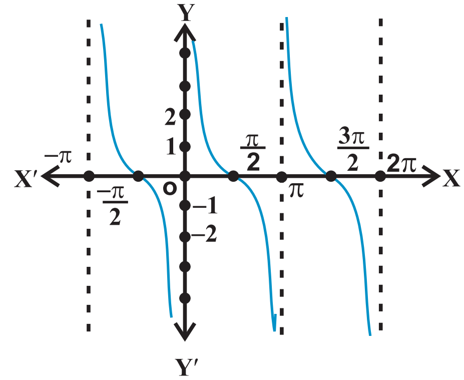
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com



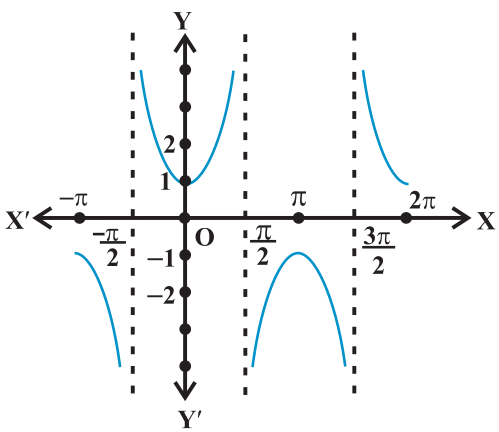
$y = \tan x$

ਚਿੱਤਰ 3.10



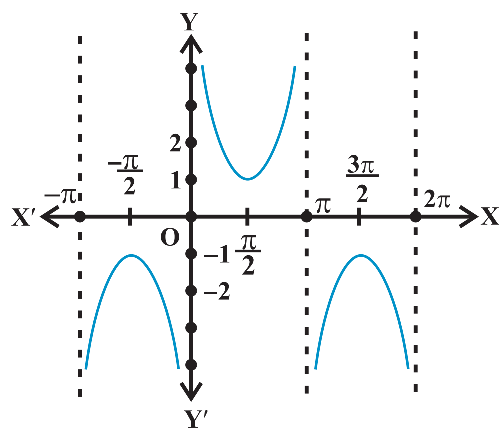
$y = \cot x$

ਚਿੱਤਰ 3.11



$y = \sec x$

ਚਿੱਤਰ 3.12



$y = \text{cosec}\, x$

ਚਿੱਤਰ 3.13

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਜੇਕਰ $\cos x = -\frac{3}{5}$ ਅਤੇ x ਤੀਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਪੰਜ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $\cos x = -\frac{3}{5}$ ਇਸ ਲਈ $\sec x = -\frac{5}{3}$

ਹੁਣ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ਭਾਵ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

ਜਾਂ $\sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

ਤਾਂ $\sin x = \pm \frac{4}{5}$

ਕਿਉਂਕਿ x ਤੀਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $\sin x$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ

$$\sin x = -\frac{4}{5}$$

ਇਸ ਤੋਂ

$$\text{cosec}\, x = -\frac{5}{4}$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4}{3} \quad \text{ਅਤੇ} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{3}{4}$$

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਜੇਕਰ $\cot x = -\frac{5}{12}$, x ਦੂਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਦੇ ਪੰਜ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $\cot x = -\frac{5}{12}$, ਇਸ ਲਈ $\tan x = -\frac{12}{5}$

ਹੁਣ $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + \frac{144}{25} = \frac{169}{25}$

ਇਸ ਲਈ $\sec x = \pm \frac{13}{5}$

ਕਿਉਂਕਿ x ਦੂਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $\sec x$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ

$$\sec x = -\frac{13}{5},$$

ਇਸ ਤੋਂ

$$\cos x = -\frac{5}{13}$$

ਫਿਰ ਤੋਂ

$$\sin x = \tan x \cos x = \left(-\frac{12}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{12}{13}$$

ਅਤੇ $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{13}{12}$

ਉਦਾਹਰਣ 8 : $\sin \frac{31\pi}{3}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sin x$ ਦਾ ਮੁੱਲ 2π ਦੇ ਅੰਤਰਾਲ ਬਾਅਦ ਦੁਹਰਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\sin \frac{31\pi}{3} = \sin\left(10\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ਉਦਾਹਰਣ 9 : $\cos(-1710°)$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ $\cos x$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹਰ 2π ਜਾਂ $360°$ ਅੰਤਰਾਲ ਬਾਅਦ ਦੁਹਰਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ
$$\begin{aligned}\cos(-1710°) &= \cos(-1710° + 5 \times 360°)\\ &= \cos(-1710° + 1800°) = \cos 90° = 0\end{aligned}$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਭਿਆਸ 3.2

1 ਤੋਂ 5 ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ, ਬਾਕੀ ਪੰਜ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\cos x = -\frac{1}{2}$, x ਤੀਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ।
2. $\sin x = \frac{3}{5}$, x ਦੂਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ।
3. $\cot x = \frac{3}{4}$, x ਤੀਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ।
4. $\sec x = \frac{13}{5}$, x ਚੌਥੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ।
5. $\tan x = -\frac{5}{12}$, x ਦੂਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 6 ਤੋਂ 10 ਵਿੱਚ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. $\sin 765°$
7. $\operatorname{cosec} (-1410°)$
8. $\tan \frac{19\pi}{3}$
9. $\sin (-\frac{11\pi}{3})$
10. $\cot (-\frac{15\pi}{4})$

3.4 ਦੋ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਅਤੇ ਅੰਤਰ ਦਾ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ (Trigonometric Functions of Sum and Difference of Two Angles)

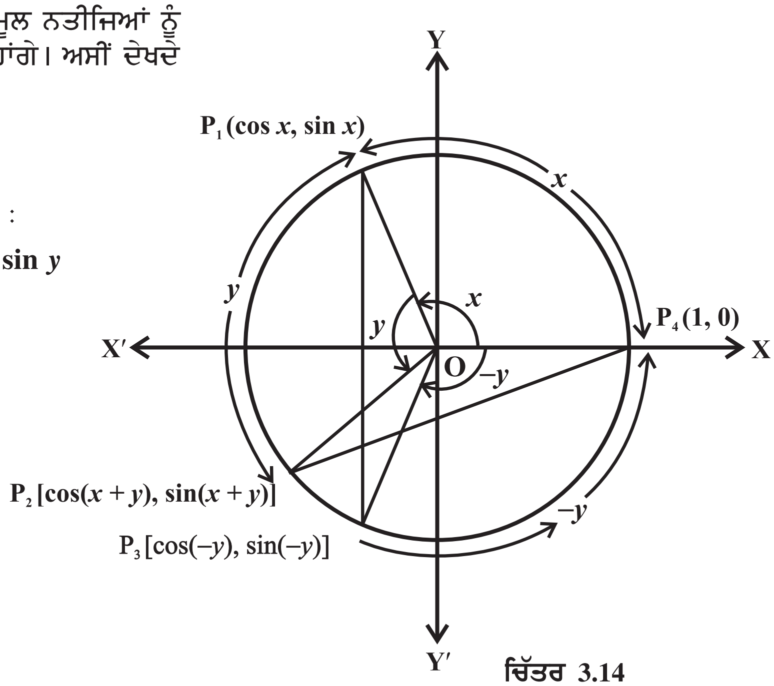
ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (ਕੋਣਾਂ) ਦੇ ਜੋੜ ਅਤੇ ਅੰਤਰ ਦੇ ਲਈ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਮੂਲ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਜਾਂ ਤਤਸਮਕਾਂ ਕਹਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ

1. **$\sin (-x) = -\sin x$**
2. **$\cos (-x) = \cos x$**

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਹੋਰ ਪਰਿਣਾਮ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ :

3. **$\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$**

ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵਾਲਾ ਚੱਕਰ ਜਿਸਦਾ ਕੇਂਦਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਹੈ, ਲਓ। ਮੰਨ ਲਓ x, P_4OP_1 ਕੋਣ ਹੈ ਅਤੇ y, P_1OP_2 ਕੋਣ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $(x + y)$, P_4OP_2 ਕੋਣ ਹੋਵੇਗਾ। ਮੰਨ ਲਓ $(-y)$, P_4OP_3 ਕੋਣ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ P_1, P_2, P_3 ਅਤੇ P_4 ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $P_1(\cos x, \sin x)$, $P_2[\cos (x + y), \sin (x + y)]$, $P_3[\cos (-y), \sin (-y)]$ ਅਤੇ P_4 (1, 0) ਹੋਣਗੇ। (ਚਿੱਤਰ 3.14).



ਚਿੱਤਰ 3.14

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਤਿਭੁਜਾਂ P_1OP_3 ਅਤੇ P_2OP_4 ਲਓ। ਇਹ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹਨ (ਕਿਉਂ ?) ਇਸ ਲਈ P_1P_3 ਅਤੇ P_2P_4 ਬਰਾਬਰ ਹਨ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$P_1P_3^2 = [\cos x - \cos(-y)]^2 + [\sin x - \sin(-y)]^2$$
$$= (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2$$
$$= \cos^2 x + \cos^2 y - 2\cos x \cos y + \sin^2 x + \sin^2 y + 2\sin x \sin y$$
$$= 2 - 2(\cos x \cos y - \sin x \sin y) \qquad \text{(ਕਿਉਂ ?)}$$

ਅਤੇ $$P_2P_4^2 = [1 - \cos(x+y)]^2 + [0 - \sin(x+y)]^2$$
$$= 1 - 2\cos(x+y) + \cos^2(x+y) + \sin^2(x+y)$$
$$= 2 - 2\cos(x+y)$$

ਕਿਉਂਕਿ $P_1P_3 = P_2P_4$, ਇਸ ਲਈ, $P_1P_3^2 = P_2P_4^2$.

ਇਸ ਲਈ $2 - 2(\cos x \cos y - \sin x \sin y) = 2 - 2\cos(x+y)$.

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

4. $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

ਤਤਸਮਕ (3) ਵਿੱਚ $-y$ ਨੂੰ y ਨਾਲ ਬਦਲਣ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ,

$$\cos(x + (-y)) = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y)$$

ਜਾਂ $$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

5. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਤਤਸਮਕ (4) ਵਿੱਚ x ਨੂੰ $\frac{\pi}{2}$ ਅਤੇ y ਨੂੰ x ਨਾਲ ਬਦਲ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x = \sin x$$

6. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

ਤਤਸਮਕ (5) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \cos x$$

7. $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\sin(x+y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x+y)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos y + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin y$$
$$= \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

8. $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਤਤਸਮਕ (7) ਵਿੱਚ y ਨੂੰ $-y$ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਮਿਲ ਜਾਵੇਗਾ,

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

9. ਤਤਸਮਕਾਂ 3, 4, 7 ਅਤੇ 8 ਵਿੱਚ x ਅਤੇ y ਦੇ ਉਚਿਤ ਮੁੱਲ ਲੈਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਨਤੀਜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਗੇ :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(2\pi - x) = \cos x \qquad \sin(2\pi - x) = -\sin x$$

$\sin x$ ਅਤੇ $\cos x$ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਤੋਂ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ ਅਤੇ $\operatorname{cosec} x$ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

10. **ਜੇਕਰ ਕੋਣ x, y ਅਤੇ $(x + y)$ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ $\frac{\pi}{2}$ ਦਾ ਟਾਂਕ ਗੁਣਜ ਨਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ**

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

ਕਿਉਂਕਿ ਕੋਣ x, y ਅਤੇ $(x + y)$ ਵਿਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ $\frac{\pi}{2}$ ਦਾ ਟਾਂਕ ਗੁਣਜ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\cos x$, $\cos y$ ਅਤੇ $\cos(x + y)$ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਹੁਣ

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x\cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਨੂੰ $\cos x \cos y$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ,

$$\tan(x+y) = \frac{\dfrac{\sin x\cos y}{\cos x\cos y} + \dfrac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\dfrac{\cos x\cos y}{\cos x\cos y} - \dfrac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

11. $$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਤਤਸਮਕ (10) ਵਿੱਚ y ਨੂੰ $-y$ ਨਾਲ ਬਦਲ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ,

$$\tan(x - y) = \tan[x + (-y)]$$

$$= \frac{\tan x + \tan(-y)}{1 - \tan x \tan(-y)} = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

12. **ਜੇਕਰ ਕੋਣ x, y ਅਤੇ $(x + y)$ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ π ਦਾ ਗੁਣਜ ਨਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ**

$$\cot(x+y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$$

ਕਿਉਂਕਿ ਕੋਣ x, y ਅਤੇ $(x + y)$ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ π ਦਾ ਗੁਣਜ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $\sin x \sin y$ ਅਤੇ $\sin(x + y)$ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਹੁਣ,

$$\cot(x+y) = \frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)} = \frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\sin x \cos y + \cos x \sin y}$$

ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਨੂੰ $\sin x \sin y$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ

$\cot(x+y) = \dfrac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

13. $\cot(x-y)=\dfrac{\cot x \cot y+1}{\cot y-\cot x}$, ਜੇਕਰ ਕੋਣ x, y ਅਤੇ $(x–y)$ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ π ਦਾ ਗੁਣਜ ਨਾ ਹੋਵੇ।

ਜੇਕਰ ਤਤਸਮਕ (12) ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ y ਨੂੰ $-y$ ਨਾਲ ਬਦਲ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਮਿਲ ਜਾਵੇਗਾ।

14. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

y ਨੂੰ x ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਤੇ

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

ਫਿਰ ਤੋਂ, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$= 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x.$$

ਹੁਣ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਨੂੰ $\cos^2 x$, ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ,

$$\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}, \quad x \neq n\pi + \frac{\pi}{2},$$ ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

15. $\sin 2x = 2\sin x \cos x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ $\quad x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

y ਨੂੰ x ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ; $\quad \sin 2x = 2\sin x \cos x$

ਫਿਰ ਤੋਂ $\quad \sin 2x = \dfrac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

ਹਰੇਕ ਪਦ ਨੂੰ $\cos^2 x$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

16. $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$, ਜੇਕਰ $2x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

y ਨੂੰ x ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

17. $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin (2x + x)\\ &= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x\\ &= 2 \sin x \cos x \cos x + (1 - 2\sin^2 x) \sin x\\ &= 2 \sin x (1 - \sin^2 x) + \sin x - 2 \sin^3 x\\ &= 2 \sin x - 2 \sin^3 x + \sin x - 2 \sin^3 x\\ &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x\end{aligned}$$

18. $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos (2x + x)\\ &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x\\ &= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \sin x \cos x \sin x\\ &= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \cos x (1 - \cos^2 x)\\ &= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x\\ &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x\end{aligned}$$

19. $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$, ਜੇਕਰ $3x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\tan 3x = \tan (2x + x)$$

$$= \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x} = \frac{\dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} + \tan x}{1 - \dfrac{2 \tan x \tan x}{1 - \tan^2 x}}$$

$$= \frac{2\tan x + \tan x - \tan^3 x}{1 - \tan^2 x - 2\tan^2 x} = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

20. (i) $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

(ii) $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

(iii) $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

(iv) $\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ ... (1)

ਅਤੇ $\cos (x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ ... (2)

(1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਅਤੇ ਘਟਾਉਣ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$\cos (x + y) + \cos(x - y) = 2 \cos x \cos y$ ... (3)

ਅਤੇ $\cos (x + y) - \cos (x - y) = -2 \sin x \sin y$ ... (4)

ਫਿਰ ਤੋਂ $\sin (x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ ... (5)

ਅਤੇ $\sin (x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ ... (6)

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

(5) ਅਤੇ (6) ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਅਤੇ ਘਟਾਉਣ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y \quad \ldots (7)$$

$$\sin(x+y)-\sin(x-y)=2\cos x\sin y \quad \ldots (8)$$

ਮੰਨ ਲਉ $x + y = \theta$ and $x - y = \phi$, ਇਸ ਲਈ

$$x=\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) \text{ ਅਤੇ } y=\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

x ਅਤੇ y ਦੇ ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ (3), (4), (7) ਅਤੇ (8) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$\cos\theta+\cos\phi=2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\cos\theta-\cos\phi=-2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\sin\theta+\sin\phi=2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\sin\theta-\sin\phi=2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

ਕਿਉਂਕਿ θ ਅਤੇ ϕ ਕੋਈ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ θ ਨੂੰ x ਵਿੱਚ ਅਤੇ ϕ ਨੂੰ y ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\ ;\ \cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\ ;\ \sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

ਟਿੱਪਣੀ (20) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਤਤਸਮਕ ਤੋਂ, ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਨਤੀਜੇ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

21. **(i)** $2\cos x\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y)$

(ii) $-2\sin x\sin y=\cos(x+y)-\cos(x-y)$

(iii) $2\sin x\cos y=\sin(x+y)+\sin(x-y)$

(iv) $2\cos x\sin y=\sin(x+y)-\sin(x-y)$.

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$3\sin\frac{\pi}{6}\sec\frac{\pi}{3}-4\sin\frac{5\pi}{6}\cot\frac{\pi}{4}=1$$

ਹੱਲ : ਖੱਬਾ ਹੱਥ $= 3\sin\frac{\pi}{6}\sec\frac{\pi}{3}-4\sin\frac{5\pi}{6}\cot\frac{\pi}{4}$

$$=3\times\frac{1}{2}\times 2-4\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\times 1=3-4\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=3-4\times\frac{1}{2}=1=\text{ ਸੱਜਾ ਹੱਥ}$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 11 : sin 15° ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

$$\sin 15° = \sin(45° - 30°)$$
$$= \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

ਉਦਾਹਰਣ 12 : $\tan \frac{13\pi}{12}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

$$\tan \frac{13\pi}{12} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = \tan \frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{6}}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}$$

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y}$$

ਹੱਲ :

$$\text{ਖੱਬਾ ਹੱਥ} = \frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\sin x \cos y - \cos x \sin y}$$

ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਨੂੰ $\cos x \cos y$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y}$$

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 3x - \tan 2x - \tan x$$

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $3x = 2x + x$

ਇਸ ਲਈ $\tan 3x = \tan(2x + x)$

ਜਾਂ $\tan 3x = \dfrac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x}$

ਜਾਂ $\tan 3x - \tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 2x + \tan x$

ਜਾਂ $\tan 3x - \tan 2x - \tan x = \tan 3x \tan 2x \tan x$

ਜਾਂ $\tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 3x - \tan 2x - \tan x$

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}\cos x$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਹੱਲ : ਤਤਸਮਕ 20(i) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ,

$$\text{ਖੱਬਾ ਹੱਥ} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+x+\frac{\pi}{4}-x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+x-(\frac{\pi}{4}-x)}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{4}\cos x = 2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \sqrt{2}\cos x = \text{ਸੱਜਾ ਹੱਥ}$$

ਉਦਾਹਰਣ 16 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ $\dfrac{\cos 7x+\cos 5x}{\sin 7x-\sin 5x}=\cot x$

ਹੱਲ : ਤਤਸਮਕਾਂ 20 (i) ਅਤੇ 20 (iv) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ

$$\text{ਖੱਬਾ ਹੱਥ} = \frac{2\cos\frac{7x+5x}{2}\cos\frac{7x-5x}{2}}{2\cos\frac{7x+5x}{2}\sin\frac{7x-5x}{2}} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x = \text{ਸੱਜਾ ਹੱਥ}$$

ਉਦਾਹਰਣ 17 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $=\dfrac{\sin 5x-2\sin 3x+\sin x}{\cos 5x-\cos x}=\tan x$

ਹੱਲ :

$$\text{ਖੱਬਾ ਹੱਥ} = \frac{\sin 5x-2\sin 3x+\sin x}{\cos 5x-\cos x} = \frac{\sin 5x+\sin x-2\sin 3x}{\cos 5x-\cos x}$$

$$= \frac{2\sin 3x\cos 2x-2\sin 3x}{-2\sin 3x\sin 2x} = -\frac{\sin 3x(\cos 2x-1)}{\sin 3x\sin 2x}$$

$$= \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x} = \tan x = \text{ਸੱਜਾ ਹੱਥ}$$

ਅਭਿਆਸ 3.3

ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ :

1. $\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{3}-\tan^2\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}$

2. $2\sin^2\frac{\pi}{6}+\operatorname{cosec}^2\frac{7\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$

3. $\cot^2\frac{\pi}{6}+\operatorname{cosec}\frac{5\pi}{6}+3\tan^2\frac{\pi}{6}=6$

4. $2\sin^2\frac{3\pi}{4}+2\cos^2\frac{\pi}{4}+2\sec^2\frac{\pi}{3}=10$

5. ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\sin 75°$ (ii) $\tan 15°$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ :

6. $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)=\sin(x+y)$

7. $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\left(\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^2$

8. $\dfrac{\cos(\pi+x)\cos(-x)}{\sin(\pi-x)\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\cot^2 x$

9. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cos(2\pi+x)\left[\cot\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\cot(2\pi+x)\right]=1$

10. $\sin(n+1)x\sin(n+2)x+\cos(n+1)x\cos(n+2)x=\cos x$

11. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)=-\sqrt{2}\sin x$

12. $\sin^2 6x-\sin^2 4x=\sin 2x\sin 10x$

13. $\cos^2 2x-\cos^2 6x=\sin 4x\sin 8x$

14. $\sin 2x+2\sin 4x+\sin 6x=4\cos^2 x\sin 4x$

15. $\cot 4x(\sin 5x+\sin 3x)=\cot x(\sin 5x-\sin 3x)$

16. $\dfrac{\cos 9x-\cos 5x}{\sin 17x-\sin 3x}=-\dfrac{\sin 2x}{\cos 10x}$

17. $\dfrac{\sin 5x+\sin 3x}{\cos 5x+\cos 3x}=\tan 4x$

18. $\dfrac{\sin x-\sin y}{\cos x+\cos y}=\tan\dfrac{x-y}{2}$

19. $\dfrac{\sin x+\sin 3x}{\cos x+\cos 3x}=\tan 2x$

20. $\dfrac{\sin x-\sin 3x}{\sin^2 x-\cos^2 x}=2\sin x$

21. $\dfrac{\cos 4x+\cos 3x+\cos 2x}{\sin 4x+\sin 3x+\sin 2x}=\cot 3x$

22. $\cot x\cot 2x-\cot 2x\cot 3x-\cot 3x\cot x=1$

23. $\tan 4x=\dfrac{4\tan x(1-\tan^2 x)}{1-6\tan^2 x+\tan^4 x}$

24. $\cos 4x=1-8\sin^2 x\cos^2 x$

25. $\cos 6x=32\cos^6 x-48\cos^4 x+18\cos^2 x-1$

3.5 ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਸਮੀਕਰਣਾਂ (Trigonometric Equations)

ਇੱਕ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀ ਵਿੱਚ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਵਾਲੇ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sin x$ ਅਤੇ $\cos x$ ਦੇ ਮੁੱਲ 2π ਦੇ ਅੰਤਰਾਲ ਬਾਅਦ ਦੁਹਰਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ $\tan x$ ਦੇ ਮੁੱਲ π ਅੰਤਰਾਲ ਬਾਅਦ ਦੁਹਰਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਦੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਹਲ ਜਿੱਥੇ $0 \le x < 2\pi$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਮੁੱਖ ਹਲ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ 'n' ਵਾਲੀ ਵਿਅੰਜਕ ਜੋ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਸਾਰੇ ਹੱਲ ਦਿੰਦੀ ਹੈ, ਨੂੰ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਅਸੀਂ '**Z**' ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 18 : ਸਮੀਕਰਣ $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ਦੇ ਮੁੱਖ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ਅਤੇ $\sin\dfrac{2\pi}{3}=\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ਇਸ ਲਈ, ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਮੁੱਖ ਹੱਲ ਹਨ $x=\dfrac{\pi}{3}$ ਅਤੇ $\dfrac{2\pi}{3}$ ਹਨ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 19 : ਸਮੀਕਰਣ $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ਦੇ ਮੁੱਖ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ਇਸ ਤੋਂ, $\tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

ਅਤੇ $$\tan\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ਇਸ ਲਈ $$\tan\frac{5\pi}{6} = \tan\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ਇਸ ਲਈ, ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਮੁੱਖ ਹੱਲ $\frac{5\pi}{6}$ ਅਤੇ $\frac{11\pi}{6}$ ਹਨ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sin x = 0$ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ $x = n\pi$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

$\cos x = 0$ ਤੋਂ $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਨਤੀਜੇ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ :

ਪ੍ਰਮੇਯ 1 : ਕਿਸੇ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ x ਅਤੇ y ਲਈ

$\sin x = \sin y$ ਤੋਂ $x = n\pi + (-1)^n y$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਜੇਕਰ $\sin x = \sin y$ ਹੈ ਤਾਂ

$\sin x - \sin y = 0$ ਜਾਂ $2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = 0$

ਇਸ ਤੋਂ $\cos\frac{x+y}{2} = 0$ ਜਾਂ $\sin\frac{x-y}{2} = 0$

ਇਸ ਲਈ $\frac{x+y}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ ਜਾਂ $\frac{x-y}{2} = n\pi$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$

(ਭਾਵ) $x = (2n+1)\pi - y$ ਜਾਂ $x = 2n\pi + y$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$

ਇਸ ਲਈ $x = (2n+1)\pi + (-1)^{2n+1} y$ ਜਾਂ $x = 2n\pi + (-1)^{2n} y$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$.

ਦੋਹਾਂ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕਠਾ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ

$x = n\pi + (-1)^n y$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 2 : ਕਿਸੇ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ x ਅਤੇ y ਲਈ $\cos x = \cos y$ ਤੋਂ $x = 2n\pi \pm y$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਜੇਕਰ $\cos x = \cos y$, ਤਾਂ

$\cos x - \cos y = 0$ ਭਾਵ $-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = 0$

ਇਸ ਲਈ $\sin\frac{x+y}{2} = 0$ ਜਾਂ $\sin\frac{x-y}{2} = 0$

ਇਸ ਲਈ $\frac{x+y}{2} = n\pi$ ਜਾਂ $\frac{x-y}{2} = n\pi$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$

ਭਾਵ $x = 2n\pi - y$ ਜਾਂ $x = 2n\pi + y$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$

ਇਸ ਲਈ $x = 2n\pi \pm y$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਪਰਿਮੇਯ 3 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ x ਅਤੇ y, $\frac{\pi}{2}$ ਦੇ ਟਾਂਕ ਗੁਣਜ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਤਾਂ

$\tan x = \tan y$ implies $x = n\pi + y$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਜੇਕਰ $\tan x = \tan y$, ਤਾਂ $\tan x - \tan y = 0$

ਜਾਂ $$\frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = 0$$

ਇਸ ਤੋਂ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $\sin(x - y) = 0$ (ਕਿਉਂ ?)

ਇਸ ਲਈ $x - y = n\pi$, ਭਾਵ, $x = n\pi + y$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$

ਉਦਾਹਰਣ 20 : $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ, $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{4\pi}{3}$

ਇਸ ਲਈ $\sin x = \sin\frac{4\pi}{3}$, ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{4\pi}{3}, \text{ ਜਿੱਥੇ } n \in \mathbf{Z}$$

ਟਿੱਪਣੀ : $\frac{4\pi}{3}$, x ਦਾ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਲਈ $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ਹੈ। x ਦਾ ਕੋਈ ਹੋਰ ਮੁੱਲ ਲੈ ਕੇ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਲਈ $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੱਲ ਇੱਕ ਹੀ ਹੋਣਗੇ ਭਾਵੇਂ ਇਹ ਦੇਖਣ ਵਿੱਚ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਹੋਣਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 21 : $\cos x = \frac{1}{2}$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

ਇਸ ਲਈ $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$

ਉਦਾਹਰਣ 22 : $\tan 2x = -\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $\tan 2x = -\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{3}\right)$

ਜਾਂ $$\tan 2x = \tan\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$$

ਇਸ ਲਈ $$2x = n\pi + x + \frac{5\pi}{6}, \text{ ਜਿੱਥੇ } n \in \mathbf{Z}$$

ਜਾਂ $$x = n\pi + \frac{5\pi}{6}, \text{ ਜਿੱਥੇ } n \in \mathbf{Z}$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 23 : ਹੱਲ ਕਰੋ : $\sin 2x - \sin 4x + \sin 6x = 0$.

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਅਸੀਂ

$\sin 6x + \sin 2x - \sin 4x = 0$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

ਜਾਂ $\quad 2\sin 4x \cos 2x - \sin 4x = 0$

ਭਾਵ $\quad \sin 4x(2\cos 2x - 1) = 0$

ਇਸ ਲਈ $\quad \sin 4x = 0$ ਜਾਂ $\cos 2x = \frac{1}{2}$

ਭਾਵ $\quad \sin 4x = 0$ ਜਾਂ $\cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$

ਇਸ ਲਈ $\quad 4x = n\pi$ ਜਾਂ $2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$

ਭਾਵ $\quad x = \frac{n\pi}{4}$ ਜਾਂ $x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$

ਉਦਾਹਰਣ 24 : ਸਮੀਕਰਣ $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ

$$2\left(1 - \sin^2 x\right) + 3\sin x = 0$$

ਜਾਂ $\quad 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$

ਜਾਂ $\quad (2\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$

ਇਸ ਤੋਂ $\quad \sin x = -\frac{1}{2}$ ਜਾਂ $\sin x = 2$

ਪਰ $\quad \sin x = 2$ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ (ਕਿਉਂ ?)

ਇਸ ਲਈ $\quad \sin x = -\frac{1}{2} = \sin\frac{7\pi}{6}$

ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}, \text{ ਜਿੱਥੇ } n \in \mathbf{Z}$$

ਅਭਿਆਸ 3.4

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਮੁੱਖ ਅਤੇ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. $\tan x = \sqrt{3}$

2. $\sec x = 2$

3. $\cot x = -\sqrt{3}$

4. $\operatorname{cosec} x = -2$

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ:

5. $\cos 4x = \cos 2x$

6. $\cos 3x + \cos x - \cos 2x = 0$

7. $\sin 2x + \cos x = 0$

8. $\sec^2 2x = 1 - \tan 2x$

9. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 25 : ਜੇਕਰ $\sin x = \frac{3}{5}$, $\cos y = -\frac{12}{13}$, $\sin(x+y)$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ x ਅਤੇ y ਦੋਵੇਂ ਦੂਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੋਣ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \ldots (1)$$

ਹੁਣ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

ਇਸ ਲਈ $\cos x = \pm\frac{4}{5}$

ਕਿਉਂਕਿ x ਦੂਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $\cos x$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ $\cos x = -\frac{4}{5}$

ਹੁਣ $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$

i.e., (ਭਾਵ) $\sin y = \pm\frac{5}{13}$

ਕਿਉਂਕਿ y ਦੂਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $\sin y$ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ $\sin y = \frac{5}{13}$ । $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$ ਅਤੇ $\cos y$ ਦੇ ਮੁੱਲ (1) ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$\sin(x+y) = \frac{3}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{5}{13} = -\frac{36}{65}-\frac{20}{65}=-\frac{56}{65}$$

ਉਦਾਹਰਣ 26 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ :

$$\cos 2x \cos\frac{x}{2} - \cos 3x \cos\frac{9x}{2} = \sin 5x \sin\frac{5x}{2}$$

ਹੱਲ :

ਖੱਬਾ ਹੱਥ $= \frac{1}{2}\left[2\cos 2x \cos\frac{x}{2} - 2\cos\frac{9x}{2}\cos 3x\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(2x+\frac{x}{2}\right)+\cos\left(2x-\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{9x}{2}+3x\right)-\cos\left(\frac{9x}{2}-3x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{5x}{2}+\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{15x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{15x}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2\sin\left\{\frac{\frac{5x}{2}+\frac{15x}{2}}{2}\right\}\sin\left\{\frac{\frac{5x}{2}-\frac{15x}{2}}{2}\right\}\right]$$

$= -\sin 5x \sin\left(-\frac{5x}{2}\right) = \sin 5x \sin\frac{5x}{2}$ = ਸੱਜਾ ਹੱਥ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 27 : $\tan\frac{\pi}{8}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $x = \frac{\pi}{8}$ ਤਾਂ $2x = \frac{\pi}{4}$

ਹੁਣ $$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

ਜਾਂ $$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$$

ਮੰਨ ਲਉ $y = \tan\frac{\pi}{8}$ ਤਾਂ $1 = \frac{2y}{1-y^2}$

ਜਾਂ $$y^2 + 2y - 1 = 0$$

ਇਸ ਲਈ $$y = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

ਕਿਉਂਕਿ $\frac{\pi}{8}$ ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $y = \tan\frac{\pi}{8}$ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ, ਇਸ ਲਈ

$$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$$

ਉਦਾਹਰਣ 28 : ਜੇਕਰ $\tan x = \frac{3}{4}, \pi < x < \frac{3\pi}{2}$, ਤਾਂ $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$, $\tan\frac{x}{2}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, ਇਸ ਲਈ $\cos x$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ।

ਅਤੇ $$\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}$$

ਇਸ ਲਈ $\sin\frac{x}{2}$ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ $\cos\frac{x}{2}$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ।

ਹੁਣ $$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$

ਇਸ ਲਈ $$\cos^2 x = \frac{16}{25} \text{ ਜਾਂ } \cos x = -\frac{4}{5} \quad (\text{ਕਿਉਂ ?})$$

ਹੁਣ $$2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$$

ਇਸ ਲਈ $$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{9}{10}$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਜਾਂ $\sin\frac{x}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ (ਕਿਉਂ ?)

ਫਿਰ ਤੋਂ $2\cos^2\frac{x}{2} = 1 + \cos x = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

ਇਸ ਲਈ $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{10}$

ਜਾਂ $\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ (ਕਿਉਂ)

ਹੁਣ $\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \times \left(\frac{-\sqrt{10}}{1}\right) = -3$

ਉਦਾਹਰਣ 29 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$.

ਹੱਲ :

ਖੱਬਾ ਹੱਥ
$$= \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)}{2} + \frac{1+\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left[3 + \cos 2x + \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[3 + \cos 2x + 2\cos 2x \cos\frac{2\pi}{3}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[3 + \cos 2x + 2\cos 2x \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[3 + \cos 2x - 2\cos 2x \cos\frac{\pi}{3}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[3 + \cos 2x - \cos 2x\right] = \frac{3}{2}$$ = ਸੱਜਾ ਹੱਥ

ਅਧਿਆਇ 3 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ :

1. $2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13} = 0$

2. $(\sin 3x + \sin x)\sin x + (\cos 3x - \cos x)\cos x = 0$

3. $(\cos x + \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 4\cos^2\frac{x+y}{2}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

4. $(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 4\sin^2 \frac{x-y}{2}$

5. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 4\cos x \cos 2x \sin 4x$

6. $\frac{(\sin 7x + \sin 5x) + (\sin 9x + \sin 3x)}{(\cos 7x + \cos 5x) + (\cos 9x + \cos 3x)} = \tan 6x$

7. $\sin 3x + \sin 2x - \sin x = 4\sin x \cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}$

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹਰ ਇੱਕ ਵਿੱਚ $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$ ਅਤੇ $\tan\frac{x}{2}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. $\tan x = -\frac{4}{3}$, x ਦੂਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ।

9. $\cos x = -\frac{1}{3}$, x ਤੀਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ।

10. $\sin x = \frac{1}{4}$, x ਦੂਸਰੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੈ।

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ r, ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਤੇ, l ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੀ ਚਾਪ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਤੇ θ ਰੇਡੀਅਨ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ $l = r\,\theta$
- ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ $= \frac{\pi}{180} \times$ ਡਿਗਰੀ ਮਾਪ
- ਡਿਗਰੀ ਮਾਪ $= \frac{180}{\pi} \times$ ਰੇਡੀਅਨ ਮਾਪ
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
- $1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$
- $\cos(2n\pi + x) = \cos x$
- $\sin(2n\pi + x) = \sin x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$
- $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$
- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$ $\quad\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$

  $\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\quad\sin(\pi - x) = \sin x$

  $\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\quad\sin(\pi + x) = -\sin x$

  $\cos(2\pi - x) = \cos x$ $\quad\sin(2\pi - x) = -\sin x$

- ਜੇਕਰ ਕੋਣਾਂ x, y ਅਤੇ $(x \pm y)$ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ $\frac{\pi}{2}$ ਦਾ ਟਾਂਕ ਗੁਣਜ ਨਾ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ

  $$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

- $$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

- ਜੇਕਰ x, y ਅਤੇ $(x \pm y)$ ਕੋਣਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ π ਦਾ ਗੁਣਜ ਨਾ ਹੋਵੇ ? ਤਾਂ

  $$\cot(x+y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$$

- $$\cot(x-y) = \frac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}$$

- $$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

- $$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

- $$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

- $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

- $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

- $$\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

- (*i*) $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

  (*ii*) $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

  (*iii*) $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

  (*iv*) $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

◆ (*i*) $2 \cos x \cos y = \cos (x + y) + \cos (x - y)$

(*ii*) $- 2 \sin x \sin y = \cos (x + y) - \cos (x - y)$

(*iii*) $2 \sin x \cos y = \sin (x + y) + \sin (x - y)$

(*iv*) $2 \cos x \sin y = \sin (x + y) - \sin (x - y)$.

◆ $\sin x = 0$ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ $x = n\pi$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$

◆ $\cos x = 0$ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ $x = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$

◆ $\sin x = \sin y$ ਤੋਂ $x = n\pi + (-1)^n y$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$

◆ $\cos x = \cos y$, ਤੋਂ $x = 2n\pi \pm y$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$

◆ $\tan x = \tan y$ ਤੋਂ $x = n\pi + y$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{Z}$

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਅਰੰਭ ਹੋਇਆ। ਆਰਿਆ ਭੱਟ (476 ਈ.), ਬ੍ਰਹਮਗੁਪਤ (598 ਈ.) ਭਾਸਕਰ ਪਹਿਲਾ (600 ਈ.) ਅਤੇ ਭਾਸਕਰ ਦੂਸਰਾ (1114 ਈ.) ਭਾਰਤੀ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸ਼ਤਰੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਇਸ ਦੇ ਪ੍ਰਮੁੱਖ ਨਤੀਜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਸਨ। ਇਹ ਸੰਪੂਰਨ ਗਿਆਨ ਭਾਰਤ ਤੋਂ ਮੱਧ ਪੂਰਵ ਅਤੇ ਫਿਰ ਉੱਥੋਂ ਯੂਰਪ ਗਿਆ। ਯੂਨਾਨੀਆਂ (ਗ੍ਰੀਕ) ਨੇ ਵੀ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਸ਼ੁਰੂ ਕੀਤਾ, ਪਰੰਤੂ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਕਾਰਜਵਿਧੀ ਉਗੜ-ਦੁਗੜ ਸੀ, ਜਦੋਂ ਭਾਰਤ ਦੀ ਵਿਧੀ ਦੇ ਬਾਰੇ ਪਤਾ ਲੱਗਿਆ, ਤਾਂ ਸਾਰੇ ਵਿਸ਼ਵ ਨੇ ਉਸ ਨੂੰ ਅਪਣਾ ਲਿਆ।

ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਆਧੁਨਿਕ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੋਣ ਦੀ ਜਿਯਾ (Sine) ਅਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਪਹਿਚਾਣ ਦਾ ਪੂਰਵ ਵਿਵਰਣ ਸਿਧਾਂਤ (ਸੰਸਕ੍ਰਿਤ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਗਿਆ ਜਯੋਤਸ਼ੀ ਕੰਮ) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਯੋਗਦਾਨ ਗਣਿਤ ਦੇ ਇਤਿਹਾਸ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਮੁੱਖ ਹੈ।

ਭਾਸਕਰ ਪਹਿਲੇ (600 ਈ.) ਨੇ 90° ਤੋਂ ਵੱਧ ਕੋਣਾਂ ਦੇ sine ਦੇ ਮੁੱਲ ਲਈ ਸੂਤਰ ਦਿੱਤਾ ਸੀ। ਸੋਲ੍ਹਵੀਂ ਸਦੀ ਵਿੱਚ ਮਲਿਆਲਮ ਕੰਮ *Yuktibhasa* (ਸਮਾਂ) ਵਿੱਚ sin (A + B) ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦਾ ਸਬੂਤ ਆਉਂਦਾ ਹੈ। ਭਾਸਕਰ II ਦੁਆਰਾ 18°, 36°, 54°, 72° ਆਦਿ ਦੇ sine ਅਤੇ cosine ਦੇ ਸਹੀ ਮੁੱਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ।

ਚਿੰਨ੍ਹ $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ ਆਦਿ ਨੂੰ ਚਾਪ sin x, ਚਾਪ cos x ਆਦਿ ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਪ੍ਰਯੋਗ (ਵਰਤਣ) ਦਾ ਸੁਝਾਅ ਖਗੋਲ ਵਿਗਿਆਨੀ Sir John F.W. Hershel (1813) ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ। ਉਚਾਈ ਅਤੇ ਦੂਰੀ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ Thales (600 B.C.) ਦਾ ਨਾਮ ਜੁੜਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਉਸਨੂੰ ਮਿਸਰ ਦੇ ਮਹਾਨ ਪਿਰਾਮਿਡ ਦੀ ਉਚਾਈ ਦੇ ਮਾਪਣ ਦਾ ਮਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਉਸਨੇ ਇੱਕ ਵਸਤੂ ਜਿਸ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਸੀ ਅਤੇ ਪਿਰਾਮਿਡ ਦੇ ਪਰਛਾਵੇਂ ਨੂੰ ਮਾਪ ਕੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਇਹ ਅਨੁਪਾਤ

$$\frac{H}{S} = \frac{h}{s} = \tan \text{ ਸੂਰਜ ਦੀ ਉਚਾਣ ਜਾਂ ਉਚਾਈ (altitude)}$$

Thales ਨੂੰ ਸਮੁੰਦਰੀ ਜਹਾਜ਼ਾਂ ਦੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਮਾਨ ਵੀ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਇਸਦੇ ਲਈ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਉਚਾਈ ਅਤੇ ਦੂਰੀ ਸੰਬੰਧੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦਾ ਹੱਲ, ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਚੀਨ ਭਾਰਤੀ ਕੰਮਾਂ ਵਿੱਚ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

— ❖ —

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਧਿਆਇ 4

ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦਾ ਸਿਧਾਂਤ

(Principle of Mathematical Induction)

❖*Analysis and natural philosophy owe their most important discoveries to this fruitful means, which is called induction. Newton was indebted to it for his theorem of the binomial and the principle of universal gravity. – LAPLACE* ❖

4.1 ਭੂਮਿਕਾ

G. Peano
(1858-1932)

ਗਣਿਤਿਕ (Mathematical) ਚਿੰਤਨ ਦਾ ਇੱਕ ਮੂਲਭੂਤ ਸਿਧਾਂਤ ਨਿਗਮਨਿਕ ਤਰਕ (Deductive reasoning) ਹੈ। ਤਰਕਸ਼ਾਸ਼ਤਰ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਇੱਕ ਅਣਉਪਚਾਰਿਕ (Informal) ਅਤੇ ਨਿਗਮਨਿਕ ਤਰਕ ਦਾ ਉਦਾਹਰਣ ਤਿੰਨ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ :

(a) ਸੁਕਰਾਤ ਇੱਕ ਮਨੁੱਖ ਹੈ।

(b) ਸਾਰਿਆਂ ਮਨੁੱਖਾਂ ਦੀ ਮੌਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ,

(c) ਸੁਕਰਾਤ ਵੀ ਮਰਨਸ਼ੀਲ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਕਥਨ (*a*) ਅਤੇ (*b*) ਠੀਕ ਹਨ, ਤਾਂ (*c*) ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਸਥਾਪਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਸਰਲ ਉਦਾਹਾਰਣ ਨੂੰ ਗਣਿਤਿਕ ਬਣਾਉਣ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

(i) ਅੱਠ, ਦੋ ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(ii) ਦੋ ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੋਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

(iii) 8 ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਸੰਖੇਪ ਵਿੱਚ ਨਿਗਮਨ (deduction) ਇੱਕ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਕਥਨ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਹੋਣ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਇਸ ਨੂੰ ਅਨੁਮਾਨਿਤ ਕਥਨ (conjecture) ਜਾਂ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਤਰਕ ਸੰਗਤ ਨਿਗਮਨ (deduction) ਦੇ ਪਗ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ (ਕੱਢੇ) ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਸਬੂਤ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ ਨਿਗਮਨ ਵਿਆਪਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚੋਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਥਿਤੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਹੈ।

ਨਿਗਮਨ ਦੇ ਉਲਟ, ਆਗਮਨ (Induction) ਤਰਕ ਹਰ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਦੇ ਅਧਿਐਨ 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਅਤੇ ਹਰ ਸੰਭਵ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖਦੇ ਹੋਏ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਨਿਰੀਖਣ ਰਾਹੀ ਇੱਕ ਅਨੁਮਾਨਿਤ ਕਥਨ ਵਿਕਸਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਗਿਆਨਕ ਚਿੰਤਨ ਜਿੱਥੇ, ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਇਕੱਠ ਅਤੇ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਮਾਨਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਦਾ ਮੁੱਖ ਅਧਾਰ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਰਲ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਆਗਮਨ ਸ਼ਬਦ ਦਾ ਅਰਥ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਥਿਤੀਆਂ ਜਾਂ ਤੱਥਾਂ ਤੋਂ ਵਿਆਪੀਕਰਨ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਹੈ।

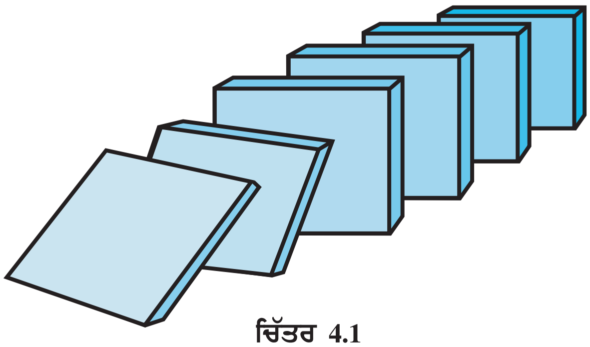
ਬੀਜਗਣਿਤ (ਅਲਜਬਰੇ) ਜਾਂ ਗਣਿਤ ਦੀਆਂ ਹੋਰ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ ਵਿੱਚ, ਕੁਝ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਲਈ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਤਕਨੀਕ 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਇੱਕ ਬਹੁਤ ਢੁੱਕਵੇਂ ਸਿਧਾਂਤ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਨੂੰ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦਾ ਸਿਧਾਂਤ (Principle of Mathematical Induction) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

4.2 ਪ੍ਰੇਰਣਾ (Motivation)

ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸੰਪੂਰਨ ਆਗਮਨ ਦੇ ਇੱਕ ਰੂਪ ਜਿਸ ਨੂੰ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਲਈ, ਮੰਨ ਲਉ ਪਤਲੀਆਂ ਆਇਤਾਕਾਰ ਟਾਇਲਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਚਿੱਤਰ 4.1 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਰੱਖਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 4.1

ਜਦੋਂ ਪਹਿਲੀ ਟਾਇਲ ਨੂੰ ਦਿਖਾਈ ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਧੱਕਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਟਾਇਲਾਂ ਡਿੱਗ ਜਾਣਗੀਆਂ, ਇਨ੍ਹਾਂ ਜਾਨਣਾ ਬਹੁਤ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ

(a) ਪਹਿਲੀ ਟਾਇਲ ਡਿੱਗਦੀ ਹੈ, ਅਤੇ

(b) ਇਸ ਘਟਨਾ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ ਪਹਿਲੀ ਟਾਇਲ ਡਿਗਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦੀ ਅਗਲੀ (successor) ਲਾਜ਼ਮੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਡਿੱਗਦੀ ਹੈ।

ਇਹ ਹੀ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦਾ ਸਿਧਾਂਤ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਸਮੂਹ **N**, ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ **R** ਦਾ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, **N, R** ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਸਮੂਹ ਜਾਂ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਹਨ–

ਇੱਕ ਸਮੂਹ S ਨੂੰ ਆਗਮਨਿਕ ਸਮੂਹ ਕਹਾਂਗੇ ਜੇਕਰ $1 \in S$ ਅਤੇ $x + 1 \in S$ ਜਦੋਂ $x \in S$ ਹੋਵੇ। ਕਿਉਂਕਿ **N**,**R** ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਜੋ ਇੱਕ ਆਗਮਨਿਕ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਇਸ ਤੋਂ ਸਿੱਟਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ **R** ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਉਪ ਸਮੂਹ ਜੋ ਕਿ ਆਗਮਨਿਕ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਉਸਦੇ ਵਿੱਚ **N** ਲਾਜ਼ਮੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਹੋਵੇਗਾ।

ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ (Illustration)

ਮੰਨ ਲਉ ਅਸੀਂ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $1, 2, 3,...,n$, ਦੇ ਜੋੜ ਦਾ ਸੂਤਰ ਲੱਭਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ, ਭਾਵ ਸੂਤਰ ਜਿਸ ਨਾਲ $1 + 2 + 3$ ਜਦੋਂ $n = 3$ ਦਾ ਮੁੱਲ, $1 + 2 + 3 + 4$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਜਦੋਂ $n = 4$ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਇਹ ਵਿਸ਼ਵਾਸ ਕਰਨ ਲਈ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸੂਤਰ $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ਠੀਕ ਹੈ।

ਇਸ ਸੂਤਰ ਨੂੰ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ? ਆਪਣੀ ਇੱਛਾ ਅਨੁਸਾਰ ਅਸੀਂ n ਨੂੰ ਕਈ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲੈ ਕੇ, ਇਸ ਕਥਨ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਪਰ ਇਹ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ n ਦੇ ਸਾਰਿਆਂ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ ਸੂਤਰ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਨਹੀਂ ਕਰੇਗੀ। ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਲੜੀ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ, ਜਿਸ ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਵੇ ਕਿ ਇਕ ਵਾਰ ਕਿਸੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਲਈ ਸੂਤਰ ਸਿੱਧ ਹੋ ਜਾਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਆਉਣ ਵਾਲੀਆਂ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਸੂਤਰ ਨਿਰੰਤਰ ਆਪਣੇ ਆਪ ਸਿੱਧ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਕਾਰਜ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਦੁਆਰਾ ਉਤਪੰਨ ਕੀਤਾ ਮੰਨਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

4.3 ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ, ਦਾ ਸਿਧਾਂਤ (The Principle of Mathematical Induction)

ਮੰਨ ਲਉ $P(n)$ ਇੱਕ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ n ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਕਿ

(*i*) ਕਥਨ $n = 1$, ਲਈ ਠੀਕ ਹੈ, ਭਾਵ $P(1)$ ਠੀਕ ਹੈ ਅਤੇ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

(*ii*) ਜੇਕਰ ਕਥਨ $n = k$ (ਜਿੱਥੇ k ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ), ਲਈ ਠੀਕ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਕਥਨ $n = k + 1$, ਲਈ ਵੀ ਠੀਕ ਹੋਵੇਗਾ ਭਾਵ $P(k)$ ਦੀ ਸਚਾਈ ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ $P(k + 1)$ ਵੀ ਸੱਚ ਹੋਵੇਗਾ। ਤਾਂ $P(n)$ ਸਾਰੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ n ਲਈ ਸੱਚ ਹੋਵੇਗਾ।

ਗੁਣ (i) ਸਿਰਫ਼ ਤੱਥ ਦਾ ਕਥਨ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਥਨ $n \geq 4$ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾ ਚਰਣ $n = 4$ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਵੇਗਾ ਤੇ ਅਸੀਂ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ $n = 4$ ਲਈ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਭਾਵ P(4)

ਗੁਣਧਰਮ (Property) (ii) ਇੱਕ ਸ਼ਰਤ ਵਾਲਾ (conditional) ਗੁਣਧਰਮ ਹੈ। ਇਹ ਯਕੀਨ ਨਾਲ ਨਹੀਂ ਕਿਹਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਕਿ ਕਥਨ $n = k$, ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਕੇਵਲ ਇੰਨਾ ਕਹਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਇਹ $n = k$, ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ, ਤਾਂ $n = k + 1$ ਲਈ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗੁਣਧਰਮ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਕੇਵਲ ਬਾਸ਼ਰਤ ਤਜਵੀਜ (conditional proposition) ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਜੇਕਰ ਕਥਨ $n = k$, ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ $n = k + 1$ ਲਈ ਵੀ ਸੱਚ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਨੂੰ ਕਦੇ-ਕਦੇ ਆਗਮਨ ਦਾ ਪਗ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਆਗਮਨ ਦੇ ਪਗ ਵਿੱਚ ਇਹ ਮੰਨਿਆ ਜਾਣਾ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ

$n = k$ ਲਈ ਸਹੀ ਹੈ, ਇਸ ਪਗ ਨੂੰ ਆਗਮਨ ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਸੂਤਰ ਖੋਜਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਕਿਸੇ ਨਮੂਨੇ ਦੇ ਅਨੁਰੂਪ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$1 = 1^2 = 1$$

$$4 = 2^2 = 1 + 3$$

$$9 = 3^2 = 1 + 3 + 5$$

$16 = 4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$, ਆਦਿ

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਪਹਿਲੀਆਂ ਦੋ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਦੂਸਰੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਰਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ, ਪਹਿਲੀਆਂ ਤਿੰਨ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਤੀਸਰੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਰਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵੀ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਸ ਨਮੂਨੇ ਤੋਂ ਪ੍ਰਤੀਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ

$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$, (ਭਾਵ)

ਪਹਿਲੀਆਂ n ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ n ਦੇ ਵਰਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ,

$P(n)$: $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$.

ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $P(n)$, n ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ ਠੀਕ ਹੈ।

ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪੱਗ ਜਿਸ ਨੂੰ ਇਸ ਦੇ ਸਹੀ ਹੋਣ ਲਈ ਵਰਤਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ P(1) ਸਹੀ ਹੈ, ਨੂੰ ਮੂਲ ਪੱਗ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਪ੍ਰਤੱਖ ਰੂਪ ਵਿੱਚ

$1 = 1^2$, ਭਾਵ P(1) ਠੀਕ ਹੈ।

ਅਗਲੇ ਚਰਣ ਨੂੰ ਆਗਮਨ ਪਗ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $P(k)$ ਕਿਸੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ k ਲਈ ਠੀਕ ਹੈ ਅਤੇ ਹੁਣ ਅਸੀਂ $P(k + 1)$ ਨੂੰ ਸਹੀ ਸਿੱਧ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਕਿਉਂਕਿ $P(k)$ ਠੀਕ ਹੈ (ਸਹੀ ਹੈ), ਇਸ ਲਈ

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k - 1) = k^2 \qquad ... (1)$$

ਮੰਨ ਲਉ

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k - 1) + \{2(k + 1) - 1\} \qquad ... (2)$$

$= k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$ [(1) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ]

ਇਸ ਲਈ $P(k + 1)$ ਠੀਕ (ਸਹੀ) ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੁਣ ਆਗਮਨਿਕ ਸਬੂਤ ਪੂਰਾ ਹੋ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $P(n)$, ਸਾਰੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ n ਲਈ ਠੀਕ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਸਾਰੇ $n \geq 1$ ਲਈ, ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ P(n)ਹੈ, ਭਾਵ

$$P(n): \ 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$n = 1$, ਲਈ $\quad P(1): 1 = \frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6} = \frac{1\times2\times3}{6} = 1$ ਜੋ ਕਿ ਠੀਕ (ਸਹੀ) ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿਸੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ k ਲਈ P(k) ਠੀਕ (ਸਹੀ) ਹੈ, ਭਾਵ

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \qquad \ldots (1)$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ P(k + 1) ਵੀ ਠੀਕ (ਸਹੀ) ਹੈ, ਹੁਣ

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + k^2) + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \qquad \text{[(1) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ]}$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+1+1)\{2(k+1)+1\}}{6}$$

ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ P(k) ਠੀਕ (ਸਹੀ) ਹੈ ਤਾਂ P(k + 1) ਵੀ ਠੀਕ (ਸਹੀ) ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਤੋਂ ਕਥਨ P(n) ਸਾਰੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ n ਲਈ ਠੀਕ (ਸਹੀ) ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ n ਲਈ $2^n > n$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ P(n): $2^n > n$

ਜਦੋਂ $n = 1$ ਹੋਵੇ, $2^1 > 1$ ਇਸ ਲਈ P(1) ਠੀਕ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿਸੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ k ਲਈ P(k) ਠੀਕ (ਸਹੀ) ਹੈ,

$$2^k > k \qquad \ldots (1)$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਜਦੋਂ P(k) ਠੀਕ ਹੈ ਤਾਂ P(k +1) ਵੀ ਠੀਕ ਹੋਵੇਗਾ। (1) ਨੂੰ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ 2 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$2.\ 2^k > 2k$$

ਭਾਵ, $\quad 2^{k+1} > 2k = k + k > k + 1$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ P(k) ਠੀਕ ਹੈ ਤਾਂ P(k + 1) ਵੀ ਠੀਕ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਤੋਂ P(n) ਹਰ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਲਈ ਠੀਕ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਸਾਰੇ $n \geq 1$, ਲਈ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

$$P(n): \quad \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $P(1) : \frac{1}{1.2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$ ਜੋ ਕਿ ਠੀਕ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $n = 1$ ਲਈ $P(n)$ ਠੀਕ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ k ਲਈ $P(k)$ ਠੀਕ ਹੈ, ਭਾਵ

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1} \qquad ... (1)$$

ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਜਦੋਂ $P(k)$ ਸਹੀ ਹੈ ਤਾਂ $P(k + 1)$ ਵੀ ਸਹੀ ਹੋਵੇਗਾ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{k(k+1)}\right]+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} \qquad \text{[(1) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ]}$$

$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k^2+2k+1)}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}=\frac{k+1}{(k+1)+1}$$

ਇਸ ਲਈ $P(k + 1)$ ਠੀਕ ਹੈ, ਜਦੋਂ $P(k)$ ਠੀਕ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਤੋਂ (P.M.I.), $P(n)$ ਸਾਰੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਠੀਕ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਹਰ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਲਈ, ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $7^n - 3^n$, 4 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ,

$P(n)$: $7^n - 3^n$, 4 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ,

$P(1)$: $7^1 - 3^1 = 4$, 4 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $n = 1$ ਲਈ $P(n)$ ਠੀਕ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ k ਲਈ $P(k)$ ਠੀਕ ਹੈ।

ਭਾਵ $P(k)$: $7^k - 3^k$, 4 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ $7^k - 3^k = 4d$, ਜਿੱਥੇ $d \in \mathbf{N}$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ P(k + 1) ਠੀਕ ਹੈ, ਜਦੋਂ P(k) ਠੀਕ ਹੈ।

ਹੁਣ $\quad 7^{(k+1)} - 3^{(k+1)} = 7^{(k+1)} - 7.3^k + 7.3^k - 3^{(k+1)}$

$$= 7(7^k - 3^k) + (7-3)3^k = 7(4d) + (7-3)3^k$$

$$= 7(4d) + 4.3^k = 4(7d + 3^k)$$

ਅਖ਼ੀਰ ਵਾਲੀ ਪੰਕਤੀ ਤੋਂ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $7^{(k+1)} - 3^{(k+1)}$, 4 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ P(k + 1) ਠੀਕ ਹੈ, ਜਦੋਂ P(k) ਠੀਕ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ (P.M.I.) ਤੋਂ ਇਹ ਸਾਰੀਆਂ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ n ਲਈ ਠੀਕ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਸਾਰੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ n ਲਈ, ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(1 + x)^n \geq (1 + nx)$

ਜਿੱਥੇ $x > -1$.

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ P(n) ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਕਥਨ ਹੈ,

ਭਾਵ P(n): $(1 + x)^n \geq (1 + nx)$, ਜਿੱਥੇ $x > -1$

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $n = 1$, ਲਈ P(n) ਠੀਕ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ$(1 + x) \geq (1 + x)$, $x > -1$ ਲਈ

ਮੰਨ ਲਉ

P(k): $(1 + x)^k \geq (1 + kx)$, $x > -1$ ਲਈ ਠੀਕ ਹੈ ... (1)

ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਦੋਂ P(k) ਠੀਕ ਹੈ ਤਾਂ P(k + 1) ਵੀ $x > -1$ ਲਈ ਠੀਕ ਹੋਵੇਗਾ। ... (2)

ਆਉ ਇੱਕ ਤਤਸਮਕ ਲਈਏ

$$(1 + x)^{k+1} = (1 + x)^k (1 + x)$$

ਦਿੱਤਾ ਹੈ, $x > -1$ ਇਸ ਲਈ $(1 + x) > 0$

ਇਸ ਲਈ $(1 + x)^k \geq (1 + kx)$ ਨੂੰ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ

$$(1 + x)^{k+1} \geq (1 + kx)(1 + x)$$

ਭਾਵ $\quad (1 + x)^{k+1} \geq (1 + x + kx + kx^2)$ ... (3)

ਇੱਥੇ k ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $x^2 \geq 0$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $kx^2 \geq 0$, ਇਸ ਲਈ

$$(1 + x + kx + kx^2) \geq (1 + x + kx),$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਨੂੰ

$$(1 + x)^{k+1} \geq (1 + x + kx)$$

ਭਾਵ $\quad (1 + x)^{k+1} \geq [1 + (1 + k)x]$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਥਨ (2) ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ (P.M.I.) ਤੋਂ P(n) ਹਰ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਲਈ ਠੀਕ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਾਰੇ $n \in \mathbf{N}$ ਲਈ,

$2.7^n + 3.5^n - 5$, 24 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਥਨ P(n) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਕਿ

P(n) : $\quad 2.7^n + 3.5^n - 5$, 24 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $n = 1$ ਲਈ ਕਥਨ P(n) ਸਹੀ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $2.7 + 3.5 - 5 = 24$, 24 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ P(k) ਸਹੀ ਹੈ,

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਭਾਵ $2.7^k + 3.5^k - 5 = 24q$, ਜਿੱਥੇ $q \in \mathbf{N}$ ... (1)

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਜਦੋਂ P(k) ਸਹੀ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ P(k + 1) ਵੀ ਸਹੀ ਹੋਵੇਗਾ।

ਹੁਣ

$$
\begin{aligned}
2.7^{k+1} + 3.5^{k+1} - 5 &= 2.7^k \,.\, 7^1 + 3.5^k \,.\, 5^1 - 5 \\
&= 7\,[2.7^k + 3.5^k - 5 - 3.5^k + 5] + 3.5^k \,.\, 5 - 5 \\
&= 7\,[24q - 3.5^k + 5] + 15.5^k - 5 \\
&= 7 \times 24q - 21.5^k + 35 + 15.5^k - 5 \\
&= 7 \times 24q - 6.5^k + 30 \\
&= 7 \times 24q - 6\,(5^k - 5) \\
&= 7 \times 24q - 6\,(4p) \quad [(5^k - 5) \text{ 4 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ (ਕਿਉਂ ?)}] \\
&= 7 \times 24q - 24p \\
&= 24\,(7q - p) \\
&= 24 \times r\,;\ r = 7q - p, \text{ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ} \qquad \ldots (2)
\end{aligned}
$$

ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਵਾਲੀ ਵਿਅੰਜਕ 24 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ P(k + 1) ਸਹੀ ਹੈ, ਜਦੋਂ P(k) ਸਹੀ ਹੋਵੇ।

ਇਸ ਲਈ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ (P.M.I.) ਤੋਂ, P(n) ਸਾਰੇ $n \in$ N ਲਈ ਸਹੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ, $n \in \mathbf{N}$ ਲਈ

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 > \frac{n^3}{3}$$

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ P(n) ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਕਥਨ ਹੈ।

ਭਾਵ $P(n) : 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 > \dfrac{n^3}{3},\ n \in \mathbf{N}$

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $n = 1$, ਕਥਨ P(n) ਸਹੀ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $1^2 > \dfrac{1^3}{3}$

ਮੰਨ ਲਉ P(k) ਸਹੀ (ਠੀਕ) ਹੈ।

ਭਾਵ $P(k) : 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 > \dfrac{k^3}{3}$ ...(1)

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ P(k + 1) ਸੱਚ (ਸਹੀ) ਹੈ, ਜਦੋਂ P(k) ਸਹੀ (ਠੀਕ/ਸੱਚ) ਹੋਵੇ।

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k + 1)^2$

$$= \left(1^2 + 2^2 + \ldots + k^2\right) + (k+1)^2 > \frac{k^3}{3} + (k+1)^2 \qquad [(1) \text{ ਤੋਂ}]$$

$$= \frac{1}{3}\,[k^3 + 3k^2 + 6k + 3]$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

$$= \frac{1}{3}[(k+1)^3 + 3k + 2] > \frac{1}{3}(k+1)^3$$

ਇਸ ਲਈ, P(k + 1) ਸਹੀ ਹੈ ਜਦੋਂ P(k) ਸਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ (P.M.I.) ਤੋਂ P(n) ਸਾਰੇ $n \in \mathbf{N}$ ਲਈ ਸਹੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਨੂੰ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ, ਸਾਰੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ n ਲਈ ਘਾਤ ਦਾ ਨਿਯਮ $(ab)^n = a^n b^n$ ਸਿੱਧ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਕਥਨ P(n) ਹੈ,

ਭਾਵ P(n) : $(ab)^n = a^n b^n$

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $n = 1$ ਲਈ P(n) ਸਹੀ (ਠੀਕ/ਸੱਚ) ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $(ab)^1 = a^1 b^1$

ਮੰਨ ਲਉ P(k) ਠੀਕ ਹੈ, ਭਾਵ

$$(ab)^k = a^k b^k \qquad \ldots (1)$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਜਦੋਂ P(k) ਸਹੀ ਹੋਵੇ, P(k + 1) ਵੀ ਸਹੀ ਹੋਵੇਗਾ,

ਹੁਣ

$$\begin{aligned} (ab)^{k+1} &= (ab)^k (ab) \\ &= (a^k b^k)(ab) && [(1)\text{ਤੋਂ}] \\ &= (a^k \cdot a^1)(b^k \cdot b^1) = a^{k+1} \cdot b^{k+1} \end{aligned}$$

ਇਸ ਲਈ, P(k + 1) ਸਹੀ ਹੈ, ਜਦੋਂ P(k) ਸਹੀ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਲਈ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਤੋਂ P(n) ਸਾਰੇ $n \in$ N ਲਈ ਸਹੀ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 4.1

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਨੂੰ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦਾ ਸਿਧਾਂਤ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ ਸਾਰੇ $n \in \mathbf{N}$ ਲਈ ਸਿੱਧ ਕਰੋ :

1. $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1} = \frac{(3^n - 1)}{2}$

2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. $1 + \frac{1}{(1+2)} + \frac{1}{(1+2+3)} + \ldots + \frac{1}{(1+2+3+\ldots n)} = \frac{2n}{(n+1)}$

4. $1.2.3 + 2.3.4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

5. $1.3 + 2.3^2 + 3.3^3 + \ldots + n.3^n = \frac{(2n-1)3^{n+1} + 3}{4}$

6. $1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n.(n+1) = \left[\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right]$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

7. $1.3 + 3.5 + 5.7 + \ldots + (2n-1)(2n+1) = \dfrac{n(4n^2+6n-1)}{3}$

8. $1.2 + 2.2^2 + 3.2^2 + \ldots + n.2^n = (n-1)\, 2^{n+1} + 2$

9. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}=1-\dfrac{1}{2^n}$

10. $\dfrac{1}{2.5}+\dfrac{1}{5.8}+\dfrac{1}{8.11}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\dfrac{n}{(6n+4)}$

11. $\dfrac{1}{1.2.3}+\dfrac{1}{2.3.4}+\dfrac{1}{3.4.5}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

12. $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

13. $\left(1+\dfrac{3}{1}\right)\left(1+\dfrac{5}{4}\right)\left(1+\dfrac{7}{9}\right)\ldots\left(1+\dfrac{(2n+1)}{n^2}\right)=(n+1)^2$

14. $\left(1+\dfrac{1}{1}\right)\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=(n+1)$

15. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

16. $\dfrac{1}{1.4}+\dfrac{1}{4.7}+\dfrac{1}{7.10}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{n}{(3n+1)}$

17. $\dfrac{1}{3.5}+\dfrac{1}{5.7}+\dfrac{1}{7.9}+\ldots+\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{n}{3(2n+3)}$

18. $1 + 2 + 3 + \ldots + n < \dfrac{1}{8}(2n+1)^2$

19. $n(n+1)(n+5)$, 3 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ।

20. $10^{2n-1} + 1$, 11 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹੈ।

21. $x^{2n} - y^{2n}$, $x + y$ ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹੈ।

22. $3^{2n+2} - 8n - 9$, 8 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹੈ।

23. $41^n - 14^n$, 27 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ।

24. $(2n + 7) < (n + 3)^2$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਗਣਿਤਿਕ ਚਿੰਤਨ ਦਾ ਇੱਕ ਮੂਲ ਅਧਾਰ ਨਿਗਮਨਾਤਮਿਕ ਵਿਵੇਚਨ (reasoning) ਹੈ। ਨਿਗਮਨ ਦੇ ਉਲਟ ਆਗਮਨਿਕ ਵਿਵੇਚਨ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਹਾਲਤਾਂ (cases) ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਦੁਆਰਾ ਇੱਕ ਅਨੁਮਾਨਿਤ ਕਥਨ ਵਿਕਸਿਤ ਕਰਨ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਹਾਲਤ ਦਾ ਪ੍ਰੇਖਣ ਨਾ ਕਰ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਧਾਰਨ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸ਼ਬਦ ਆਗਮਨ ਤੋਂ ਭਾਵ ਖਾਸ ਹਾਲਤਾਂ ਜਾਂ ਤੱਥਾਂ ਤੋਂ ਆਮ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਹੈ।
- ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਸਿਧਾਂਤ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਸਾਧਨ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਗਣਿਤਿਕ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਹਰ ਇੱਕ ਕਥਨ ਨੂੰ P(n) ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਇਸਦੀ ਸਚਾਈ $n = 1$ ਲਈ ਜਾਂਚੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਕਿਸੇ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ k ਦੇ ਲਈ P(k) ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਨੂੰ ਮੰਨ ਕੇ P (k+1) ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਸਿੱਧ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਹੋਰ ਸੰਕਲਪਨਾਵਾਂ ਅਤੇ ਵਿਧੀਆਂ ਦੇ ਉਲਟ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦੁਆਰਾ ਸਬੂਤ ਕਿਸੇ ਵਿਅਕਤੀ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਦੁਆਰਾ ਕਿਸੇ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਾਲ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਖੋਜ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਹ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਸਿਧਾਂਤ Pythagoras ਨੂੰ ਪਤਾ ਸੀ। ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਸਿਧਾਂਤ ਨੂੰ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਨ ਦਾ ਸਿਹਰਾ ਫਰਾਂਸੀਸੀ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ Blaise Pascal ਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਆਗਮਨ ਸ਼ਬਦ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਅੰਗਰੇਜ਼ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ John Wallis ਨੇ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਇਸ ਸਿਧਾਂਤ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਦੋ ਪਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਦਾ ਸਬੂਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਕੀਤੀ ਗਈ। De Morgan ਨੇ ਗਣਿਤ ਦੇ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਿਸ਼ਿਆਂ ਤੇ ਬਹੁਤ ਯੋਗਦਾਨ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਇਹ ਪਹਿਲੇ ਵਿਅਕਤੀ ਸਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੇ ਇਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਅਤੇ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਜਾ ਨਾਮ ਦਿੱਤਾ ਅਤੇ ਗਣਿਤਿਕ ਸ਼੍ਰੇਣੀਆਂ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਵੱਲ ਝੁਕਾਅ (convergence) ਨੂੰ De Morgan ਦਾ ਨਿਯਮ ਵਿਕਸਿਤ ਕੀਤਾ।

G. Peano ਨੇ ਸ਼ਪਸ਼ਟ ਵਿਅਕਤ ਮੰਨਤਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਦਾ ਨਿਗਮਨ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਿੰਮੇਵਾਰੀ ਲਈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਹੁਣ ਪਿਆਨੋ ਦੇ ਸਵੈਸਿਧ ਕਥਨ (axioms) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਪਿਆਨੋ ਦੇ ਸਵੈਸਿਧ ਕਥਨ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਦੀ ਫ਼ਿਰ ਤੋਂ ਕਥਨ ਹੀ ਗਣਿਤਿਕ ਆਗਮਨ ਦਾ ਸਿਧਾਂਤ ਹੈ।

— ❖ —

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਧਿਆਇ 5

ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ

(Complex Numbers and Quadratic Equations)

❖*Mathematics is the Queen of Sciences and Arithmetic is the Queen of Mathematics. – GAUSS* ❖

5.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਅਤੇ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖਿਕ (linear) ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਅਤੇ ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੀ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ $x^2 + 1 = 0$ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਹੱਲ ਨਹੀਂ, ਕਿਉਂਕਿ $x^2 + 1 = 0$ ਤੋਂ $x^2 = -1$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ ਅ-ਰਿਣਾਤਮਕ (non-negative) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੀ ਇੱਕ ਵੱਡੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿੱਚ ਵਿਸਥਾਰ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਸੀ ਤਾਂ ਜੋ ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਣ $x^2 = -1$ ਦਾ ਹੱਲ ਲੱਭ ਸਕੀਏ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਮੁਖ ਮੰਤਵ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2 + bx + c = 0$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ $D = b^2 - 4ac < 0$ ਹੋਵੇ, ਜਿਸਦਾ ਹੱਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਸੀ।

W. R. Hamilton
(1805-1865)

5.2 ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (Complex Numbers)

ਆਉ $\sqrt{-1}$ ਨੂੰ ਇੱਕ ਚਿੰਨ i ਨਾਲ ਦਰਸਾਈਏ ਤਾਂ ਸਾਡੇ ਕੋਲ $i^2 = -1$ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਹੈ $x^2 + 1 = 0$ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ i ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ।

$a + ib$ ਰੂਪ ਦੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਜਿੱਥੇ a ਅਤੇ b ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਨੂੰ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ (complex number) ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $2 + i3$, $(-1) + i\sqrt{3}$, $4+i\left(\frac{-1}{11}\right)$ ਸਾਰੀਆਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $z = a + ib$ ਵਿੱਚ a ਨੂੰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਭਾਗ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ Re z ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ (ਨਿਰੂਪਤ) ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ b ਨੂੰ ਕਾਲਪਨਿਕ ਭਾਗ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ Im z ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਜੇਕਰ $z = 2 + i5$, ਤਾਂ Re $z = 2$ ਅਤੇ Im $z = 5$ ਦੋ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $z_1 = a + ib$ ਅਤੇ $z_2 = c + id$ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣਗੇ ਜੇਕਰ $a = c$ ਅਤੇ $b = d$.

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਜੇਕਰ $4x + i(3x - y) = 3 + i(-6)$, ਜਿੱਥੇ x ਅਤੇ y ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਤਾਂ x ਅਤੇ y ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ $$4x + i(3x - y) = 3 + i(-6) \qquad \ldots (1)$$

ਦੋਹਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਅਤੇ ਕਾਲਪਨਿਕ ਭਾਗਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਲੈਂਦੇ ਹੋਏ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$4x = 3,\ 3x - y = -6,$$

ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਨਾਲੋਂ-ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ $x = \frac{3}{4}$ ਅਤੇ $y = \frac{33}{4}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

5.3 ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਬੀਜਗਣਿਤ (Algebra of Complex Numbers)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਬੀਜਗਣਿਤ ਦਾ ਵਿਕਾਸ ਕਰਾਂਗੇ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

5.3.1 ਦੋ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ : ਮੰਨ ਲਉ $z_1 = a + ib$ ਅਤੇ $z_2 = c + id$ ਦੋ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਜੋੜ $z_1 + z_2$ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

$z_1 + z_2 = (a + c) + i\,(b + d)$, ਜੋ ਕਿ ਫਿਰ ਤੋਂ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $(2 + i3) + (-6 + i5) = (2 - 6) + i\,(3 + 5) = -4 + i\,8$

ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਗੁਣਧਰਮਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ :

(i) ਬੰਦ ਦਾ ਨਿਯਮ (*The closure law*) : ਦੋ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਵੀ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ $z_1 + z_2$ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਸਾਰੀਆਂ z_1 ਅਤੇ z_2 ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ।

(ii) ਕ੍ਰਮਵਟਾਂਦਰਾ ਦਾ ਨਿਯਮ (*The commutative law*) : ਕਿਸੇ ਦੋ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ z_1 ਅਤੇ z_2 ਲਈ $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

(iii) ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਦਾ ਨਿਯਮ (*The associative law*) : ਕਿਸੇ ਤਿੰਨ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ z_1, z_2 ਅਤੇ z_3 ਲਈ $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

(iv) ਜੋੜਾਤਮਕ ਤਤਸਮਕ ਦੀ ਹੋਂਦ (*The existance of additive identity*) : ਹਰ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ z ਲਈ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $0 + i\,0$ (ਜਿਸ ਨੂੰ 0 ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ), ਜਿਸ ਨੂੰ ਜੋੜਾਤਮਕ ਤਤਸਮਕ (*additive identity*) ਜਾਂ ਸਿਫਰ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਕਿ $z + 0 = z$.

(v) ਜੁੜਨਯੋਗ ਉਲਟ ਦੀ ਹੋਂਦ (*The existance of additive inverse*) : ਹਰ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $z = a + ib$ ਲਈ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $-a + i(-b)$ ($-z$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ) ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਜੁੜਨਯੋਗ ਉਲਟ (*additive inverse*) ਜਾਂ z ਦਾ ਰਿਣਾਤਮਕ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $z + (-z) = 0$ ਜੁੜਨਯੋਗ ਉਲਟ ਹੈ।

5.3.2 ਦੋ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ (Difference of two complex numbers) : ਕਿਸੇ ਦੋ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ z_1 ਅਤੇ z_2, ਲਈ ਅੰਤਰ $z_1 - z_2$, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2).$$

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $(6 + 3i) - (2 - i) = (6 + 3i) + (-2 + i) = 4 + 4i$

ਅਤੇ $(2 - i) - (6 + 3i) = (2 - i) + (-6 - 3i) = -4 - 4i$

5.3.3 ਦੋ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾਂ (Multiplication of two complex numbers) : ਮੰਨ ਲਉ $z_1 = a + ib$ ਅਤੇ $z_2 = c + id$ ਕੋਈ ਦੋ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾਂ $z_1.z_2$ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

$$z_1.z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $(3 + i5)\,(2 + i6) = (3 \times 2 - 5 \times 6) + i(3 \times 6 + 5 \times 2) = -24 + i28$

ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾਂ ਵਿੱਚ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗੁਣਧਰਮ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਬਿਨਾਂ ਸਬੂਤਾਂ ਦੇ ਹੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਾਂਗੇ–

(i) ਬੰਦ ਦਾ ਨਿਯਮ (The closure law) : ਦੋ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾਂ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਹਰ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ z_1 ਅਤੇ z_2 ਲਈ ਗੁਣਾਂ $z_1.z_2$ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

(ii) ਕ੍ਰਮਵਟਾਂਦਰਾ ਦਾ ਨਿਯਮ (The commutative law) : ਕਿਸੇ ਦੋ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ z_1 ਅਤੇ z_2 ਲਈ,

$$z_1\, z_2 = z_2\, z_1$$

(iii) ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਦਾ ਨਿਯਮ (The associative law) : ਕਿਸੇ ਤਿੰਨ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ z_1, z_2 ਅਤੇ z_3 ਲਈ,

$$(z_1\, z_2)\, z_3 = z_1\, (z_2\, z_3)$$

(iv) ਗੁਣਾਤਮਕ ਤਤਸਮਕ ਦੀ ਹੋਂਦ (The existance of multiplicative identity) : ਹਰ ਇੱਕ Z ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਲਈ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ $1 + i\,0$ (1 ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਕਿ $z.1 = z$, ਇਸ ਨੂੰ ਗੁਣਾਤਮਕ ਤਤਸਮਕ (multiplicative identity) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

(v) ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ ਦੀ ਹੋਂਦ (The existence of multiplicative inverse) : ਹਰ ਇੱਕ ਗ਼ੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਮਿਸ਼ਰਿਤ (complex) ਸੰਖਿਆ $z = a + ib$ ਜਾਂ $a + ib(a \neq 0,\ b \neq 0)$, ਲਈ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $\frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}$ (ਜਿਸ ਨੂੰ $\frac{1}{z}$ ਜਾਂ z^{-1} ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ), ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਕਿ $z.\frac{1}{z} = 1$ ਇਸ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

(vi) ਵੰਡ ਦਾ ਨਿਯਮ (The distributive law) : ਤਿੰਨ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ z_1, z_2 ਅਤੇ z_3 ਲਈ,

(a) $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

(b) $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

5.3.4 ਦੋ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਭਾਗ (Division of two complex numbers) : ਕੋਈ ਦੋ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ z_1 ਅਤੇ z_2, ਜਿੱਥੇ $z_2 \neq 0$ ਲਈ, ਭਾਗਫਲ $\frac{z_1}{z_2}$ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ,

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{1}{z_2}$$

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ’ਤੇ, ਮੰਨ ਲਉ $z_1 = 6 + 3i$ ਅਤੇ $z_2 = 2 - i$

ਤਾਂ $$\frac{z_1}{z_2} = \left((6+3i) \times \frac{1}{2-i}\right) = (6+3i)\left(\frac{2}{2^2+(-1)^2} + i\frac{-(-1)}{2^2+(-1)^2}\right)$$

$$= (6+3i)\left(\frac{2+i}{5}\right) = \frac{1}{5}\left[12-3+i(6+6)\right] = \frac{1}{5}(9+12i)$$

5.3.5 i ਦੀ ਘਾਤ (Power of i) ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$i^3 = i^2 i = (-1)\, i = -i, \qquad i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$$

$$i^5 = (i^2)^2\, i = (-1)^2\, i = i, \qquad i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3 = -1, \text{ ਆਦਿ}$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ $$i^{-1} = \frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{-1} = -i, \qquad i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1,$$

$$i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{1} = i, \qquad i^{-4} = \frac{1}{i^4} = \frac{1}{1} = 1$$

ਵਿਆਪਕ ਤੌਰ (ਆਮ ਤੌਰ) ’ਤੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ k ਲਈ $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$

5.3.6 ਕਿਸੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ (The square roots of a negative real number) :
ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $i^2 = -1$ ਅਤੇ $(-i)^2 = i^2 = -1$

ਇਸ ਲਈ, -1 ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ i, $-i$ ਹੋਵੇਗਾ। ਪਰ ਚਿੰਨ੍ਹ $\sqrt{-1}$ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਸਿਰਫ i ਭਾਵ ਹੀ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ $x^2 + 1 = 0$ ਜਾਂ $x^2 = -1$ ਦੇ i ਅਤੇ $-i$ ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਹੱਲ ਹਨ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, $$\left(\sqrt{3}\,i\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 i^2 = 3\,(-1) = -3$$

$$\left(-\sqrt{3}\,i\right)^2 = \left(-\sqrt{3}\right)^2 i^2 = -3$$

ਇਸ ਲਈ, -3 ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ $\sqrt{3}\,i$ ਅਤੇ $-\sqrt{3}\,i$ ਹਨ

ਫਿਰ ਤੋਂ $\sqrt{-3}$ ਚਿੰਨ੍ਹ ਸਿਰਫ $\sqrt{3}\,i$ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ $\sqrt{-3} = \sqrt{3}\,i$

ਆਮ ਤੌਰ ’ਤੇ ਜੇਕਰ a ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,\sqrt{-1} = \sqrt{a}\, i$,

ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ਸਾਰੀਆਂ ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਲਈ। ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਫਿਰ ਵੀ ਠੀਕ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $a > 0, b < 0$ ਜਾਂ $a < 0, b > 0$ ਹੋਵੇ। ਜੇਕਰ $a < 0$ ਅਤੇ $b < 0$ ਤਾਂ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ? ਆਉ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ–

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਧਿਆਨ ਦਿਉ

$i^2 = \sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\,(-1)}$ (ਇਹ ਮੰਨਣ ਨਾਲ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ $\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{ab}$)

$= \sqrt{1} = 1$, ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਸੱਚਾਈ $i^2 = -1$ ਦਾ ਵਿਰੋਧ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\sqrt{a}\times\sqrt{b} \neq \sqrt{ab}$ ਜੇਕਰ a ਅਤੇ b ਦੋਵੇਂ ਰਿਣਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਅੱਗੇ, ਜੇਕਰ a ਅਤੇ b ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ $\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{ab} = 0$.

5.3.7 ਤਤਸਮਕਾਂ (Identities) ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਤਸਮਕਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ–

$(z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2$, ਸਾਰੀਆਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ z_1 ਅਤੇ z_2 ਲਈ

ਸਬੂਤ : ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ $(z_1 + z_2)^2 = (z_1 + z_2)\,(z_1 + z_2)$,

$= (z_1 + z_2)\,z_1 + (z_1 + z_2)\,z_2$ ਵੰਡ ਦਾ ਨਿਯਮ (Distributive law)

$= z_1^2 + z_2z_1 + z_1z_2 + z_2^2$ ਵੰਡ ਦਾ ਨਿਯਮ (Distributive law)

$= z_1^2 + z_1z_2 + z_1z_2 + z_2^2$ ਕ੍ਰਮਵਟਾਂਦਰਾ ਦਾ ਨਿਯਮ (Commutative law of multiplication)

$= z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਤਤਸਮਕਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

(i) $(z_1 - z_2)^2 = z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2$

(ii) $(z_1 + z_2)^3 = z_1^3 + 3z_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 + z_2^3$

(iii) $(z_1 - z_2)^3 = z_1^3 - 3z_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 - z_2^3$

(iv) $z_1^2 - z_2^2 = (z_1 + z_2)(z_1 - z_2)$

ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਹੋਰ ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਤਤਸਮਕਾਂ ਜਿਹੜੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਠੀਕ ਹਨ, ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰੀਆਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਵੀ ਠੀਕ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਨੂੰ $a + bi$ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

(i) $(-5i)\left(\frac{1}{8}i\right)$ (ii) $(-i)\,(2i)\left(-\frac{1}{8}i\right)^3$

ਹੱਲ : (i) $(-5i)\left(\frac{1}{8}i\right) = \frac{-5}{8}i^2 = \frac{-5}{8}(-1) = \frac{5}{8} = \frac{5}{8} + i0$

(ii) $(-i)\,(2i)\left(-\frac{1}{8}i\right)^3 = 2\times\frac{1}{8\times8\times8}\times i^5 = \frac{1}{256}\left(i^2\right)^2 i = \frac{1}{256}i$.

ਉਦਾਹਰਣ 3 : $(5 - 3i)^3$ ਨੂੰ $a + ib$ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ, $(5 - 3i)^3 = 5^3 - 3\times5^2\times(3i) + 3\times5\,(3i)^2 - (3i)^3$

$= 125 - 225i - 135 + 27i = -10 - 198i$.

ਉਦਾਹਰਣ 4 : $\left(-\sqrt{3}+\sqrt{-2}\right)\left(2\sqrt{3}-i\right)$ ਨੂੰ $a + ib$ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ, $\left(-\sqrt{3}+\sqrt{-2}\right)\left(2\sqrt{3}-i\right) = \left(-\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i\right)\left(2\sqrt{3}-i\right)$

$= -6+\sqrt{3}i+2\sqrt{6}i-\sqrt{2}\,i^2 = \left(-6+\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}\left(1+2\sqrt{2}\right)i$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

5.4 ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ ਅਤੇ ਸੰਯੁਗਮ (The Modulus and the Conjugate of a Complex Number)

ਮੰਨ ਲਉ $z = a + ib$ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ z ਦੇ ਮਾਪ ਅੰਕ ਜਿਸ ਨੂੰ $|z|$ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇੱਕ ਅਰਿਣਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ $\sqrt{a^2+b^2}$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਭਾਵ $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ ਅਤੇ z ਦੇ ਸੰਯੁਗਮੀ ਜਿਸ ਨੂੰ $\bar{z}$ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $a–ib$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ $\bar{z} = a–ib$

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $\quad |3+i| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}, \quad |2-5i| = \sqrt{2^2+(-5)^2} = \sqrt{29}$,

ਅਤੇ $\quad \overline{3+i} = 3-i, \quad \overline{2-5i} = 2+5i, \quad \overline{-3i-5} = 3i-5$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਕਿਸੇ ਗ਼ੈਰ-ਸਿਫਰ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ z ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$z^{-1} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

ਜਾਂ $\quad z\,\bar{z} = |z|^2$

ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਕਿਸੇ ਦੋ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ z_1 ਅਤੇ z_2 ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਨਤੀਜੇ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

(i) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ (ii) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ਜਿੱਥੇ $|z_2| \neq 0$

(iii) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\,\bar{z}_2$ (iv) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$ (v) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ ਜਿੱਥੇ $z_2 \neq 0$.

ਉਦਾਹਰਣ 5 : $2 – 3i$ ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $z = 2 – 3i$

ਤਾਂ $\quad \bar{z} = 2 + 3i$ ਅਤੇ $|z|^2 = 2^2 + (-3)^2 = 13$

ਇਸ ਲਈ, $2 – 3i$ ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਵੇਗਾ

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਹੱਲ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

$$z^{-1} = \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)}$$

$$= \frac{2+3i}{2^2-(3i)^2} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਨੂੰ $a + ib$ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

(i) $\frac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}$ (ii) i^{-35}

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਹੱਲ : (i) $\dfrac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}=\dfrac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}\times\dfrac{1+\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i}=\dfrac{5+5\sqrt{2}i+\sqrt{2}i-2}{1-\left(\sqrt{2}i\right)^2}$

$$=\frac{3+6\sqrt{2}i}{1+2}=\frac{3(1+2\sqrt{2}i)}{3}=1+2\sqrt{2}i.$$

(ii) $i^{-35}=\dfrac{1}{i^{35}}=\dfrac{1}{\left(i^2\right)^{17}i}=\dfrac{1}{-i}\times\dfrac{i}{i}=\dfrac{i}{-i^2}=i$

ਅਭਿਆਸ 5.1

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ $a + ib$ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ :

1. $(5i)\left(-\dfrac{3}{5}i\right)$ **2.** i^9+i^{19} **3.** i^{-39}

4. $3(7 + i7) + i(7 + i7)$ **5.** $(1 - i) - (-1 + i6)$ **6.** $\left(\dfrac{1}{5}+i\dfrac{2}{5}\right)-\left(4+i\dfrac{5}{2}\right)$

7. $\left[\left(\dfrac{1}{3}+i\dfrac{7}{3}\right)+\left(4+i\dfrac{1}{3}\right)\right]-\left(-\dfrac{4}{3}+i\right)$ **8.** $(1-i)^4$ **9.** $\left(\dfrac{1}{3}+3i\right)^3$

10. $\left(-2-\dfrac{1}{3}i\right)^3$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 11 ਤੋਂ 13 ਤੱਕ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹਰ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ ਪਤਾ ਕਰੋ :

11. $4 - 3i$ **12.** $\sqrt{5}+3i$ **13.** $-i$

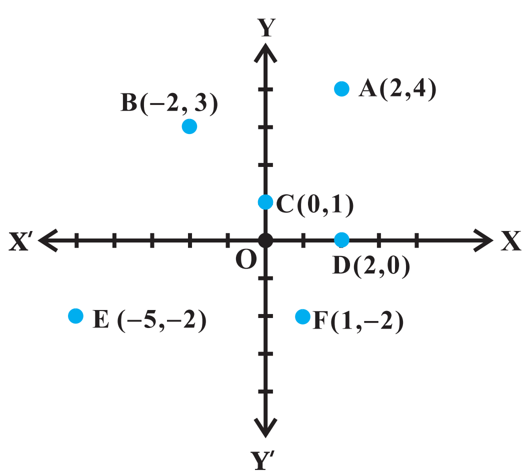
14. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ $a + ib$ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ :

$$\frac{\left(3+i\sqrt{5}\right)\left(3-i\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i\right)-\left(\sqrt{3}-i\sqrt{2}\right)}$$

5.5 ਆਰਗੰਡ ਤਲ ਅਤੇ ਧਰੁਵੀ ਨਿਰੂਪਣ (Argand Plane and Polar Representation)

ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਪਰਸਪਰ (ਆਪਸ ਵਿੱਚ) ਲੰਬ ਰੇਖਾਵਾਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ x-ਧੁਰਾ ਅਤੇ y-ਧੁਰਾ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜੇ (x, y) ਲਈ ਸਾਡੇ ਕੋਲ XY–ਤਲ ਤੇ ਇੱਕ ਇਕੱਲਾ ਬਿੰਦੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਤੱਲ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਲਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਇਕ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $x + iy$ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜੇ (x, y) ਦੇ ਸੰਗਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ XY-ਤਲ ਤੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਤੌਰ ’ਤੇ ਇੱਕ ਇਕੱਲੇ ਬਿੰਦੂ $P(x, y)$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਵੀ।

ਕੁਝ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $2 + 4i$, $-2 + 3i$, $0 + 1i$, $2 + 0i$, $-5 -2i$ ਅਤੇ $1 - 2i$ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕ੍ਰਮਵਾਰ (2, 4), (– 2, 3), (0, 1), (2, 0), (–5, –2), ਅਤੇ (1, – 2) ਕ੍ਰਮਬਧ ਜੋੜੇ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 5.1 ਵਿੱਚ ਜਿਮਾਇਤੀ ਤੌਰ ’ਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ A, B, C, D, E ਅਤੇ F ਨਾਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



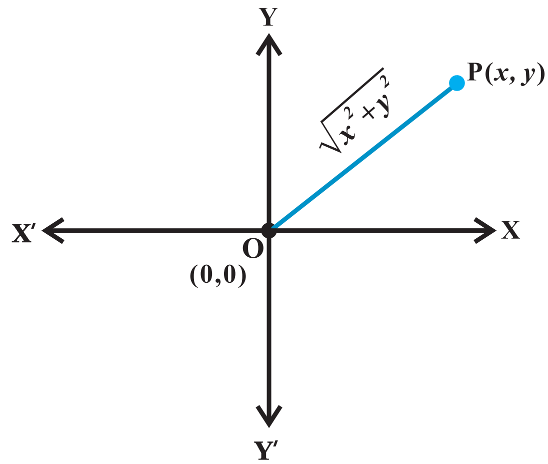
ਚਿੱਤਰ 5.1

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਹ ਤਲ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਨੂੰ ਆਰਗੰਡ ਤਲ (Argand Plane) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

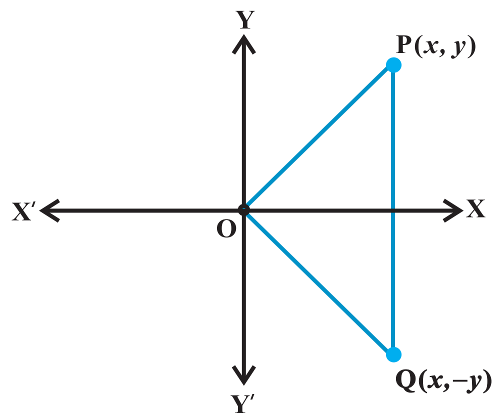
ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਆਰਗੰਡ ਤਲ ਵਿੱਚ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $x + iy$ ਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ (Modulus) $\sqrt{x^2 + y^2}$ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O(0, 0) ਤੋਂ P(x, y) ਤੱਕ ਦੀ ਦੂਰੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 5.2)। x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ, ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $a + i0$ ਦੇ ਸੰਗਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ y-ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ, ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $0 + i\,b$. ਦੇ ਸੰਗਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਆਰਗੰਡ ਤਲ ਵਿੱਚ x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ y–ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਧੁਰਾ ਅਤੇ ਕਾਲਪਨਿਕ ਧੁਰਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 5.2

ਆਰਗੰਡ ਤਲ ਵਿੱਚ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $z = x + iy$ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਸੰਯੁਗਮ (conjugate) $z = x - iy$ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ P (x, y) ਅਤੇ Q $(x, - y)$ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਜਿਮਾਇਤੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ $(x, - y)$ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਦਾ ਵਾਸਤਵਿਕ ਧੁਰੇ ਤੇ ਸ਼ੀਸ਼ਾ (ਦਰਪਣ) ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 5.3).

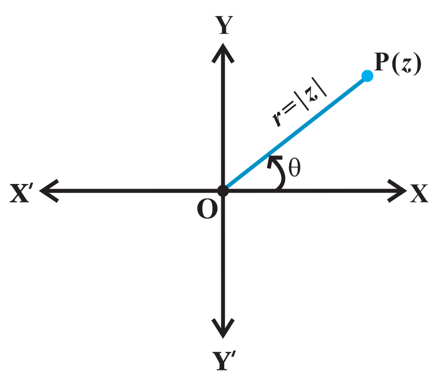


ਚਿੱਤਰ 5.3

5.5.1 ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਧਰੁਵੀ ਨਿਰੂਪਣ (Polar representation of a complex number) ਮੰਨ ਲਓ ਬਿੰਦੂ P ਕਿਸੇ ਗ਼ੈਰ–ਸਿਫਰ $z = x + iy$ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਓ ਰੇਖਾ–ਖੰਡ OP ਦੀ ਲੰਬਾਈ r ਹੈ ਅਤੇ OP ਦੁਆਰਾ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਧਨਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਬਣਾਇਆ ਕੋਣ θ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 5.4).

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ P ਨੂੰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜੇ (r, θ) ਨਾਲ ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ (uniquely) ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ P ਦੇ ਧਰੁਵ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਧਰੁਵ ਅਤੇ x-ਧੁਰੇ ਦੀ ਧਨਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਨੂੰ ਆਰੰਭਕ ਰੇਖਾ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ।

ਇੱਥੇ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. ਇਸ ਨੂੰ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਧਰੁਵੀ ਰੂਪ (Polar form) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।



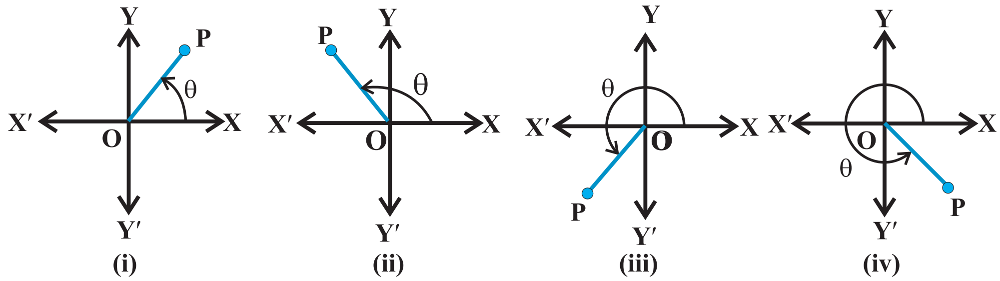
ਚਿੱਤਰ 5.4

ਇੱਥੇ $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$, z ਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ ਹੈ ਅਤੇ θ ਨੂੰ z ਦਾ ਆਰਗੂਮੈਂਟ (ਜਾਂ ਐਮਪਲੀਟਿਊਡ) (argument or amplitude) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਨੂੰ $\arg z$ ਦੁਆਰਾ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

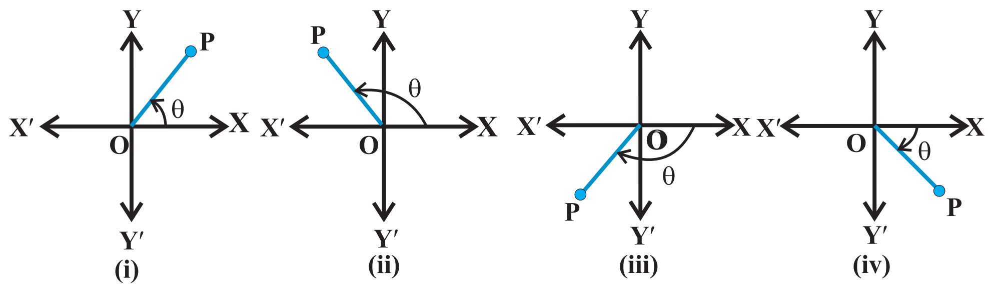
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਕਿਸੇ ਵੀ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $z \neq 0$ ਦੇ ਸੰਗਤ θ ਦਾ, $0 \leq \theta < 2\pi$ ਸਿਰਫ ਇੱਕ ਹੀ ਮੁੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਫਿਰ ਵੀ 2π ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਕਿਸੇ ਦੂਸਰੇ ਅੰਤਰ ਵਿੱਚ, ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $-\pi < \theta \leq \pi$, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਅੰਤਰਾਲ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ θ ਦਾ ਉਹ ਮੁੱਲ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $-\pi < \theta \leq \pi$ ਨੂੰ z ਦਾ ਮੁੱਖ ਆਰਗੂਮੈਂਟ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ $\arg z$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 5.5 ਅਤੇ 5.6) ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਹੋਰ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾ ਲਿਖਿਆ ਜਾਵੇ।



ਚਿੱਤਰ 5.5 $(0 \leq \theta < 2\pi)$



ਚਿੱਤਰ 5.6 $(-\pi < \theta \leq \pi)$

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $z = 1 + i\sqrt{3}$ ਨੂੰ ਧਰੁਵੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $1 = r\cos\theta$, $\sqrt{3} = r\sin\theta$

ਵਰਗ ਕਰਨ ਅਤੇ ਜੋੜਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

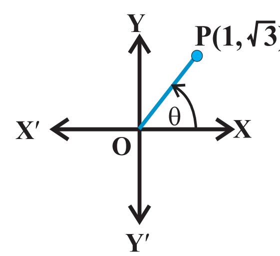
$$r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = 4$$

ਭਾਵ $\quad r = \sqrt{4} = 2$ (ਪ੍ਰਤੱਖ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $r > 0$)

ਇਸ ਲਈ $\quad \cos\theta = \dfrac{1}{2}$, $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ਜਿਸ ਤੋਂ $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਧਰੁਵੀ ਰੂਪ $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ ਹੈ

ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $z = 1 + i\sqrt{3}$ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 5.7 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 5.7

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $\dfrac{-16}{1+i\sqrt{3}}$ ਨੂੰ ਰੂਪ ਧਰੁਵੀ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $\dfrac{-16}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{-16}{1+i\sqrt{3}} \times \dfrac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

$$= \frac{-16\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1-\left(i\sqrt{3}\right)^2} = \frac{-16\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1+3} = -4\left(1-i\sqrt{3}\right) = -4 + i4\sqrt{3}$$ (ਚਿੱਤਰ 5.8).

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਮੰਨ ਲਉ $-4 = r\cos\theta,\ 4\sqrt{3} = r\sin\theta$

ਵਰਗ ਕਰਨ ਅਤੇ ਜੋੜਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

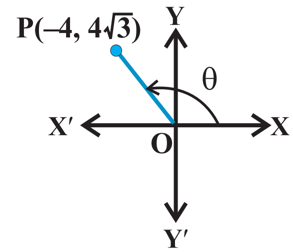
$$16 + 48 = r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)$$

ਜਿਸ ਤੋਂ $r^2 = 64$, ਭਾਵ $r = 8$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ $$\cos\theta = -\frac{1}{2},\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦਾ ਧਰੁਵੀ ਰੂਪ $8\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 5.8

ਅਭਿਆਸ 5.2

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਅਤੇ 2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ ਅਤੇ ਆਰਗੂਮੈਂਟ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. $z = -1 - i\sqrt{3}$ **2.** $z = -\sqrt{3} + i$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 3 ਤੋਂ 8 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਹਰ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਧਰੁਵੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ :

3. $1 - i$ **4.** $-1 + i$ **5.** $-1 - i$ **6.** -3 **7.** $\sqrt{3} + i$

8. i

5.6 ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ (Quadratic Equations)

ਅਸੀਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਜਾਣੂ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਜਦੋਂ ਡਿਸਕ੍ਰਿਮੀਨੈਂਟ ਅਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਵੇ, ਭਾਵ, ≥ 0 ਹੋਵੇ।

ਆਉ ਹੁਣ ਵਾਸਤਵਿਕ ਗੁਣਾਕਾਂ (Coefficients) a, b, c ਜਿੱਥੇ $a \neq 0$ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2 + bx + c = 0$ ਲਈਏ। ਆਉ, ਇਹ ਵੀ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ $b^2 - 4ac < 0$.

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਲੱਭ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਉਪਰਲੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਹੱਲ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਹੋਣਗੇ, ਜਿਹੜੇ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\, i}{2a}$$

ਟਿੱਪਣੀ ਇੱਥੇ ਕੁਝ ਲੋਕ ਇਹ ਜਾਨਣ ਲਈ ਉਤਸੁਕ ਹੋਣਗੇ ਕਿ ਕਿਸੇ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਹੱਲ ਹੋਣਗੇ ? ਇਸ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਪ੍ਰਮੇਯ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਕਿ "ਬੀਜਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲ ਪ੍ਰਮੇਯ" ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ (ਬਿਨਾਂ ਕਿਸੇ ਸਬੂਤ ਤੋਂ) ਦਾ ਉਲੇਖ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

"ਇੱਕ ਬਹੁਪਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਮੂਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।"

ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਫਲਸਰੂਪ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਨਤੀਜੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹਾਂ :

"n ਘਾਤ ਵਾਲੀ ਬਹੁਪਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ n ਮੂਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।"

ਉਦਾਹਰਣ 9 : $x^2 + 2 = 0$ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ, $x^2 + 2 = 0$

ਜਾਂ $x^2 = -2$ ਭਾਵ, $x = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}\, i$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 10 : $x^2 + x + 1 = 0$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$

ਇਸ ਲਈ, ਹੱਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਣਗੇ $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2 \times 1} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

ਉਦਾਹਰਣ 11 : $\sqrt{5}x^2 + x + \sqrt{5} = 0$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਡਿਸਕ੍ਰਿਮੀਨੈਂਟ ਹੈ।

$1^2 - 4 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 1 - 20 = -19$

ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਹੱਲ

$$\frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2\sqrt{5}} = \frac{-1 \pm \sqrt{19}i}{2\sqrt{5}} \text{ ਹਨ।}$$

ਅਭਿਆਸ 5.3

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

1. $x^2 + 3 = 0$ **2.** $2x^2 + x + 1 = 0$ **3.** $x^2 + 3x + 9 = 0$ **4.** $-x^2 + x - 2 = 0$

5. $x^2 + 3x + 5 = 0$ **6.** $x^2 - x + 2 = 0$ **7.** $\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$ **8.** $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x + 3\sqrt{3} = 0$

9. $x^2 + x + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0$ **10.** $x^2 + \dfrac{x}{\sqrt{2}} + 1 = 0$

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 12 : $\dfrac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$ ਦਾ ਸਯੁੰਗਮ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ, $\dfrac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$

$$= \frac{6+9i-4i+6}{2-i+4i+2} = \frac{12+5i}{4+3i} \times \frac{4-3i}{4-3i} = \frac{48-36i+20i+15}{16+9} = \frac{63-16i}{25} = \frac{63}{25} - \frac{16}{25}i$$

ਇਸ ਲਈ, $\dfrac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$ ਦਾ ਸਯੁੰਗਮ $\dfrac{63}{25} + \dfrac{16}{25}i$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮਾਪ-ਅੰਕ ਅਤੇ ਆਰਗੂਮੈਂਟ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\dfrac{1+i}{1-i}$ (ii) $\dfrac{1}{1+i}$

ਹੱਲ : (i) ਇੱਥੇ, $\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{1+i}{1-i} \times \dfrac{1+i}{1+i} = \dfrac{1-1+2i}{1+1} = i = 0 + i$

ਆਉ, ਮੰਨ ਲਈਏ $0 = r\cos\theta$, $1 = r\sin\theta$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਵਰਗ ਕਰਨ ਅਤੇ ਜੋੜਨ ਤੇ $r^2 = 1$ ਭਾਵ, $r = 1$ ਇਸ ਲਈ

$$\cos\theta = 0, \qquad \sin\theta = 1$$

ਇਸ ਲਈ, $\theta = \frac{\pi}{2}$

ਇਸ ਲਈ, $\frac{1+i}{1-i}$ ਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ 1 ਅਤੇ ਆਰਗੂਮੈਂਟ $\frac{\pi}{2}$ ਹੈ।

(ii) ਇੱਥੇ $$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

ਮੰਨ ਲਉ $$\frac{1}{2} = r\cos\theta, -\frac{1}{2} = r\sin\theta$$

(i) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੰਮ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$\theta = \frac{-\pi}{4}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{1}{1+i}$ ਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ਅਤੇ ਆਰਗੂਮੈਂਟ $\frac{-\pi}{4}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਜੇਕਰ $x + iy = \frac{a+ib}{a-ib}$ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $x^2 + y^2 = 1$.

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ,

$$x + iy = \frac{(a+ib)(a+ib)}{(a-ib)(a+ib)} = \frac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{2ab}{a^2+b^2}i$$

ਇਸ ਤੋਂ, $$x - iy = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} - \frac{2ab}{a^2+b^2}i$$

ਇਸ ਲਈ,

$$x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy) = \frac{(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} = \frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} = 1$$

ਉਦਾਹਰਣ 15 : θ ਦਾ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ

$\frac{3+2i\sin\theta}{1-2i\sin\theta}$ ਸਿਰਫ ਵਾਸਤਵਿਕ ਹੋਵੇ।

ਹਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ,

$$\frac{3+2i\sin\theta}{1-2i\sin\theta} = \frac{(3+2i\sin\theta)(1+2i\sin\theta)}{(1-2i\sin\theta)(1+2i\sin\theta)}$$

$$= \frac{3+6i\sin\theta+2i\sin\theta-4\sin^2\theta}{1+4\sin^2\theta} = \frac{3-4\sin^2\theta}{1+4\sin^2\theta} + \frac{8i\ \sin\theta}{1+4\sin^2\theta}$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਵਾਸਤਵਿਕ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$$\frac{8\sin\theta}{1+4\sin^2\theta} = 0, \text{ ਭਾਵ, } \sin\theta = 0$$

ਇਸ ਲਈ $\theta = n\pi,\ n \in \mathbf{Z}$.

ਉਦਾਹਰਣ 16 : ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $z = \dfrac{i-1}{\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}}$ ਨੂੰ ਧਰੁਵੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ, $z = \dfrac{i-1}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$

$$= \frac{2(i-1)}{1+\sqrt{3}i} \times \frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{2\left(i+\sqrt{3}-1+\sqrt{3}i\right)}{1+3} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

ਆਉ ਹੁਣ $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = r\cos\theta,\ \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} = r\sin\theta$ ਲਈਏ

ਵਰਗ ਕਰਨ ਅਤੇ ਜੋੜਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$r^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 = \frac{2\left(\left(\sqrt{3}\right)^2+1\right)}{4} = \frac{2\times 4}{4} = 2$$

ਇਸ ਲਈ $r = \sqrt{2}$ ਜਿਸ ਤੋਂ $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},\quad \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

ਇਸ ਲਈ, $\theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{12}$ (ਕਿਉਂ ?)

ਇਸ ਲਈ, ਧਰੁਵੀ ਰੂਪ (Polar form) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ-5 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. $\left[i^{18} + \left(\dfrac{1}{i}\right)^{25}\right]^3$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2. ਕਿਸੇ ਦੋ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ z_1 ਅਤੇ z_2 ਲਈ, ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$\text{Re}\,(z_1 z_2) = \text{Re}\,z_1\ \text{Re}\,z_2 - \text{Im}z_1\ \text{Im}z_2$.

3. $\left(\dfrac{1}{1-4i} - \dfrac{2}{1+i}\right)\left(\dfrac{3-4i}{5+i}\right)$ ਨੂੰ ਮਾਨਕ ਰੂਪ (Standard form) ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

4. ਜੇਕਰ $x - iy = \sqrt{\dfrac{a-ib}{c-id}}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\left(x^2+y^2\right)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

5. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਨੂੰ ਧਰੁਵੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ :

(i) $\dfrac{1+7i}{(2-i)^2}$ (ii) $\dfrac{1+3i}{1-2i}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 6 ਤੋਂ 9 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਹਰ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

6. $3x^2 - 4x + \dfrac{20}{3} = 0$ **7.** $x^2 - 2x + \dfrac{3}{2} = 0$ **8.** $27x^2 - 10x + 1 = 0$

9. $21x^2 - 28x + 10 = 0$ **10.** ਜੇਕਰ $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 1 + i$, ਹੈ ਤਾਂ $\left|\dfrac{z_1+z_2+1}{z_1-z_2+1}\right|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. ਜੇਕਰ $a + ib = \dfrac{(x+i)^2}{2x^2+1}$, ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $a^2 + b^2 = \dfrac{(x^2+1)^2}{\left(2x^2+1\right)^2}$.

12. ਮੰਨ ਲਉ $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -2 + i$ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z_1 z_2}{\bar{z}_1}\right)$ (ii) $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z_1\bar{z}_1}\right)$.

13. ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $\dfrac{1+2i}{1-3i}$ ਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ ਅਤੇ ਆਰਗੂਮੈਂਟ ਪਤਾ ਕਰੋ।

14. ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ x ਅਤੇ y ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $(x - iy)(3 + 5i)$; $-6 - 24i$ ਦਾ ਸੰਯੁਗਮ ਹੋਵੇ।

15. $\dfrac{1+i}{1-i} - \dfrac{1-i}{1+i}$ ਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

16. ਜੇਕਰ $(x + iy)^3 = u + iv$, ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $\dfrac{u}{x} + \dfrac{v}{y} = 4(x^2 - y^2)$.

17. ਜੇਕਰ α ਅਤੇ β ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $|\beta| = 1$ ਹੈ, ਤਾਂ $\left|\dfrac{\beta-\alpha}{1-\bar{\alpha}\beta}\right|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

18. ਸਮੀਕਰਣ $|1-i|^x = 2^x$ ਦੇ ਗ਼ੈਰ-ਸਿਫਰ ਸੰਪੂਰਕ ਹੱਲ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

19. ਜੇਕਰ $(a + ib)(c + id)(e + if)(g + ih) = A + iB$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)(e^2 + f^2)(g^2 + h^2) = A^2 + B^2$

20. ਜੇਕਰ $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^m = 1$ ਤਾਂ m ਦਾ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਕ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- $a + ib$, ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸ ਵਿੱਚ a ਅਤੇ b ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੋਣ, ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। a ਨੂੰ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਾਸਤਵਿਕ ਭਾਗ ਅਤੇ b ਨੂੰ ਕਾਲਪਨਿਕ ਭਾਗ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

- ਮੰਨ ਲਓ $z_1 = a + ib$ ਅਤੇ $z_2 = c + id$ ਤਾਂ

  (i) $z_1 + z_2 = (a + c) + i\,(b + d)$

  (ii) $z_1 z_2 = (ac - bd) + i\,(ad + bc)$

- ਕਿਸੇ ਗ਼ੈਰ–ਸਿਫਰ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $z = a + ib\ (a \neq 0, b \neq 0)$ ਲਈ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $\frac{a}{a^2+b^2}+i\frac{-b}{a^2+b^2}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ $\frac{1}{z}$ ਜਾਂ z^{-1} ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ z ਦਾ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਜਿਸ ਨਾਲ

  $$(a + ib)\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}+i\frac{-b}{a^2+b^2}\right) = 1 + i0 = 1$$

- ਕਿਸੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ k ਲਈ, $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$

- ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $z = a + ib$ ਦੇ ਸੰਯੁਗਮ ਨੂੰ $\overline{z}$ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\overline{z} = a - ib$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

- ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $z = x + iy$ ਧਰੁਵੀ ਰੂਪ $r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $r = \sqrt{x^2+y^2}$ (z ਦਾ modulus ਹੈ) ਅਤੇ $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\sin\theta = \frac{y}{r}$. (θ ਨੂੰ z ਦਾ ਆਰਗੂਮੈਂਟ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ) θ ਦਾ ਉਹ ਮੁੱਲ ਜਿਸ ਲਈ $-\pi < \theta \leq \pi$, ਹੋਵੇ, ਨੂੰ z ਦਾ ਮੁਖ ਆਰਗੂਮੈਂਟ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

- n ਘਾਤ ਦੀ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ n ਮੂਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

- ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2 + bx + c = 0$ ਜਿੱਥੇ $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, $b^2 - 4ac < 0$ ਦੇ ਹੱਲ $x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\,i}{2a}$ ਹਨ।

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਯੂਨਾਨੀਆਂ ਨੇ ਇਸ ਤੱਥ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣਿਆ ਸੀ ਕਿ ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਦਾ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵਜੂਦ ਨਹੀਂ, ਪਰ ਇਸ ਦਾ ਸਿਹਰਾ ਭਾਰਤੀ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ *Mahavira* (850 ਈ:) ਨੂੰ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਨੇ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇਸ ਕਠਨਾਈ ਦਾ ਸਪਸ਼ਟ ਉਲੇਖ ਕੀਤਾ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਆਪਣੇ ਰਚਨਾ '*Ganitasara Sangraha*' ਗਣਿਤ ਸਾਰ ਸੰਗ੍ਰਹਿ ਵਿੱਚ ਦੱਸਿਆ ਕਿ ਰਿਣਾਤਮਕ ਰਾਸ਼ੀ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਰਾਸ਼ੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਇੱਕ-ਦੂਸਰੇ ਭਾਰਤੀ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ ਭਾਸਕਰ (*Bhaskara*) ਨੇ 1150 ਈ. ਵਿੱਚ ਆਪਣੀ ਰਚਨਾ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

'ਬੀਜਗਣਿਤ' ਵਿੱਚ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਹੈ ਕਿ "ਰਿਣਾਤਮਕ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਕੋਈ ਵਰਗਮੂਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਇੱਕ ਵਰਗ ਨਹੀਂ ਹੈ"। *Cardan* (1545) ਨੇ $x + y = 10$, $xy = 40$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਸਮੇਂ ਉਤਪੰਨ ਹੋਈ ਸਮੱਸਿਆ ਤੇ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ।

ਉਸਨੇ $x = 5 + \sqrt{-15}$ ਅਤੇ $y = 5 - \sqrt{-15}$ ਨੂੰ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਉਸਨੇ ਆਪ ਹੀ ਨਕਾਰ ਦਿੱਤਾ ਕਿ ਇਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿਅਰਥ ('useless') ਹਨ। *Albert Girard* (ਲਗਭਗ 1625 ਈ.) ਨੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਨੂੰ ਸਵੀਕਾਰ ਕੀਤਾ ਅਤੇ ਕਿਹਾ ਕਿ ਇਸ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਬਹੁਪਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਉੱਨੇ ਮੂਲ ਲੱਭਣ ਵਿੱਚ ਕਾਬਲ ਹੋ ਜਾਵਾਂਗੇ ਜਿੰਨੀ ਉਸਦੀ ਘਾਤ ਹੈ। *Euler* ਨੇ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ $\sqrt{-1}$ ਨੂੰ i ਚਿੰਨ੍ਹ (ਸੰਕੇਤ) ਦਿੱਤਾ ਅਤੇ *W.R. Hamilton* (1830 ਈ. ਲਗਭਗ) ਨੇ ਸ਼ੁੱਧ ਗਣਿਤਿਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਕੇ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਵਾਸਤੇ ਕਾਲਪਨਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਛੱਡਦੇ ਹੋਏ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $a + ib$ ਨੂੰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਜੋੜੇ (a, b) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪੇਸ਼ ਕੀਤਾ।

— ❖ —

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਧਿਆਇ 6

ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ

(Linear Inequalities)

❖*Mathematics is the art of saying many things in many different ways. – MAXWELL*❖

6.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਚਲ ਅਤੇ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਕੁਝ ਕਥਨਾਂ ਵਾਲੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਕੇ ਹਲ ਵੀ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਸਾਡੇ ਦਿਮਾਗ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਘੁੰਮਦਾ ਹੈ ਕਿ "ਕੀ ਕਥਨਾਂ ਵਾਲੇ (ਸ਼ਾਬਦਿਕ) ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣਾ ਸੰਭਵ ਹੈ ?" ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਤੁਹਾਡੀ ਜਮਾਤ ਦੇ ਸਾਰੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਉਚਾਈ 160 ਸੈ.ਮੀ. ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ, ਤੁਹਾਡੀ ਜਮਾਤ ਦੇ ਕਮਰੇ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 60 ਮੇਜ ਜਾਂ ਕੁਰਸੀਆਂ ਜਾਂ ਦੋਵੇਂ ਰੱਖੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇੱਥੇ ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕਥਨ ਮਿਲਦੇ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ $<$ (ਤੋਂ ਘੱਟ), $>$ (ਤੋਂ ਵੱਧ), $\leq$ (ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ), $\geq$ (ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ) ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਚਲ ਅਤੇ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ। ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ, ਵਿਗਿਆਨ, ਗਣਿਤ, ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ, ਅਨੁਕੂਲਿਤ (optimisation) ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ, ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ, ਮਨੋਵਿਗਿਆਨ ਆਦਿ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਉਪਯੋਗੀ ਹੈ।

6.2 ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ (Inequalities)

ਆਉ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਥਿਤੀ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ :

(i) ਰਵੀ 200 ਰੁ: ਲੈ ਕੇ ਬਜਾਰ ਵਿੱਚ ਚੌਲ ਖਰੀਦਣ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਕਿ 1 ਕਿ.ਗ੍ਰਾ. ਦੇ ਪੈਕਟਾਂ ਵਿੱਚ ਉਪਲਬਧ ਹਨ। ਇੱਕ ਕਿਲੋ ਚਾਵਲ ਦੇ ਪੈਕਟ ਦਾ ਮੁੱਲ 30 ਰੁ: ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਸ ਦੁਆਰਾ ਖਰੀਦੇ ਹੋਏ ਪੈਕਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ x ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਉਸ ਦੁਆਰਾ ਕੁੱਲ ਖਰਚ ਕੀਤੀ ਰਕਮ $30x$ ਹੋਵੇਗੀ। ਕਿਉਂਕਿ ਉਸ ਨੇ ਚੌਲ ਸਿਰਫ ਪੈਕਟਾਂ ਵਿੱਚ ਹੀ ਖਰੀਦਣੇ ਹਨ, ਉਹ 200 ਰੁ: ਦੀ ਪੂਰੀ ਰਾਸ਼ੀ ਨੂੰ ਖਰਚ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕੇਗਾ (ਕਿਉਂ ?) ਇਸ ਲਈ

$$30x < 200 \qquad \ldots (1)$$

ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ ਕਥਨ (i) ਸਮੀਕਰਣ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) ਰੇਸ਼ਮਾ ਕੋਲ 120 ਰੁ: ਹਨ ਜਿਸ ਨਾਲ ਉਹ ਕੁਝ ਰਜਿਸਟਰ ਅਤੇ ਪੈੱਨ ਖਰੀਦਣਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇੱਕ ਰਜਿਸਟਰ ਦੀ ਕੀਮਤ 40 ਰੁ: ਅਤੇ ਇੱਕ ਪੈੱਨ ਦੀ ਕੀਮਤ 20 ਰੁ: ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਸ ਦੁਆਰਾ ਖਰੀਦੇ ਗਏ ਰਜਿਸਟਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ x ਅਤੇ ਪੈੱਨਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ y ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਰੇਸ਼ਮਾ ਦੁਆਰਾ ਖਰਚ ਕੀਤੇ ਪੈਸੇ $(40x + 20y)$ ਰੁ: ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਲਈ

$$40x + 20y \leq 120 \qquad \ldots (2)$$

ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਖਰਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਕੁੱਲ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 120 ਰੁ: ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਕਥਨ (2) ਦੇ ਦੋ ਭਾਗ ਹਨ

$$40x + 20y < 120 \qquad \ldots (3)$$

ਅਤੇ

$$40x + 20y = 120 \qquad \ldots (4)$$

ਕਥਨ (3) ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਨਹੀਂ ਹੈ ਭਾਵ ਇਹ ਇੱਕ ਅਸਮਾਨਤਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ (4) ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1 ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਾਂ ਦੋ ਅਲਜਬਰਈ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ '$<$', '$>$', '$\leq$' ਜਾਂ '$\geq$' ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਨੂੰ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ (1), (2) ਅਤੇ (3) ਕਥਨ ਸਾਰੇ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਹਨ।

$3 < 5$; $7 > 5$ ਆਦਿ ਸੰਖਿਆਤਮਕ (numerical) ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਹਨ, ਜਦੋਂ ਕਿ

$x < 5$; $y > 2$; $x \geq 3$, $y \leq 4$ ਆਦਿ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਸ਼ਬਦਿਕ ਜਾਂ ਸ਼ਬਦੀ (lateral) ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਹਨ।

$3 < 5 < 7$ (ਇਸ ਨੂੰ 5, 3 ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਅਤੇ 7 ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਹੈ, ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਾਂ), $3 \leq x < 5$ (ਇਸ ਨੂੰ x,3 ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ ਅਤੇ 5 ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਾਂ) ਅਤੇ $2 < y \leq 4$ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੋਹਰੀਆਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਹਨ। ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ :

$$ax + b < 0 \qquad \ldots (5)$$
$$ax + b > 0 \qquad \ldots (6)$$
$$ax + b \leq 0 \qquad \ldots (7)$$
$$ax + b \geq 0 \qquad \ldots (8)$$
$$ax + by < c \qquad \ldots (9)$$
$$ax + by > c \qquad \ldots (10)$$
$$ax + by \leq c \qquad \ldots (11)$$
$$ax + by \geq c \qquad \ldots (12)$$
$$ax^2 + bx + c \leq 0 \qquad \ldots (13)$$
$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad \ldots (14)$$

ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ (5), (6), (9), (10) ਅਤੇ (14) ਨਿਸ਼ਚਿਤ (strict) ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ (7), (8), (11), (12), ਅਤੇ (13) ਲਚਕੀਲੀ (Slack) ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਹਨ। (5) ਤੋਂ (8) ਤੱਕ ਦੀਆਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਹਨ ਜਦੋਂ $a \neq 0$ ਅਤੇ (9) ਤੋਂ (12) ਤੱਕ ਦੀਆਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਹਨ ਜਦੋਂ $a \neq 0$, $b \neq 0$.

ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ (13) ਅਤੇ (14) ਰੇਖੀ ਨਹੀਂ ਹਨ (ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਇੱਕ ਚਲ x ਵਾਲੀਆਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਹਨ ਜਦੋਂ $a \neq 0$).

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਿਰਫ ਇੱਕ ਅਤੇ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਬਾਰੇ ਹੀ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ।

6.3 ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦਾ ਬੀਜਗਣਿਤੀ ਹੱਲ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਆਲੇਖੀ ਨਿਰੂਪਣ (Algebric Solutions of Linear Inequalities in One Variable and their Graphical Representation)

ਆਉ ਭਾਗ 6.2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਅਸਮਾਨਤਾ (1) ਭਾਵ $30x < 200$ ਲਈਏ।
ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇੱਥੇ x, ਚਾਵਲਾਂ ਦੇ ਪੈਕਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਸਪਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ x ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਭਿੰਨ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗੀ। ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਖੱਬਾ ਹੱਥ (L.H.S.) $30x$ ਅਤੇ ਸੱਜਾ ਹੱਥ (R.H.S) 200 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$x = 0$, ਲਈ ਖੱਬਾ ਹੱਥ $= 30 (0) = 0 < 200$ (ਸੱਜਾ ਹੱਥ), ਜੋ ਕਿ ਸੱਚ ਹੈ।

$x = 1$, ਲਈ ਖੱਬਾ ਹੱਥ $= 30 (1) = 30 < 200$ (ਸੱਜਾ ਹੱਥ), ਜੋ ਕਿ ਸੱਚ ਹੈ।

$x = 2$, ਲਈ ਖੱਬਾ ਹੱਥ $= 30 (2) = 60 < 200$, (ਸੱਜਾ ਹੱਥ), ਜੋ ਕਿ ਸੱਚ ਹੈ।

$x = 3$, ਲਈ ਖੱਬਾ ਹੱਥ $= 30 (3) = 90 < 200$, (ਸੱਜਾ ਹੱਥ), ਜੋ ਕਿ ਸੱਚ ਹੈ।

$x = 4$, ਲਈ ਖੱਬਾ ਹੱਥ $= 30 (4) = 120 < 200$, (ਸੱਜਾ ਹੱਥ), ਜੋ ਕਿ ਸੱਚ ਹੈ।

$x = 5$, ਲਈ ਖੱਬਾ ਹੱਥ $= 30 (5) = 150 < 200$, (ਸੱਜਾ ਹੱਥ), ਜੋ ਕਿ ਸੱਚ ਹੈ।

$x = 6$, ਲਈ ਖੱਬਾ ਹੱਥ $= 30 (6) = 180 < 200$, (ਸੱਜਾ ਹੱਥ), ਜੋ ਕਿ ਸੱਚ ਹੈ।

$x = 7$, ਲਈ ਖੱਬਾ ਹੱਥ $= 30 (7) = 210 < 200$, (ਸੱਜਾ ਹੱਥ), ਜੋ ਕਿ ਗਲਤ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ x ਦੇ ਮੁੱਲ ਜਿਸ ਨਾਲ ਉੱਪਰਲੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਸਹੀ ਕਥਨ ਸਾਬਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ 0,1,2,3,4,5,6 ਹਨ। x ਦੇ ਇਹ ਮੁੱਲ, ਜੋ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਨੂੰ ਸਹੀ ਕਥਨ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ ਨੂੰ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਹੱਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਸਮੂਹ $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ ਨੂੰ ਇਸਦਾ ਹੱਲ ਸਮੂਹ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਹੱਲ, ਚਲ ਦਾ ਉਹ ਮੁੱਲ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ (ਭਾਵ ਅਸਮਾਨਤਾ ਸਹੀ) ਹੋਵੇ।

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਹੱਲ ਅਸੀਂ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਅਤੇ ਭੁੱਲ (trial and error) ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਕੀਤਾ ਹੈ, ਜੋ ਬਹੁਤ ਸੁਵਿਧਾਜਨਕ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਸਾਰਾ ਸਮਾਂ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕਦੇ-ਕਦੇ ਸੰਭਵ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ। ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਈ ਹੋਰ ਵਧੀਆ ਜਾਂ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਤਕਨੀਕ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਸਾਨੂੰ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਹੋਰ ਗੁਣ ਸਿੱਖਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਇਹਨਾਂ ਨਿਯਮਾਂ ਦਾ ਪਾਲਣ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਨਿਯਮਾਂ ਦੀ ਪਾਲਣਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਨਿਯਮ 1 : ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀ ਸੰਖਿਆ ਜੋੜੀ (ਜਾਂ ਘਟਾਈ) ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਨਿਯਮ 2 : ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ (ਜਾਂ ਭਾਗ) ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਵੀ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨਿਯਮਾਂ ਦੀ ਪਾਲਨਾ ਕਰਾਂਗੇ, ਨਿਯਮ 2 ਵਿੱਚ ਇਸ ਸ਼ਰਤ ਨਾਲ ਕਿ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਗੁਣਾਂ (ਜਾਂ ਭਾਗ) ਕਿਸੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਕਰਾਂਗੇ ਤਾਂ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਉਲਟ ਜਾਵੇਗਾ (ਭਾਵ '$<$' ਦੀ ਜਗ੍ਹਾ '$>$' ਅਤੇ '$\le$' ਜਗ੍ਹਾ '$\ge$' ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ।) ਇਸਦਾ ਕਾਰਣ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਤੱਥਾਂ ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ :

$3 > 2$ ਜਦੋਂ ਕਿ $-3 < -2$,

$-8 < -7$ ਜਦੋਂ ਕਿ $(-8)(-2) > (-7)(-2)$, ਭਾਵ $16 > 14$.

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸਮਾਨਤਾ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਨਿਯਮਾਂ ਦਾ ਉਲੇਖ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਨਿਯਮ 1 : ਅਸਮਾਨਤਾ ਦੇ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਜੋੜਿਆ (ਜਾਂ ਘਟਾਇਆ) ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਨਾਲ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਤੇ ਕੋਈ ਫਰਕ ਨਹੀਂ ਪਵੇਗਾ।

ਨਿਯਮ 2 : ਕਿਸੇ ਅਸਮਾਨਤਾ ਨੂੰ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ (ਜਾਂ ਭਾਗ) ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀ ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ (ਜਾਂ ਭਾਗ) ਕਰਨ ਨਾਲ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਉਲਟ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : $30x < 200$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ ਜਦੋਂ :

(i) x ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। (ii) x ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $30x < 200$

ਜਾਂ $\frac{30x}{30} < \frac{200}{30}$ (ਨਿਯਮ 2), ਭਾਵ $x < \frac{20}{3}$

(i) ਜਦੋਂ x ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ x ਦੇ ਮੁੱਲ ਕਥਨ ਨੂੰ ਸਹੀ ਕਰਨਗੇ;

1, 2, 3, 4, 5, 6.

ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਹੱਲ, ਸਮੂਹ $\{1,2,3,4,5,6\}$ ਹੋਵੇਗਾ।

(ii) ਜਦੋਂ x ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਦਿੱਤੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਹੱਲ

$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਹੱਲ $\{\ldots,-3, -2,-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : $5x - 3 < 3x + 1$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ ਜਦੋਂ

(i) x ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। (ii) x ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $5x - 3 < 3x + 1$

ਜਾਂ $5x - 3 + 3 < 3x + 1 + 3$ (ਨਿਯਮ 1)

ਜਾਂ $5x < 3x + 4$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਜਾਂ $5x - 3x < 3x + 4 - 3x$ (ਨਿਯਮ 1)

ਜਾਂ $2x < 4$

ਜਾਂ $x < 2$ (ਨਿਯਮ 2)

(i) ਜਦੋਂ x ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦੇ ਹੱਲ

$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1$ ਹੋਣਗੇ।

(ii) ਜਦੋਂ x ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਹੱਲ $x < 2$ ਹੈ ਭਾਵ 2 ਤੋਂ ਘੱਟ ਵਾਲੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਹੱਲ, ਸਮੂਹ $x \in (-\infty, 2)$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਅਸੀਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਕੇ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਹਨ। ਅੱਗੇ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਲਿਖਿਆ ਨਾ ਜਾਵੇ, ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦਾ ਹੱਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਹੀ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਹੱਲ ਕਰੋ $4x + 3 < 6x + 7$.

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $4x + 3 < 6x + 7$

ਜਾਂ $4x - 6x < 6x + 4 - 6x$

ਜਾਂ $-2x < 4$ ਜਾਂ $x > -2$

ਭਾਵ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜੋ -2 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹਨ, ਉਹ ਇਸ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਹੱਲ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਹੱਲ ਸਮੂਹ $(-2, \infty)$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : $\dfrac{5-2x}{3} \le \dfrac{x}{6} - 5$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\dfrac{5-2x}{3} \le \dfrac{x}{6} - 5$

ਜਾਂ $2(5 - 2x) \le x - 30$

ਜਾਂ $10 - 4x \le x - 30$

ਜਾਂ $-5x \le -40$, ਭਾਵ $x \ge 8$

ਇਸ ਲਈ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜੋ 8 ਜਾਂ 8 ਤੋਂ ਵੱਡੀਆਂ ਹਨ, ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦੇ ਹੱਲ ਹਨ, ਭਾਵ $x \in [8, \infty)$.

ਉਦਾਹਰਣ 5 : $7x + 3 < 5x + 9$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ ਅਤੇ ਹੱਲ ਨੂੰ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਤੇ ਦਰਸਾਉ (ਦਿਖਾਉ)।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ, $7x + 3 < 5x + 9$

ਜਾਂ $2x < 6$ ਜਾਂ $x < 3$

ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਤੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਹੱਲ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 6.1 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾਵਾਂਗੇ।

ਚਿੱਤਰ 6.1

ਉਦਾਹਰਣ 6 : $\dfrac{3x-4}{2} \ge \dfrac{x+1}{4} - 1$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ ਅਤੇ ਹੱਲ ਨੂੰ ਸੰਖਿਆ ਉੱਤੇ ਦਿਖਾਉ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ, $\dfrac{3x-4}{2} \ge \dfrac{x+1}{4} - 1$

ਜਾਂ $\dfrac{3x-4}{2} \ge \dfrac{x-3}{4}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

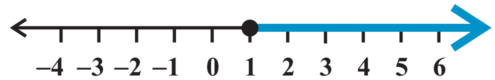
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਜਾਂ $2(3x-4) \geq (x-3)$

ਜਾਂ $6x - 8 \geq x - 3$

ਜਾਂ $5x \geq 5$ or $x \geq 1$

ਹੱਲ ਦਾ ਆਲੇਖੀ ਰੂਪ ਚਿੱਤਰ 6.2 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.2

ਉਦਾਹਰਣ 7 : XI ਜਮਾਤ ਦੇ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੇ ਪਹਿਲੇ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਸਤ੍ਰ ਦੀਆਂ ਪ੍ਰੀਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 62 ਅਤੇ 48 ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ। ਉਹ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਸਲਾਨਾ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਕੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਔਸਤ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 60 ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੇ ਸਲਾਨਾ ਇਮਤਿਹਾਨ ਵਿੱਚੋਂ ਅੰਕ x ਹਨ, ਤਾਂ

$$\frac{62+48+x}{3} \geq 60$$

ਜਾਂ $110 + x \geq 180$

ਜਾਂ $x \geq 70$

ਇਸ ਲਈ, ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 60 ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਔਸਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੇ 70 ਅੰਕ ਆਉਣੇ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਦੋਵੇਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 10 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੋਣ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 40 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਦੋ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਵਿੱਚ x ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੂਸਰੀ ਸੰਖਿਆ $x+2$ ਹੋਵੇਗੀ। ਤਾਂ ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$x > 10$ ... (1)

ਅਤੇ $x + (x + 2) < 40$ ... (2)

(2) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$2x + 2 < 40$

ਭਾਵ $x < 19$ ... (3)

(1) ਅਤੇ (3) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ

$10 < x < 19$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ x ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ x ਦੇ ਮੁੱਲ 11, 13, 15, ਅਤੇ 17 ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਸੰਭਵ ਜੋੜੇ (11, 13), (13, 15), (15, 17), (17, 19) ਹੋਣਗੇ।

ਅਭਿਆਸ 6.1

1. $24x < 100$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ, ਜਦੋਂ :

(i) x ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। (ii) x ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

2. ਹੱਲ ਕਰੋ $-12x > 30$, ਜਦੋਂ :

(i) x ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। (ii) x ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

3. ਹੱਲ ਕਰੋ $5x - 3 < 7$, ਜਦੋਂ :

(i) x ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। (ii) x ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

4. $3x + 8 > 2$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ, ਜਦੋਂ :

(i) x ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। (ii) x ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 5 ਤੋਂ 16 ਦੀਆਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਲਈ ਹੱਲ ਕਰੋ।

5. $4x + 3 < 5x + 7$

6. $3x - 7 > 5x - 1$

7. $3(x - 1) \leq 2(x - 3)$

8. $3(2 - x) \geq 2(1 - x)$

9. $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}<11$

10. $\frac{x}{3}>\frac{x}{2}+1$

11. $\frac{3(x-2)}{5}\leq\frac{5(2-x)}{3}$

12. $\frac{1}{2}\left(\frac{3x}{5}+4\right)\geq\frac{1}{3}(x-6)$

13. $2(2x + 3) - 10 < 6(x - 2)$

14. $37 - (3x + 5) \geq 9x - 8(x - 3)$

15. $\frac{x}{4}<\frac{(5x-2)}{3}-\frac{(7x-3)}{5}$

16. $\frac{(2x-1)}{3}\geq\frac{(3x-2)}{4}-\frac{(2-x)}{5}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 17 ਤੋਂ 20 ਤੱਕ ਦੀਆਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਤੇ ਆਲੇਖਿਤ ਕਰੋ (ਦਰਸਾਉ)।

17. $3x - 2 < 2x + 1$

18. $5x - 3 \geq 3x - 5$

19. $3(1 - x) < 2(x + 4)$

20. $\frac{x}{2}\geq\frac{(5x-2)}{3}-\frac{(7x-3)}{5}$

21. ਰਵੀ ਨੇ ਪਹਿਲੀਆਂ ਦੋ ਯੂਨਿਟ ਪ੍ਰੀਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ 70 ਅਤੇ 75 ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ। ਤੀਸਰੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਉਹ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਕਿੰਨੇ ਅੰਕ ਲਵੇ ਕਿ ਉਸਦੀ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਔਸਤ 60 ਅੰਕ ਹੋ ਜਾਵੇ।

22. ਕਿਸੇ ਪਾਠਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ 'A' ਗ੍ਰੇਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ ਸਾਰੀਆਂ ਪੰਜ ਪ੍ਰੀਖਿਆਵਾਂ (ਹਰ ਇੱਕ 100 ਅੰਕ ਦੀ) 90 ਅੰਕ ਜਾਂ ਇਸ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਔਸਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨੀ ਪੈਂਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸੁਨੀਤਾ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਚਾਰ ਇਮਤਿਹਾਨਾਂ ਵਿੱਚ ਅੰਕ 87, 92, 94 ਅਤੇ 95 ਹੋਣ, ਤਾਂ ਦੱਸੋ ਕਿ ਸੁਨੀਤਾ ਪੰਜਵੀਂ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਕਿੰਨੇ ਅੰਕ ਲਏ ਕਿ ਉਸ ਨੂੰ ਪਾਠਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ 'A' ਗ੍ਰੇਡ ਮਿਲ ਸਕੇ।

23. 10 ਤੋਂ ਘੱਟ ਲਗਾਤਾਰ ਧਨ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 11 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੋਵੇ।

24. 5 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਿਸਤ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਗਾਤਾਰ ਜੋੜੇ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 23 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਵੇ।

25. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਲੰਬੀ ਭੁਜਾ, ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਭੁਜਾ ਦੀ 3 ਗੁਣਾ ਹੈ ਅਤੇ ਤੀਸਰੀ ਭੁਜਾ ਸਭ ਤੋਂ ਲੰਬੀ ਭੁਜਾ ਤੋਂ 2 ਸੈਂ.ਮੀ. ਘੱਟ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 61 ਸੈਂ.ਮੀ. ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਭੁਜਾ ਦੀ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

26. ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ 91 ਸੈਂ.ਮੀ. ਲੰਬੇ ਬੋਰਡ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਲੰਬਾਈਆਂ ਕੱਟਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਦੂਸਰੀ ਲੰਬਾਈ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਲੰਬਾਈ ਤੋਂ 3 ਸੈਂ.ਮੀ. ਵੱਧ ਅਤੇ ਤੀਸਰੀ ਲੰਬਾਈ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਲੰਬਾਈ ਤੋਂ ਦੁੱਗਣੀ ਹੈ। ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੇ ਬੋਰਡ ਦੀ ਸੰਭਵ ਲੰਬਾਈ ਕੀ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਤੀਸਰਾ ਟੁਕੜਾ ਦੂਸਰੇ ਟੁਕੜੇ ਤੋਂ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 5 ਸੈਂ.ਮੀ. ਵੱਧ ਲੰਬਾ ਹੋਵੇ ?

[*ਸੰਕੇਤ* : ਜੇਕਰ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੇ ਬੋਰਡ ਦੀ ਲੰਬਾਈ x ਸੈਂ.ਮੀ. ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਦੂਸਰੇ ਅਤੇ ਤੀਸਰੇ ਟੁਕੜਿਆਂ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $(x + 3)$ ਸੈਂ.ਮੀ. ਅਤੇ $2x$ ਹੋਣਗੀਆਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x + (x + 3) + 2x \leq 91$ ਅਤੇ $2x \geq (x + 3) + 5$].

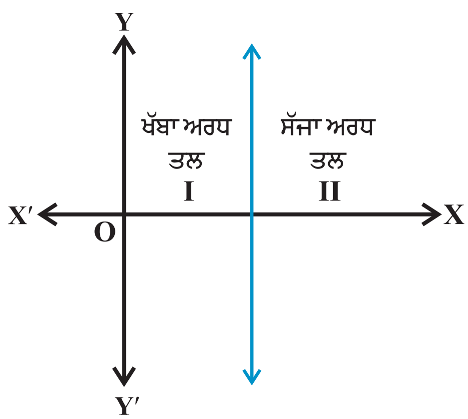
6.4 ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦਾ ਆਲੇਖੀ ਹੱਲ (Graphical Solution of Linear Inequalities in Two Variables)

ਪਹਿਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੀ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਆਲੇਖ ਇੱਕ ਚਿੱਤਰੀ ਨਿਰੂਪਣ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦੇ ਹੱਲ ਦਾ ਵਰਨਣ ਕਰਨ ਲਈ ਇੱਕ ਸਰਲ ਵਿਧੀ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੇ ਆਲੇਖਾਂ ਬਾਰੇ ਵਰਨਣ ਕਰਾਂਗੇ।

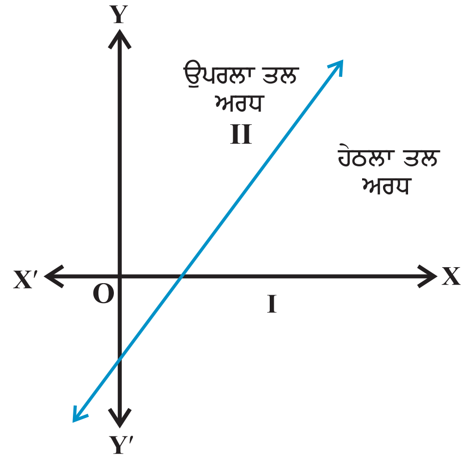
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਤਲ ਨੂੰ ਦੋ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੀ ਹੈ। ਹਰ ਇੱਕ ਭਾਗ ਨੂੰ ਅੱਧਾ (ਅਰਧ) ਤਲ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਲੰਬ ਰੇਖਾ, ਤਲ ਨੂੰ ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਅੱਧ ਤਲਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਗ਼ੈਰ-ਲੰਬ ਰੇਖਾ ਤਲ ਨੂੰ ਉਪਰਲੇ ਅਤੇ ਹੇਠਲੇ ਅਰਧ ਤਲਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੀ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 6.3 ਅਤੇ 6.4)



ਚਿੱਤਰ 6.3



ਚਿੱਤਰ 6.4

ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਤਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਜਾਂ ਤਾਂ ਰੇਖਾ ਉੱਪਰ ਸਥਿਤ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਜਾਂ ਅਰਧ ਤਲ I ਜਾਂ II ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੋਵੇਗਾ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖਾਂਗੇ ਕਿ ਕੀ ਇੱਕ ਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਅਸਮਾਨਤਾ $ax + by < c$ ਜਾਂ $ax + by > c$ ਨਾਲ ਕੋਈ ਸੰਬੰਧ ਹੈ ?

ਆਉ ਰੇਖਾ $ax + by = c, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$ ... (1) ਲਈਏ

ਹੁਣ ਇੱਥੇ ਤਿੰਨ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਹਨ :

(i) $ax + by = c$ (ii) $ax + by > c$ (iii) $ax + by < c$.

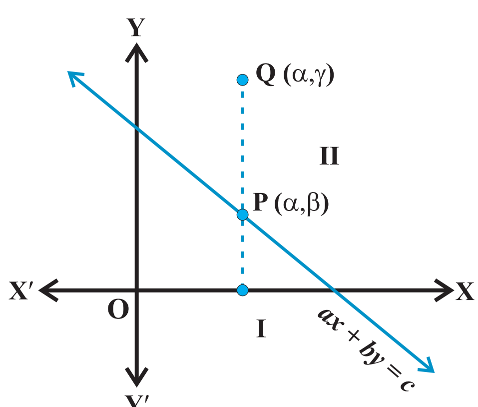
ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ ਸਥਿਤੀ (i) ਵਿੱਚ (i) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ (x, y) (i) ਦੁਆਰਾ ਨਿਰੂਪਤ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਉਲਟ ਵੀ। ਸਥਿਤੀ (ii) ਵਿੱਚ ਆਉ ਪਹਿਲਾਂ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ $b > 0$ ਹੈ। ਰੇਖਾ $ax + by = c$, $b > 0$ ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ $P(\alpha, \beta)$ ਲਉ ਤਾਂ ਕਿ $a\alpha + b\beta = c$। ਹੁਣ ਕੋਈ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂ $Q(\alpha, \gamma)$ ਅਰਧ ਤਲ II (ਚਿੱਤਰ 6.5) ਵਿੱਚ ਲਉ।

ਹੁਣ ਚਿੱਤਰ 6.5 ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$\gamma > \beta$ (ਕਿਉਂ ?)

ਜਾਂ $b\gamma > b\beta$ ਜਾਂ $a\alpha + b\gamma > a\alpha + b\beta$ (ਕਿਉਂ ?)

ਜਾਂ $a\alpha + b\gamma > c$



ਚਿੱਤਰ 6.5

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਭਾਵ, $Q(\alpha, \gamma)$ ਅਸਮਾਨਤਾ $ax + by > c$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਅਰਧ ਤਲ II ਵਿੱਚ ਰੇਖਾ $ax + by = c$ ਤੋਂ ਉੱਪਰ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਅਸਮਾਨਤਾ $ax + by > c$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਉਲਟ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਮੰਨ ਲਉ (α, β) ਰੇਖਾ $ax + by = c$ ਤੇ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ $Q(\alpha, \gamma)$ ਅਸਮਾਨਤਾ $ax + by > c$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ

ਤਾਂ ਕਿ $\quad a\alpha + b\gamma > c$

$\Rightarrow \quad a\alpha + b\gamma > a\alpha + b\beta$ (ਕਿਉਂ ?)

$\Rightarrow \quad \gamma > \beta \qquad$ (ਕਿਉਂਕਿ $b > 0$)

ਇਸ ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (α, γ) ਅਰਧ ਤਲ II ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਅਰਧ ਤਲ II ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਅਸਮਾਨਤਾ $ax + by > c$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਕੋਈ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਜੋ $ax + by > c$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਉਹ ਅਰਧ ਤਲ II ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $b < 0$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੋਈ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਜੋ $ax + by > c$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਉਹ ਅਰਧ ਤਲ I ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਉਲਟ ਵੀ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਜੋ $ax + by > c$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਰਧ ਤਲ II ਜਾਂ I ਵਿੱਚ ਹੋਣਗੇ, $b > 0$ ਜਾਂ $b < 0$ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਅਨੁਸਾਰ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਉਲਟ ਵੀ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $ax + by > c$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਇਹਨਾਂ ਅਰਧ ਤਲਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਅਰਧ ਤਲ ਹੋਵੇਗਾ [ਜਿਸਨੂੰ ਹੱਲ ਖੇਤਰ (solution region)] ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਸੰਗਤ ਅਰਧ ਤਲ ਨੂੰ ਛਾਇਆਕ੍ਰਿਤ (Shaded) ਕਰਕੇ ਇਸ ਨੂੰ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ **1.** ਉਹ ਖੇਤਰ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਪੂਰਾ ਹੱਲ ਸਥਿਤ ਹੋਵੇ, ਨੂੰ ਉਸ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਹੱਲ ਖੇਤਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

2. ਕਿਸੇ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਏ ਖੇਤਰ ਦੀ ਪਹਿਚਾਣ ਲਈ ਕਿਸੇ ਅਰਧ ਤਲ ਦੇ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ (ਜੋ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਨਾ ਹੋਵੇ) (a, b) ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਜਾਂਚ ਕਰਨਾ ਹੀ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ, ਕਿ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਉਸ ਅਸਮਾਨਤਾ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਬਿੰਦੂ ਅਸਮਾਨਤਾ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸਮਾਨਤਾ ਉਸ ਅਰਧ ਤਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਅਰਧ ਤਲ ਨੂੰ ਛਾਇਆਕ੍ਰਿਤ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇਹ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਅਸਮਾਨਤਾ ਉਸ ਅਰਧ ਤਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਏਗੀ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇਹ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਸੁਵਿਧਾ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਬਿੰਦੂ $(0, 0)$ ਨੂੰ ਪਹਿਲ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ।

3. ਜੇਕਰ ਇਹ ਅਸਮਾਨਤਾ $ax + by \geq c$ ਜਾਂ $ax + by \leq c$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਰੇਖਾ $ax + by = c$ ਤੇ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਵੀ ਇਸਦੇ ਹੱਲ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਹੱਲ ਖੇਤਰ ਤੇ ਗਹਿਰੀ ਕਾਲੀ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ।

4. ਜੇਕਰ ਅਸਮਾਨਤਾ $ax + by > c$ ਜਾਂ $ax + by < c$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਰੇਖਾ $ax + by = c$ ਤੇ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਇਸ ਦੇ ਹੱਲ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਨਹੀਂ ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਲਈ ਹੱਲ ਖੇਤਰ ਤੇ ਰੇਖਾ ਟੁੱਟਵੀਂ ਜਾਂ ਖੰਡਿਤ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ।

ਭਾਗ 6.2 ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਦੋ ਚਲਾਂ x ਅਤੇ y ਵਿੱਚ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਈ ਸੀ

$$40x + 20y \leq 120 \quad \dots (1)$$

ਜੋ ਰੇਸ਼ਮਾ ਦੁਆਰਾ ਰਜਿਸਟਰ ਅਤੇ ਪੈਨ ਖਰੀਦਣ ਸੰਬੰਧੀ ਸ਼ਬਦਿਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਨੂੰ ਗਣਿਤਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਈ ਸੀ।

ਆਓ ਹੁਣ ਇਸ ਅਸਮਾਨਤਾ ਨੂੰ ਇਹ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖਦੇ ਹੋਏ ਹੱਲ ਕਰੀਏ ਕਿ x ਅਤੇ y ਕੇਵਲ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੀ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਭਿੰਨਾਂ ਜਾਂ ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ x ਅਤੇ y ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਜੋੜਿਆਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸ ਨਾਲ ਕਥਨ (1) ਸਹੀ ਸਾਬਤ ਹੋਏ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਜੋੜਿਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ, ਅਸਮਾਨਤਾ (1) ਦਾ ਹੱਲ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇਗਾ।

$x = 0$ ਲੈ ਕੇ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, (1) ਦਾ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ

$$40x + 20y = 40\,(0) + 20y = 20y \text{ ਹੋਵੇਗਾ}$$

ਇਸ ਲਈ $\quad 20y \leq 120$ ਜਾਂ $y \leq 6 \qquad \dots (2)$

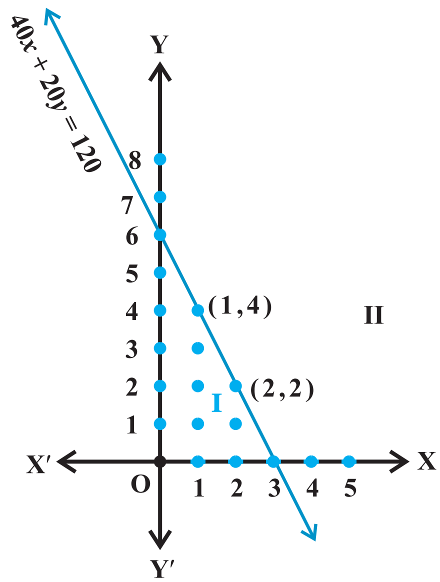
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

$x = 0$ ਲਈ y ਦੇ ਸੰਗਤ ਮੁੱਲ ਸਿਰਫ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ (1) ਦੇ ਹੱਲ (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0, 5) ਅਤੇ (0, 6) ਹਨ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ (1) ਦੇ ਹੋਰ ਹੱਲ, ਜਦੋਂ $x = 1, 2$ ਅਤੇ 3 ਹੋਵੇ ਤਾਂ (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0) ਹੋਣਗੇ।

ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 6.6 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.6

ਆਓ ਹੁਣ x ਅਤੇ y ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੋਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੱਕ ਵਧਾ ਦੇਈਏ ਅਤੇ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ (1) ਦਾ ਹੱਲ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ। ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਸੁਵਿਧਾਜਨਕ ਹੈ। ਇਸ ਉਦੇਸ਼ ਲਈ ਆਓ ਇਸਦੇ ਸੰਗਤ ਸਮੀਕਰਣ

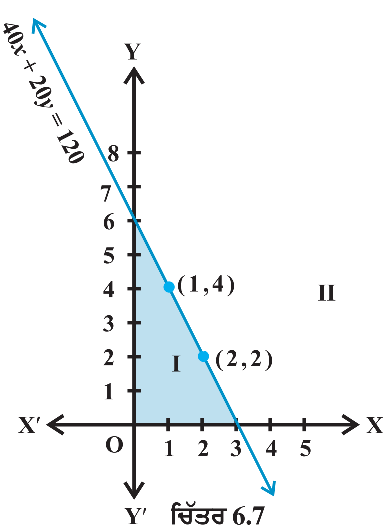
$$40x + 20y = 120 \qquad \ldots (3)$$

ਲਈਏ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚੀਏ। ਇਹ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੈ ਜੋ ਤੱਲ ਨੂੰ ਦੋ ਅਰਧ ਤਲ I ਅਤੇ ਅਰਧ ਤਲ II ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੀ ਹੈ। ਅਸਮਾਨਤਾ (1) ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚਣ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਮੰਨ ਲਓ (0, 0) ਅਰਧ ਤਲ (1) ਵਿੱਚ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਹ ਜਾਂਚਦੇ ਹਾਂ ਕਿ x ਅਤੇ y ਦਾ ਇਹ ਮੁੱਲ ਅਸਮਾਨਤਾ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = 0, y = 0$ ਅਸਮਾਨਤਾ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਰਧ ਤਲ I ਦਿੱਤੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਆਲੇਖ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 6.7)। ਕਿਉਂਕਿ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਵੀ ਅਸਮਾਨਤਾ (1) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਰੇਖਾ ਵੀ ਆਲੇਖ ਦਾ ਇੱਕ ਹਿੱਸਾ ਹੋਵੇਗੀ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਆਲੇਖ ਅਰਧ ਤਲ–I ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਰੇਖਾ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਅਰਧ ਤਲ–II ਆਲੇਖ ਦਾ ਹਿੱਸਾ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸਮਾਨਤਾ (1) ਦਾ ਹੱਲ ਇਸਦੇ ਆਲੇਖ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੋਵੇਗਾ (ਅਰਧ ਤਲ I ਸਮੇਤ ਰੇਖਾ)

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਨ ਲਈ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਵਾਂਗੇ।



ਚਿੱਤਰ 6.7

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

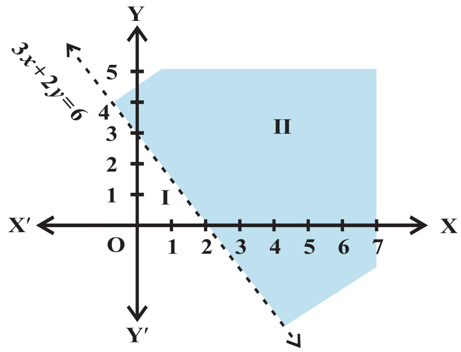
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 9 : $3x + 2y > 6$ ਨੂੰ ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $3x + 2y = 6$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 6.8 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਈ ਖੰਡਿਤ ਰੇਖਾ ਹੈ। ਇਹ ਰੇਖਾ xy ਤਲ ਨੂੰ ਦੋ ਅਰਧ ਤਲਾਂ I ਅਤੇ II ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ (ਰੇਖਾ ਤੇ ਨਹੀਂ) ਮੰਨ ਲਓ (0, 0) ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਜੋ ਕਿ ਦੋ ਅਰਧ ਤਲਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਵਿੱਚ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 6.8) ਅਤੇ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੀ ਇਹ ਬਿੰਦੂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ :

$$3\,(0) + 2\,(0) > 6$$

ਜਾਂ $0 > 6$, ਜੋ ਕਿ ਗ਼ਲਤ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.8

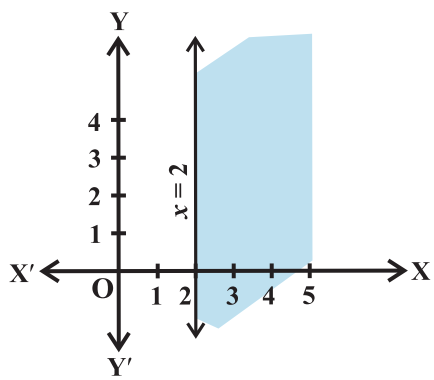
ਇਸ ਲਈ ਅਰਧ ਤਲ-I ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਹੱਲ ਖੇਤਰ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਕੋਈ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਇਸ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਸਮਾਨਤਾ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਅਰਧ ਤਲ II, ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਨਾ ਲੈਂਦੇ ਹੋਏ, ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਹੱਲ ਖੇਤਰ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : $3x - 6 \geq 0$ ਨੂੰ ਦੋ-ਵਿਮਾਈ ਤਲ ਵਿੱਚ ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $3x - 6 = 0$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 6.9 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਮੰਨ ਲਓ (0, 0) ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਵਿੱਚ ਰੱਖਦੇ ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ

$3\,(0) - 6 \geq 0$ ਜਾਂ $-6 \geq 0$ ਜੋ ਕਿ ਗ਼ਲਤ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਹੱਲ ਖੇਤਰ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ ਹੈ, ਰੇਖਾ $x = 2$ ਦੇ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਵਾਲੇ ਪਾਸੇ।



ਚਿੱਤਰ 6.9

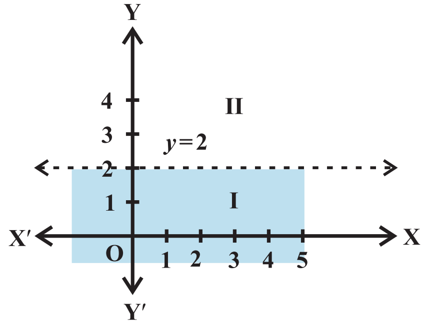
ਉਦਾਹਰਣ 11 : $y < 2$ ਨੂੰ ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $y = 2$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 6.10 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ।

ਆਓ ਬਿੰਦੂ (0, 0) ਜੋ ਕਿ ਹੇਠਲੇ ਅਰਧ ਤਲ I ਵਿੱਚ ਹੈ, ਲਈਏ ਅਤੇ $y = 0$ ਨੂੰ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਵਿੱਚ ਰੱਖੀਏ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com



ਚਿੱਤਰ 6.10

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ, $1 \times 0 < 2$ ਜਾਂ $0 < 2$ ਜੋ ਕਿ ਠੀਕ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਹੱਲ ਖੇਤਰ ਰੇਖਾ $y = 2$ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਰੇਖਾ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਸਥਿਤ ਹਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ (ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਛੱਡਦੇ ਹੋਏ) ਦਿੱਤੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 6.2

ਦੋ-ਵਿਮਾਈ (two-Dimensional) ਤਲ ਵਿੱਚ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

1. $x + y < 5$ **2.** $2x + y \geq 6$ **3.** $3x + 4y \leq 12$ **4.** $y + 8 \geq 2x$

5. $x - y \leq 2$ **6.** $2x - 3y > 6$ **7.** $-3x + 2y \geq -6$ **8.** $3y - 5x < 30$

9. $y < -2$ **10.** $x > -3.$

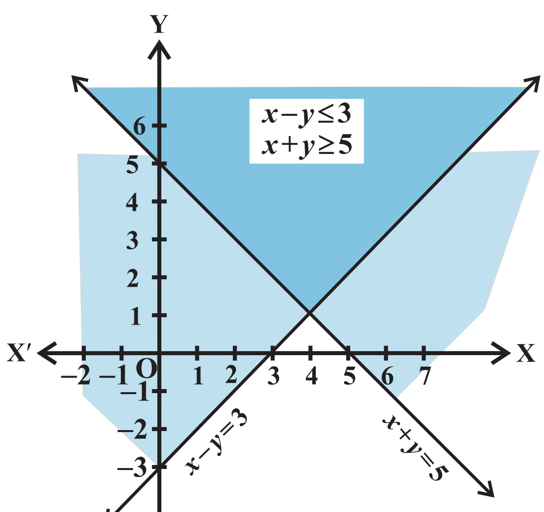
6.5 ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਹੱਲ (Solution of System of Linear Inequalities in Two Variables)

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਦੋ ਚਲ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

$$x + y \geq 5 \quad \ldots (1)$$

$$x - y \leq 3 \quad \ldots (2)$$



ਚਿੱਤਰ 6.11

ਹੱਲ : ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨ

$$x + y = 5$$

ਦਾ ਆਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 6.11 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਸਮਾਨਤਾ (1) ਦਾ ਹੱਲ, ਰੇਖਾ $x + y = 5$ ਦੇ ਉੱਪਰਲੇ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ ਨਾਲ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਰੇਖਾ ਉੱਪਰਲੇ ਬਿੰਦੂ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ।

ਇਸੇ ਹੀ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕੀ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਨ $x - y = 3$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਵੀ ਚਿੱਤਰ 6.11 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਖਿਚਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਸਮਾਨਤਾ (2) ਦਾ ਹੱਲ ਰੇਖਾ $x - y = 3$ ਦੇ ਉੱਪਰਲਾ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਭਾਗ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਰੇਖਾ ਉੱਪਰ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ।

ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਦੋਹਰਾ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ, ਜੋ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਹੈ, ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

$5x + 4y \leq 40$ ... (1)

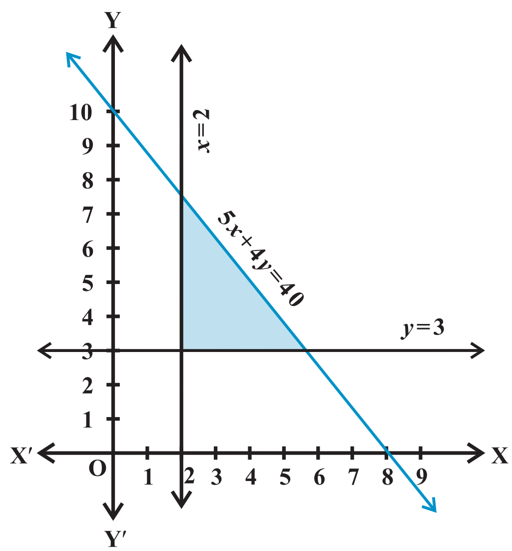
$x \geq 2$ ... (2)

$y \geq 3$ ... (3)

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ,

$5x + 4y = 40$, $x = 2$ ਅਤੇ $y = 3$ ਦੇ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚਾਂਗੇ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਸਮਾਨਤਾ (1), ਰੇਖਾ $5x + 4y = 40$ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ। ਅਸਮਾਨਤਾ (2), ਰੇਖਾ $x = 2$ ਦੇ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਵਾਲੇ ਪਾਸੇ ਦਾ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ ਅਤੇ ਅਸਮਾਨਤਾ (3), ਰੇਖਾ $y = 3$ ਦੇ ਉੱਪਰਲੇ ਪਾਸੇ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ, ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਂਝਾ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਹੱਲ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 6.12)।



ਚਿੱਤਰ 6.12

ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਵਿਹਾਰਕ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅਸਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿੱਚ ਚਲ x ਅਤੇ y ਦੇ ਮੁੱਲ ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੇ, ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਉਤਪਾਦਕ ਇਕਾਈਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ, ਖਰੀਦੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ, ਕੰਮ ਕੀਤੇ ਘੰਟਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਆਦਿ। ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ $x \geq 0$, $y \geq 0$ ਅਤੇ ਹੱਲ ਖੇਤਰ ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇਗਾ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

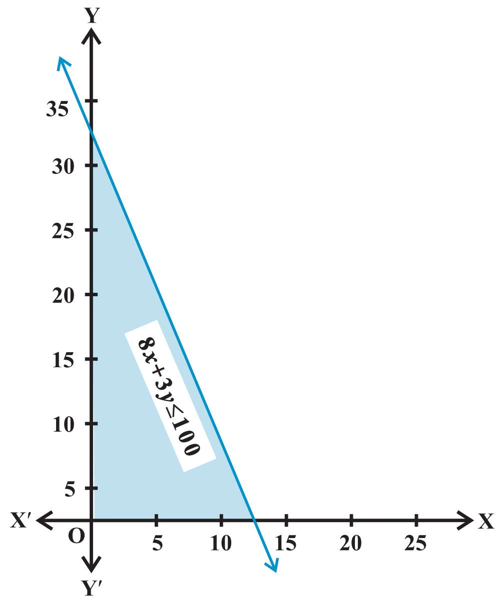
ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਣਾਲੀ (System of inequalities) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

$8x + 3y \leq 100$ ... (1)

$x \geq 0$ ... (2)

$y \geq 0$ ... (3)

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਰੇਖਾ $8x + 3y = 100$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚਾਂਗੇ। ਅਸਮਾਨਤਾ $8x + 3y \leq 100$, ਰੇਖਾ ਦੇ ਥੱਲੇ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ ਅਤੇ ਰੇਖਾ $8x + 3y = 100$ ਤੇ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 6.13)।



ਚਿੱਤਰ 6.13

ਕਿਉਂਕਿ $x \geq 0$, $y \geq 0$, ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਅਤੇ ਧੁਰਿਆਂ ਤੇ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਹੱਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

$x + 2y \leq 8$ ... (1)

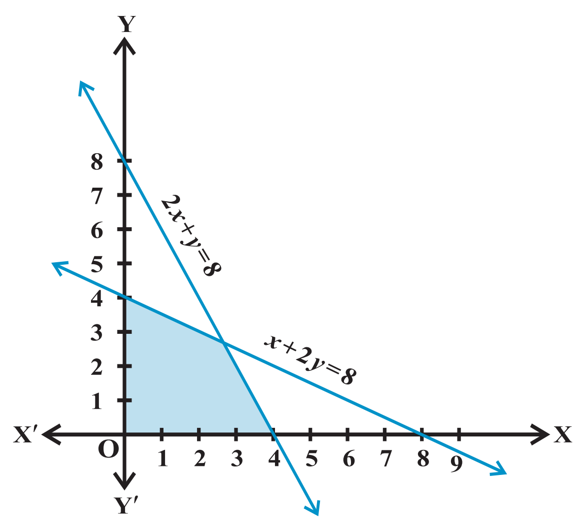
$2x + y \leq 8$ ... (2)

$x \geq 0$ ... (3)

$y \geq 0$ ... (4)

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਰੇਖਾਵਾਂ $x + 2y = 8$ ਅਤੇ $2x + y = 8$ ਦੇ ਆਲੇਖ ਬਣਾਵਾਂਗੇ। ਅਸਮਾਨਤਾ (1) ਅਤੇ (2) ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਹੇਠਲੇ ਖੇਤਰ ਅਤੇ ਸੰਬੰਧਤ ਰੇਖਾਵਾਂ ਉੱਪਰਲੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਕਿਉਂਕਿ $x \geq 0$, $y \geq 0$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ, ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਹੱਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 6.14)



ਚਿੱਤਰ 6.14

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਭਿਆਸ 6.3

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਅਸਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ :

1. $x \geq 3, y \geq 2$

2. $3x + 2y \leq 12,\ x \geq 1, y \geq 2$

3. $2x + y \geq 6, 3x + 4y \leq 12$

4. $x + y \geq 4,\ 2x - y > 0$

5. $2x - y > 1, x - 2y < -1$

6. $x + y \leq 6,\ x + y \geq 4$

7. $2x + y \geq 8,\ x + 2y \geq 10$

8. $x + y \leq 9,\ y > x,\ x \geq 0$

9. $5x + 4y \leq 20,\ x \geq 1, y \geq 2$

10. $3x + 4y \leq 60, x + 3y \leq 30, x \geq 0,\ y \geq 0$

11. $2x + y \geq 4,\ x + y \leq 3,\ 2x - 3y \leq 6$

12. $x - 2y \leq 3, 3x + 4y \geq 12,\ x \geq 0, y \geq 1$

13. $4x + 3y \leq 60, y \geq 2x,\ x \geq 3,\ x, y \geq 0$

14. $3x + 2y \leq 150, x + 4y \leq 80,\ x \leq 15,\ y \geq 0, x \geq 0$

15. $x + 2y \leq 10, x + y \geq 1, x - y \leq 0, x \geq 0, y \geq 0$

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 16 : $-8 \leq 5x - 3 < 7$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਦੋ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ, $-8 \leq 5x - 3$ ਅਤੇ $5x - 3 < 7$ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰਾਂਗੇ।

ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ $-8 \leq 5x - 3 < 7$

ਜਾਂ $-5 \leq 5x < 10$ ਜਾਂ $-1 \leq x < 2$

ਉਦਾਹਰਣ 17 : $-5 \leq \dfrac{5-3x}{2} \leq 8$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $-5 \leq \dfrac{5-3x}{2} \leq 8$

ਜਾਂ $-10 \leq 5 - 3x \leq 16$ ਜਾਂ $-15 \leq -3x \leq 11$

ਜਾਂ $5 \geq x \geq -\dfrac{11}{3}$

ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, $\dfrac{-11}{3} \leq x \leq 5$

ਉਦਾਹਰਣ 18 : ਅਸਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

$$3x - 7 < 5 + x \qquad \text{... (1)}$$

$$11 - 5x \leq 1 \qquad \text{... (2)}$$

ਅਤੇ ਹੱਲ ਨੂੰ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਤੇ ਦਰਸਾਉ।

ਹੱਲ : ਅਸਮਾਨਤਾ (1) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$3x - 7 < 5 + x$$

ਜਾਂ $x < 6$ ... (3)

ਅਸਮਾਨਤਾ (2) ਤੋਂ,

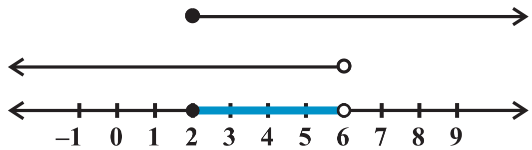
$$11 - 5x \leq 1$$

ਜਾਂ $-5x \leq -10$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $x \geq 2$ ... (4)

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਜੇਕਰ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਤੇ (3) ਅਤੇ (4) ਨੂੰ ਆਲੇਖਿਤ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ x ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਮੁੱਲ 2 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ 2 ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਅਤੇ 6 ਤੋਂ ਛੋਟੇ ਹਨ। ਚਿੱਤਰ 6.15 ਵਿੱਚ ਗੂੜੀ ਕਾਲੀ ਰੇਖਾ ਨਾਲ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 6.15

ਇਸ ਲਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਹੱਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x, 2 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ 2 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਅਤੇ 6 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $2 \le x < 6$.

ਉਦਾਹਰਣ 19 : ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ, ਤੇਜ਼ਾਬ (Hydrochloric acid) ਦੇ ਘੋਲ ਨੂੰ 30° ਤੋਂ 35° ਸੈਲਸੀਅਸ ਤਾਪਮਾਨ ਦੇ ਵਿੱਚ ਰੱਖਿਆ ਜਾਣਾ ਹੈ। ਤਾਪਮਾਨ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਫਾਰਨਹੀਟ ਪੈਮਾਨੇ ਵਿੱਚ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ, ਜੇਕਰ ਸੈਲਸੀਅਸ ਅਤੇ ਫਾਰਨਹੀਟ ਪੈਮਾਨੇ ਦਾ ਪਰਿਵਰਤਨ ਸੂਤਰ $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ ਹੋਵੇ। ਇੱਥੇ C ਅਤੇ F ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਤਾਪਮਾਨ ਨੂੰ ਡਿਗਰੀ ਸੈਲਸੀਅਸ ਅਤੇ ਡਿਗਰੀ ਫਾਰਨਹੀਟ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਦਿੱਤਾ ਹੈ $30 < C < 35$

$C = \frac{5}{9}(F - 32)$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$30 < \frac{5}{9}(F - 32) < 35$$

ਜਾਂ $\frac{9}{5} \times (30) < (F - 32) < \frac{9}{5} \times (35)$

ਜਾਂ $54 < (F - 32) < 63$

ਜਾਂ $86 < F < 95.$

ਇਸ ਲਈ ਤਾਪਮਾਨ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦਾ ਵਿਸਥਾਰ 86°F ਅਤੇ 95°F ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 20 : ਇੱਕ ਨਿਰਮਾਤਾ ਕੋਲ 12% ਤੇਜ਼ਾਬ ਵਾਲਾ ਘੋਲ 600 ਲੀਟਰ ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚ 30% ਤੇਜਾਬ ਵਾਲਾ ਘੋਲ ਕਿੰਨਾ ਮਿਲਾਇਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਜੋ ਆਖਿਰ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਘੋਲ ਵਿੱਚ ਤੇਜ਼ਾਬ ਦੀ ਮਾਤਰਾ 15% ਤੋਂ ਵੱਧ ਪਰ 18% ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਵੇ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ 30% ਤੇਜ਼ਾਬ ਵਾਲੇ ਘੋਲ ਦੀ ਮਾਤਰਾ x ਲੀਟਰ ਹੈ, ਤਾਂ

ਕੁੱਲ ਘੋਲ = $(x + 600)$ ਲੀਟਰ

ਇਸ ਲਈ x ਦਾ 30% + 600 ਦਾ 12% > $(x + 600)$ ਦਾ 15%

ਅਤੇ x ਦਾ 30% + 600 ਦਾ 12% < $(x + 600)$ ਦਾ 18%

ਜਾਂ $\frac{30x}{100} + \frac{12}{100}(600) > \frac{15}{100}(x + 600)$

ਅਤੇ $\frac{30x}{100} + \frac{12}{100}(600) < \frac{18}{100}(x + 600)$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਜਾਂ $30x + 7200 > 15x + 9000$

ਅਤੇ $30x + 7200 < 18x + 10800$

ਜਾਂ $15x > 1800$ ਅਤੇ $12x < 3600$

ਜਾਂ $x > 120$ ਅਤੇ $x < 300$

ਭਾਵ $120 < x < 300$

ਇਸ ਲਈ 30% ਤੇਜ਼ਾਬ ਵਾਲੇ ਘੋਲ ਦੀ ਮਾਤਰਾ 120 ਲੀਟਰ ਤੋਂ ਵੱਧ ਪਰ 300 ਲੀਟਰ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ 6 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਤੋਂ 6 ਤੱਕ ਦੀਆਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

1. $2 \le 3x - 4 \le 5$

2. $6 \le -3(2x - 4) < 12$

3. $-3 \le 4 - \frac{7x}{2} \le 18$

4. $-15 < \frac{3(x-2)}{5} \le 0$

5. $-12 < 4 - \frac{3x}{-5} \le 2$

6. $7 \le \frac{(3x+11)}{2} \le 11$.

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 7 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਦੀਆਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ ਅਤੇ ਹੱਲ ਨੂੰ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਦਰਸਾਉ :

7. $5x + 1 > -24,\quad 5x - 1 < 24$

8. $2(x - 1) < x + 5,\quad 3(x + 2) > 2 - x$

9. $3x - 7 > 2(x - 6),\quad 6 - x > 11 - 2x$

10. $5(2x - 7) - 3(2x + 3) \le 0,\quad 2x + 19 \le 6x + 47$.

11. ਇੱਕ ਘੋਲ ਨੂੰ 68° F ਅਤੇ 77° F ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਰੱਖਿਆ ਜਾਣਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਾਪਮਾਨ ਦੀ ਡਿਗਰੀ (degree) ਸੈਲਸੀਅਸ (C) ਵਿੱਚ (range) ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ, ਜੇਕਰ ਸੈਲਸੀਅਸ (C) ਅਤੇ ਫਾਰਨਹੀਟ (F) ਪਰਿਵਰਤਨ ਸੂਤਰ $F = \frac{9}{5}C + 32$ ਹੋਵੇ ?

12. 8% ਬੋਰਿਕ ਤੇਜ਼ਾਬ ਦੇ ਘੋਲ ਵਿੱਚ 2% ਬੋਰਿਕ ਤੇਜ਼ਾਬ ਦਾ ਘੋਲ ਮਿਲਾ ਕੇ ਪਤਲਾ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਹੈ। ਅਖੀਰਲੇ ਮਿਸ਼ਰਣ ਵਿੱਚ ਬੋਰਿਕ ਤੇਜ਼ਾਬ 4% ਤੋਂ ਵੱਧ ਪਰ 6% ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਵੇ। ਜੇਕਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ 8% ਘੋਲ ਦੀ ਮਾਤਰਾ 640 ਲੀਟਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਦੱਸੋ ਕਿ 2% ਘੋਲ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਕਿੰਨੇ ਲੀਟਰ ਇਸ ਵਿੱਚ ਮਿਲਾਉਣੀ ਹੋਵੇਗੀ।

13. 45% ਤੇਜਾਬ ਵਾਲੇ 1125 ਲੀਟਰ ਘੋਲ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਲੀਟਰ ਪਾਣੀ ਮਿਲਾਇਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਜੋ ਅਖੀਰਲੇ ਮਿਸ਼ਰਣ ਵਿੱਚ ਤੇਜ਼ਾਬ ਦੀ ਮਾਤਰਾ 25% ਤੋਂ ਵੱਧ ਪਰ 30% ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਵੇ ?

14. ਕਿਸੇ ਵਿਅਕਤੀ ਦਾ IQ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਸੂਤਰ

$$IQ = \frac{MA}{CA} \times 100$$

ਜਿੱਥੇ MA ਮਾਨਸਿਕ ਉਮਰ ਅਤੇ CA ਸਮਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਉਮਰ ਹੈ। ਜੇਕਰ 12 ਸਾਲ ਦੇ ਉਮਰ ਦੇ ਬੱਚਿਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਦਾ IQ, $80 \le IQ \le 140$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਮਾਨਸਿਕ ਉਮਰ ਦੀ ਵਿਸਥਾਰ (range) ਪਤਾ ਕਰੋ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਇੱਕ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਾਂ ਦੋ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਵਿੱਚ $<$, $>$, $\leq$ ਜਾਂ $\geq$ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਬਣਦੀ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦੇ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀ ਸੰਖਿਆ ਜੋੜੀ ਜਾਂ ਘਟਾਈ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।
- ਕਿਸੇ ਵੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦੇ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ (ਜਾਂ ਭਾਗ) ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਪ੍ਰੰਤੂ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀ ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਗੁਣਾ (ਜਾਂ ਭਾਗ) ਕਰਨ ਤੇ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਚਿੰਨ ਉਲਟ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- x ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਜਿਸ ਨਾਲ ਅਸਮਾਨਤਾ ਸਹੀ ਕਥਨ ਸਿੱਧ ਹੋ ਜਾਵੇ, ਨੂੰ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਹੱਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਤੇ $x < a$ (ਜਾਂ $x > a$) ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਸੰਖਿਆ a ਉੱਤੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਲਗਾਉ ਅਤੇ a ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ (ਜਾਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ) ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਗੂੜੀ ਕਰ ਦਿਉ।
- $x \leq a$ (ਜਾਂ $x \geq a$) ਨੂੰ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਤੇ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਸੰਖਿਆ ਉੱਪਰ ਇੱਕ ਗੂੜਾ ਚੱਕਰ ਲਗਾਉ ਅਤੇ a ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ (ਜਾਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ) ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਗੂੜੀ ਕਰ ਦਿਉ।
- ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਅਸਮਾਨਤਾ ਵਿੱਚ $\leq$ ਜਾਂ $\geq$ ਚਿੰਨ੍ਹ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦੇ ਹੱਲ ਵਿੱਚ ਰੇਖਾ ਉੱਪਰ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੋਣਗੇ ਅਤੇ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਆਲੇਖ ਇਸ ਰੇਖਾ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ (ਹੇਠਾਂ) ਜਾਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ (ਉੱਪਰੋਂ) ਦਾ ਉਹ ਸਾਰਾ ਖੇਤਰ ਹੋਵੇਗਾ ਜਿਸਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਅਸਮਾਨਤਾ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰੇ।
- ਅਸਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਹੱਲ ਖੇਤਰ ਉਹ ਸਾਂਝਾ ਖੇਤਰ ਹੈ ਜੋ ਸਾਰੀਆਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕੋ ਸਮੇਂ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਧਿਆਇ 7

ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਅਤੇ ਸੰਯੋਜਨ
(Permutations and Combinations)

❖*Every body of discovery is mathematical in form because there is no other guidance we can have – DARWIN*❖

7.1 ਭੂਮਿਕਾ

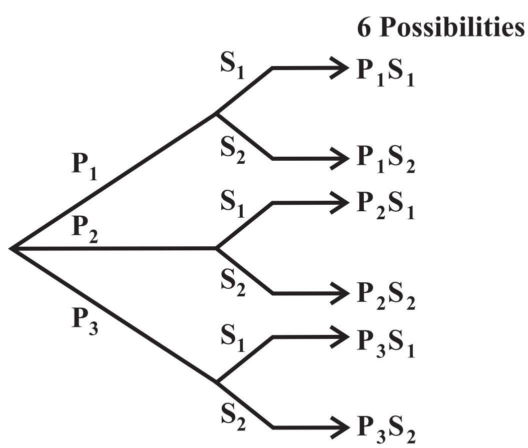
ਮੰਨ ਲਓ ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ ਨੰਬਰਾਂ ਵਾਲੇ ਤਾਲੇ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਸੂਟਕੇਸ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਓ ਇਸ ਤਾਲੇ ਤੇ ਚਾਰ ਚੱਕਰ ਲੱਗੇ ਹਨ ਅਤੇ ਹਰ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਤੇ 0 ਤੋਂ 9 ਤੱਕ ਦੇ 10 ਅੰਕ ਲਿਖੇ ਹੋਏ ਹਨ। ਤਾਲੇ ਨੂੰ 4 ਖਾਸ ਅੰਕਾਂ ਨਾਲ, ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਬਿਨਾਂ ਦੁਹਰਾਏ, ਇੱਕ ਖਾਸ ਤਰਤੀਬ ਨਾਲ ਖੋਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਓ ਕਿਸੇ ਕਾਰਨ ਤੁਸੀਂ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਇਸ ਤਰਤੀਬ ਨੂੰ ਭੁੱਲ ਗਏ, ਤੁਹਾਨੂੰ ਸਿਰਫ ਪਹਿਲਾ ਅੰਕ ਜੋ 7 ਹੈ, ਉਹ ਯਾਦ ਹੈ। ਤਾਲੇ ਨੂੰ ਖੋਲਣ ਲਈ ਤੁਹਾਨੂੰ ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਲੜੀਆਂ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰਨੀ ਪਵੇਗੀ ? ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਉੱਤਰ ਲਈ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਬਾਕੀ ਦੇ ਰਹਿੰਦੇ 9 ਅੰਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ 3 ਅੰਕ ਲੈਂਦੇ ਹੋਏ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਭਵ ਤਰਤੀਬਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਲੱਗ ਜਾਉ। ਪਰ ਇਹ ਵਿਧੀ ਥਕਾਉਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਨੀਰਸ ਹੋਵੇਗੀ, ਕਿਉਂਕਿ ਸੰਭਵ ਕ੍ਰਮਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਵੱਡੀ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਲਈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਤਕਨੀਕ ਬਾਰੇ ਸਿੱਖਾਂਗੇ, ਜਿਸ ਨਾਲ 3 ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਬਿਨਾਂ ਸੂਚੀਬੱਧ ਕੀਤੇ, ਉੱਤਰ ਦੇ ਸਕੀਏ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਤਕਨੀਕ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰਨ ਅਤੇ ਅਸਲ ਸੂਚੀਆਂ ਬਣਾਏ ਬਿਨਾਂ ਹੀ, ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਤਰਤੀਬਾਂ ਬਾਰੇ ਦੱਸੇਗੀ। ਪਹਿਲੇ ਪਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਉਸ ਸਿਧਾਂਤ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ, ਜੋ ਇਸ ਤਕਨੀਕ ਨੂੰ ਸਿੱਖਣ ਦੇ ਲਈ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮੂਲਭੂਤ ਹੈ।

Jacob Bernoulli (1654-1705)

7.2 ਗਣਨਾ ਦਾ ਮੂਲਭੂਤ ਜਾਂ ਅਧਾਰਭੂਤ ਜਾਂ ਮੁੱਢਲਾ ਸਿਧਾਂਤ (Fundamental Principle of Counting)

ਆਓ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਮੱਸਿਆ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਮੋਹਨ ਕੋਲ 3 ਪੈਂਟਾਂ ਅਤੇ 2 ਕਮੀਜਾਂ ਹਨ। ਤਿਆਰ ਹੋਣ ਲਈ ਉਹ ਪੈਂਟਾਂ ਅਤੇ ਕਮੀਜਾਂ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਜੋੜੇ ਪਹਿਨ ਸਕਦਾ ਹੈ ? ਕਿਉਂਕਿ ਉਸ ਕੋਲ ਤਿੰਨ ਪੈਂਟਾਂ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਉਸ ਕੋਲ ਪੈਂਟ ਚੁਨਣ ਦੇ ਤਿੰਨ ਤਰੀਕੇ ਹਨ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਉਸ ਕੋਲ ਕਮੀਜ ਚੁਨਣ ਦੇ ਵੀ ਦੋ ਤਰੀਕੇ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਪੈਂਟ ਦੀ ਚੋਣ ਲਈ, ਕਮੀਜ਼ ਚੁਨਣ ਦੇ ਦੋ ਵਿਕਲਪ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਪੈਂਟਾਂ ਅਤੇ ਕਮੀਜਾਂ ਨਾਲ ਕੁੱਲ $3 \times 2 = 6$ ਜੋੜੇ ਬਣਨਗੇ।

ਆਓ ਤਿੰਨੇ ਪੈਂਟਾਂ ਨੂੰ P_1, P_2, P_3 ਅਤੇ ਦੋਵੇਂ ਕਮੀਜਾਂ ਨੂੰ S_1, S_2 ਨਾਮ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਛੇ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 7.1 ਦੁਆਰਾ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।



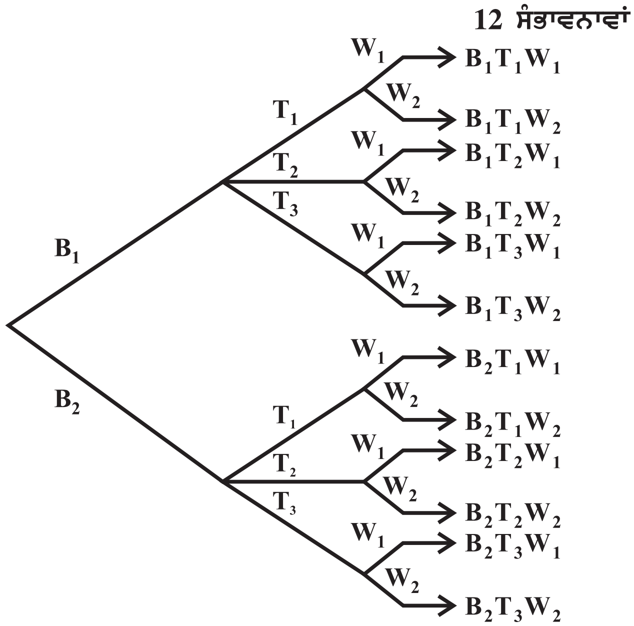
ਚਿੱਤਰ 7.1

ਆਓ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਹੋਰ ਸਮੱਸਿਆ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਸ਼ਬਨਮ ਕੋਲ 2 ਸਕੂਲੀ ਬਸਤੇ, 3 ਖਾਣਾ ਲੈ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਡੱਬੇ ਅਤੇ 2 ਪਾਣੀ ਵਾਲੀਆਂ ਬੋਤਲਾਂ ਹਨ। ਉਹ ਇਹਨਾਂ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਕਿੰਨੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਲੈ ਕੇ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ (ਹਰ ਇੱਕ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਚੁਣ ਕੇ)

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਸਕੂਲ ਬਸਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਚੁਨਣ ਦੇ 2 ਤਰੀਕੇ ਹਨ। ਬਸਤੇ ਦੀ ਚੋਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਖਾਣੇ ਵਾਲੇ ਡੱਬੇ ਦੀ ਚੋਣ ਦੇ 3 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਬਸਤੇ ਅਤੇ ਖਾਣੇ ਵਾਲੇ ਡੱਬੇ ਦੇ $2 \times 3 = 6$ ਜੋੜੇ ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਹਰ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਲਈ ਪਾਣੀ ਦੀ ਬੋਤਲ ਚੁਨਣ ਦੇ 2 ਤਰੀਕੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਸ਼ਬਨਮ ਨੂੰ ਇਹਨਾਂ ਤਿੰਨਾਂ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਸਕੂਲ ਲੈ ਕੇ ਜਾਣ ਦੇ $6 \times 2 = 12$ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ 2 ਸਕੂਲੀ ਬਸਤਿਆਂ ਨੂੰ B_1, B_2; 3 ਖਾਣੇ ਵਾਲੇ ਡੱਬਿਆਂ ਨੂੰ T_1, T_2, T_3 ਅਤੇ 2 ਪਾਣੀ ਵਾਲੀਆਂ ਬੋਤਲਾਂ ਨੂੰ W_1, W_2 ਦਾ ਨਾਮ ਦੇ ਦੇਈਏ, ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 7.2 ਰਾਹੀਂ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 7.2

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਉਪਰੋਕਤ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਿਧਾਂਤ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਿਧਾਂਤ ਨੂੰ ਗਣਨਾ ਦਾ ਅਧਾਰਭੂਤ (ਮੂਲਭੂਤ ਜਾਂ ਮੁੱਢਲਾ) ਸਿਧਾਂਤ ਜਾਂ ਸਧਾਰਨ ਤੌਰ ਤੇ ਗੁਣਨ ਸਿਧਾਂਤ (multiplication principle) ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਸਿਧਾਂਤ ਅਨੁਸਾਰ :

"ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਘਟਨਾ m ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਘਟ ਸਕਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸੇ ਸਮੇਂ (ਉਪਰੰਤ) ਇੱਕ ਹੋਰ ਘਟਨਾ n ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਘਟ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਦੋਹਾਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਘਟਣ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ $m \times n$ ਹੋਵੇਗੀ।"

ਉਪਰਲੇ ਸਿਧਾਂਤ ਨੂੰ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਸੀਮਤ ਲੈ ਕੇ ਵਿਆਪਕ ਵੀ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ, 3 ਘਟਨਾਵਾਂ ਲਈ, ਸਿਧਾਂਤ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇਗਾ :

"ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਘਟਨਾ m ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਘਟ ਸਕਦੀ ਹੋਵੇ, ਇਸ ਉਪਰੰਤ ਇੱਕ ਹੋਰ ਘਟਨਾ n ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਘਟਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਉਪਰੰਤ ਇੱਕ ਤੀਸਰੀ ਘਟਨਾ p ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਘਟਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਤਿੰਨਾਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਇਸੇ ਹੀ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਘਟਣ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ $m \times n \times p$ ਹੋਵੇਗੀ।"

ਪਹਿਲੀ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਪੈਂਟ ਅਤੇ ਕਮੀਜ ਦੇ ਪਹਿਨਣ ਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਉਪਰੰਤ ਦੂਸਰੀ ਘਟਣ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਤੁਲ ਸੀ :

(i) ਇੱਕ ਪੈਂਟ ਚੁਨਣ ਦੀ ਘਟਨਾ
(ii) ਇੱਕ ਕਮੀਜ ਚੁਨਣ ਦੀ ਘਟਨਾ

ਦੂਸਰੀ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ, ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਲੋੜੀਂਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਉਪਰੰਤ ਇੱਕ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀਆਂ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਸੀ :

(i) ਇੱਕ ਬਸਤੇ ਨੂੰ ਚੁਨਣ ਦੀ ਘਟਨਾ
(ii) ਇੱਕ ਖਾਣਾ ਲੈ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਡੱਬੇ ਨੂੰ ਚੁਨਣ ਦੀ ਘਟਨਾ
(iii) ਇੱਕ ਪਾਣੀ ਵਾਲੀ ਬੋਤਲ ਨੂੰ ਚੁਨਣ ਦੀ ਘਟਨਾ

ਇੱਥੇ ਦੋਹਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ, ਹਰ ਇੱਕ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਘਟਨਾ ਕਈ ਸੰਭਵ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਘਟ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਅਸੀਂ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਹਨਾਂ ਸੰਭਵ ਕ੍ਰਮਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਚੋਣ ਕੀਤੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਸ਼ਬਦ ROSE ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਤੋਂ ਬਨਣ ਵਾਲੇ 4 ਅੱਖਰਾਂ ਦੇ, ਅਰਥਪੂਰਨ ਜਾਂ ਅਰਥਹੀਨ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਕੋਈ ਵੀ ਅੱਖਰ ਦੁਬਾਰਾ ਨਹੀਂ ਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ?

ਹੱਲ : ਬਣਾਏ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ, 4 ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ $\square\square\square\square$ ਨੂੰ ਚਾਰ ਅੱਖਰਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਬਾਦ ਇੱਕ ਭਰਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ, ਇੱਕ ਗੱਲ ਦਾ ਧਿਆਨ ਰੱਖਿਆ ਜਾਵੇ ਕਿ ਕੋਈ ਵੀ ਅੱਖਰ ਦੁਬਾਰਾ ਨਹੀਂ ਆ ਸਕਦਾ। ਪਹਿਲੇ ਸਥਾਨ ਨੂੰ 4 ਅੱਖਰਾਂ R,O,S ਅਤੇ E ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਇੱਕ ਅੱਖਰ ਲੈ ਕੇ 4 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਭਰਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਦ ਦੂਸਰੇ ਸਥਾਨ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਬਾਕੀ ਅੱਖਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਇੱਕ ਲੈ ਕੇ ਤਿੰਨ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਭਰਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਦ ਤੀਸਰੇ ਸਥਾਨ ਨੂੰ ਦੋ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਭਰਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਚੌਥੇ ਸਥਾਨ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਭਰਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗੁਣਨ ਸਿਧਾਂਤ ਦੁਆਰਾ ਚਾਰੇ ਸਥਾਨਾਂ ਭਰਨ ਦੀ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 24 ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਜੇਕਰ ਅੱਖਰਾਂ ਨੂੰ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਲੈਣ ਦੀ ਇਜਾਜਤ ਹੁੰਦੀ ਤਾਂ ਕਿੰਨੇ ਸ਼ਬਦ ਬਣਨੇ ਸਨ ? ਇਹ ਗੱਲ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਸਮਝੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਕਿ 4 ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰ ਇੱਕ ਨੂੰ ਇੱਕ ਤੋਂ ਬਾਦ ਇੱਕ 4 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਭਰਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ $= 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਰੰਗਾਂ ਦੇ 4 ਝੰਡਿਆਂ ਨਾਲ, ਕਿੰਨੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸੰਕੇਤ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਕੇਤ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਥੱਲੇ, ਦੋ ਝੰਡਿਆਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੋਵੇ ?

ਹੱਲ : ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੋ ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ $\begin{array}{|c|}\hline \quad\quad \\ \hline \quad\quad \\ \hline\end{array}$ ਨੂੰ ਚਾਰ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਝੰਡਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਉਪਰੰਤ ਦੂਸਰੀ ਦੇ ਭਰਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਉਪਰਲੇ ਖ਼ਾਲੀ ਸਥਾਨ ਨੂੰ 4 ਝੰਡਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਦੁਆਰਾ 4 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਭਰਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਹੇਠਲੇ ਖ਼ਾਲੀ ਸਥਾਨ ਨੂੰ ਬਾਕੀ ਬਚੇ 3 ਝੰਡਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਨਾਲ 3 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਭਰਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਗੁਣਨ ਸਿਧਾਂਤ ਦੁਆਰਾ ਲੋੜੀਂਦੇ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $4 \times 3 = 12$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਅੰਕਾਂ 1, 2, 3, 4, 5 ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ, ਕਿੰਨੀਆਂ ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਣਾਈਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੋਵੇ ?

ਹੱਲ : ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਤਰੀਕੇ, 2 ਖ਼ਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ $\square\square$ ਨੂੰ ਇੱਕ ਉਪਰੰਤ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਉਚਿਤ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਭਰਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਇਕਾਈ ਸਥਾਨ ਨੂੰ ਭਰਨ ਲਈ ਕੇਵਲ ਦੋ ਵਿਕਲਪ ਹਨ, ਅੰਕ 2 ਜਾਂ 4, ਇਸ ਲਈ ਇਕਾਈ ਸਥਾਨ ਦੋ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਭਰਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਉਪਰੰਤ ਦਹਾਈ ਦਾ ਸਥਾਨ ਪੰਜ ਅੰਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਇੱਕ ਅੰਕ ਨਾਲ ਭਰਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸਦੇ ਪੰਜ ਵਿਕਲਪ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਗੁਣਨ ਸਿਧਾਂਤ ਤੋਂ ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ $= 2 \times 5 = 10$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਪੰਜ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਝੰਡਿਆਂ ਤੋਂ ਬਣਾਏ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਦੋ ਝੰਡਿਆਂ ਨਾਲ (ਇੱਕ ਦੇ ਥੱਲੇ ਦੂਸਰਾ ਰੱਖ ਕੇ) ਤਿਆਰ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਇੱਕ ਸੰਕੇਤ 2 ਜਾਂ 3 ਜਾਂ 4 ਜਾਂ 5 ਝੰਡਿਆਂ ਨਾਲ ਬਣਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ 2, 3, 4 ਜਾਂ 5 ਝੰਡਿਆਂ ਨਾਲ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦੀ ਸੰਭਵ ਗਿਣਤੀ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕਰ ਦੇਵਾਂਗੇ।

ਦੋ ਝੰਡਿਆਂ ਨਾਲ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 5 ਉਪਲਬਧ ਝੰਡਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਦੋ ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ $\begin{array}{|c|}\hline \quad\quad \\ \hline \quad\quad \\ \hline\end{array}$ ਨੂੰ ਇੱਕ ਉਪਰੰਤ ਦੂਸਰਾ ਭਰਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਗੁਣਨ ਨਿਯਮ ਨਾਲ ਇਹ ਸੰਖਿਆ $5 \times 4 = 20$ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਤਿੰਨ ਝੰਡਿਆਂ ਨਾਲ ਬਨਣ ਵਾਲੇ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ, 5 ਝੰਡਿਆਂ ਵਿੱਚ 3 ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਉਪਰੰਤ ਦੂਸਰੇ ਨਾਲ ਭਰਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗੀ, ਇਹ ਗਿਣਤੀ $5 \times 4 \times 3 = 60$ ਹੈ।
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 4 ਝੰਡਿਆਂ ਵਾਲੇ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ ਹੈ।
ਅਤੇ 5 ਝੰਡਿਆਂ ਵਾਲੇ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ ਹੈ।
ਇਸ ਲਈ ਕੁੱਲ ਲੋੜੀਂਦੇ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= 20 + 60 + 120 + 120 = 320$ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 7.1

1. ਅੰਕਾਂ 1, 2, 3, 4 ਅਤੇ 5 ਤੋਂ ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਣਾਈਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਜੇਕਰ (i) ਅੰਕ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਲਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹੋਣ (ii) ਅੰਕ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਨਾ ਲਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹੋਣ।
2. ਅੰਕਾਂ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ਤੋਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਣਾਈਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਅੰਕ ਦੁਬਾਰਾ (ਵਾਰ-ਵਾਰ) ਲਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹੋਣ।
3. ਅੰਗਰੇਜੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦੇ ਪਹਿਲੇ 10 ਅੱਖਰਾਂ ਨਾਲ 4 ਅੱਖਰਾਂ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਕੋਡ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਵੀ ਅੱਖਰ ਦੁਬਾਰਾ ਨਾ ਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੋਵੇ ?
4. 0 ਤੋਂ ਲੈ ਕੇ 9 ਤੱਕ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਕਿੰਨੇ 5 ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਟੈਲੀਫੋਨ ਨੰਬਰ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਹਰ ਇੱਕ ਨੰਬਰ 67 ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਕੋਈ ਅੰਕ ਇੱਕ ਵਾਰ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵਾਰ ਨਾ ਆਉਂਦਾ ਹੋਵੇ ?
5. ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਤਿੰਨ ਵਾਰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਦਰਜ ਕਰ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਸੰਭਵ ਗਿਣਤੀ ਕੀ ਹੈ ?
6. ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਰੰਗਾਂ ਦੇ 5 ਝੰਡੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਨ, ਇਹਨਾਂ ਨਾਲ ਕਿੰਨੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸੰਕੇਤ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਹਰ ਸੰਕੇਤ ਵਿੱਚ 2 ਝੰਡਿਆਂ, ਇੱਕ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਦੂਸਰਾ, ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੋਵੇ।

7.3 ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ (Permutations)

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ 1 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅੱਖਰਾਂ ਦੀਆਂ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰਤੀਬਾਂ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ROSE, REOS, ..., ਆਦਿ ਦੀ ਸੰਭਵ ਗਿਣਤੀ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰ ਰਹੇ ਸੀ। ਇਸ ਸੂਚੀ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਤਰਤੀਬ ਦੂਸਰੇ ਤੋਂ ਅਲੱਗ ਹੈ। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅੱਖਰਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ। ਹਰ ਇੱਕ ਤਰਤੀਬ ਨੂੰ 4 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਅੱਖਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਾਰਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕੋ ਸਮੇਂ ਇਕੱਠਾ ਲੈ ਕੇ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਇਸ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ (permutation) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਹੁਣ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸ਼ਬਦ NUMBER, ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 3 ਅੱਖਰੀ ਅਰਥਪੂਰਨ ਜਾਂ ਅਰਥਹੀਨ ਸ਼ਬਦ ਬਣਾਉਣੇ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ ਅੱਖਰਾਂ ਨੂੰ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਵਰਤਣ ਦੀ ਇਜ਼ਾਜਤ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ NUM, NMU, MUN, NUB, ..., ਆਦਿ ਤਰਤੀਬਾਂ ਨੂੰ ਗਿਣਨਾ ਪਵੇਗਾ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ 6 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਅੱਖਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ 3 ਅੱਖਰਾਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ (permutation) ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਲੋੜੀਂਦੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ $= 6 \times 5 \times 4 = 120$ (ਗੁਣਨ ਸਿਧਾਂਤ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ) ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਅੱਖਰਾਂ ਨੂੰ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਲਏ ਜਾਣ ਦੀ ਇਜਾਜਤ ਹੁੰਦੀ ਤਾਂ ਲੋੜੀਂਦੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $6 \times 6 \times 6 = 216$ ਹੋਵੇਗੀ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1 ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਤਰਤੀਬ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕੋ ਸਮੇਂ ਕੁਝ ਜਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਉਪ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਉਸ ਸੂਤਰ ਨੂੰ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਲਈ ਪੈਂਦੀ ਹੈ।

7.3.1 *ਕ੍ਰਮਸੰਚਣ ਜਦੋਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਹੋਣ (Permutations when all the objects are distinct)*

ਪ੍ਰਮੇਯ 1 : 7.3.1 ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਤੇ r ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਾਏ ਗਏ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ ਚਿੰਨ ^nP_r ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ $0 < r \le n$, ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਦੁਹਰਾਏ ਜਾਣ ਦੀ ਇਜਾਜਤ ਨਹੀਂ ਹੈ; $^nP_r = n\,(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,.\,(n-r+1)$

ਸਬੂਤ : ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ, r ਖ਼ਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਨੂੰ $\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{} \ldots \boxed{}$ ($\leftarrow r$ ਖਾਲੀ ਸਥਾਨ) n ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਭਰਨ ਦੀ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਪਹਿਲੇ ਸਥਾਨ ਨੂੰ n ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਭਰਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਦੂਸਰਾ ਸਥਾਨ $(n-1)$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ, ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਤੀਸਰਾ ਸਥਾਨ $(n-2)$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਭਰਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ..., rਵਾਂ ਸਥਾਨ $[n-(r-1)]$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਭਰਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ r ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਇੱਕ (in succession) ਭਰਨ ਦੇ ਤਰੀਕੇ $n(n-1)(n-2)\ldots[n-(r-1)]$ ਜਾਂ $n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$ ਹਨ।

${}^nP_r$ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਵਿਅੰਜਕ ਬਹੁਤ ਮੁਸ਼ਕਿਲ (cumbersome) ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸੰਕੇਤ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ ਇਸ ਵਿਅੰਜਕ ਦੇ ਵਿਸਥਾਰ ਨੂੰ ਘਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕੇ। ਚਿੰਨ੍ਹ $n!$ (ਜਿਸਨੂੰ n ਫੈਕਟੋਰੀਅਲ (factorial) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ) ਇਸ ਵਿੱਚ ਸਾਡੀ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਵਿਵਰਣ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਿੱਖਾਂਗੇ ਕਿ ਅਸਲ ਵਿੱਚ $n!$ ਦਾ ਅਰਥ ਕੀ ਹੈ।

7.3.2 *ਫੈਕਟੋਰੀਅਲ ਚਿੰਨ (Factorial notation)* ਚਿੰਨ (Notation) $n!$ ਪਹਿਲੀਆਂ n ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਭਾਵ $1\times2\times3\times\ldots\times(n-1)\times n$ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਨੂੰ $n!$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਚਿੰਨ੍ਹ ਨੂੰ n ਫੈਕਟੋਰੀਅਲ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ $1\times2\times3\times4\ldots\times(n-1)\times n=n!$

$1 = 1!$

$1\times2 = 2!$

$1\times2\times3 = 3!$

$1\times2\times3\times4 = 4!$ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵੀ

ਅਸੀਂ $0! = 1$ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ $5! = 5\times4! = 5\times4\times3! = 5\times4\times3\times2!$
$= 5\times4\times3\times2\times1!$

ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ n ਲਈ

$$n! = n(n-1)!$$
$$= n(n-1)(n-2)! \quad [\text{ਜੇਕਰ } (n\geq2) \text{ ਹੋਵੇ।}]$$
$$= n(n-1)(n-2)(n-3)! \quad [\text{ਜੇਕਰ } (n\geq3) \text{ ਹੋਵੇ।}]$$

ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਅੱਗੇ ਵੀ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ : (i) $5!$ (ii) $7!$ (iii) $7!-5!$

ਹੱਲ : (i) $5! = 1\times2\times3\times4\times5 = 120$

(ii) $7! = 1\times2\times3\times4\times5\times6\times7 = 5040$

ਅਤੇ (iii) $7! - 5! = 5040 - 120 = 4920$

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਪਤਾ ਕਰੋ (i) $\dfrac{7!}{5!}$ (ii) $\dfrac{12!}{(10!)(2!)}$

ਹੱਲ : (i) $\dfrac{7!}{5!} = \dfrac{7\times6\times5!}{5!} = 7\times6 = 42$

ਅਤੇ (ii) $\dfrac{12!}{(10!)(2!)} = \dfrac{12\times11\times(10!)}{(10!)\times(2)} = 6\times11 = 66$

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, ਜਦੋਂ $n=5$, $r=2$

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ $\dfrac{5!}{2!(5-2)!}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ (ਕਿਉਂਕਿ $n=5$, $r=2$)

ਹੁਣ $\dfrac{5!}{2!(5-2)!} = \dfrac{5!}{2!\times3!} = \dfrac{4\times5}{2} = 10$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਜੇਕਰ $\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}=\frac{x}{10!}$, x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\frac{1}{8!}+\frac{1}{9\times 8!}=\frac{x}{10\times 9\times 8!}$

ਇਸ ਲਈ $1+\frac{1}{9}=\frac{x}{10\times 9}$ ਜਾਂ $\frac{10}{9}=\frac{x}{10\times 9}$

ਇਸ ਲਈ $x = 100$

ਅਭਿਆਸ 7.2

1. ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) 8 ! (ii) 4 ! – 3 !

2. ਜੇਕਰ 3 ! + 4 ! = 7 ! ?

3. $\frac{8!}{6!\times 2!}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਜੇਕਰ $\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}=\frac{x}{8!}$, ਤਾਂ x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. $\frac{n!}{(n-r)!}$, ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ :

(i) $n = 6$, $r = 2$ (ii) $n = 9$, $r = 5$

7.3.3 ${}^nP_r$ ਦੇ ਲਈ ਸੂਤਰ ਦੀ ਵਿਉਤਪਨਤਾ (Derivation of the formula for ${}^nP_r$)

$${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!},\ 0 \le r \le n$$

ਆਓ ਅਸੀਂ ਉਸ ਅਵਸਥਾ ਤੇ ਵਾਪਿਸ ਜਾਈਏ ਜਿੱਥੇ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਸੂਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਸੀ :

$${}^nP_r = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+1)$$

ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਨੂੰ $(n-r)\,(n-r-1)\ldots 3\times 2\times 1$, ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$${}^nP_r = \frac{n(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\ldots 3\times 2\times 1}{(n-r)(n-r-1)\ldots 3\times 2\times 1} = \frac{n!}{(n-r)!},$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\quad {}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$, ਜਿੱਥੇ $0 < r \le n$

ਇਹ ਵਿਅੰਜਕ, ਪਿਛਲੀ ${}^nP_r$ ਨਾਲੋਂ ਸੁਵਿਧਾਜਨਕ ਹੈ।

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜਦੋਂ $r = n$, ${}^nP_n = \frac{n!}{0!} = n!$

ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕੇਵਲ ਉਹਨਾਂ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕੋ ਸਮੇਂ ਦੌਰਾਨ ਕੁਝ ਜਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਫਿਰ ਤੋਂ ਤਰਤੀਬ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ। ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਸਤੂ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਤਰਤੀਬਵਾਰ, ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਉਸ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸਾਰੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਤਰਤੀਬਵਾਰ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰਨ ਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਤਰੀਕਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$${}^nP_0 = 1 = \frac{n!}{n!} = \frac{n!}{(n-0)!} \qquad \ldots (1)$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਸ ਲਈ, ਸੂਤਰ (1) $r = 0$ ਲਈ ਵੀ ਲਾਗੂ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $${}^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!},\ 0 \le r \le n$$

ਪ੍ਰਮੇਯ 2 : n ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਤੇ r ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਲਏ ਜਾਣ ਦੀ ਇਜਾਜ਼ਤ ਹੋਵੇ, n^r ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਦਾ ਸਬੂਤ ਪਿਛਲੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਸਬੂਤ ਵਰਗਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਪਾਠਕਾਂ ਲਈ ਛੱਡ ਰਹੇ ਹਾਂ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ${}^{n}P_{r}$ ਸੂਤਰ ਦੀ ਉਪਯੋਗਤਾ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰਨ ਲਈ ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਦੇ ਕੁਝ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਸੂਤਰ ਰਾਹੀਂ ਹਲ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 ਵਿੱਚ, ਲੋੜੀਂਦੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= {}^{n}P_{4} = 4! = 24$ ਹੈ, ਇੱਥੇ ਅੱਖਰਾਂ ਨੂੰ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਦੁਹਰਾਉਣ ਦੀ ਇਜਾਜ਼ਤ ਨਹੀਂ ਸੀ। ਜੇਕਰ ਅੱਖਰਾਂ ਨੂੰ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਦੁਹਰਾਉਣ ਦੀ ਇਜਾਜਤ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਲੋੜੀਂਦੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $4^4 = 256$ ਹੋਵੇਗੀ।

ਸ਼ਬਦ NUMBER ਤੋਂ ਤਿੰਨ ਅੱਖਰਾਂ ਨਾਲ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= {}^{6}P_{3} = \frac{6!}{3!} = 4 \times 5 \times 6 = 120$ ਹੋਵੇਗੀ, ਇੱਥੇ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅੱਖਰਾਂ ਨੂੰ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਲੈਣ ਦੀ ਇਜਾਜਤ ਨਹੀਂ। ਜੇਕਰ ਅੱਖਰ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਲੈਣ ਦੀ ਇਜਾਜਤ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਲੋੜੀਂਦੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $6^3 = 216$ ਹੋਵੇਗੀ।

12 ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਚੇਅਰਮੈਨ ਅਤੇ ਇੱਕ ਵਾਇਸ ਚੇਅਰਮੈਨ ਨੂੰ ਚੁਨਣ ਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ, ਇਹ ਮੰਨ ਕੇ ਕਿ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ ਇੱਕ ਹੀ ਅਹੁਦਾ ਮਿਲੇਗਾ, ਸਪੱਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ${}^{12}P_{2} = \frac{12!}{10!} = 11 \times 12 = 132$ ਹੋਵੇਗੀ।

7.3.4 ***ਕ੍ਰਮਸੰਚਣ ਜਦੋਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਨਹੀਂ ਹਨ (Permutations when all the objects are not distinct objects)*** ਮੰਨ ਲਓ ਅਸੀਂ ਸ਼ਬਦ ROOT ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦੇ ਫਿਰ ਤੋਂ ਤਰਤੀਬ ਕਰਨ ਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਸਾਰੇ ਅੱਖਰ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇੱਥੇ ਦੋ O ਹਨ ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਹੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਅੱਖਰ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਅਸਥਾਈ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੋਹਾਂ O ਨੂੰ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ O_1 ਅਤੇ O_2। ਹੁਣ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ 4 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਅੱਖਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਸਮੇਂ ਤੇ ਸਾਰੇ ਅੱਖਰ ਲੈਣ ਨਾਲ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 4! ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ RO_1O_2T ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇਸ ਦੇ ਸੰਗਤ ਇੱਥੇ 2 ! ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ RO_1O_2T ਅਤੇ RO_2O_1T ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਹਨ ਜੋ ਇੱਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਹੁੰਦੇ ਜੇਕਰ O_1 ਅਤੇ O_2 ਨੂੰ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਨਾ ਮੰਨਿਆ ਗਿਆ ਹੁੰਦਾ ਭਾਵ ਜੇਕਰ O_1 ਅਤੇ O_2 ਦੋਹਾਂ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਵਿੱਚ O ਹੁੰਦੇ। ਇਸ ਲਈ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ $= \frac{4!}{2!} = 3 \times 4 = 12$ । ਇਸ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਜਦੋਂ O_1, O_2 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਹਨ। ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਜਦੋਂ O_1, O_2, O ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

$$\left.\begin{matrix} RO_1O_2T \\ RO_2O_1T \end{matrix}\right] \longrightarrow \text{R O O T}$$

$$\left.\begin{matrix} TO_1O_2R \\ TO_2O_1R \end{matrix}\right] \longrightarrow \text{T O O R}$$

$$\left.\begin{matrix} R\,O_1T\,O_2 \\ R\,O_2T\,O_1 \end{matrix}\right] \longrightarrow \text{R O T O}$$

$$\left.\begin{matrix} T\,O_1R\,O_2 \\ T\,O_2R\,O_1 \end{matrix}\right] \longrightarrow \text{T O R O}$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

$$\left.\begin{array}{l} R\,T\,O_1\,O_2 \\ R\,T\,O_2\,O_1 \end{array}\right] \longrightarrow R\,T\,O\,O$$

$$\left.\begin{array}{l} T\,R\,O_1\,O_2 \\ T\,R\,O_2\,O_1 \end{array}\right] \longrightarrow T\,R\,O\,O$$

$$\left.\begin{array}{l} O_1\,O_2\,R\,T \\ O_2\,O_1\,T\,R \end{array}\right] \longrightarrow O\,O\,R\,T$$

$$\left.\begin{array}{l} O_1\,R\,O_2\,T \\ O_2\,R\,O_1\,T \end{array}\right] \longrightarrow O\,R\,O\,T$$

$$\left.\begin{array}{l} O_1\,T\,O_2\,R \\ O_2\,T\,O_1\,R \end{array}\right] \longrightarrow O\,T\,O\,R$$

$$\left.\begin{array}{l} O_1\,R\,T\,O_2 \\ O_2\,R\,T\,O_1 \end{array}\right] \longrightarrow O\,R\,T\,O$$

$$\left.\begin{array}{l} O_1\,T\,R\,O_2 \\ O_2\,T\,R\,O_1 \end{array}\right] \longrightarrow O\,T\,R\,O$$

$$\left.\begin{array}{l} O_1\,O_2\,T\,R \\ O_2\,O_1\,T\,R \end{array}\right] \longrightarrow O\,O\,T\,R$$

ਆਓ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸ਼ਬਦ INSTITUTE ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦੇ ਫਿਰ ਤੋਂ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੀਏ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ 9 ਅੱਖਰ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ I ਦੋ ਵਾਰ ਅਤੇ T ਤਿੰਨ ਵਾਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ।

ਅਸਥਾਈ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਅੱਖਰਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ I_1, I_2, T_1, T_2, T_3। 9 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਅੱਖਰਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਹੀ ਸਮੇਂ ਸਾਰਿਆਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 9! ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਮੰਨ ਲਓ $I_1\,NT_1\,SI_2\,T_2\,U\,E\,T_3$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇੱਥੇ ਜੇਕਰ I_1 ਅਤੇ I_2 ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਨਾ ਹੋਣ ਅਤੇ T_1, T_2, T_3 ਵੀ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਨਾ ਹੋਣ ਤੇ I_1, I_2 ਨੂੰ 2! ਢੰਗਾਂ (ਤਰੀਕਿਆਂ) ਨਾਲ ਤਰਤੀਬ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ T_1, T_2, T_3 ਨੂੰ 3! ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਤਰਤੀਬ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ I_1, I_2 ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਹੋਣ ਅਤੇ T_1, T_2, T_3 ਵੀ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਹੋਣ ਤਾਂ $2! \times 3!$ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪੁੱਛੇ ਗਏ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ $\frac{9!}{2!\,3!}$ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਬਿਨਾਂ ਸਬੂਤ ਦੇ) ਪਰਿਭਾਸ਼ਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਪ੍ਰਮੇਯ 3 : n ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ, ਜਿੱਥੇ p ਵਸਤੂਆਂ ਇੱਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਹੋਣ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਹੋਣ $= \frac{n!}{p!}$

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਸ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਆਪਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 4 : n ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ p_1 ਵਸਤੂਆਂ ਇੱਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ, p_2 ਵਸਤੂਆਂ ਦੂਸਰੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ..., p_k ਵਸਤੂਆਂ k^{th} ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਜੇ ਕੋਈ ਰਹਿ ਗਈ ਹੋਵੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਹੋਣ, $\frac{n!}{p_1!\,p_2!\ldots\,p_k!}$ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ALLAHABAD ਸ਼ਬਦ ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਤੋਂ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇਸ ਸ਼ਬਦ ਵਿੱਚ 9 ਅੱਖਰ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ A, 4 ਵਾਰ ਆਇਆ ਹੈ, L ਦੋ ਵਾਰ ਆਇਆ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਸਾਰੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ $= \dfrac{9!}{4!2!} = \dfrac{5\times6\times7\times8\times9}{2} = 7560$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : 1 ਤੋਂ 9 ਤੱਕ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ, 4 ਅੰਕਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਣਾਈਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾਉਣ ਦੀ ਇਜਾਜ਼ਤ ਨਾ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ, ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ 1234 ਅਤੇ 1324 ਦੋ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ 4 ਅੰਕਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 9 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਅੰਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਤੇ 4 ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 4 ਅੰਕਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ $= {}^9P_4 = \dfrac{9!}{(9-4)!} = \dfrac{9!}{5!} = 9\times8\times7\times6 = 3024$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : 100 ਤੋਂ 1000 ਤੱਕ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ, ਅੰਕਾਂ 0, 1, 2, 3, 4, 5, ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਣਾਈਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਲੈਣ ਦੀ ਇਜਾਜ਼ਤ ਨਾ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : 100 ਅਤੇ 1000 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਤਿੰਨਾ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਹੈ। ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ 6 ਅੰਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਤੇ 3 ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਸੰਖਿਆ ${}^6P_3$ ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹਨਾਂ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਵਿੱਚ ਉਹ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ 0 (ਸਿਫ਼ਰ) ਸੈਂਕੜੇ ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ 092, 042, . . ., ਆਦਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜੋ ਅਸਲ ਵਿੱਚ 2 ਅੰਕਾਂ ਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ 2 ਅੰਕੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ ${}^6P_3$ ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਉਣ ਪਵੇਗਾ। ਹੁਣ ਇਹਨਾਂ 2 ਅੰਕੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ 0 ਨੂੰ ਸੈਂਕੜੇ ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਸਥਿਰ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਬਾਕੀ 5 ਅੰਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਤੇ 2 ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੀਆਂ ਤਰਤੀਬਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਗਿਣਤੀ ${}^5P_2$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ $= {}^6P_3 - {}^5P_2 = \dfrac{6!}{3!} - \dfrac{5!}{3!}$

$$= 4\times5\times6 \;-\; 4\times5 = 100$$

ਉਦਾਹਰਣ 12 : n ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ :

(i) ${}^nP_5 = 42\ {}^nP_3,\ n > 4$ (ii) $\dfrac{{}^nP_4}{{}^{n-1}P_4} = \dfrac{5}{3},\ n > 4$

ਹੱਲ : (i) ਦਿੱਤਾ ਹੈ;

$${}^nP_5 = 42\ {}^nP_3$$

ਜਾਂ $n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4) = 42\,n(n-1)\,(n-2)$

ਕਿਉਂਕਿ $n > 4$ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $n(n-1)\,(n-2) \neq 0$

ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ $n(n-1)\,(n-2)$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$(n-3)\,(n-4) = 42$$

ਜਾਂ $n^2 - 7n - 30 = 0$

ਜਾਂ $n^2 - 10n + 3n - 30 = 0$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਜਾਂ $(n-10)(n+3)=0$

ਜਾਂ $n-10=0$ ਜਾਂ $n+3=0$

ਜਾਂ $n=10$ ਜਾਂ $n=-3$

ਕਿਉਂਕਿ n ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ, ਇਸ ਲਈ $n = 10$.

(ii) ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\frac{{}^{n}P_4}{{}^{n-1}P_4}=\frac{5}{3}$

ਇਸ ਲਈ $3n(n-1)(n-2)(n-3)=5(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$

ਜਾਂ $3n=5(n-4)$ [ਕਿਉਂਕਿ $(n-1)(n-2)(n-3)\neq 0, n>4$]

ਜਾਂ $n=10$

ਉਦਾਹਰਣ 13 : r ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $5\ {}^{4}P_r = 6\ {}^{5}P_{r-1}$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $5\ {}^{4}P_r = 6\ {}^{5}P_{r-1}$

ਜਾਂ $$5\times\frac{4!}{(4-r)!}=6\times\frac{5!}{(5-r+1)!}$$

ਜਾਂ $$\frac{5!}{(4-r)!}=\frac{6\times 5!}{(5-r+1)(5-r)(5-r-1)!}$$

ਜਾਂ $(6-r)(5-r)=6$

ਜਾਂ $r^2-11r+24=0$

ਜਾਂ $r^2-8r-3r+24=0$

ਜਾਂ $(r-8)(r-3)=0$

ਜਾਂ $r=8$ ਜਾਂ $r=3$

ਇਸ ਲਈ $r=8, 3$

ਉਦਾਹਰਣ 14 : DAUGHTER ਸ਼ਬਦ ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਤੋਂ 8 ਅੱਖਰਾਂ ਵਾਲੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰਤੀਬਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ

(i) ਸਾਰੇ ਸਵਰ (Vowels) ਇਕੱਠੇ ਹੋਣ (ii) ਸਾਰੇ ਸਵਰ (vowels) ਇਕੱਠੇ ਨਾ ਹੋਣ

ਹੱਲ : (i) ਸ਼ਬਦ DAUGHTER ਵਿੱਚ 8 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਅੱਖਰ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ A, U ਅਤੇ E ਤਿੰਨ ਸਵਰ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਰੇ ਸਵਰਾਂ ਨੇ ਇਕੱਠੇ ਰਹਿਣਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਕੁਝ ਸਮੇਂ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਇਕੱਠੇ ਇੱਕ ਵਸਤੂ (AUE) ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਇਕੱਲੀ ਵਸਤੂ ਬਾਕੀ 5 ਅੱਖਰਾਂ ਨਾਲ ਮਿਲ ਕੇ 6 ਵਸਤੂਆਂ (ਅੱਖਰ) ਹੋ ਜਾਣਗੇ। ਫਿਰ ਅਸੀਂ 6 ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਸਾਰਿਆਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ (Permutation) ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਗਿਣਤੀ ${}^{6}P_6 = 6!$ ਹੈ। ਇਸ ਹਰ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ (Permutation) ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਤਿੰਨ ਸਵਰ A, U, E ਵਿੱਚੋਂ ਸਾਰਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਲੈ ਕੇ 3! ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ (Permutation) ਬਣਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਗੁਣਨ ਸਿਧਾਂਤ ਅਨੁਸਾਰ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ (Permutation) ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ $= 6!\times 3! = 4320$ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ (Permutation) ਦੀ ਉਹ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸਾਰੇ ਸਵਰ ਇਕੱਠੇ ਨਹੀਂ ਹਨ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ 8 ਅੱਖਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਸਮੇਂ ਤੇ ਸਾਰੇ ਅੱਖਰਾਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਤਰਤੀਬਾਂ (arrangements) ਦੀ ਸੰਭਵ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਪਵੇਗੀ, ਜੋ ਕਿ 8! ਹੈ। ਫਿਰ ਇਸ ਗਿਣਤੀ ਵਿੱਚੋਂ ਅਸੀਂ ਸਾਰੇ ਸਵਰਾਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਰਹਿਣ ਨਾਲ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ (Permutation) ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ ਘਟਾਵਾਂਗੇ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ $8! - 6! \times 3! = 6!(7 \times 8 - 6)$

$= 2 \times 6!(28 - 3)$

$= 50 \times 6! = 50 \times 720 = 36000$

ਉਦਾਹਰਣ 15 : 4 ਲਾਲ, 3 ਪੀਲੀਆਂ ਅਤੇ 2 ਹਰੀਆਂ ਡਿਸਕਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪੰਗਤੀ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਤਰਤੀਬ (arrange) ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਹੀ ਰੰਗ ਦੀਆਂ ਡਿਸਕਾਂ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਅੰਤਰ (indistinguishable) ਨਾ ਹੋਵੇ ?

ਹੱਲ : ਡਿਸਕਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ 4 + 3 + 2 = 9 ਹੈ। ਇਹਨਾਂ 9 ਡਿਸਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 4 ਇੱਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ (ਲਾਲ), 3 ਦੂਸਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ (ਪੀਲੀਆਂ) ਅਤੇ 2 ਤੀਸਰੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ (ਹਰੀਆਂ) ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਡਿਸਕਾਂ ਨੂੰ ਤਰਤੀਬ (arrange) ਕਰਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $\frac{9!}{4!\,3!\,2!} = 1260$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16 : INDEPENDENCE ਸ਼ਬਦ ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਤੋਂ ਬਨਣ ਵਾਲੇ ਤਰਤੀਬਾਂ (arrangements) ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇਹਨਾਂ ਤਰਤੀਬਾਂ ਵਿੱਚ :

(i) ਕਿੰਨੇ ਸ਼ਬਦ P ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ?

(ii) ਕਿੰਨਿਆਂ ਵਿੱਚ ਸਾਰੇ ਸਵਰ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇਕੱਠੇ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ ?

(iii) ਕਿੰਨਿਆਂ ਵਿੱਚ ਸਵਰ ਕਦੇ ਵੀ ਇਕੱਠੇ ਨਹੀਂ ਰਹਿੰਦੇ ?

(iv) ਕਿੰਨੇ ਸ਼ਬਦ I ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਅਤੇ P ਨਾਲ ਖ਼ਤਮ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ?

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ 12 ਅੱਖਰ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ N, ਤਿੰਨ ਵਾਰ; E ਚਾਰ ਵਾਰ, ਅਤੇ D ਦੋ ਵਾਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਸਾਰੇ ਅੱਖਰ ਅਲੱਗ–ਅਲੱਗ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਤਰਤੀਬਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= \frac{12!}{3!\,4!\,2!} = 1663200$ ਹੈ।

(i) ਅਸੀਂ P ਨੂੰ ਖੱਬੇ ਹੱਥ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਸਥਿਰ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਫਿਰ ਬਾਕੀ 11 ਅੱਖਰਾਂ ਨਾਲ ਬਨਣ ਵਾਲੇ ਤਰਤੀਬਾਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ P ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= \frac{11!}{3!\,2!\,4!} = 138600$ ਹੈ।

(ii) ਦਿੱਤੇ ਸ਼ਬਦ ਵਿੱਚ 5 ਸਵਰ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ 4 ਵਾਰ E ਅਤੇ ਇੱਕ ਵਾਰ I ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਇਹਨਾਂ ਨੇ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇਕੱਠੇ ਰਹਿਣਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਕੁਝ ਸਮੇਂ ਵਾਸਤੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੀ ਵਸਤੂ $\boxed{\text{EEEEI}}$ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਇਕੱਲੀ ਵਸਤੂ ਬਾਕੀ 7 ਅੱਖਰਾਂ (ਵਸਤੂਆਂ) ਨਾਲ ਮਿਲ ਕੇ ਕੁੱਲ 8 ਵਸਤੂਆਂ ਹੋ ਜਾਣਗੀਆਂ। ਇਹਨਾਂ 8 ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚ 3 ਵਾਰ N ਅਤੇ 2 ਵਾਰ D ਹੈ, ਇਹ $\frac{8!}{3!\,2!}$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਫਿਰ ਤੋਂ ਤਰਤੀਬ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਹਰ ਇੱਕ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਸੰਗਤ, 5 ਸਵਰ E, E, E, E ਅਤੇ I, $\frac{5!}{4!}$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਤਰਤੀਬ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਗੁਣਨ ਸਿਧਾਂਤ ਤੋਂ ਲੋੜੀਂਦੇ ਤਰਤੀਬਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ

$= \frac{8!}{3!\,2!} \times \frac{5!}{4!} = 16800$ ਹੈ।

(iii) ਲੋੜੀਂਦੇ ਤਰਤੀਬਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = ਕੁੱਲ ਤਰਤੀਬਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ (ਬਿਨਾਂ ਕਿਸੇ ਬੰਦਿਸ਼ ਦੇ) – ਤਰਤੀਬਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸਾਰੇ ਸਵਰ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇਕੱਠੇ ਹੋਣ = 1663200 – 16800 = 1646400

(iv) ਆਓ I ਅਤੇ P ਨੂੰ ਸਿਰਿਆਂ ਤੇ (I ਨੂੰ ਖੱਬੇ ਅਤੇ P ਨੂੰ ਸੱਜੇ ਸਿਰੇ ਤੇ) ਸਥਿਰ ਕਰੀਏ। ਹੁਣ ਸਾਡੇ ਕੋਲ 10 ਅੱਖਰ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਤਰਤੀਬਾਂ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ $= \frac{10!}{3!\,2!\,4!} = 12600$ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

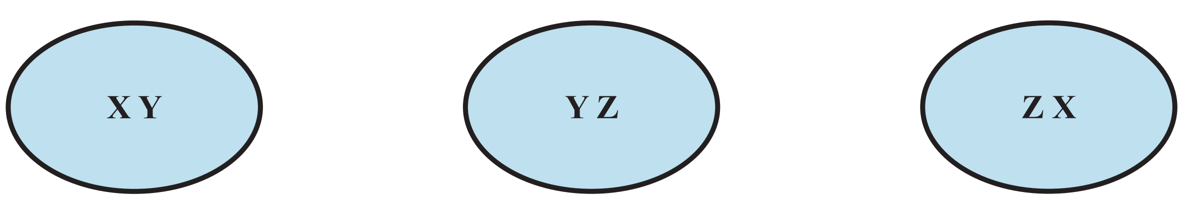
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਭਿਆਸ 7.3

1. 1 ਤੋਂ 9 ਤੱਕ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਣ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਅੰਕ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾਇਆ ਨਾ ਜਾਵੇ।
2. ਚਾਰ ਅੰਕਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੱਸੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਅੰਕ ਦੁਹਰਾਇਆ ਨਾ ਹੋਵੇ।
3. ਅੰਕਾਂ 1, 2, 3, 4, 6, 7 ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਣਾਈਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਵੀ ਅੰਕ ਦੁਹਰਾਇਆ ਨਾ ਜਾਵੇ।
4. ਅੰਕਾਂ 1, 2, 3, 4, 5 ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਕਿੰਨੀਆਂ 4 ਅੰਕਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਣਾਈਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਵੀ ਅੰਕ ਦੁਹਰਾਇਆ ਨਾ ਜਾਵੇ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਜਿਸਤ ਹੋਣਗੀਆਂ ?
5. 8 ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਸੰਮਤੀ ਵਿੱਚੋਂ, ਅਸੀਂ ਕਿੰਨੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਇੱਕ ਪ੍ਰਧਾਨ ਅਤੇ ਇੱਕ ਉਪ ਪ੍ਰਧਾਨ ਚੁਣ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਹੁਦੇ ਤੇ ਨਹੀਂ ਰਹਿ ਸਕਦਾ ?
6. n ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ${}^{n-1}P_3 : {}^{n}P_4 = 1 : 9$
7. r ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ (i) ${}^{5}P_r = 2\,{}^{6}P_{r-1}$ (ii) ${}^{5}P_r = {}^{6}P_{r-1}$
8. EQUATION ਸ਼ਬਦ ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਕਿੰਨੇ ਅਰਥਾਂ ਵਾਲੇ ਜਾਂ ਅਰਥਹੀਣ ਸ਼ਬਦ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜਦੋਂ ਹਰ ਇੱਕ ਅੱਖਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਵਾਰ ਹੀ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇ ?
9. ਬਿਨਾਂ ਕੋਈ ਅੱਖਰ ਦੁਹਰਾਏ, ਸ਼ਬਦ MONDAY ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਤੋਂ ਅਰਥਾਂ ਵਾਲੇ ਜਾਂ ਬਿਨਾਂ ਅਰਥਾਂ ਵਾਲੇ ਸ਼ਬਦ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ
   (i) ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਤੇ 4 ਅੱਖਰ ਲਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। (ii) ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਤੇ ਸਾਰੇ ਅੱਖਰ ਲਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।
   (iii) ਸਾਰੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਪਰ ਪਹਿਲਾਂ ਅੱਖਰ ਸਵਰ ਹੈ ?
10. MISSISSIPPI ਸ਼ਬਦ ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਤੋਂ ਬਣੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਵਿੱਚ, ਕਿੰਨਿਆਂ ਵਿੱਚ ਚਾਰੇ I ਇਕੱਠੇ ਨਹੀਂ ਆਉਂਦੇ ਹਨ ?
11. PERMUTATIONS ਸ਼ਬਦ ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਨੂੰ ਕਿੰਨੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਤਰਤੀਬ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ :
   (i) ਸ਼ਬਦ P ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਵੇ ਅਤੇ S ਨਾਲ ਖ਼ਤਮ ਹੋਵੇ
   (ii) ਸਾਰੇ ਸਵਰ ਇਕੱਠੇ ਹੋਣ
   (iii) P ਅਤੇ S ਵਿਚਕਾਰ ਹਮੇਸ਼ਾ 4 ਅੱਖਰ ਹੋਣ ?

7.4 ਸੰਯੋਜਨ (Combinations)

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਤਿੰਨ ਲਾਨ ਟੈਨਿਸ ਖਿਡਾਰੀਆਂ X, Y, Z ਦਾ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਇੱਕ ਟੀਮ ਜਿਸ ਵਿੱਚ 2 ਖਿਡਾਰੀ ਹੋਣ, ਬਣਾਈ ਜਾਣੀ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਕਿੰਨੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ? ਕੀ X ਅਤੇ Y ਦੀ ਟੀਮ, Y ਅਤੇ X ਦੀ ਟੀਮ ਤੋਂ ਭਿੰਨ (ਅਲੱਗ) ਹੈ ? ਇੱਥੇ ਕ੍ਰਮ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਟੀਮ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਕੇਵਲ ਤਿੰਨ ਹੀ ਸੰਭਵ ਤਰੀਕੇ ਹਨ। ਇਹ XY, YZ ਅਤੇ ZX ਹਨ। (ਚਿੱਤਰ 7.3)।



ਚਿੱਤਰ 7.3

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇੱਥੇ ਹਰ ਇੱਕ ਚੋਣ, ਤਿੰਨ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ 2 ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਸੰਯੋਜਨ (Combination) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਸੰਯੋਜਨ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਆਓ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਇੱਕ ਕਮਰੇ ਵਿੱਚ 12 ਵਿਅਕਤੀ ਮਿਲਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਹਰ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਬਾਕੀ ਸਾਰਿਆਂ ਨਾਲ ਹੱਥ ਮਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਹੱਥ ਮਿਲਾਉਣ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ ਅਸੀਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। X ਨੇ Y ਨਾਲ ਹੱਥ ਮਿਲਾਇਆ ਅਤੇ Y ਨੇ X ਨਾਲ ਹੱਥ ਮਿਲਾਇਆ, ਦੋ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਹੱਥ ਮਿਲਾਉਣਾ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇੱਥੇ ਕ੍ਰਮ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਹੱਥ ਮਿਲਾਉਣ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ ਉਂਨੀ ਹੀ ਹੈ ਜਿੰਨੀ 12 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਸਮੇਂ ਤੇ 2 ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ।

ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਤੇ 7 ਬਿੰਦੂ ਸਥਿਤ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ 2 ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਕੇ ਕਿੰਨੀਆਂ ਜੀਵਾਵਾਂ ਖਿੱਚੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ ? ਇੱਥੇ ਜੀਵਾਵਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ ਉਂਨੀ ਹੀ ਹੈ, ਜਿੰਨੀ 7 ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਸਮੇਂ ਤੇ 2 ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ n ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਸਮੇਂ ਤੇ r ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਚਿੰਨ੍ਹ ${}^nC_r$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ, ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸੂਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਮੰਨ ਲਓ ਸਾਡੇ ਕੋਲ 4 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤਾਂ A, B, C ਅਤੇ D ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸਮੇਂ 2 ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਸੰਯੋਜਨ ਬਣਾਈਏ ਤਾਂ ਇਹ AB, AC, AD, BC, BD, CD ਹਨ। ਇੱਥੇ AB ਅਤੇ BA ਇੱਕ ਹੀ ਸੰਯੋਜਨ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ ਵਸਤੂਆਂ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਸੰਯੋਜਨ ਨੂੰ ਪਰਵਰਤਿਤ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ। ਇਹੀ ਕਾਰਨ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਸੂਚੀ ਵਿੱਚ BA, CA, DA, CB, DB ਅਤੇ DC ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 4 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਸਮੇਂ ਤੇ 2 ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 6 ਹੈ, ਭਾਵ ${}^4C_2 = 6$

ਇਸ ਸੂਚੀ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਸੰਯੋਜਨ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਾਨੂੰ 2! ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਮਿਲ ਸਕਦੇ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀਆਂ 2 ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ 2! ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਫਿਰ ਤੋਂ ਤਰਤੀਬ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= {}^4C_2 \times 2!$

ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ 4 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਸਮੇਂ ਤੇ 2 ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= {}^4P_2$

ਇਸ ਲਈ $\qquad {}^4P_2 = {}^4C_2 \times 2! \quad$ ਜਾਂ $\quad \dfrac{4!}{(4-2)!\,2!} = {}^4C_2$

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਸਾਡੇ ਕੋਲ 5 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ A, B, C, D, E ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਸਮੇਂ ਤੇ 3 ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸੰਯੋਜਨ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਹ ABC, ABD, ABE, BCD, BCE, CDE, ACE, ACD, ADE, BDE ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ${}^5C_3$ ਸੰਯੋਜਨ ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਦੇ ਸੰਗਤ 3! ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀਆਂ ਤਿੰਨ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ 3! ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਫਿਰ ਤੋਂ ਤਰਤੀਬ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ $= {}^5C_3 \times 3!$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\quad {}^5P_3 = {}^5C_3 \times 3! \quad$ or $\quad \dfrac{5!}{(5-3)!\,3!} = {}^5C_3$

ਇਹ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਅਤੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੇ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ ਸੁਝਾਉਣ ਵਾਲੀ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਿੰਦੇ ਹਨ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 5 : ${}^nP_r = {}^nC_r \; r!,\; 0 < r \le n$

ਸਬੂਤ : ਹਰ ਇੱਕ ਸੰਯੋਜਨ ${}^nC_r$ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਾਡੇ ਕੋਲ $r\,!$ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀਆਂ r ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ $r\,!$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਫਿਰ ਤੋਂ ਤਰਤੀਬ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ n ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ r ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਲੈਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ${}^nC_r \times r!$ ਹੈ। ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ ਇਹ ${}^nP_r$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$ {}^nP_r = {}^nC_r \times r!,\; 0 < r \le n . $$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਟਿੱਪਣੀ **1.** ਉੱਪਰ ਤੋਂ $\frac{n!}{(n-r)!} = {}^nC_r \times r!$, ਭਾਵ ${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ $r = n$, ${}^nC_n = \frac{n!}{n!\ 0!} = 1$

2. ਅਸੀਂ ${}^nC_0 = 1$, ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਭਾਵ n ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਵਸਤੂ ਲਏ ਬਿਨਾਂ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 1 ਮੰਨੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨ ਤੋਂ ਭਾਵ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਜਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਹੀ ਸਮੇਂ ਚੋਣ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਕੁਝ ਵੀ ਨਾ ਚੋਣ ਕਰਨ ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਸਾਰੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਪਿੱਛੇ ਛੱਡਣਾ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ${}^nC_0 = 1$ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

3. ਕਿਉਂਕਿ $\frac{n!}{0!(n-0)!} = 1 = {}^nC_0$, ਇਸ ਲਈ ਸੂਤਰ ${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, $r = 0$ ਲਈ ਵੀ ਠੀਕ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$${}^nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!},\ 0 \le r \le n.$$

4.
$${}^nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!r!} = {}^nC_r,$$

ਭਾਵ, n ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ r ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰਨੀ, $(n - r)$ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਅਸਵੀਕਾਰ ਕਰਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

5. ${}^nC_a = {}^nC_b \Rightarrow a = b$ ਜਾਂ $a = n - b$, ਭਾਵ, $n = a + b$

ਪ੍ਰਮੇਯ 6 : ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

ਸਬੂਤ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ : ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$

$$= \frac{n!}{r\times(r-1)!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)\,(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right]$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \times \frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)} = \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} = {}^{n+1}C_r$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 17 : ਜੇਕਰ ${}^nC_9 = {}^nC_8$, ਹੋਵੇ ਤਾਂ ${}^nC_{17}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ${}^nC_9 = {}^nC_8$

ਭਾਵ, $$\frac{n!}{9!(n-9)!} = \frac{n!}{(n-8)!\,8!}$$

ਜਾਂ $$\frac{1}{9} = \frac{1}{n-8} \quad \text{ਜਾਂ} \quad n - 8 = 9 \quad \text{ਜਾਂ} \quad n = 17$$

ਇਸ ਲਈ ${}^nC_{17} = {}^{17}C_{17} = 1$

ਉਦਾਹਰਣ 18 : 2 ਆਦਮੀਆਂ ਅਤੇ 3 ਔਰਤਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚੋਂ 3 ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਸਮਿਤੀ ਬਣਾਈ ਜਾਣੀ ਹੈ। ਇਹ ਕਿੰਨੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ ? ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸਮਿਤੀਆਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਹਨ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਮਰਦ ਅਤੇ 2 ਔਰਤਾਂ ਹੋਣ ?

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਕ੍ਰਮ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨੀ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਸਮਿਤੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਉਂਨੀ ਹੀ ਹੈ ਜਿੰਨੀ 5 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਤੇ 3 ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਨਣ ਵਾਲੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਮਿਤੀ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ ${}^5C_3 = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{4\times5}{2} = 10$

ਹੁਣ 2 ਆਦਮੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਆਦਮੀ ਦੀ ਚੋਣ ${}^2C_1$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਅਤੇ 2 ਔਰਤਾਂ ਦੀ 3 ਔਰਤਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਚੋਣ ${}^3C_2$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਮਿਤੀਆਂ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ ${}^2C_1 \times {}^3C_2 = \frac{2!}{1!\,1!} \times \frac{3!}{2!\,1!} = 6$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 19 : ਤਾਸ਼ ਦੀ ਗੱਠੀ ਦੇ 52 ਪੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 4 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਚੋਣ ਕਿੰਨੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ ? ਇਹਨਾਂ ਤਰੀਕਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ, ਕਿੰਨੇ ਵਿੱਚ :

(i) ਚਾਰੇ ਪੱਤੇ ਇੱਕ ਹੀ ਸੂਟ ਦੇ ਹਨ ?

(ii) ਚਾਰੇ ਪੱਤੇ ਚਾਰ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸੂਟਾਂ ਦੇ ਹਨ।

(iii) ਤਸਵੀਰਾਂ ਹਨ ?

(iv) ਦੋ ਪੱਤੇ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੇ ਅਤੇ ਦੋ ਪੱਤੇ ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦੇ ਹਨ ?

(v) ਸਾਰੇ ਪੱਤੇ ਇੱਕ ਹੀ ਰੰਗ ਦੇ ਹਨ।

ਹੱਲ : 52 ਪੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 4 ਪੱਤਿਆਂ ਨੂੰ ਚੁਨਣ ਦੇ ਉਨੇ ਹੀ ਤਰੀਕੇ ਹਨ ਜਿੰਨੇ 52 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਤੇ ਚਾਰ ਵਸਤੂਆਂ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸੰਯੋਜਨ।

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= {}^{52}C_4 = \frac{52!}{4!\,48!} = \frac{49\times50\times51\times52}{2\times3\times4} = 270725$

(i) ਤਾਸ਼ ਦੀ ਗੱਠੀ ਵਿੱਚ 4 ਸੂਟਾਂ ਦੇ ਪੱਤੇ ਹਨ, ਇੱਟ, ਚਿੜੀ, ਹੁਕਮ, ਪਾਨ ਅਤੇ ਹਰ ਇੱਕ ਦੇ 13 ਪੱਤੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ 4 ਇੱਟ ਦੇ ਪੱਤੇ ਚੁਨਣ ਦੇ ${}^{13}C_4$ ਤਰੀਕੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਚਾਰ ਚਿੜੀ ਦੇ ਪੱਤੇ ਚੁਨਣ ਦੇ ${}^{13}C_4$, 4 ਹੁਕਮ ਦੇ ਪੱਤੇ ਚੁਨਣ ਦੇ ${}^{13}C_4$ ਅਤੇ ਚਾਰ ਪਾਨ ਦੇ ਪੱਤੇ ਚੁਨਣ ਦੇ ${}^{13}C_4$ ਤਰੀਕੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ $= {}^{13}C_4 + {}^{13}C_4 + {}^{13}C_4 + {}^{13}C_4$

$$= 4 \times \frac{13!}{4!\,9!} = 2860 \text{ ਹੈ।}$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

(ii) ਹਰ ਇੱਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ 13 ਪੱਤੇ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਇੱਟ ਦੇ 13 ਪੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪੱਤਾ ਚੁਨਣ ਦੇ $^{13}C_1$ ਤਰੀਕੇ ਹਨ, ਪਾਨ ਦੇ 13 ਪੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 1 ਚੁਨਣ ਦੇ $^{13}C_1$, ਚਿੜੀ ਦੇ 13 ਪੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 1 ਪੱਤਾ ਚੁਨਣ ਦੇ ਤਰੀਕੇ $^{13}C_1$ ਅਤੇ ਹੁਕਮ ਦੇ 13 ਪੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 1 ਪੱਤਾ ਚੁਨਣ ਦੇ ਤਰੀਕੇ $^{13}C_1$ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਗੁਣਨ ਸਿਧਾਂਤ ਤੋਂ, ਲੋੜੀਂਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ

$= {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 = 13^4$ ਹੈ।

(iii) ਤਾਸ਼ ਦੀ ਗੱਠੀ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ 12 ਤਸਵੀਰਾਂ ਵਾਲੇ ਪੱਤੇ ਹਨ, ਇਹਨਾਂ 12 ਵਿੱਚੋਂ 4 ਪੱਤੇ ਚੁਨਣੇ ਹਨ। ਇਸਨੂੰ $^{12}C_4$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ $= \dfrac{12!}{4!\ 8!} = 495$

(iv) ਗੱਠੀ ਵਿੱਚ 26 ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੇ ਅਤੇ 26 ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦੇ ਪੱਤੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= {}^{26}C_2 \times {}^{26}C_2$

$$= \left(\frac{26!}{2!\ 24!}\right)^2 = (325)^2 = 105625$$

(v) 26 ਲਾਲ ਪੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 4 ਲਾਲ ਪੱਤੇ ਚੁਨਣ ਦੇ $^{26}C_4$ ਤਰੀਕੇ ਹਨ। 26 ਕਾਲੇ ਪੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 4 ਕਾਲੇ ਪੱਤੇ ਚੁਨਣ ਦੇ $^{26}C_4$ ਤਰੀਕੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= {}^{26}C_4 + {}^{26}C_4 = 2\times\dfrac{26!}{4!\ 22!} = 29900$ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 7.4

1. ਜੇਕਰ $^nC_8 = {}^nC_2$, ਤਾਂ $^nC_2$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2. n ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ :

(i) $^{2n}C_3 : {}^nC_3 = 12 : 1$

(ii) $^{2n}C_3 : {}^nC_3 = 11 : 1$

3. ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਤੇ ਸਥਿਤ 21 ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਵਤਰਾਂ (ਜੀਵਾਵਾਂ) ਖਿੱਚੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ ?

4. 5 ਲੜਕੇ ਅਤੇ 4 ਲੜਕੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 3 ਲੜਕੇ ਅਤੇ 3 ਲੜਕੀਆਂ ਦੀਆਂ ਟੀਮਾਂ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਤਰੀਕੇ ਹਨ।

5. 6 ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀਆਂ, 5 ਸਫੈਦ ਰੰਗ ਦੀਆਂ ਅਤੇ 5 ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 9 ਗੇਂਦਾਂ ਨੂੰ ਚੁਨਣ ਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਹਰ ਇੱਕ ਸੰਗ੍ਰਹਿ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਰੰਗ ਦੀਆਂ 3 ਗੇਂਦਾਂ ਹੋਣ।

6. 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਗੱਠੀ ਵਿੱਚੋਂ 5 ਪੱਤੇ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਹਰ ਇੱਕ ਸੰਯੋਜਨ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਤੇ ਸਿਰਫ ਇੱਕ ਇੱਕਾ (ਯੱਕਾ) ਹੋਵੇ।

7. 17 ਖਿਡਾਰੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ 5 ਖਿਡਾਰੀ ਗੇਂਦਬਾਜੀ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ, 11 ਖਿਡਾਰੀਆਂ ਦੀ ਚੋਣ ਕਿੰਨੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਹਰ ਇੱਕ ਟੀਮ ਵਿੱਚ ਸਿਰਫ ਅਤੇ ਸਿਰਫ 4 ਗੇਂਦਬਾਜ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੋਣ ?

8. ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ 5 ਕਾਲੀਆਂ ਅਤੇ 6 ਲਾਲ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ, 2 ਕਾਲੀਆਂ ਅਤੇ 3 ਲਾਲ ਗੇਂਦਾਂ ਦੀ ਚੋਣ ਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9. 9 ਉਪਲਬਧ ਪਾਠਕ੍ਰਮਾਂ ਵਿੱਚੋਂ, ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ 5 ਪਾਠਕ੍ਰਮਾਂ ਦੀ ਚੋਣ ਕਿੰਨੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਹਰ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਲਈ 2 ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਪਾਠਕ੍ਰਮ ਜਰੂਰੀ ਹੋਣ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 20 : ਸ਼ਬਦ INVOLUTE ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਤੋਂ 3 ਸਵਰਾਂ ਅਤੇ 2 ਵਿਅੰਜਨਾਂ ਵਾਲੇ ਅਰਥਪੂਰਨ ਜਾਂ ਅਰਥਹੀਣ ਕਿੰਨੇ ਸ਼ਬਦ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਸ਼ਬਦ INVOLUTE ਵਿੱਚ 4 ਸਵਰ I,O,E,U ਅਤੇ 4 ਵਿਅੰਜਨ N, V, L ਅਤੇ T ਹਨ।

4 ਵਿੱਚੋਂ 3 ਸਵਰ ਚੁਨਣ ਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = ${}^4C_3 = 4$

4 ਵਿੱਚੋਂ 2 ਵਿਅੰਜਨ ਚੁਨਣ ਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = ${}^4C_2 = 6$

ਇਸ ਲਈ 3 ਸਵਰ ਅਤੇ 2 ਵਿਅੰਜਨ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $4 \times 6 = 24$ ਹੈ।

ਹੁਣ ਇਹਨਾਂ 24 ਸੰਯੋਜਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਵਿੱਚ 5 ਅੱਖਰ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ 5! ਢੰਗਾਂ ਨਾਲ ਤਰਤੀਬ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ $24 \times 5\,! = 2880$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 21 : ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ 4 ਲੜਕੀਆਂ ਅਤੇ 7 ਲੜਕੇ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ 5 ਮੈਂਬਰਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਟੀਮ ਦੀ ਚੋਣ ਕਿੰਨੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜੇਕਰ ਟੀਮ ਵਿੱਚ (i) ਇੱਕ ਵੀ ਲੜਕੀ ਨਹੀਂ ਹੈ (ii) ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਲੜਕਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਲੜਕੀ ਹੈ। (iii) ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 3 ਲੜਕੀਆਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : (i) ਕਿਉਂਕਿ ਟੀਮ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਲੜਕੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਨਹੀਂ, ਇਸ ਲਈ ਕੇਵਲ ਲੜਕਿਆਂ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰਨੀ ਹੈ। 7 ਲੜਕਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 5 ਲੜਕਿਆਂ ਦੀ ਚੋਣ ${}^7C_5$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ = ${}^7C_5 = \frac{7!}{5!\ 2!} = \frac{6 \times 7}{2} = 21$ ਹੈ।

(ii) ਕਿਉਂਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਟੀਮ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਲੜਕਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਲੜਕੀ ਹੋਵੇ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਟੀਮ ਦੀ ਚੋਣ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਵੇਗੀ :

(a) 1 ਲੜਕਾ ਅਤੇ 4 ਲੜਕੀਆਂ (b) 2 ਲੜਕੇ ਅਤੇ 3 ਲੜਕੀਆਂ

(c) 3 ਲੜਕੇ ਅਤੇ 2 ਲੜਕੀਆਂ (d) 4 ਲੜਕੇ ਅਤੇ 1 ਲੜਕੀ।

1 ਲੜਕਾ ਅਤੇ 4 ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਚੋਣ ${}^7C_1 \times {}^4C_4$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

2 ਲੜਕੇ ਅਤੇ 3 ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਚੋਣ ${}^7C_2 \times {}^4C_3$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

3 ਲੜਕੇ ਅਤੇ 2 ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਚੋਣ ${}^7C_3 \times {}^4C_2$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

4 ਲੜਕੇ ਅਤੇ 1 ਲੜਕੀ ਦੀ ਚੋਣ ${}^7C_4 \times {}^4C_1$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ

$= {}^7C_1 \times {}^4C_4 + {}^7C_2 \times {}^4C_3 + {}^7C_3 \times {}^4C_2 + {}^7C_4 \times {}^4C_1$

$= 7 + 84 + 210 + 140 = 441$ ਹੈ।

(iii) ਕਿਉਂਕਿ ਟੀਮ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 3 ਲੜਕੀਆਂ ਹੋਣੀਆਂ ਚਾਹੀਦੀਆਂ ਹਨ, ਟੀਮ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣ ਸਕਦੀ ਹੈ :

(a) 3 ਲੜਕੀਆਂ ਅਤੇ 2 ਲੜਕੇ ਜਾਂ (b) 4 ਲੜਕੀਆਂ ਅਤੇ 1 ਲੜਕਾ

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਟੀਮ ਵਿੱਚ ਸਾਰੀਆਂ 5 ਲੜਕੀਆਂ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਕਿਉਂਕਿ ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਕੇਵਲ 4 ਹੈ।

3 ਲੜਕੀਆਂ ਅਤੇ 2 ਲੜਕਿਆਂ ਦੀ ਚੋਣ ${}^4C_3 \times {}^7C_2$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।

4 ਲੜਕੀਆਂ ਅਤੇ 1 ਲੜਕੇ ਦੀ ਚੋਣ ${}^4C_4 \times {}^7C_1$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ

$= {}^4C_3 \times {}^7C_2 + {}^4C_4 \times {}^7C_1 = 84 + 7 = 91$ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 22 : AGAIN ਸ਼ਬਦ ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਤੋਂ ਅਰਥਪੂਰਣ ਜਾਂ ਅਰਥਹੀਣ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਣ ਵਾਲੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਜੇਕਰ ਇਹਨਾਂ ਸ਼ਬਦਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾਵੇ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ 50 ਵਾਂ ਸ਼ਬਦ ਕੀ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਸ਼ਬਦ AGAIN ਵਿੱਚ 5 ਅੱਖਰ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ A ਦੋ ਵਾਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ $= \frac{5!}{2!} = 60$ ਹੈ।

A ਅੱਖਰ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ A ਨੂੰ ਖੱਬੇ ਹੱਥ ਪਹਿਲੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਸਥਿਰ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ, ਫਿਰ ਅਸੀਂ ਬਾਕੀ ਰਹਿੰਦੇ ਚਾਰ ਅੱਖਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਾਰਿਆਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਫਿਰ ਤੋਂ ਤਰਤੀਬ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਤਰਤੀਬਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਉਨੀ ਹੀ ਹੈ, ਜਿੰਨੀ 4 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕੋ ਸਮੇਂ ਸਾਰਿਆਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਇਸ ਲਈ A ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $4! = 24$ ਹੈ। ਫਿਰ G ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= \frac{4!}{2!} = 12$ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ G ਨੂੰ ਸਭ ਤੋਂ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਪਹਿਲੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਸਥਿਰ ਕਰਨ ਨਾਲ ਸਾਡੇ ਕੋਲ A, A, I ਅਤੇ N ਬਾਕੀ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ I ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 12 ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੁਣ ਤੱਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= 24 + 12 + 12 = 48$ ਹੈ, ਹੁਣ 49ਵਾਂ ਸ਼ਬਦ NAAGI ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 50ਵਾਂ ਸ਼ਬਦ NAAIG ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 23 : ਅੰਕਾਂ 1, 2, 0, 2, 4, 2, 4 ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ 1000000 ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੀਆਂ (ਵੱਡੀਆਂ) ਕਿੰਨੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਣਾਈਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ 1000000 ਇੱਕ 7 ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਵੀ 7 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਕੇਵਲ 7 ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਹੀ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇਗੀ। ਕਿਉਂਕਿ ਸੰਖਿਆ ਦਾ 1000000 ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ 1, 2 ਜਾਂ 4 ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਵੇਗੀ।

1 ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਵਾਲੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= \frac{6!}{3!\,2!} = \frac{4\times5\times6}{2} = 60$ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਜਦੋਂ 1 ਨੂੰ ਸਭ ਤੋਂ ਖੱਬੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਸਥਿਰ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਫਿਰ ਬਾਕੀ ਅੰਕਾਂ 0, 2, 2, 2, 4, 4, ਨੂੰ ਫਿਰ ਤੋਂ ਤਰਤੀਬ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੰਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ 3 ਵਾਰ 2 ਅਤੇ 2 ਵਾਰ 4 ਆਉਂਦਾ ਹੈ।

2 ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਵਾਲੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= \frac{6!}{2!\,2!} = \frac{3\times4\times5\times6}{2} = 180$ ਹੈ। 4 ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਵਾਲੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= \frac{6!}{3!} = 4\times5\times6 = 120$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਗਿਣਤੀ $= 60 + 180 + 120 = 360$ ਹੈ।

ਵਿਕਲਪਿਕ ਵਿਧੀ

7 ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਤਰਤੀਬਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ $\frac{7!}{3!\,2!} = 420$ ਹੈ, ਪਰ ਇਸ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ 0 ਪਹਿਲੇ ਖੱਬੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਤਰਤੀਬਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $\frac{6!}{3!\,2!}$ (0 ਨੂੰ ਬਿਲਕੁਲ ਖੱਬੇ ਪਹਿਲੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਰੱਖਣ 'ਤੇ) $= 60$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= 420 - 60 = 360$ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਟਿੱਪਣੀ ਜੇਕਰ ਦਿੱਤੀ ਸੂਚੀ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਜਾਂ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅੰਕ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਆਉਂਦੇ ਭਾਵ ਦੁਹਰਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਇਹ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਉੱਨੀ ਹੀ ਵਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੰਨੀ ਵਾਰ ਉਹ ਸੂਚੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਉੱਪਰਲੀ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ 1 ਅਤੇ 0 ਨੂੰ ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਵਾਰ ਵਰਤਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਦ ਕਿ 2 ਅਤੇ 4 ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 3 ਵਾਰੀ ਅਤੇ 2 ਵਾਰੀ ਵਰਤਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 24 : 5 ਲੜਕੀਆਂ ਅਤੇ 3 ਲੜਕਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪੰਗਤੀ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਬਠਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕੋਈ ਵੀ ਦੋ ਲੜਕੇ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਨਾ ਬੈਠਣ (ਬਹਿਣ)।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ 5 ਲੜਕੀਆਂ ਨੂੰ ਬਿਠਾ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ, ਇਹ ਅਸੀਂ 5! ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਹਰ ਇੱਕ ਤਰਤੀਬ ਲਈ, ਤਿੰਨ ਲੜਕਿਆਂ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਗੁਣਾ ਦੇ ਦਰਸਾਏ ਨਿਸ਼ਾਨ ਤੇ ਬਿਠਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ

$$\times G \times G \times G \times G \times G \times$$

ਗੁਣਾਂ ਦੇ ਨਿਸ਼ਾਨ ਨਾਲ ਦਰਸਾਏ 6 ਸਥਾਨਾਂ ਤੇ 3 ਲੜਕਿਆਂ ਨੂੰ $^6P_3$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਬਿਠਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਗੁਣਨ ਸਿਧਾਂਤ ਤੋ, ਇਹਨਾਂ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ

$$= 5! \times {}^6P_3 = 5! \times \frac{6!}{3!}$$

$$= 4 \times 5 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 14400$$

ਅਧਿਆਇ 7 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. DAUGHTER ਸ਼ਬਦ ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਤੋਂ ਕਿੰਨੇ ਅਰਥਪੂਰਨ ਜਾਂ ਅਰਥਹੀਣ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਜਦਕਿ ਹਰ ਸ਼ਬਦ ਵਿੱਚ 2 ਸਵਰ ਅਤੇ 3 ਵਿਅੰਜਨ ਹੋਣ ?
2. ਸ਼ਬਦ EQUATION ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੱਖਰਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕੋ ਸਮੇਂ ਲੈ ਕੇ ਕਿੰਨੇ ਅਰਥਪੂਰਨ ਜਾਂ ਅਰਥਹੀਣ ਸ਼ਬਦ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜਦੋਂ ਸਵਰ ਅਤੇ ਵਿਅੰਜਨ ਇਕੱਠੇ ਆਉਣ ?
3. 9 ਲੜਕੇ ਅਤੇ 4 ਲੜਕੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 7 ਦੀ ਇੱਕ ਸੰਮਤੀ ਬਣਾਈ ਜਾਣੀ ਹੈ। ਇਹ ਕਿੰਨੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਬਣਾਈ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਸੰਮਤੀ ਵਿੱਚ :

   (i) ਸਿਰਫ਼ 3 ਲੜਕੀਆਂ ਹੋਣ (ii) ਘੱਟੋ-ਘੱਟ 3 ਲੜਕੀਆਂ ਹੋਣ (iii) ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 3 ਲੜਕੀਆਂ ਹੋਣ।
4. ਜੇਕਰ ਸ਼ਬਦ EXAMINATION ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੱਖਰਾਂ ਨਾਲ ਬਣੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਨੂੰ ਸ਼ਬਦਕੋਸ਼ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੂਚੀਬੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ E ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਪਹਿਲੇ ਸ਼ਬਦ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕਿੰਨੇ ਸ਼ਬਦ ਹਨ ?
5. ਅੰਕਾਂ 0, 1, 3, 5, 7 ਅਤੇ 9 ਨਾਲ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਬਿਨਾਂ ਦੁਹਰਾਏ 6 ਅੰਕਾਂ ਦੀਆਂ 10 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੋਣ ਵਾਲੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਣਾਈਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ ?
6. ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਵਿੱਚ 5 ਸਵਰ ਅਤੇ 21 ਵਿਅੰਜਨ ਹਨ। ਦੋ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸਵਰਾਂ ਅਤੇ ਦੋ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਿਅੰਜਨਾਂ ਨਾਲ, ਇਸ ਵਰਣਮਾਲਾ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿੰਨੇ ਸ਼ਬਦ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ ?
7. ਕਿਸੇ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੇ ਇੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਪੱਤਰ ਵਿੱਚ 12 ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹਨ, ਜੋ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 5 ਅਤੇ 7 ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਾਲੇ ਦੋ ਭਾਗਾਂ ਭਾਵ ਭਾਗ I ਅਤੇ ਭਾਗ II ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਹੈ। ਇੱਕ ਪ੍ਰੀਖਿਆਰਥੀ ਨੂੰ ਹਰ ਇੱਕ ਭਾਗ ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 3 ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਕੁੱਲ 8 ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਕਿੰਨੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ ?
8. 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਗੱਠੀ ਵਿੱਚੋਂ 5 ਪੱਤਿਆਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ 5 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਹਰ ਇੱਕ ਚੋਣ ਵਿੱਚ ਸਿਰਫ ਇੱਕ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਹੋਵੇ ?
9. 5 ਪੁਰਸ਼ਾਂ ਅਤੇ 4 ਔਰਤਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪੰਗਤੀ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿਠਾਇਆ ਜਾਣਾ ਹੈ ਕਿ ਔਰਤਾਂ ਜਿਸਤ ਸਥਾਨਾਂ ਤੇ ਬੈਠਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਤਰਤੀਬਾਂ ਸੰਭਵ ਹਨ ?

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

10. 25 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚੋਂ 10 ਦੀ ਚੋਣ ਇੱਕ ਸੈਰ ਸਪਾਟਾ ਪਾਰਟੀ ਦੇ ਲਈ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। 3 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੇ ਇਹ ਫੈਸਲਾ ਕੀਤਾ ਹੈ ਕਿ ਜਾਂ ਤਾਂ ਉਹ ਤਿੰਨੇ ਦਲ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੋਣਗੇ, ਜਾਂ ਤਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਦਲ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਸੈਰ ਸਪਾਟਾ ਪਾਰਟੀ ਦਲ ਦੀ ਚੋਣ ਕਿੰਨੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ?

11. ਸ਼ਬਦ ASSASSINATION ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦੇ ਕਿੰਨੀਆਂ ਤਰਤੀਬਾਂ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਸਾਰੇ S ਇਕੱਠੇ ਰਹਿਣ ?

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਗਣਨਾ ਦਾ ਮੂਲਭੂਤ ਸਿਧਾਂਤ (Fundamental Principle of Counting) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਘਟਨਾ m ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਘੱਟਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਉਪਰੰਤ ਦੂਸਰੀ ਘਟਨਾ n ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਘੱਟਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਘਟਨਾ ਘਟਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $m \times n$ ਹੈ।
- n ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ r ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ, ਜਦਕਿ ਦੁਹਰਾਏ ਜਾਣ ਦੀ ਇਜਾਜ਼ਤ ਨਹੀਂ ਹੈ ਨੂੰ ${}^nP_r$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ${}^nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$, ਜਿੱਥੇ $0 \le r \le n$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$
- $n! = n \times (n-1)\,!$
- n ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਤੇ r ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ n^r ਹੈ, ਜਦੋਂ ਦੁਹਰਾਏ ਜਾਣ ਦੀ ਇਜਾਜ਼ਤ ਹੈ।
- n ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਾਰਿਆਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠੇ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $\dfrac{n!}{p_1!\,p_2!...\,p_k!}$ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ p_1 ਵਸਤੂਆਂ ਇੱਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ, p_2 ਵਸਤੂਆਂ ਦੂਸਰੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ, ... p_k ਵਸਤੂਆਂ kਵੇਂ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਸਾਰੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ, ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਹੈ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਹਨ।
- n ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਤੇ r ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ ${}^nC_r$ ਨਾਲ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, $0 \le r \le n$

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਅਤੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਜੈਨ ਧਰਮ ਅਤੇ ਸੰਭਾਵੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇਸ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੋਈ ਹੈ। ਫਿਰ ਵੀ ਇਸਦਾ ਸਿਹਰਾ ਜੈਨੀਆਂ ਨੂੰ ਹੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੇ 'ਵਿਕਲਪ' ਨਾਮ ਦੇ ਤਹਿਤ ਇਸਦੇ ਵਿਸ਼ਾ ਵਸਤੂ ਨੂੰ ਗਣਿਤ ਦੇ ਸਵੈ-ਸੰਪੰਨ ਵਿਸ਼ੇ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਕਸਿਤ ਕੀਤਾ।

ਜੈਨੀਆਂ ਵਿੱਚ ਮਹਾਂਵੀਰ (ਸੰਨ 850 ਈ. ਦੇ ਲਗਭਗ) ਸੰਭਾਵੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵਿਸ਼ਵ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸ਼ਤਰੀ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਅਤੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੇ ਸੂਤਰਾਂ ਨੂੰ ਦੇ ਕੇ ਸਰਾਹਨਾ ਭਰਪੂਰ ਕੰਮ ਕੀਤਾ।

ਈਸਾ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ 6 ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਵਿੱਚ, Sushruta ਨੇ ਆਪਣੇ ਔਸ਼ਧੀ ਵਿਗਿਆਨ ਦੇ ਕੰਮ ਦੀ ਸੁਪਰਸਿੱਧ ਪੁਸਤਕ 'Sushruta Samhita' ਦੇ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਕਿ 6 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਰਸਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਇੱਕ, ਦੋ .... ਆਦਿ ਲੈ ਕੇ 63 ਸੰਯੋਜਨ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਈਸਾ ਤੋਂ ਤਿੰਨ ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਪਹਿਲਾਂ ਸੰਸਕ੍ਰਿਤ ਦੇ ਵਿਦਵਾਨ Pingala" ਨੇ ਆਪਣੇ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਕੰਮ "Chhandra Sutra" ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੱਖਰਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ, ਦੋ ... ਆਦਿ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਬਾਰੇ ਵਰਣਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਭਾਸਕਰਾਚਾਰਿਆ (ਜਨਮ 1114 ਈ:) ਨੇ ਆਪਣੀ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਪੁਸਤਕ ਲੀਲਾਵਤੀ ਵਿੱਚ 'Anka

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Pasha' (ਅੰਕ ਪਾਸ) ਨਾਮ ਹੇਠਾਂ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਅਤੇ ਸੰਯੋਜਨ ਤੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਕੰਮ ਕੀਤਾ। ਮਹਾਂਵੀਰ ਦੁਆਰਾ ${}^nC_r$ ਅਤੇ ${}^nP_r$ ਦੇਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸੂਤਰਾਂ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਭਸਕਰਾਚਾਰਯ ਨੇ ਵਿਸ਼ੇ ਪ੍ਰਤੀ ਅਨੇਕਾਂ ਪ੍ਰਮੇਯ ਅਤੇ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦਾ ਜਿਕਰ ਕੀਤਾ ਹੈ।

ਭਾਰਤ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਅਤੇ ਸੰਯੋਜਨ ਸੰਬੰਧੀ ਵਿਸ਼ਾ ਵਸਤੂ ਦੇ ਕੰਮ ਦਾ ਸ਼ੁਭ ਅਰੰਭ ਚੀਨੀ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸ਼ਤਰੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਪੁਸਤਕ I–King ਵਿੱਚ ਵਰਣਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਕੰਮ ਦਾ ਅੰਦਾਜਨ ਸਮਾਂ ਦੱਸਣਾ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ 213 ਈਸਵੀ ਪੂਰਵ ਵਿੱਚ ਉਸ ਸਮੇਂ ਦੇ ਸਮਰਾਟ ਨੇ ਆਦੇਸ਼ ਦਿੱਤਾ ਸੀ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਅਤੇ ਹੱਥ ਲਿਖਤ ਪਾਂਡੂਲਿਪੀਆਂ ਸਾੜ ਦਿੱਤੀਆਂ ਜਾਣ। ਸੌਭਾਗ ਨਾਲ ਇਸਦਾ ਪੂਰਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਾਲਣ ਨਹੀਂ ਹੋਇਆ। ਯੂਨਾਨੀ ਅਤੇ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਲੈਟਿਨ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸ਼ਤਰੀਆਂ ਨੇ ਵੀ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਅਤੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਤੇ ਕੁੱਛ ਛਿਟਪੁਟ ਕੰਮ ਕੀਤੇ ਹਨ।

ਕੁਝ ਅਰਬੀ ਅਤੇ ਹੇਬ੍ਰੋ ਲੇਖਕਾਂ ਨੇ ਵੀ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਅਤੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀਆਂ ਸੰਕਲਪਨਾਵਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਜੋਤਿਸ਼ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਲਈ ਕੀਤੀ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ : Rabbi ben Ezra ਨੇ ਜਿਹੜੇ ਗ੍ਰਹਿ ਪਤਾ ਸਨ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਇੱਕ, ਦੋ ... ਆਦਿ ਲੈ ਕੇ ਬਣਾਏ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕੀਤੀ। ਇਹ ਕੰਮ 1140 ਈਸਵੀ ਪੂਰਵ ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ Robbi ben Ezra ਨੂੰ ${}^nC_r$ ਦਾ ਸੂਤਰ ਪਤਾ ਨਹੀਂ ਸੀ, ਫਿਰ ਵੀ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇਹ ਪਤਾ ਸੀ ਕਿ n ਅਤੇ r ਦੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ ${}^nC_r = {}^nC{n-r}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਸੰਤ 1321 ਈ ਵਿੱਚ ਹੀਬਰੂ ਲੇਖਕ Levi Ben Gerson ਨੇ ${}^nP_r$, ${}^nP_n$ ਦੇ ਸੂਤਰਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ${}^nC_r$ ਦੇ ਵਿਆਪਕ ਸੂਤਰਾਂ ਨੂੰ ਦੱਸਿਆ।

Ars Conjectandi, ਪਹਿਲੀ ਕਿਤਾਬ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਅਤੇ ਸੰਯੋਜਨ ਵਿਸ਼ੇ ਤੇ ਪੂਰਣ ਅਤੇ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਕੰਮ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਲੇਖਕ ਸਿਵਸ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ *Jacob Bernoulli* (1654 – 1705 ਈ) ਹਨ। ਇਸਦਾ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਨ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਮੌਤ ਤੋਂ ਬਾਅਦ 1713 ਈ. ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ। ਇਸ ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਅਤੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਦਾ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਵਰਣਨ ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਅੱਜ-ਕੱਲ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਧਿਆਇ 8

ਦੋ ਪਦੀ ਪਰਿਮੇਯ
(Binomial Theorem)

❖*Mathematics is a most exact science ਅਤੇ its conclusions are capable of absolute proofs. – C.P. STEINMETZ*❖

8.1 ਭੂਮਿਕਾ

Blaise Pascal
(1623-1662)

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ $a + b$ ਅਤੇ $a - b$ ਵਰਗੀਆਂ ਦੋ ਪਦੀਆਂ ਦਾ ਵਰਗ ਅਤੇ ਘਣ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਅਤੇ ਘਣਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(98)^2 = (100 - 2)^2$, $(999)^3 = (1000 - 1)^3$ ਆਦਿ ਅਤੇ ਫਿਰ ਵੀ, ਵੱਡੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(98)^5$, $(101)^6$ ਆਦਿ ਦੀ ਗਣਨਾ ਲਈ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਕਾਫ਼ੀ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਨੂੰ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ (Binomial Theorem) ਦੁਆਰਾ ਦੂਰ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਇਸ ਨਾਲ $(a + b)^n$ ਜਿੱਥੇ n ਸੰਪੂਰਨ ਜਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਨੂੰ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਖੋਜਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੇਵਲ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਹੀ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

8.2 ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਘਾਤ ਲਈ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ (Binomial Theorem for Positive Integral Indices)

ਆਉ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਪੜ੍ਹੀਆਂ ਇਹਨਾਂ ਸਰਵਸਮਤਾਵਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ

$$(a+b)^0 = 1 \qquad a + b \neq 0$$
$$(a+b)^1 = a + b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = (a+b)^3\,(a+b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਸਾਰਾਂ (expansions) ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

(i) ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ, ਘਾਤ ਤੋਂ 1 ਵੱਧ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $(a + b)^2$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਤਿੰਨ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ $(a + b)^2$ ਦੀ ਘਾਤ 2 ਹੈ।

(ii) ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੇ ਪਦ (ਰਾਸ਼ੀ) 'a' ਦੀ ਘਾਤ 1 ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਨਾਲ ਘੱਟਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਦੂਸਰੇ ਪਦ (ਰਾਸ਼ੀ) 'b' ਦੀ ਘਾਤ 1 ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਨਾਲ ਵੱਧਦੀ ਹੈ, ਹਰ ਇੱਕ ਅੱਗੇ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਪਦ ਲਈ।

(iii) ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਪਦ ਵਿੱਚ a ਅਤੇ b ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਇੱਕੋ-ਜਿਹਾ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ $a + b$ ਦੀ ਘਾਤ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ $a + b$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤਰਤੀਬ ਕਰਦੇ ਹਾਂ (ਚਿੱਤਰ 8.1)

ਘਾਤ ਅੰਕ					ਗੁਣਾਂਕ				
0					1				
1				1		1			
2			1		2		1		
3		1		3		3		1	
4	1		4		6		4		1

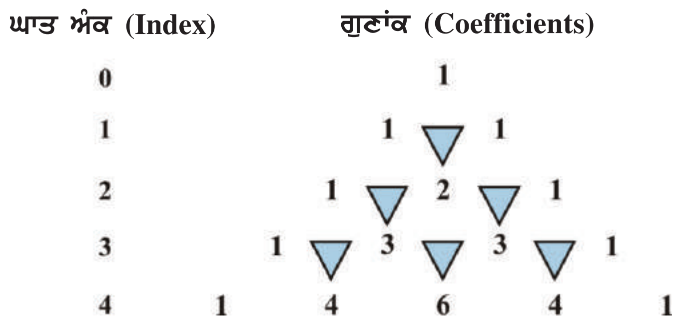
ਚਿੱਤਰ 8.1

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਕੀ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਨਮੂਨਾ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਸਾਨੂੰ ਅਗਲੀ ਪੰਗਤੀ ਲਿਖਣ ਵਿੱਚ ਮਦਦ ਕਰੇ ? ਹਾਂ, ਇਹ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਘਾਤ 1 ਦੀ ਪੰਗਤੀ ਵਿੱਚ ਲਿਖੇ 1 ਅਤੇ 1 ਦਾ ਜੋੜ ਘਾਤ 2 ਦੀ ਪੰਗਤੀ ਲਈ 2 ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਘਾਤ 2 ਦੀ ਪੰਗਤੀ ਵਿੱਚ ਲਿਖੇ 1, 2 ਲਈ ਅਤੇ 2, 1 ਦਾ ਜੋੜ ਘਾਤ 3 ਦੀ ਪੰਗਤੀ ਦੇ ਲਈ 3 ਅਤੇ 3 ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵੀ ਘਾਤ 3 ਦੀ ਪੰਗਤੀ ਲਈ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵੀ ਹਰ ਇੱਕ ਪੰਗਤੀ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂ ਅਤੇ ਖ਼ਤਮ ਹੋਣ ਤੇ 1 ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਇੱਛਾ ਅਨੁਸਾਰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਘਾਤ ਦੇ ਲਈ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 8.2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਨਮੂਨੇ ਨੂੰ ਕੁਝ ਹੋਰ ਪੰਗਤੀਆਂ ਲਿਖ ਕੇ ਅੱਗੇ ਵਧਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 8.2

ਪਾਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ (Pascal's Triangle)

ਚਿੱਤਰ 8.2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਨਮੂਨਾ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿਖਾਈ ਦਿੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਉਪਰਲੇ ਸਿਰੇ ਤੇ 1 ਹੈ ਅਤੇ ਦੋ ਤਿਰਛੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨਾਲ ਥੱਲੇ ਨੂੰ ਆ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਇਸ ਰਚਨਾ ਨੂੰ ਪਾਸਕਲ ਦੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ, ਇਹ ਨਾਮ ਫਰਾਂਸੀਸੀ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸ਼ਤਰੀ Blaise Pascal ਦੇ ਨਾਮ ਤੋਂ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਪਿੰਗਲ ਦਾ ਮੇਰੂ ਪਰਾਸਤਾਰਾ (Meru Prastara) ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਦੋ ਪਦੀ ਦੀਆਂ ਵੱਡੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵੀ ਪਾਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਸੰਭਵ ਹੈ। ਆਉ $(2x + 3y)^5$ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਕਰੀਏ 1 ਘਾਤ 5 ਨਾਲ ਪੰਗਤੀ ਹੈ :

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

ਇਸ ਪੰਗਤੀ ਅਤੇ ਉੱਪਰ (i), (ii) ਅਤੇ (iii) ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਜਾਂ ਸਿਟਿਆਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਸਾਨੂੰ

$$(2x + 3y)^5 = (2x)^5 + 5(2x)^4 (3y) + 10(2x)^3 (3y)^2 + 10 (2x)^2 (3y)^3 + 5(2x)(3y)^4 + (3y)^5$$

$$= 32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810xy^4 + 243y^5$$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ $(2x + 3y)^{12}$ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਪਹਿਲਾਂ ਘਾਤ ਅੰਕ 12 ਲਈ ਪੰਗਤੀ ਲਿਖਣੀ ਪਵੇਗੀ। ਇਸ ਨੂੰ ਪਾਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਘਾਤ 12 ਤੱਕ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਪੰਗਤੀਆਂ ਲਿਖ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਵੱਡੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਲਈ ਲੰਬੀ ਅਤੇ ਕਠਿਨ ਹੋਵੇਗੀ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇੱਕ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਨਿਯਮ ਲੱਭਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਨਾਲ ਪਾਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਵਾਲੀ ਪੰਗਤੀ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਪੰਗਤੀਆਂ ਲਿਖੇ ਬਿਨਾਂ ਹੀ ਦੋ ਪਦੀ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਘਾਤ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਹੋ ਸਕੇ।

ਇਸਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ, ਪਾਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਫਿਰ ਤੋਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, $0 \le r \le n$ ਅਤੇ n ਇੱਕ ਅ-ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਪਾਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ (ਚਿੱਤਰ 8.3) ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਘਾਤ ਅੰਕ (Index)	ਗੁਣਾਂਕ (Coefficients)					
0	${}^0C_0$ (=1)					
1	${}^1C_0$ (=1)	${}^1C_1$ (=1)				
2	${}^2C_0$ (=1)	${}^2C_1$ (=2)	${}^2C_2$ (=1)			
3	${}^3C_0$ (=1)	${}^3C_1$ (=3)	${}^3C_2$ (=3)	${}^3C_3$ (=1)		
4	${}^4C_0$ (=1)	${}^4C_1$ (=4)	${}^4C_2$ (=6)	${}^4C_3$ (=4)	${}^4C_4$ (=1)	
5	${}^5C_0$ (=1)	${}^5C_1$ (=5)	${}^5C_2$ (=10)	${}^5C_3$ (=10)	${}^5C_4$ (=5)	${}^5C_5$ (=1)

ਚਿੱਤਰ 8.3 ਪਾਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ

ਉਪਰੋਕਤ ਨਮੂਨੇ ਨੂੰ ਦੇਖਦੇ ਹੋਏ, ਪਹਿਲਾਂ ਦੀਆਂ ਪੰਗਤੀਆਂ ਲਿਖੇ ਬਿਨਾਂ ਹੀ ਅਸੀਂ ਪਾਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਕਿਸੇ ਵੀ ਘਾਤ ਲਈ ਪੰਗਤੀ ਨੂੰ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਘਾਤ 7 ਲਈ ਪੰਗਤੀ

$${}^7C_0 \quad {}^7C_1 \quad {}^7C_2 \quad {}^7C_3 \quad {}^7C_4 \quad {}^7C_5 \quad {}^7C_6 \quad {}^7C_7 \text{ ਹੋਵੇਗੀ।}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਸ ਪੰਗਤੀ ਅਤੇ ਸਿੱਟਿਆਂ (i), (ii) ਅਤੇ (iii) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਸਾਨੂੰ

$(a + b)^7 = {}^7C_0\, a^7 + {}^7C_1 a^6 b + {}^7C_2 a^5 b^2 + {}^7C_3 a^4 b^3 + {}^7C_4 a^3 b^4 + {}^7C_5 a^2 b^5 + {}^7C_6 ab^6 + {}^7C_7 b^7$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਸਿੱਟਿਆਂ ਨੂੰ ਦੇਖਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਦੋ ਪਦੀ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਘਾਤ n ਲਈ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦਿਖਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਦੋ ਪਦੀ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਘਾਤ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਨੂੰ ਲਿਖਣ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਹਾਂ।

8.2.1 *ਕਿਸੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਲਈ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ (Binomial theorem for any positive integer n)*

$$(a + b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} b + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + \ldots + {}^nC_{n-1} a.b^{n-1} + {}^nC_n b^n$$

ਸਬੂਤ : ਇਸ ਪਰਿਮੇਯ ਦਾ ਸਬੂਤ ਗਣਿਤਿਕ ਨਿਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਕਥਨ P(n) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ :

$$P(n) : (a + b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} b + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + \ldots + {}^nC_{n-1} a.b^{n-1} + {}^nC_n b^n$$

$n = 1$ ਲਈ

$$P(1) : (a + b)^1 = {}^1C_0 a^1 + {}^1C_1 b^1 = a + b$$

ਇਸ ਲਈ P(1) ਸੱਚ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿਸੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ k ਲਈ P(k) ਸੱਚ (ਠੀਕ) ਹੈ,

ਭਾਵ $(a + b)^k = {}^kC_0 a^k + {}^kC_1 a^{k-1} b + {}^kC_2 a^{k-2} b^2 + \ldots + {}^kC_k b^k \qquad \ldots (1)$

ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ P(k + 1) ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ, ਭਾਵ

$$(a + b)^{k+1} = {}^{k+1}C_0\, a^{k+1} + {}^{k+1}C_1\, a^k b + {}^{k+1}C_2\, a^{k-1} b^2 + \ldots + {}^{k+1}C_{k+1}\, b^{k+1}$$

ਹੁਣ $(a + b)^{k+1} = (a + b)(a + b)^k$

$= (a + b)\left({}^kC_0\, a^k + {}^kC_1 a^{k-1} b + {}^kC_2\, a^{k-2} b^2 + \ldots + {}^kC_{k-1}\, ab^{k-1} + {}^kC_k\, b^k\right)$ [(1) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ]

$= {}^kC_0\, a^{k+1} + {}^kC_1\, a^k b + {}^kC_2 a^{k-1} b^2 + \ldots + {}^kC_{k-1}\, a^2 b^{k-1} + {}^kC_k\, ab^k + {}^kC_0\, a^k b$

$+ {}^kC_1 a^{k-1} b^2 + {}^kC_2 a^{k-2} b^3 + \ldots + {}^kC_{k-1} ab^k + {}^kC_k b^{k+1}$ [ਅਸਲ ਗੁਣਾ ਨਾਲ]

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

$$= {}^kC_0a^{k+1} + ({}^kC_1+{}^kC_0)\, a^kb + ({}^kC_2+{}^kC_1)a^{k-1}b^2 + \ldots + ({}^kC_k+{}^kC_{k-1})\, ab^k + {}^kC_kb^{k+1}$$

[ਇੱਕੋ-ਜਿਹੇ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਕਰਕੇ]

$$= {}^{k+1}C_0a^{k+1} + {}^{k+1}C_1a^kb + {}^{k+1}C_2\,a^{k-1}b^2 + \ldots + {}^{k+1}C_kab^k + {}^{k+1}C_{k+1}\,b^{k+1}$$

(${}^{k+1}C_0=1,\ {}^kC_r + {}^kC_{r-1} = {}^{k+1}C_r$ ਅਤੇ ${}^kC_k = 1 = {}^{k+1}C_{k+1}$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਹੋ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਜਦੋਂ P(k) ਸੱਚ (ਠੀਕ) ਹੈ ਤਾਂ P(k + 1) ਵੀ ਸੱਚ (ਠੀਕ) ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਗਣਿਤਿਕ ਨਿਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਤੋਂ P(n) ਹਰ ਇੱਕ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਲਈ ਸੱਚ (ਠੀਕ) ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਅਸੀਂ $(x + 2)^6$ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਕਰਕੇ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਾਂਗੇ :

$$(x + 2)^6 = {}^6C_0x^6 + {}^6C_1x^5.2 + {}^6C_2x^42^2 + {}^6C_3x^3.2^3 + {}^6C_4x^2.2^4 + {}^6C_5x.2^5 + {}^6C_6.2^6$$

$$= x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$$

ਇਸ ਲਈ $(x + 2)^6 = x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$

ਸਿੱਟੇ (Observations)

1. ਸੰਕੇਤ $\sum_{k=0}^{n} {}^nC_k\, a^{n-k}b^k$ ਤੋਂ ਭਾਵ

   ${}^nC_0a^nb^0 + {}^nC_1a^{n-1}b^1 + \ldots + {}^nC_ra^{n-r}b^r + \ldots + {}^nC_na^{n-n}b^n$ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $b^0 = 1 = a^{n-n}$

   ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k\, a^{n-k}b^k$$

2. ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ (coefficients) ${}^nC_r$ ਨੂੰ ਦੋ ਪਦੀ ਗੁਣਾਂਕ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
3. $(a+b)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ (n + 1) ਭਾਵ ਘਾਤ ਅੰਕ ਤੋਂ ਇੱਕ ਵੱਧ ਹੋਵੇਗੀ।
4. ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਅੱਗੇ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ a ਦੀ ਘਾਤ 1 ਨਾਲ ਘੱਟਦੀ ਜਾਵੇਗੀ। ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਵਿੱਚ ਇਹ n ਦੂਸਰੇ ਵਿੱਚ (n–1) ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵੀ ਅੰਤਿਮ ਪਦ ਵਿੱਚ ਇਹ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸੇ ਸਮੇਂ ਹੀ b ਦੀ ਘਾਤ ਇੱਕ ਨਾਲ ਵੱਧਦੀ ਜਾਵੇਗੀ। ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਵਿੱਚ 0 ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋ ਕੇ, ਦੂਸਰੇ ਵਿੱਚ 1 ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵੀ, ਅੰਤਿਮ ਪਦ ਵਿੱਚ ਇਹ n ਹੋਵੇਗੀ।
5. $(a+b)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ, a ਅਤੇ b ਦੇ ਘਾਤ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਵਿੱਚ $n + 0 = n$ ਦੂਸਰੇ ਪਦ ਵਿੱਚ $(n - 1) + 1 = n$ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਗਲੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਅੰਤਿਮ ਪਦ ਵਿੱਚ $0 + n = n$ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ a ਅਤੇ b ਦੇ ਘਾਤ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਪਦ ਵਿੱਚ n ਹੋਵੇਗਾ।

8.2.2 *$(a + b)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਥਿਤੀਆਂ (Some special cases)*

(i) $a = x$ ਅਤੇ $b = -y$ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ

$$(x - y)^n = [x + (-y)]^n$$

$$= {}^nC_0x^n + {}^nC_1x^{n-1}(-y) + {}^nC_2x^{n-2}(-y)^2 + {}^nC_3x^{n-3}(-y)^3 + \ldots + {}^nC_n\,(-y)^n$$

$$= {}^nC_0x^n - {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}y^2 - {}^nC_3x^{n-3}y^3 + \ldots + (-1)^n\,{}^nC_n\,y^n$$

ਇਸ ਲਈ $(x - y)^n = {}^nC_0x^n - {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}\,y^2 + \ldots + (-1)^n\,{}^nC_n\,y^n$

ਇਸ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ

$$(x - 2y)^5 = {}^5C_0x^5 - {}^5C_1x^4\,(2y) + {}^5C_2x^3\,(2y)^2 - {}^5C_3x^2\,(2y)^3 + {}^5C_4\,x(2y)^4 - {}^5C_5(2y)^5$$

$$= x^5 - 10x^4y + 40x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 - 32y^5$$

(ii) $a = 1$ ਅਤੇ $b = x$ ਲੈ ਕੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$(1 + x)^n = {}^nC_0(1)^n + {}^nC_1(1)^{n-1}x + {}^nC_2(1)^{n-2}\,x^2 + \ldots + {}^nC_nx^n$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

$$= {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + {}^nC_3x^3 + ... + {}^nC_nx^n$$

ਇਸ ਲਈ $(1 + x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + {}^nC_3x^3 + ... + {}^nC_nx^n$

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ $x = 1$ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$2^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + ... + {}^nC_n$$

(iii) $a = 1$ ਅਤੇ $b = -x$ ਲੈਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$(1-x)^n = {}^nC_0 - {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 - ... + (-1)^n\, {}^nC_nx^n$$

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ $x = 1$ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$0 = {}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - ... + (-1)^n\, {}^nC_n$$

ਉਦਾਹਰਣ 1 : $\left(x^2+\frac{3}{x}\right)^4$, $x \neq 0$ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$\left(x^2+\frac{3}{x}\right)^4 = {}^4C_0(x^2)^4 + {}^4C_1(x^2)^3\left(\frac{3}{x}\right) + {}^4C_2(x^2)^2\left(\frac{3}{x}\right)^2 + {}^4C_3(x^2)\left(\frac{3}{x}\right)^3 + {}^4C_4\left(\frac{3}{x}\right)^4$$

$$= x^8 + 4.x^6 \,.\, \frac{3}{x} + 6.x^4 \,.\, \frac{9}{x^2} + 4.x^2.\frac{27}{x^3} + \frac{81}{x^4}$$

$$= x^8 + 12x^5 + 54x^2 + \frac{108}{x} + \frac{81}{x^4}$$

ਉਦਾਹਰਣ 2 : $(98)^5$ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ 98 ਨੂੰ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਜਾਂ ਅੰਤਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਾਂਗੇ, ਜਿਨ੍ਹਾ ਦਾ ਘਾਤ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਅਸਾਨ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਫਿਰ ਅਸੀਂ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਾਂਗੇ।

$98 = (100 - 2)$ ਲਿਖੋ

ਹੁਣ $(98)^5 = (100 - 2)^5$

$$= {}^5C_0\,(100)^5 - {}^5C_1\,(100)^4.2 + {}^5C_2\,(100)^3 2^2 - {}^5C_3\,(100)^2\,(2)^3 + {}^5C_4\,(100)\,(2)^4 - {}^5C_5\,(2)^5$$

$$= 10000000000 - 5 \times 100000000 \times 2 + 10 \times 1000000 \times 4 - 10 \times 10000 \times 8 + 5 \times 100 \times 16 - 32$$

$$= 10040008000 - 1000800032 = 9039207968$$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : $(1.01)^{1000000}$ ਜਾਂ 10,000 ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਸੰਖਿਆ ਵੱਡੀ ਹੈ ?

ਹੱਲ : 1.01 ਨੂੰ ਦੋ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਕੇ ਅਤੇ ਫਿਰ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਪਹਿਲੇ ਕੁਝ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖ ਕੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$(1.01)^{1000000} = (1 + 0.01)^{1000000}$$

$$= {}^{1000000}C_0 + {}^{1000000}C_1(0.01) + \text{ਹੋਰ ਧਨਾਤਮਕ ਪਦ}$$

$$= 1 + 1000000 \times 0.01 + \text{ਹੋਰ ਧਨਾਤਮਕ ਪਦ}$$

$$= 1 + 10000 + \text{ਹੋਰ ਧਨਾਤਮਕ ਪਦ}$$

$$> 10000$$

ਇਸ ਲਈ $(1.01)^{1000000} > 10000$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $6^n - 5n$ ਨੂੰ ਜਦੋਂ 25 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਹਮੇਸ਼ਾ 1 ਬਾਕੀ ਬੱਚਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਲਈ, ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ q ਅਤੇ r ਲੱਭ ਸਕੀਏ ਤਾਂ ਜੋ $a = bq + r$, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ a ਨੂੰ b ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ q ਭਾਗਫਲ ਅਤੇ r ਬਾਕੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿ $6^n - 5n$ ਨੂੰ 25 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ 'ਤੇ 1 ਬਾਕੀ ਬੱਚਦਾ ਹੈ, ਸਾਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਪਵੇਗਾ, $6^n - 5n = 25k + 1$, ਜਿੱਥੇ k ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ

$$(1 + a)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 a + {}^nC_2 a^2 + \dots + {}^nC_n a^n$$

$a = 5$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

$$(1 + 5)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 5 + {}^nC_2 5^2 + \dots + {}^nC_n 5^n$$

ਜਾਂ $\quad (6)^n = 1 + 5n + 5^2.{}^nC_2 + 5^3.{}^nC_3 + \dots + 5^n$

ਜਾਂ $\quad 6^n - 5n = 1 + 5^2\,({}^nC_2 + {}^nC_3 5 + \dots + 5^{n-2})$

ਜਾਂ $\quad 6^n - 5n = 1 + 25\,({}^nC_2 + 5\,.{}^nC_3 + \dots + 5^{n-2})$

ਜਾਂ $\quad 6^n - 5n = 25k + 1$ ਜਿੱਥੇ $k = {}^nC_2 + 5\,.{}^nC_3 + \dots + 5^{n-2}$.

ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ $6^n - 5n$ ਨੂੰ 25 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਬਾਕੀ 1 ਬੱਚਦਾ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 8.1

ਅਭਿਆਸ 1 ਤੋਂ 5 ਤੱਕ ਹਰ ਇੱਕ ਵਿਅੰਜਕ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਕਰੋ :

1. $(1 - 2x)^5$ **2.** $\left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right)^5$ **3.** $(2x - 3)^6$ **4.** $\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{x}\right)^5$

5. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$

ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

6. $(96)^3$ **7.** $(102)^5$ **8.** $(101)^4$ **9.** $(99)^5$

10. ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਦੱਸੋ ਕਿ $(1.1)^{10000}$ ਅਤੇ 1000 ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਸੰਖਿਆ ਵੱਡੀ ਹੈ।

11. $(a + b)^4 - (a - b)^4$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^4 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^4$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ?

12. $(x + 1)^6 + (x - 1)^6$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਜਾਂ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ $(\sqrt{2} + 1)^6 + (\sqrt{2} - 1)^6$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

13. ਦਿਖਾਉ ਕਿ $9^{n+1} - 8n - 9$, 64 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

14. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\sum_{r=0}^{n} 3^r\, {}^nC_r = 4^n$

8.3 ਆਮ ਜਾਂ ਵਿਆਪਕ ਅਤੇ ਮੱਧ ਪਦ (General and Middle Terms)

1. ਦੋ ਪਦੀ $(a + b)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲਾ ਪਦ ${}^nC_0 a^n$, ਦੂਸਰਾ ਪਦ ${}^nC_1 a^{n-1} b$, ਤੀਸਰਾ ਪਦ ${}^nC_2 a^{n-2} b^2$ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵੀ। ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਪਦਾਂ ਦੇ ਨਮੂਨੇ ਨੂੰ ਦੇਖਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $(r + 1)$ਵਾਂ ਪਦ ${}^nC_r a^{n-r} b^r$ ਹੋਵੇਗਾ। $(r + 1)$ਵਾਂ ਪਦ ਨੂੰ ਅਸੀਂ $(a + b)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਪਦ ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਨੂੰ T_{r+1} ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $T_{r+1} = {}^nC_r\, a^{n-r} b^r$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

2. $(a + b)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੇ ਮੱਧ ਪਦ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ :

(i) ਜੇਕਰ n ਜਿਸਤ ਹੈ, ਤਾਂ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $n + 1$ ਹੋਵੇਗੀ। ਕਿਉਂਕਿ n ਜਿਸਤ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $n + 1$ ਟਾਂਕ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ ਮੱਧ ਪਦ $\left(\frac{n+1+1}{2}\right)$ਵਾਂ ਭਾਵ $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ਵਾਂ ਪਦ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $(x + 2y)^8$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਮੱਧ ਪਦ $\left(\frac{8}{2}+1\right)$ਵਾਂ ਭਾਵ 5ਵਾਂ ਪਦ ਹੋਵੇਗਾ।

(ii) ਜੇਕਰ n ਟਾਂਕ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $n + 1$ ਜਿਸਤ ਹੋਵੇਗਾ, ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਦੋ ਮੱਧ ਪਦ ਹੋਣਗੇ, ਜੋ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ਵਾਂ ਅਤੇ $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$ਵਾਂ ਪਦ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(2x - y)^7$, ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿਚੱ ਦੋ ਮੱਧ ਪਦ ਹਨ ਜਿਹੜੇ ਕਿ $\left(\frac{7+1}{2}\right)$ਵਾਂ ਭਾਵ 4 ਅਤੇ $\left(\frac{7+1}{2}+1\right)$ਵਾਂ ਭਾਵ 5ਵਾਂ ਪਦ ਹਨ।

3. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$, ਜਿੱਥੇ $x \neq 0$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $\left(\frac{2n+1+1}{2}\right)$ਵਾਂ ਪਦ, ਮੱਧ ਪਦ ਹੈ ਭਾਵ $(n + 1)$ਵਾਂ ਪਦ, ਕਿਉਂਕਿ $2n$ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਹ ${}^{2n}C_n x^n \left(\frac{1}{x}\right)^n = {}^{2n}C_n$ (ਅਚੱਲ) ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਪਦ ਨੂੰ x ਤੋਂ ਸੁਤੰਤਰ ਪਦ ਜਾਂ ਅਚੱਲ ਪਦ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : a ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $(2 + a)^{50}$ ਦੇ ਵਿਸਤ੍ਰਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ 17ਵਾਂ ਅਤੇ 18ਵਾਂ ਪਦ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : $(x + y)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $(r + 1)$ਵਾਂ ਪਦ ਹੈ $T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} y^r$

17ਵੇਂ ਪਦ ਲਈ, $r + 1 = 17$ ਭਾਵ $r = 16$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ $T_{17} = T_{16+1} = {}^{50}C_{16}\,(2)^{50-16}\,a^{16}$

$= {}^{50}C_{16}\,2^{34}\,a^{16.}$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $T_{18} = {}^{50}C_{17}\,2^{33}\,a^{17}$

ਦਿੱਤਾ ਹੈ $T_{17} = T_{18}$

ਇਸ ਲਈ ${}^{50}C_{16}\,(2)^{34}\,a^{16} = {}^{50}C_{17}\,(2)^{33}\,a^{17}$

ਇਸ ਤੋਂ $$\frac{{}^{50}C_{16}\,.2^{34}}{{}^{50}C_{17}\,.2^{33}} = \frac{a^{17}}{a^{16}}$$

ਭਾਵ $$a = \frac{{}^{50}C_{16} \times 2}{{}^{50}C_{17}} = \frac{50!}{16!\,34!} \times \frac{17!\,.\,33!}{50!} \times 2 = 1$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ $(1 + x)^{2n}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $\frac{1.3.5...(2n-1)}{n!} 2^n x^n$ ਮੱਧ ਪਦ ਹੋਵੇਗਾ, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $2n$ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $(1 + x)^{2n}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $\left(\frac{2n}{2}+1\right)$ਵਾਂ ਪਦ ਭਾਵ $(n + 1)$ਵਾਂ ਪਦ ਮੱਧ ਪਦ ਹੋਵੇਗਾ, ਜੋ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ;

$$T_{n+1} = {}^{2n}C_n (1)^{2n-n} (x)^n = {}^{2n}C_n x^n = \frac{(2n)!}{n!\ n!} x^n$$

$$= \frac{2n\,(2n-1)\ \ (2n-2)\ \ ...4.3.2.1}{n!\ n!} x^n$$

$$= \frac{1.2.3.4...(2n-2)\,(2n-1)\,(2n)}{n!n!} x^n$$

$$= \frac{[1.3.5...(2n-1)][2.4.6...(2n)]}{n!n!} x^n$$

$$= \frac{[1.3.5...(2n-1)]2^n\,[1.2.3...n]}{n!n!} x^n$$

$$= \frac{[1.3.5...(2n-1)]\,n!}{n!\ n!} 2^n . x^n$$

$$= \frac{1.3.5...(2n-1)}{n!} 2^n x^n$$

ਉਦਾਹਰਣ 7 : $(x + 2y)^9$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ x^6y^3 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $(x + 2y)^9$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ x^6y^3, $(r + 1)$ਵਾਂ ਪਦ ਵਿੱਚ ਆਉਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ $\quad T_{r+1} = {}^9C_r\, x^{9-r}\,(2y)^r = {}^9C_r\, 2^r . x^{9-r} . y^r$.

T_{r+1} ਅਤੇ x^6y^3 ਵਿੱਚ x ਅਤੇ y ਦੇ ਘਾਤ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $r = 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, x^6y^3 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ

$${}^9C_3\, 2^3 = \frac{9!}{3!\,6!}.2^3 = \frac{9.8.7}{3.2}.2^3 = 672$$

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਸਾਰ $(x + a)^n$ ਵਿੱਚ ਦੂਸਰਾ, ਤੀਸਰਾ ਅਤੇ ਚੌਥਾ ਪਦ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 240, 720 ਅਤੇ 1080 ਹੈ। x, a ਅਤੇ n ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ, ਦੂਸਰਾ ਪਦ $T_2 = 240$

ਪਰ $\quad T_2 = {}^nC_1 x^{n-1} . a$

ਇਸ ਲਈ $\quad {}^nC_1 x^{n-1} . a = 240 \quad$ ... (1)

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $\quad {}^nC_2 x^{n-2} a^2 = 720 \quad$ ... (2)

ਅਤੇ $\quad {}^nC_3 x^{n-3} a^3 = 1080 \quad$ ... (3)

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

(2) ਨੂੰ (1) ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$\frac{{}^nC_2 x^{n-2} a^2}{{}^nC_1 x^{n-1} a} = \frac{720}{240} \qquad \text{ਭਾਵ} \qquad \frac{(n-1)!}{(n-2)!} \cdot \frac{a}{x} = 6$$

ਜਾਂ
$$\frac{a}{x} = \frac{6}{(n-1)} \qquad \dots (4)$$

(3) ਨੂੰ (2) ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$\frac{a}{x} = \frac{9}{2(n-2)} \qquad \dots (5)$$

(4) ਅਤੇ (5) ਤੋਂ

$$\frac{6}{n-1} = \frac{9}{2(n-2)} \qquad \text{ਇਸ ਲਈ } n = 5$$

ਹੁਣ (1) ਤੋਂ $5x^4a = 240$, ਅਤੇ (4) ਤੋਂ $\frac{a}{x} = \frac{3}{2}$

a ਅਤੇ x ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ $x = 2$ ਅਤੇ $a = 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : $(1 + a)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਲਗਾਤਾਰ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 1 : 7 : 42 ਹੈ, n ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ $(1 + a)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੇ ਤਿੰਨ ਲਗਾਤਾਰ $(r - 1)$ਵਾਂ, rਵਾਂ ਅਤੇ $(r + 1)$ਵਾਂ ਪਦ ਹਨ। $(r - 1)$ਵਾਂ ਪਦ ${}^nC_{r-2}\, a^{r-2}$, ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ${}^nC_{r-2}$ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ rਵੇਂ ਅਤੇ $(r + 1)$ਵੇਂ ਪਦ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ${}^nC_{r-1}$ ਅਤੇ ${}^nC_r$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਕਿਉਂਕਿ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 1 : 7 : 42 ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$$\frac{{}^nC_{r-2}}{{}^nC_{r-1}} = \frac{1}{7}, \text{ ਭਾਵ } n - 8r + 9 = 0 \qquad \dots (1)$$

ਅਤੇ
$$\frac{{}^nC_{r-1}}{{}^nC_r} = \frac{7}{42}, \text{ ਭਾਵ } n - 7r + 1 = 0 \qquad \dots (2)$$

(1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ $n = 55$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 8.2

ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. x^5 ਦਾ $(x + 3)^8$ ਵਿੱਚ

2. a^5b^7 ਦਾ $(a - 2b)^{12}$ ਵਿੱਚ

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਦੋ ਪਦੀ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਵਿਆਪਕ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ :

3. $(x^2 - y)^6$

4. $(x^2 - yx)^{12}, x \neq 0$

5. $(x - 2y)^{12}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚੋਂ ਚੌਥਾ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. $\left(9x - \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚੋਂ 13ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ $x \neq 0$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਦੋ ਪਦੀ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਮੱਧ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ :

7. $\left(3-\dfrac{x^3}{6}\right)^7$ **8.** $\left(\dfrac{x}{3}+9y\right)^{10}$

9. $(1 + a)^{m+n}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ a^m ਅਤੇ a^n ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

10. $(x + 1)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $(r – 1)$ਵੇਂ, rਵੇਂ ਅਤੇ $(r + 1)$ਵੇਂ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ $1 : 3 : 5$ ਹੈ, n ਅਤੇ r ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(1 + x)^{2n}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ x^n ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ, $(1 + x)^{2n-1}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ x^n ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਤੋਂ ਦੋ ਗੁਣਾ ਹੈ।

12. m ਦਾ ਧਨਾਤਮਕ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ $(1 + x)^m$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ x^2 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ 6 ਹੋਵੇ।

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 10 : $\left(\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{3x}\right)^6$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ x ਤੋਂ ਸੁਤੰਤਰ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ

$$T_{r+1} = {}^6C_r\left(\frac{3}{2}x^2\right)^{6-r}\left(-\frac{1}{3x}\right)^r$$

$$= {}^6C_r\left(\frac{3}{2}\right)^{6-r}\left(x^2\right)^{6-r}(-1)^r\left(\frac{1}{x}\right)^r\left(\frac{1}{3^r}\right)$$

$$= (-1)^r\,{}^6C_r\,\frac{(3)^{6-2r}}{(2)^{6-r}}\,x^{12-3r}$$

x ਤੋਂ ਸੁਤੰਤਰ ਪਦ ਲਈ x ਦਾ ਘਾਤ ਅੰਕ 0 ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਭਾਵ $12 – 3r = 0$, ਇਸ ਲਈ $r = 4$

ਇਸ ਲਈ 5ਵਾਂ ਪਦ x ਤੋਂ ਸੁਤੰਤਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ $(-1)^4\,{}^6C_4\,\dfrac{(3)^{6-8}}{(2)^{6-4}}=\dfrac{5}{12}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਜੇਕਰ $(1 + a)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ a^{r-1}, a^r ਅਤੇ a^{r+1} ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ $n^2 – n(4r + 1) + 4r^2 – 2 = 0$

ਹੱਲ : $(1 + a)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $(r + 1)$ਵਾਂ ਪਦ ${}^nC_r a^r$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ a^r, $(r + 1)$ਵੇਂ ਪਦ ਵਿੱਚ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ${}^nC_r$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ a^{r-1}, a^r ਅਤੇ a^{r+1} ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ${}^nC_{r-1}$, ${}^nC_r$ ਅਤੇ ${}^nC_{r+1}$ ਹੋਣਗੇ। ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਗੁਣਾਂਕ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਵਿੱਚ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ${}^nC_{r-1} + {}^nC_{r+1} = 2.{}^nC_r$ ਹੋਵੇਗਾ, ਇਸ ਤੋਂ

$$\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}+\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} = 2\times\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ਭਾਵ

$$\frac{1}{(r-1)!(n-r+1)(n-r)(n-r-1)!}+\frac{1}{(r+1)(r)(r-1)!(n-r-1)!}$$

$$=2\times\frac{1}{r(r-1)!(n-r)(n-r-1)!}$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਜਾਂ $\quad \dfrac{1}{(r-1)!\ \ (n-r-1)!}\left[\dfrac{1}{(n-r)\,(n-r+1)}+\dfrac{1}{(r+1)\ \ (r)}\right]$

$$= 2\times\frac{1}{(r-1)!\ \ (n-r-1)![r(n-r)]}$$

ਭਾਵ $\quad \dfrac{1}{(n-r+1)(n-r)}+\dfrac{1}{r(r+1)}=\dfrac{2}{r(n-r)},$

ਜਾਂ $\quad \dfrac{r(r+1)+(n-r)(n-r+1)}{(n-r)(n-r+1)r(r+1)}=\dfrac{2}{r(n-r)}$

ਜਾਂ $\quad r(r + 1) + (n - r)(n - r + 1) = 2(r + 1)(n - r + 1)$

ਜਾਂ $\quad r^2 + r + n^2 - nr + n - nr + r^2 - r = 2(nr - r^2 + r + n - r + 1)$

ਜਾਂ $\quad n^2 - 4nr - n + 4r^2 - 2 = 0$

ਭਾਵ $\quad n^2 - n(4r + 1) + 4r^2 - 2 = 0$

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ $(1 + x)^{2n}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਮੱਧ ਪਦ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ $(1 + x)^{2n-1}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੇ ਦੋ ਮੱਧ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗਾ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $2n$ ਜਿਸਤ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $(1 + x)^{2n}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਹੀ ਮੱਧ ਪਦ ਹੋਵੇਗਾ ਜੋ ਕਿ $\left(\dfrac{2n}{2}+1\right)$ਵਾਂ ਭਾਵ $(n + 1)$ਵਾਂ ਪਦ ਹੈ।

$(n + 1)$ਵਾਂ ਪਦ ${}^{2n}C_n x^n$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ x^n ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ${}^{2n}C_n$ ਹੈ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $(2n - 1)$ ਟਾਂਕ ਹੈ, ਦੂਸਰੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਦੋ ਮੱਧ ਪਦ ਹੋਣਗੇ, $\left(\dfrac{2n-1+1}{2}\right)$ਵਾਂ ਅਤੇ $\left(\dfrac{2n-1+1}{2}+1\right)$ਵਾਂ ਭਾਵ nਵਾਂ ਅਤੇ $(n + 1)$ਵਾਂ ਪਦ। ਇਹਨਾਂ ਪਦਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਗੁਣਾਂਕ ${}^{2n-1}C_{n-1}$ ਅਤੇ ${}^{2n-1}C_n$ ਹਨ।

ਹੁਣ

${}^{2n-1}C_{n-1} + {}^{2n-1}C_n = {}^{2n}C_n \qquad$ [ਕਿਉਂਕਿ ${}^nC_{r-1} + {}^nC_r = {}^{n+1}C_r$] ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦਾ ਸੀ।

ਉਦਾਹਰਣ 13 : $(1 + 2a)^4 (2 - a)^5$ ਦੀ ਗੁਣਾ ਵਿੱਚ a^4 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ, ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਗੁਣਾ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਕਰਾਂਗੇ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ :

$$\begin{aligned}(1 + 2a)^4 &= {}^4C_0 + {}^4C_1(2a) + {}^4C_2(2a)^2 + {}^4C_3(2a)^3 + {}^4C_4(2a)^4\\ &= 1 + 4(2a) + 6(4a^2) + 4(8a^3) + 16a^4\\ &= 1 + 8a + 24a^2 + 32a^3 + 16a^4\end{aligned}$$

ਅਤੇ $\quad (2 - a)^5 = {}^5C_0\ (2)^5 - {}^5C_1\ (2)^4 (a) + {}^5C_2 (2)^3 (a)^2 - {}^5C_3\ (2)^2 (a)^3 + {}^5C_4 (2)(a)^4 - {}^5C_5\ (a)^5$
$\qquad = 32 - 80a + 80a^2 - 40a^3 + 10a^4 - a^5$

ਇਸ ਲਈ $(1 + 2a)^4 (2 - a)^5$

$$= (1 + 8a + 24a^2 + 32a^3 + 16a^4)(32 - 80a + 80a^2 - 40a^3 + 10a^4 - a^5)$$

ਸਾਨੂੰ ਦੋਹਾਂ ਦੀ ਪੂਰੀ ਗੁਣਾਂ ਕਰਨ ਅਤੇ ਸਾਰੇ ਪਦ ਲਿਖਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨਹੀਂ। ਅਸੀਂ ਸਿਰਫ ਉਹ ਹੀ ਪਦ ਲਿਖਾਂਗੇ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ a^4 ਆਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ $a^r.\ a^{4-r} = a^4$ ਇਸ ਲਈ ਉਹ ਪਦ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ a^4 ਆਉਂਦਾ ਹੈ, ਉਹ ਹਨ : $1\,(10a^4) + (8a)(-40a^3) + (24a^2)(80a^2) + (32a^3)(-80a) + (16a^4)(32) = -438a^4$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਗੁਣਨਫਲ ਵਿੱਚ a^4 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ -438 ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 14 : $(x + a)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਅੰਤ ਵਾਲੇ ਪਾਸੇ ਤੋਂ rਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $(x + a)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $(n + 1)$ ਪਦ ਹੋਣਗੇ। ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅੰਤ ਵਾਲੇ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾ ਪਦ, ਅੰਤਿਮ ਪਦ ਹੈ ਭਾਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $(n + 1)$ਵਾਂ ਪਦ ਹੈ ਅਤੇ $n + 1 = (n + 1) - (1 - 1)$। ਅੰਤ ਵਾਲੇ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਦੂਸਰਾ ਪਦ, ਪ੍ਰਸਾਰ ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ ਹੈ ਅਤੇ $n = (n + 1) - (2 - 1)$। ਅੰਤ ਵਾਲੇ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਤੀਸਰਾ ਪਦ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦਾ $(n - 1)$ਵਾਂ ਪਦ ਹੈ ਅਤੇ $n - 1 = (n + 1) - (3 - 1)$ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਅੰਤ ਵਾਲੇ ਪਾਸੇ ਤੋਂ rਵਾਂ ਪਦ, ਪ੍ਰਸਾਰ ਦਾ $(n + 1) - (r - 1) = (n - r + 2)$ਵਾਂ ਪਦ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ $(n - r + 2)$ਵਾਂ ਪਦ ${}^nC_{n-r+1}\, x^{r-1}\, a^{n-r+1}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 15 : $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^{18}$, $x > 0$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ x ਤੋਂ ਸੁਤੰਤਰ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਪ੍ਰਸਾਰ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਪਦ $T_{r+1} = {}^{18}C_r \left(\sqrt[3]{x}\right)^{18-r} \left(\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^r$

$$= {}^{18}C_r\, x^{\frac{18-r}{3}} \cdot \frac{1}{2^r . x^{\frac{r}{3}}} = {}^{18}C_r \frac{1}{2^r} . x^{\frac{18-2r}{3}} \text{ ਹੈ।}$$

ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ x ਤੋਂ ਸੁਤੰਤਰ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ, ਭਾਵ ਉਹ ਪਦ ਜਿਸ ਵਿੱਚ x ਨਾਂ ਹੋਵੇ ਅਸੀਂ $\dfrac{18-2r}{3} = 0$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ $r = 9$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਪਦ ${}^{18}C_9 \dfrac{1}{2^9}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16 : $\left(x - \dfrac{3}{x^2}\right)^m$, $x \neq 0$, ਤੇ m ਪ੍ਰਾਕਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 559 ਹੈ। ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ x^3 ਵਾਲਾ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $\left(x - \dfrac{3}{x^2}\right)^m$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ, ${}^mC_0$, $(-3)\ {}^mC_1$ ਅਤੇ $9\ {}^mC_2$ ਹਨ। ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸ਼ਰਤ ਅਨੁਸਾਰ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

${}^mC_0 - 3\ {}^mC_1 + 9\ {}^mC_2 = 559$, ਭਾਵ $1 - 3m + \dfrac{9m\,(m-1)}{2} = 559$

ਜਿਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ $m = 12$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ (ਕਿਉਂਕਿ m ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ)

ਹੁਣ $$T_{r+1} = {}^{12}C_r\, x^{12-r} \left(-\frac{3}{x^2}\right)^r = {}^{12}C_r\, (-3)^r \cdot x^{12-3r}$$

ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਨੂੰ ਉਸ x^3 ਪਦ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $12 - 3r = 3$ ਲਉ ਇਸ ਤੋਂ $r = 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਪਦ ${}^{12}C_3\,(-3)^3 x^3$, ਭਾਵ $-5940\, x^3$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 17 : $(1 + x)^{34}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $(r - 5)$ਵੇਂ ਅਤੇ $(2r - 1)$ਵੇਂ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਬਰਾਬਰ ਹਨ। r ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $(1 + x)^{34}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $(r - 5)$ਵੇਂ ਅਤੇ $(2r - 1)$ਵੇਂ ਪਦ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ${}^{34}C_{r-6}$ ਅਤੇ ${}^{34}C_{2r-2}$ ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਬਰਾਬਰ ਦਿੱਤੇ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ${}^{34}C_{r-6} = {}^{34}C_{2r-2}$ ਇਸ ਤੋਂ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਜਾਂ ਤਾਂ $r - 6 = 2r - 2$ ਜਾਂ $r - 6 = 34 - (2r - 2)$

[ਇਸ ਤੱਥ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਜੇਕਰ ${}^nC_r = {}^nC_p$, ਤਾਂ ਜਾਂ ਤਾਂ $r = p$ ਅਤੇ ਜਾਂ $r = n - p$]

ਇਸ ਤੋਂ $r = -4$ ਜਾਂ $r = 14$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ r ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $r = -4$ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ, ਇਸ ਲਈ $r = 14$

ਅਧਿਆਇ 8 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. a, b ਅਤੇ n ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $(a + b)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 729, 7290 ਅਤੇ 30375 ਹੋਣ।
2. a ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $(3 + ax)^9$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ x^2 ਅਤੇ x^3 ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ।
3. $(1 + 2x)^6 (1 - x)^7$ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਵਿੱਚ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ, x^5 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਜੇਕਰ a ਅਤੇ b ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੋਣ, ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $a - b$, $a^n - b^n$ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ ਜਿੱਥੇ n ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
   [**ਸੰਕੇਤ :** $a^n = (a - b + b)^n$ ਲਿਖੋ ਅਤੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਕਰੋ]
5. ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^6 - \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^6$
6. ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ $\left(a^2+\sqrt{a^2-1}\right)^4 + \left(a^2-\sqrt{a^2-1}\right)^4$
7. ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨਾਂ ਪਦਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ $(0.99)^5$ ਦਾ ਲਗਭਗ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. n ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $\left(\sqrt[4]{2}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਸ਼ੁਰੂ ਤੋਂ ਪੰਜਵੇਂ ਪਦ ਅਤੇ ਆਖਿਰ ਵਾਲੇ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਪੰਜਵੇਂ ਪਦ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ $\sqrt{6}:1$ ਹੋਵੇ।
9. ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ $\left(1+\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)^4, x \neq 0$ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਕਰੋ।
10. ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ $(3x^2 - 2ax + 3a^2)^3$ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਕਰੋ।

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਇੱਕ ਦੋ ਪਦੀ ਦਾ ਕਿਸੇ ਵੀ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਲਈ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੋ ਪਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਅਨੁਸਾਰ $(a + b)^n = {}^nC_0a^n + {}^nC_1a^{n-1}b + {}^nC_2a^{n-2}b^2 + ... + {}^nC_{n-1}a.b^{n-1} + {}^nC_nb^n$
- ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੇ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਇੱਕ ਨਮੂਨੇ ਵਿੱਚ ਜੋੜੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਪਾਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- $(a + b)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਪਦ $T_{r+1} = {}^nC_ra^{n-r}. b^r$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- $(a + b)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ n ਜਿਸਤ ਹੈ ਤਾਂ $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ ਵਾਂ ਪਦ, ਮੱਧ ਪਦ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ n ਟਾਂਕ ਹੈ ਤਾਂ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ਵਾਂ ਅਤੇ $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$ ਵਾਂ, ਦੋ ਮੱਧ ਪਦ ਹਨ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਪ੍ਰਾਚੀਨ ਭਾਰਤੀ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ $(x + y)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $0 \leq n \leq 7$ ਲਈ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਦੇ ਸਨ। ਇਹਨਾਂ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੀ ਤਰਤੀਬ ਇੱਕ ਚਿੱਤਰ ਵਾਂਗ ਸੀ ਜਿਸ ਨੂੰ *Meru-Prastara* ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, Pinga ਦੁਆਰਾ ਉਸਦੀ ਕਿਤਾਬ *Chandra shastra* (200B.C.) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ। ਇਹ ਤ੍ਰਿਭੁਜੀ ਤਰਤੀਬ ਇੱਕ ਚਾਈਨੀਜ਼ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ Chu-shi-kie ਦੇ ਕੰਮ ਵਿੱਚ 1303 ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਲੱਗੀ। ਸ਼ਬਦ ਦੋ ਪਦੀ ਗੁਣਾਂਕ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਵਰਤੋਂ ਜਰਮਨ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ Michael Stipel (1486-1567) ਦੁਆਰਾ ਲਗਭਗ 1544 ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਗਈ। Bombelli (1572) ਦੁਆਰਾ ਵੀ $(a + b)^n$, ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $n = 1,2 \ldots,7$ ਲਈ ਗੁਣਾਂਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅਤੇ Oughtred (1631) ਨੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ $n = 1, 2,\ldots, 10$ ਲਈ ਦਿੱਤਾ। ਇਹ ਅੰਕਗਣਿਤਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਜਿਸ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ ’ਤੇ ਪਾਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਹੜੀ Pinga ਦੇ Meru Prastara ਵਰਗੀ ਹੈ, French ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ Blaise Pascal (1623-1662) ਦੁਆਰਾ 1665 ਵਿੱਚ ਬਣਾਈ ਗਈ।

ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਮੌਜੂਦਾ ਰੂਪ n ਦੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ *Trate du triange arithmetic* ਵਿੱਚ Pascal ਦੁਆਰਾ ਲਿਖੀ posthumously ਕਿਤਾਬ ਵਿੱਚ 1665 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਹੋਇਆ।

— ❖ —

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਧਿਆਇ 9

ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਲੜੀਆਂ
(Sequence and Series)

❖*Natural numbers are the product of human spirit. – DEDEKIND*❖

9.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਗਣਿਤ ਵਿਚ, ਸ਼ਬਦ 'ਅਨੁਕ੍ਰਮ' ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਸਧਾਰਨ ਪੰਜਾਬੀ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੂਹ ਦੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ (objects) ਨੂੰ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਵਿਚ ਸੂਚੀਬੱਧ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਕਹਿਣ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲੜੀਬੱਧ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਲਾ ਮੈਂਬਰ, ਦੂਜਾ ਮੈਂਬਰ, ਤੀਜਾ ਮੈਂਬਰ ਆਦਿ ਨਾਲ ਪਹਿਚਾਣ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸਮੇਂ ਮਨੁੱਖ ਜਾਂ ਬੈਕਟੀਰੀਆ ਦੀ ਜਨਸੰਖਿਆ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਕੋਈ ਧੱਨਰਾਸ਼ੀ ਜੋ ਬੈਂਕ ਖਾਤੇ ਵਿਚ ਜਮ੍ਹਾਂ ਕਰਵਾ ਦਿੱਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਕੁਝ ਸਾਲਾਂ ਮਗਰੋਂ ਇੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਵਸਤੂ ਦੀ ਘੱਟਦੀ ਹੋਈ ਕੀਮਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਮਨੁੱਖੀ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕਈ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਹੈ।

Fibonacci
(1175-1250)

ਖਾਸ ਨਮੂਨਿਆ (Pattern) 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ, ਲੜੀ (Progression) ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਪਿਛਲੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿਚ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) ਬਾਰੇ ਹੋਰ ਵੱਧ ਚਰਚਾ ਕਰਨ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਅਸੀਂ, ਅੰਕਗਣਿਤਕ ਮੱਧਮਾਨ (A.M.) ਜਿਮਾਇਤੀ ਮੱਧਮਾਨ (G.M.), ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਮੱਧਮਾਨ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ, ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, n ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ n ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਘਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦਾ ਵੀ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

9.2 ਅਨੁਕ੍ਰਮ (Sequence)

ਆਉ, ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ —

ਮੰਨ ਲਉ ਪੀੜ੍ਹੀਆਂ ਦਾ ਅੰਤਰ 30 ਸਾਲ ਹੈ, ਸਾਨੂੰ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ 300 ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਪੂਰਵਜਾਂ ਅਰਥਾਤ ਮਾਤਾ-ਪਿਤਾ, ਦਾਦਾ-ਦਾਦੀ, ਪੜਦਾਦਾ-ਪੜਦਾਦੀ ਆਦਿ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿਹਾ ਹੈ ।

ਇੱਥੇ ਪੀੜ੍ਹੀਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ $= \dfrac{300}{30} = 10$

ਪਹਿਲੀ, ਦੂਜੀ, ਤੀਜੀ, ..., ਦਸਵੀਂ ਪੀੜ੍ਹੀ ਦੇ ਲਈ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਪੂਰਵਜਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਕ੍ਰਮਵਾਰ: 2, 4, 8, 16, 32, …, 1024 ਹੈ। ਇਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ, ਇਹ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

10 ਨੂੰ 3 ਨਾਲ ਭਾਗ ਦਿੰਦੇ ਸਮੇਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਚਰਣਾਂ (ਪਗਾਂ) ਦੇ ਬਾਅਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਭਾਗਫਲ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਇਸ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਵਿਚ ਅਸੀਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 3,3.3,3.33,3.333, ... ਆਦਿ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਭਾਗਫਲ ਵੀ ਇੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਜੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਆਉਂਦੀਆਂ ਹਨ ਉਹ ਇਸਦੇ ਪਦ (Terms) ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ਆਦਿ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਹਰੇਕ ਪਦ ਨਾਲ ਲੱਗੀ ਹੋਈ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਪਦ-ਅੰਕ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਪਦ ਦਾ ਸਥਾਨ ਦੱਸਦੀ ਹੈ। ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ, nਵੇਂ ਸਥਾਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ a_n ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਨੂੰ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦਾ ਆਮ ਪਦ (General term) ਜਾਂ ਵਿਆਪਕ ਪਦ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਅਕਤੀ ਦੀ ਪੂਰਵਜਾਂ ਦੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

$$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, \ldots, a_{10} = 1024$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਿਰੰਤਰ ਭਾਗਫਲਾਂ ਵਾਲੇ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ

$$a_1 = 3, a_2 = 3.3, a_3 = 3.33, \ldots, a_6 = 3.33333, \text{ ਆਦਿ}$$

ਉਹ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਜਿਸ ਵਿਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਸੀਮਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਉਸ ਨੂੰ ਸੀਮਿਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਪੂਰਵਜਾਂ ਦਾ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਸੀਮਿਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਉਸ ਵਿਚ 10 ਪਦ ਹਨ (ਸੀਮਿਤ ਸੰਖਿਆ)।

ਇੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ, ਅਸੀਮਿਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਸੀਮਿਤ ਨਾ ਹੋਵੇ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਉੱਪਰ ਦਰਸਾਏ ਨਿਰੰਤਰ ਭਾਗਫਲਾਂ ਦਾ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਇੱਕ ਅਸੀਮਿਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਹੈ, ਅਸੀਮਿਤ ਦਾ ਅਰਥ ਜਿਸ ਦਾ ਕੋਈ ਅੰਤ ਨਹੀਂ।

ਅਕਸਰ, ਇਹ ਸੰਭਵ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਦੇ ਨਿਯਮ ਨੂੰ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ 2, 4, 6....... ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਇੱਥੇ

$$a_1 = 2 = 2 \times 1 \quad a_2 = 4 = 2 \times 2$$

$$a_3 = 6 = 2 \times 3 \quad a_4 = 8 = 2 \times 4$$

....

....

$a_{23} = 46 = 2 \times 23, a_{24} = 48 = 2 \times 24$, ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਰ।

ਅਸਲ ਵਿਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ $a_n = 2n$ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ 'n' ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ 1,3,5, …, ਵਿੱਚ nਵੇਂ ਪਦ ਦੇ ਸੂਤਰ ਨੂੰ $a_n = 2n - 1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿਚ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਕਈ ਵਾਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਤਰਤੀਬ 1, 1, 2, 3, 5, 8,.. ਦਾ ਕੋਈ ਖਾਸ **ਨਮੂਨਾ** ਦਿਖਾਈ ਨਹੀਂ ਦਿੰਦਾ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੀ ਰਚਨਾ ਦੁਹਰਾਉਣ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਈ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ

$$a_1 = a_2 = 1$$

$$a_3 = a_1 + a_2$$

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, n > 2$$

ਇਸ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਨੂੰ ਫ਼ਿੱਬੋਨਾਕੀ (Fibonacci) ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ 2,3,5,7,…, ਵਿਚ nਵੀਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਕੋਈ ਸੂਤਰ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਨੂੰ ਬੋਲ ਕੇ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਹਰੇਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਵਿਚ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ ਉਸ ਦਾ ਕੋਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸੂਤਰ ਹੋਵੇਗਾ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਫਿਰ ਵੀ ਅਜਿਹੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਲਈ ਕੋਈ ਨਾ ਕੋਈ ਸਿਧਾਂਤਕ ਯੋਜਨਾ ਜਾਂ ਨਿਯਮ ਦੀ ਉਮੀਦ ਤਾਂ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜੋ ਪਦਾਂ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਕਰ ਸਕੇ।

ਉਪਰੋਕਤ ਤੱਥਾਂ ਦੇ ਅਧਾਰ 'ਤੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇੱਕ **ਫਲਨ** (function) ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਦਾ **ਪ੍ਰਾਂਤ** (Domain) ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜਾਂ ਉਸਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$ ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਹੋਵੇ। ਕਈ ਵਾਰ ਅਸੀਂ ਫਲਨ (function) ਦੇ ਸੰਕੇਤ a_n ਦੇ ਲਈ $a(n)$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

9.3 ਲੜੀ (Series)

ਮੰਨ ਲਉ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਹੈ, ਤਾਂ ਵਿਅੰਜਕ

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

ਸੰਬੰਧਿਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਤੋਂ ਬਣੀ ਲੜੀ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਲੜੀ ਸੀਮਿਤ ਜਾਂ ਅਸੀਮਿਤ ਹੋਵੇਗੀ, ਜੇਕਰ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸੀਮਿਤ ਜਾਂ ਅਸੀਮਿਤ ਹੈ। ਲੜੀ ਨੂੰ ਅਕਸਰ **ਸੰਖੇਪ** (Compact) ਰੂਪ ਵਿਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਨੂੰ ਸਿਗਮਾ ਸੰਕੇਤ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਜਿਸ ਲਈ ਗਰੀਕ ਅੱਖਰ ਸੰਕੇਤ $\sum$ (ਸਿਗਮਾ) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਜੋੜਨਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੜੀ $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ ਦਾ ਸੰਖੇਪ ਰੂਪ $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ— ਲੜੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ, ਜੋੜ ਲਈ ਨਹੀਂ, ਸਗੋਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਜੋੜ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ 1 + 3 + 5 + 7 ਚਾਰ ਪਦਾਂ ਵਾਲੀ ਸੀਮਿਤ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ 'ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦਾ ਜੋੜ' ਸ਼ਬਦ ਸਮੂਹ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਉਸ ਸੰਖਿਆ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਤੋਂ ਹੈ ਜੋ ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦਾ ਜੋੜ 16 ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ’ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ—

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਰੇਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦ ਲਿਖੋ।

(i) $a_n = 2n + 5$ (ii) $a_n = \frac{n-3}{4}$

ਹੱਲ : (i) ਇੱਥੇ $a_n = 2n + 5$

$n = 1, 2, 3,$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$a_1 = 2(1) + 5 = 7,\ a_2 = 9,\ a_3 = 11$$

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਪਦ 7, 9 ਅਤੇ 11 ਹਨ।

(ii) ਇੱਥੇ $a_n = \frac{n-3}{4}$ ਤਾਂ $a_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2},\ a_2 = -\frac{1}{4},\ a_3 = 0$

ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦ $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}$ ਅਤੇ 0 ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : $a_n = (n - 1)(2 - n)(3 + n)$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਏ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦਾ 20ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $n = 20$, ਭਰਨ ’ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$a_{20} = (20 - 1)(2 - 20)(3 + 20)$$
$$= 19 \times (-18) \times (23) = -7866$$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਮੰਨ ਲਉ ਅਨੁਕ੍ਰਮ a_n ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ

$$a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + 2 \text{ ਲਈ } n \geq 2$$

ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਪੰਜ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਸੰਗਤ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਲਿਖੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$$a_1 = 1,\ a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3,\ a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5,$$
$$a_4 = a_3 + 2 = 5 + 2 = 7,\ a_5 = a_4 + 2 = 7 + 2 = 9$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਪੰਜ ਪਦ 1,3,5,7 ਅਤੇ 9 ਹੈ ਅਤੇ ਸੰਗਤ ਸ਼੍ਰੇਣੀ 1 + 3 + 5 + 7 + 9 +... ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 9.1

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਤੋਂ 6 ਤੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਦਿੱਤੇ nਵੇਂ ਪਦ ਤੋਂ ਹਰੇਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਪੰਜ ਪਦ ਲਿਖੋ।

1. $a_n = n(n + 2)$ **2.** $a_n = \frac{n}{n+1}$ **3.** $a_n = 2^n$ **4.** $a_n = \frac{2n-3}{6}$

5. $a_n = (-1)^{n-1} 5^{n+1}$ **6.** $a_n = n\frac{n^2+5}{4}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਨੰ: 7 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਦੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮਾਂ ਵਿਚ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ nਵਾਂ ਪਦ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

7. $a_n = 4n - 3;\ a_{17}, a_{24}$ **8.** $a_n = \frac{n^2}{2^n}; a_7$ **9.** $a_n = (-1)^{n-1}n^3;\ a_9$ **10.** $a_n = \frac{n(n-2)}{n+3}; a_{20}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 11 ਤੋਂ 13 ਤੱਕ ਹਰੇਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਪੰਜ ਪਦ ਲਿਖੋ ਅਤੇ ਸੰਗਤ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਪਤਾ ਕਰੋ

11. $a_1 = 3, a_n = 3a_{n-1} + 2 \ \forall\ n > 1$

12. $a_1 = -1, a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}, n \geq 2$

13. $a_1 = a_2 = 2, a_n = a_{n-1} - 1, n > 2$

14. ਫ਼ਿੱਬੋਨਾਕੀ (Fibonacci) ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ $1 = a_1 = a_2$ ਅਤੇ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n > 2$ ਤਾਂ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ਲਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9.4 ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (Arithmetic Progression (A.P.))

ਆਉ ਪਹਿਲਾ ਪੜ੍ਹੇ, ਹੋਏ ਸੂਤਰਾਂ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੀਏ।

ਇੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ਨੂੰ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਜਾਂ ਅੰਕਗਣਿਤਕ ਲੜੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $a_{n+1} = a_n + d$, $n \in \mathbf{N}$, a_1 ਨੂੰ ਪਹਿਲਾ ਪਦ ਅਤੇ ਸਥਿਰ ਪਦ d ਨੂੰ A.P. ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ) ਜਿਸਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ 'a' ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ d ਹੈ, $a, a + d, a + 2d, \ldots$ ਹੈ।

ਤਾਂ ਇਸ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ (ਆਮ ਰੂਪ ਜਾਂ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ) $a_n = a + (n-1)\,d$ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਦੀਆਂ ਆਮ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦਾ ਪਰੀਖਣ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ—

(i) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਜੋੜਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਨਵਾਂ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਹੀ ਹੋਵੇਗੀ।

(ii) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਘਟਾਇਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਨਵਾਂ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਹੀ ਹੋਵੇਗੀ।

(iii) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਨੂੰ ਸਥਿਰ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਨਵਾਂ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਹੀ ਹੋਵੇਗੀ।

(iv) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ (non zero) ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਨਵਾਂ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਹੀ ਹੋਵੇਗੀ।

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ :

a = ਪਹਿਲਾ ਪਦ, l = ਆਖਰੀ ਪਦ, d = ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ

n = ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ

S_n = A.P. ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ

ਮੰਨ ਲਉ $a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (n-1)\,d$ ਇੱਕ A.P. ਹੈ, ਤਾਂ

$$l = a + (n-1)\,d$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$

ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ $$S_n = \frac{n}{2}\left[a + l\right]$$

ਆਉ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਦਾ mਵਾਂ ਪਦ n ਅਤੇ nਵਾਂ ਪਦ m ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $m \neq n$ ਹੈ ਤਾਂ pਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਡੇ ਕੋਲ $$a_m = a + (m-1)\,d = n \quad \ldots (1)$$

ਅਤੇ $$a_n = a + (n-1)\,d = m \quad \ldots (2)$$

(1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$(m-n)\,d = n - m \quad \text{ਜਾਂ } d = -1 \quad \ldots (3)$$

ਅਤੇ $$a = n + m - 1 \quad \ldots (4)$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਸ ਲਈ $a_p = a + (p-1)d$

$= n + m - 1 + (p-1)(-1) = n + m - p$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ pਵਾਂ ਪਦ $n + m - p$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਜੇਕਰ ਇੱਕ AP ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $n\text{P}+\frac{1}{2}n(n-1)\text{Q}$, ਜਿੱਥੇ P ਅਤੇ Q ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਹਨ, ਤਾਂ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ਇੱਕ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ A.P. ਹੈ। ਤਾਂ

$$\text{S}_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = n\text{P} + \frac{1}{2}n(n-1)\text{Q}$$

ਇਸ ਲਈ $\text{S}_1 = a_1 = \text{P}, \text{S}_2 = a_1 + a_2 = 2\text{P} + \text{Q}$

ਇਸ ਲਈ $a_2 = \text{S}_2 - \text{S}_1 = \text{P} + \text{Q}$

ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ $d = a_2 - a_1$

$= (\text{P} + \text{Q}) - \text{P} = \text{Q}$, ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਦੋ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀਆਂ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜਾ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ $(3n + 8) : (7n + 15)$ ਹੈ। ਉਹਨਾਂ ਦੇ 12ਵੇਂ ਪਦਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ a_1, a_2 ਅਤੇ d_1, d_2 ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪਹਿਲੀ ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀਆਂ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਹਨ ਤਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸ਼ਰਤ ਅਨੁਸਾਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$$\frac{\text{ਪਹਿਲੀ A.P. ਦੇ } n \text{ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ}}{\text{ਦੂਜੀ A.P. ਦੇ } n \text{ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ}} = \frac{3n+8}{7n+15}$$

ਜਾਂ $$\frac{\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d_1]}{\frac{n}{2}[2a_2+(n-1)d_2]} = \frac{3n+8}{7n+15}$$

ਜਾਂ $$\frac{2a_1+(n-1)d_1}{2a_2+(n-1)d_2} = \frac{3n+8}{7n+15} \quad \ldots (1)$$

ਹੁਣ $$\frac{\text{ਪਹਿਲੀ A.P. ਦਾ 12ਵਾਂ ਪਦ}}{\text{ਦੂਜੀ A.P. ਦਾ 12ਵਾਂ ਪਦ}} = \frac{a_1+11d_1}{a_2+11d_2}$$

$$\frac{2a_1+22d_1}{2a_2+22d_2} = \frac{3\times23+8}{7\times23+15} \quad [(1) \text{ ਵਿੱਚ } n = 23 \text{ ਰੱਖਣ 'ਤੇ}]$$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{a_1+11d_1}{a_2+11d_2} = \frac{\text{ਪਹਿਲੀ A.P. ਦਾ 12ਵਾਂ ਪਦ}}{\text{ਦੂਜੀ A.P. ਦਾ 12ਵਾਂ ਪਦ.}} = \frac{7}{16}$$

ਤਾਂ ਲੋੜੀਂਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 7 : 16 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਦੀ ਪਹਿਲੇ ਸਾਲ ਦੀ ਆਮਦਨ 3,00,000 ਰੁਪਏ ਅਤੇ ਉਸ ਦੀ ਆਮਦਨ 10,000 ਰੁਪਏ ਹਰ ਸਾਲ ਅਗਲੇ 19 ਸਾਲਾਂ ਤੱਕ ਵੱਧਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਦੁਆਰਾ 20 ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਵਿਚ $a = 3{,}00{,}000$, $d = 10{,}000$, ਅਤੇ $n = 20$ ਹੈ ਜੋੜ ਦੇ ਸੂਤਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

$$S_{20} = \frac{20}{2}[600000 + 19 \times 10000] = 10\,(790000) = 79{,}00{,}000$$

ਇਸ ਲਈ 20 ਸਾਲਾਂ ਦੇ ਅੰਤ ਤੱਕ ਵਿਅਕਤੀ 79,00,000 ਰੁਪਏ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

9.4.1 ***ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਮੱਧ (Arithmetic Mean) :*** ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦਿੱਤੀਆਂ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਇਕ ਹੋਰ ਸੰਖਿਆ A ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਈ ਕਿ a, A, b ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ A ਨੂੰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦਾ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਮੱਧਮਾਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿਚ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਸਾਡੇ ਕੋਲ;

$$A - a = b - A, \quad \text{ਭਾਵ, } A = \frac{a+b}{2} \text{ ਹੈ}$$

ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਮੱਧ (A.M.) ਨੂੰ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਔਸਤ $\frac{a+b}{2}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ 4 ਅਤੇ 16 ਦਾ A.M. 10 ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਇਕ ਸੰਖਿਆ 10 ਨੂੰ 4 ਅਤੇ 16 ਦੇ ਮੱਧ ਵਿਚ ਰੱਖ ਕੇ 4, 10, 16 ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) ਦੀ ਰਚਨਾ ਕੀਤੀ ਹੈ। ਹੁਣ ਇੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੈ ਕਿ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੋ ਜਾਂ ਇਸ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅੰਕ ਰੱਖਣ ਤੇ A.P. ਤਿਆਰ ਹੋ ਸਕੇਗੀ ? ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 8 ਅਤੇ 12 ਨੂੰ 4 ਅਤੇ 16 ਵਿਚਕਾਰ ਰੱਖਣ 'ਤੇ 4, 8, 12, 16 ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) ਬਣਦੀ ਹੈ।

ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਦਿੱਤੀਆਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਵਿਚਕਾਰ ਕਿੰਨੀਆਂ ਵੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਰੱਖ ਕੇ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$, a ਅਤੇ b ਵਿਚਕਾਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ $a, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, b$ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਹੈ

ਇਥੇ b, $(n + 2)$ ਵਾਂ ਪਦ ਹੈ, ਭਾਵ, $b = a + [(n + 2) - 1]d = a + (n + 1)\,d$

ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $$d = \frac{b-a}{n+1}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, a ਅਤੇ b ਵਿੱਚ n ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ

$$A_1 = a + d = a + \frac{b-a}{n+1}$$

$$A_2 = a + 2d = a + \frac{2(b-a)}{n+1}$$

$$A_3 = a + 3d = a + \frac{3(b-a)}{n+1}$$

....

....

$$A_n = a + nd = a + \frac{n(b-a)}{n+1}.$$

ਉਦਾਹਰਣ 8 : 6 ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ 3 ਅਤੇ 24 ਵਿਚਕਾਰ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਇਕ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਬਣ ਜਾਵੇ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ਅਤੇ A_6, 3 ਅਤੇ 24 ਵਿਚਕਾਰ ਛੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ 3, $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, 24 A.P. ਹੈ। ਇੱਥੇ, $a = 3$, $b = 24$, $n = 8$

ਇਸ ਲਈ, $24 = 3 + (8 - 1)\,d$, ਤਾਂ $d = 3$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $A_1 = a + d = 3 + 3 = 6;$ $A_2 = a + 2d = 3 + 2 \times 3 = 9;$

$A_3 = a + 3d = 3 + 3 \times 3 = 12;$ $A_4 = a + 4d = 3 + 4 \times 3 = 15;$

$A_5 = a + 5d = 3 + 5 \times 3 = 18;$ $A_6 = a + 6d = 3 + 6 \times 3 = 21.$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ 3 ਅਤੇ 24 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ 6, 9, 12, 15, 18 ਅਤੇ 21 ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 9.2

1. 1 ਤੋਂ 2001 ਤੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. 100 ਤੋਂ 1000 ਵਿਚਕਾਰ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ 5 ਦੀਆਂ ਗੁਣਜ ਹਨ।
3. ਕਿਸੇ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ 2 ਹੈ। ਉਸਦੇ ਪਹਿਲੇ ਪੰਜ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਅਗਲੇ ਪੰਜ ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦਾ ਇੱਕ ਚੌਥਾਈ ਹੈ। ਦਰਸਾਉ ਕਿ 20ਵਾਂ ਪਦ –112 ਹੈ।
4. ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) $-6, -\frac{11}{2}, -5, \ldots$ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ –25 ਹੈ ?
5. ਕਿਸੇ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) ਦਾ pਵਾਂ ਪਦ $\frac{1}{q}$ ਅਤੇ qਵਾਂ ਪਦ $\frac{1}{p}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਪਹਿਲੇ pq ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $\frac{1}{2}(pq+1)$ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $p \neq q$ ਹੈ।
6. ਜੇਕਰ A.P. 25, 22, 19, … ਦੇ ਕੁਝ ਪਦਾਂ ਜਾ ਜੋੜ 116 ਹੈ ਤਾਂ ਆਖ਼ਰੀ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. ਉਸ A.P. ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ kਵਾਂ ਪਦ $5k + 1$ ਹੈ।
8. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ $(pn + qn^2)$ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸਥਿਰ ਹਨ, ਤਾਂ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
9. ਦੋ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀਆਂ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ $(5n + 4) : (9n + 6)$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਦੇ 18ਵੇਂ ਪਦਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।
10. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ p ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਪਹਿਲੇ q ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪਹਿਲੇ $(p + q)$ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
11. ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ p, q ਅਤੇ r ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕ੍ਰਮਵਾਰ a, b ਅਤੇ c ਹੈ।

    ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ $\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0$ ਹੈ।
12. ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ m ਅਤੇ n ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ $m^2 : n^2$ ਹੈ ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ mਵੇਂ ਅਤੇ nਵੇਂ ਪਦਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ $(2m – 1) : (2n – 1)$ ਹੈ।
13. ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $3n^2 + 5n$ ਅਤੇ mਵਾਂ ਪਦ 164 ਹੈ ਤਾਂ m ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
14. 5 ਅਤੇ 26 ਵਿਚਕਾਰ ਅਜਿਹੀਆਂ ਪੰਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੱਸੋ ਤਾਂ ਕਿ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਇੱਕ A.P. ਹੋਵੇ।
15. ਜੇਕਰ a ਅਤੇ b ਦਾ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਮੱਧ (A.M.) $\frac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}}$ ਹੈ ਤਾਂ n ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
16. m ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ 1 ਅਤੇ 31 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਇੱਕ A.P. ਹੈ ਅਤੇ 7ਵੀਂ ਅਤੇ $(m – 1)$ ਵੀਂ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 5 : 9 ਹੈ। m ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
17. ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਕਰਜ਼ ਦਾ ਭੁਗਤਾਨ 100 ਰੁਪਏ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਕਿਸ਼ਤ ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਹ ਹਰੇਕ ਕਿਸ਼ਤ ਵਿਚ 5 ਰੁਪਏ ਪ੍ਰਤੀ ਮਹੀਨਾ ਵਧਾਉਂਦਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ 30 ਵੀਂ ਕਿਸ਼ਤ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ।
18. ਇੱਕ ਬਹੁਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਅੰਦਰਲੇ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ 5° ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਕੋਣ 120° ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਬਹੁਭਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

9.5 ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ (Geometric Progression (G.P.))

ਆਓ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮਾ ਨੂੰ ਵੇਖੀਏ :

(i) 2,4,8,16,... (ii) $\frac{1}{9}, \frac{-1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{-1}{243}$... (iii) .01,.0001,.000001,...

ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਪਦ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੱਧਦੇ ਹਨ ? ਹਰੇਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਬਾਕੀ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕ੍ਰਮ ਵਿਚ ਵੱਧਦੇ ਹਨ।

(i) ਵਿੱਚ ਸਾਡੇ ਕੋਲ $a_1 = 2, \frac{a_2}{a_1} = 2, \frac{a_3}{a_2} = 2, \frac{a_4}{a_3} = 2$ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ

(ii) ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ $a_1 = \frac{1}{9}, \frac{a_2}{a_1} = \frac{-1}{3}, \frac{a_3}{a_2} = \frac{-1}{3}, \frac{a_4}{a_3} = \frac{-1}{3}$ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ (iii) ਵਿੱਚ ਪਦ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅੱਗੇ ਵੱਧਦੇ ਹਨ ? ਇਹ ਵੇਖਿਆ ਗਿਆ ਕਿ ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿਚ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ, ਹਰੇਕ ਅਗਲਾ ਪਦ ਪਿਛਲੇ ਪਦ ਨਾਲ ਸਥਿਰ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੱਧਦਾ ਹੈ। (i) ਵਿੱਚ ਇਹ ਸਥਿਰ ਅਨੁਪਾਤ 2 ਹੈ (ii) ਵਿੱਚ ਇਹ $-\frac{1}{3}$ ਹੈ (*iii*) ਵਿੱਚ ਇਹ ਸਥਿਰ ਅਨੁਪਾਤ 0.01 ਹੈ। ਅਜਿਹੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਨੂੰ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਜਾਂ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਸੰਖੇਪ ਵਿਚ G.P. ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ਨੂੰ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਹੇਰਕ ਪਦ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ (ਭਾਵ ਸਿਫ਼ਰ ਨਾ ਹੋਵੇ) ਅਤੇ $\frac{a_{k+1}}{a_k} = r$ (ਸਥਿਰ ਅੰਕ) ਹੈ। $k \geq 1$ ਦੇ ਲਈ।

$a_1 = a$ ਮੰਨਣ 'ਤੇ G.P. ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ : $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$, ਜਿੱਥੇ a, G.P. ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ ਅਤੇ r, G.P. ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਹੈ। (i), (ii) ਅਤੇ (iii) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ G.P. ਦਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 2, $-\frac{1}{3}$, 0.01 ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਹੈ।

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਵਿੱਚ, ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ ਲੱਭਣ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਜਾਂ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਜਿਸ ਵਿਚ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਪਦ ਹੋਣ, ਨੂੰ ਬਿਨਾਂ ਸੂਤਰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਔਖਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਸੂਤਰਾਂ ਦੀ ਸਥਾਪਨਾ ਅਸੀਂ ਅਗਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਕਰਾਂਗੇ।

ਇਹਨਾਂ ਸੂਤਰਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਾਂਗੇ।

a = ਪਹਿਲਾ ਪਦ, r = ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ, l = ਆਖਰੀ ਪਦ,

n = ਪਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ

S_n = ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ

9.5.1 ***G.P. ਦਾ ਆਮ ਪਦ ਜਾਂ ਵਿਆਪਕ ਪਦ (General term of G.P.)*** ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ G.P. ਜਿਸਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ 'a' ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ 'r' ਹੈ ਨੂੰ ਵਿਚਾਰੀਏ। ਇਸ ਦੇ ਕੁਝ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖੋ। ਦੂਜਾ ਪਦ, ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਨੂੰ ਸਾਂਝੇ ਅਨੁਪਾਤ r ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ $a_2 = ar$, ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੀਸਰਾ ਪਦ a_2 ਨੂੰ r ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ $a_3 = a_2 r = ar^2$ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਤੇ ਕੁਝ ਹੋਰ ਪਦ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਪਹਿਲਾ ਪਦ $= a_1 = a = ar^{1-1}$, ਦੂਜਾ ਪਦ $= a_2 = ar = ar^{2-1}$

ਤੀਸਰਾ ਪਦ $= a_3 = ar^2 = ar^{3-1}$

ਚੌਥਾ ਪਦ $= a_4 = ar^3 = ar^{4-1}$

5ਵਾਂ ਪਦ $= a_5 = ar^4 = ar^{5-1}$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਨਮੂਨਾ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ? 16ਵਾਂ ਪਦ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ

$$a_{16} = ar^{16-1} = ar^{15}$$

ਇਸ ਲਈ ਨਮੂਨਾ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ G.P. ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ $a_n = ar^{n-1}$ ਹੈ। ਅਰਥਾਤ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿਚ ਲਿਖੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ :

$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots ar^{n-1}$; $a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1} \ldots$; ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਲੜੀ ਸੀਮਿਤ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਅਸੀਮਿਤ ਹੋਵੇ।

ਲੜੀ $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$ ਜਾਂ $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਲੜੀ ਸੀਮਿਤ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਅਸੀਮਿਤ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

9.5.2. *G.P.* ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ

ਮੰਨ ਲਉ G.P. ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦਾਂ, a ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ.r ਹੈ। G.P. ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਨੂੰ S_n ਨਾਲ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ

$$S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} \quad ... (1)$$

ਸਥਿਤੀ 1 ਜੇਕਰ $r = 1$, ਸਾਡੇ ਕੋਲ $S_n = a + a + a + ... + a$ (n ਪਦ) $= na$

ਸਥਿਤੀ 2 ਜੇਕਰ $r \neq 1$, (1) ਨੂੰ r ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^n \quad ... (2)$$

(2) ਨੂੰ (1), ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਉਣ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $(1 - r)\,S_n = a - ar^n = a(1 - r^n)$

ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $\quad S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ $\quad$ ਜਾਂ $\quad S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

ਉਦਾਹਰਣ 9 : G.P. 5, 25, 125 ਦਾ 10ਵਾਂ ਅਤੇ nਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $a = 5$ ਅਤੇ $r = 5$ ਅਰਥਾਤ, $a_{10} = 5(5)^{10-1} = 5(5)^9 = 5^{10}$

ਅਤੇ $\quad a_n = ar^{n-1} = 5(5)^{n-1} = 5^n$

ਉਦਾਹਰਣ 10 : G.P., 2,8,32, ... ਦਾ ਕਿਹੜਾ ਪਦ 131072 ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ 131072 ਦਿੱਤੀ G.P. ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ ਹੈ। ਇੱਥੇ $a = 2$, $r = 4$ ਹੈ । ਇਸ ਲਈ $131072 = a_n = 2(4)^{n-1}$ ਜਾਂ $65536 = 4^{n-1}$

ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $\quad 4^8 = 4^{n-1}$

ਇਸ ਲਈ $n - 1 = 8$, ਭਾਵ, $n = 9$ ਅਰਥਾਤ 131072 G.P. ਦਾ 9ਵਾਂ ਪਦ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : G.P. ਦਾ ਤੀਸਰਾ ਪਦ 24 ਅਤੇ 6ਵਾਂ ਪਦ 192 ਹੈ। ਇਸ ਦਾ 10ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ, $a_3 = ar^2 = 24 \quad ... (1)$

ਅਤੇ $\quad a_6 = ar^5 = 192 \quad ... (2)$

(2) ਨੂੰ (1) ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $r = 2$

$r = 2$ ਨੂੰ (1) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $a = 6$.

ਇਸ ਲਈ $\quad a_{10} = 6\,(2)^9 = 3072$

ਉਦਾਹਰਣ 12 : G.P. $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + ...$ ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ ਪਹਿਲੇ 5 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $a = 1$ ਅਤੇ $r = \frac{2}{3}$ ਇਸ ਲਈ

$$S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{1-r} = \frac{\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{3}} = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ, $\quad S_5 = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^5\right] = 3 \times \frac{211}{243} = \frac{211}{81}$

ਉਦਾਹਰਣ 13 : G.P. $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, ...$ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਪਦਾਂ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ ਤਾਂ ਜੋ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $\frac{3069}{512}$ ਹੋ ਜਾਵੇ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ n ਪਦਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $a = 3$, $r = \frac{1}{2}$ ਅਤੇ $S_n = \frac{3069}{512}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਕਿਉਂਕਿ $$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{3069}{512} = \frac{3(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}} = 6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

ਜਾਂ $$\frac{3069}{3072} = 1-\frac{1}{2^n}$$

ਜਾਂ $$\frac{1}{2^n} = 1-\frac{3069}{3072} = \frac{3}{3072} = \frac{1}{1024}$$

ਜਾਂ $2^n = 1024 = 2^{10}$, ਜਿਸ ਤੋਂ $n = 10$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 14 : G.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $\frac{13}{12}$ ਹੈ ਅਤੇ ਗੁਣਾ -1 ਹੈ। ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਅਤੇ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $\frac{a}{r}$, a, ar G.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦ ਹਨ ਤਾਂ

$$\frac{a}{r} + ar + a = \frac{13}{12} \qquad \dots (1)$$

ਅਤੇ $$\left(\frac{a}{r}\right)(a)\,(ar) = -1 \qquad \dots (2)$$

(2) ਤੋਂ, ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $a^3 = -1$, ਭਾਵ, $a = -1$ (ਕੇਵਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਲੈਣ 'ਤੇ)

$a = -1$ ਨੂੰ (1) ਵਿਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$-\frac{1}{r} - 1 - r = \frac{13}{12} \text{ ਜਾਂ } 12r^2 + 25r + 12 = 0$$

ਇਹ r ਵਿਚ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $r = -\frac{3}{4}$ ਜਾਂ $-\frac{4}{3}$

ਇਸ ਲਈ G.P. ਦੇ ਤਿੰਨ ਪਦ : $\frac{4}{3}, -1, \frac{3}{4}$, $r = \frac{-3}{4}$ ਲਈ ਅਤੇ $\frac{3}{4}, -1, \frac{4}{3}$, $r = \frac{-4}{3}$ ਲਈ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਅਨੁਕ੍ਰਮ 7, 77, 777, 7777, ... ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾਂ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇਹ G.P. ਨਹੀਂ ਹੈ ਫਿਰ ਵੀ ਇਸ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਢੰਗ ਨਾਲ ਲਿਖ ਕੇ G.P. ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$S_n = 7 + 77 + 777 + 7777 + \dots n \text{ ਪਦਾਂ ਤੱਕ}$$

$$= \frac{7}{9}[9+99+999+9999+ \dots n \text{ ਪਦਾਂ ਤੱਕ}]$$

$$= \frac{7}{9}[(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+(10^4-1)+\dots n \text{ ਪਦਾਂ ਤੱਕ}]$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

$$= \frac{7}{9}[(10+10^2+10^3+\ldots n \text{ ਪਦਾਂ ਤੱਕ}) - (1+1+1+\ldots n \text{ ਪਦਾਂ ਤੱਕ})]$$

$$= \frac{7}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{10-1} - n\right] = \frac{7}{9}\left[\frac{10\,(10^n-1)}{9} - n\right]$$

ਉਦਾਹਰਣ 16 : ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ 2 ਮਾਤਾ-ਪਿਤਾ, 4 ਦਾਦਾ-ਦਾਦੀ, 8 ਪੜਦਾਦਾ-ਪੜਦਾਦੀ ਆਦਿ ਹਨ। ਉਸਦੀ ਦਸਵੀਂ ਪੀੜ੍ਹੀ ਤੱਕ ਪੂਰਵਜਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $a = 2$, $r = 2$ ਅਤੇ $n = 10$

ਜੋੜ ਦਾ ਸੂਤਰ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ $S_n = \dfrac{a\,(r^n-1)}{r-1}$

ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $\quad S_{10} = 2(2^{10} - 1) = 2046$

ਇਸ ਲਈ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਪੂਰਵਜਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 2046 ਹੈ।

9.5.3 *ਜਿਮਾਇਤੀ ਮੱਧ (Geometric Mean (G.M.))* ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਮੱਧ (G.M.) ਸੰਖਿਆ $\sqrt{ab}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 2 ਅਤੇ 8 ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਮੱਧ 4 ਹੈ। ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 2, 4, 8 ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪਦ ਹਨ। ਇਹ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਮੱਧ ਦੀ ਧਾਰਣਾ ਦੇ ਵਿਆਪੀਕਰਣ (Generalise) ਦੇ ਵੱਲ ਵਧਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦਿੱਤੀਆ ਗਈਆਂ ਹਨ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਇੱਛਾ ਅਨੁਸਾਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਰੱਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਕਿ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਇੱਕ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਬਣ ਜਾਵੇ।

ਮੰਨ ਲਉ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ n ਸੰਖਿਆਵਾਂ $G_1, G_2, \ldots, G_n$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ $a, G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n, b$ ਇੱਕ G.P. ਹੈ। ਇਸ ਲਈ b, $(n + 2)$ ਵਾਂ ਪਦ ਹੈ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$$b = ar^{n+1} \quad \text{ਜਾਂ} \quad r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

ਇਸ ਲਈ
$$G_1 = ar = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \quad G_2 = ar^2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}, \quad G_3 = ar^3 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}},$$

$$G_n = ar^n = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

ਉਦਾਹਰਣ 17 : ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ 1 ਅਤੇ 256 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਰੱਖਣ ਤੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਇੱਕ G.P. ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ G_1, G_2, G_3 1 ਅਤੇ 256 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ

$1, G_1, G_2, G_3, 256$ ਇੱਕ G.P. ਹੈ

ਇਸ ਲਈ $\quad 256 = r^4$ ਤੋਂ $r = \pm 4$ (ਕੇਵਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਲੈਣ ਤੇ)

$r = 4$ ਲਈ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ $G_1 = ar = 4$, $G_2 = ar^2 = 16$, $G_3 = ar^3 = 64$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $r = -4$ ਲਈ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $-4, 16$ ਅਤੇ -64 ਹਨ

ਇਸ ਲਈ 1 ਅਤੇ 256 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਅਸੀਂ 4, 16, 64 ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਰਖਾਂਗੇ ਤਾਂ ਜੋ ਬਣਿਆ ਅਨੁਕ੍ਰਮ G.P. ਹੋਵੇਗਾ।

9.6 A.M. (ਅੰਕਗਣਿਤਕ ਮੱਧ) ਅਤੇ G.M. (ਜਿਮਾਇਤੀ ਮੱਧ) ਵਿਚ ਸੰਬੰਧ (Relation between A.M. and G.M.)

ਮੰਨ ਲਉ A ਅਤੇ G ਦੋ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ A.M. ਅਤੇ G.M. ਹਨ ਇਸ ਲਈ

$$A = \frac{a+b}{2} \quad \text{ਅਤੇ} \quad G = \sqrt{ab}$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$$A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0 \qquad \dots (1)$$

(1) ਤੋਂ ਅਸੀਂ $A \geq G$ ਸੰਬੰਧ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 18 : ਜੇਕਰ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦਾ A.M. ਅਤੇ G.M. ਕ੍ਰਮਵਾਰ 10 ਅਤੇ 8 ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\quad \text{A.M.} = \frac{a+b}{2} = 10 \qquad \dots (1)$

ਅਤੇ $\quad \text{G.M.} = \sqrt{ab} = 8 \qquad \dots (2)$

(1) ਅਤੇ (2), ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $\quad a + b = 20 \qquad \dots (3)$

$ab = 64 \qquad \dots (4)$

(3) ਅਤੇ (4) ਤੋਂ a ਅਤੇ b ਦੀਆਂ ਕੀਮਤਾਂ ਤਤਸਮਕ $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$ ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ’ਤੇ

$(a-b)^2 = 400 - 256 = 144$

ਜਾਂ $\quad a - b = \pm 12 \qquad \dots (5)$

(3) ਅਤੇ (5) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ’ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$a = 4, b = 16$ ਜਾਂ $a = 16, b = 4$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ a ਅਤੇ b ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 4, 16 ਜਾਂ 16, 4 ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 9.3

1. G.P. $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \dots$ ਦਾ 20ਵਾਂ ਅਤੇ nਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. G.P. ਦਾ 12ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ 8ਵਾਂ ਪਦ 192 ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ 2 ਹੈ।
3. ਕਿਸੇ G.P. ਦੇ 5ਵਾਂ, 8ਵਾਂ ਅਤੇ 11ਵਾਂ ਪਦ ਕ੍ਰਮਵਾਰ p, q ਅਤੇ s ਹਨ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $q^2 = ps$ ਹੈ।
4. ਇੱਕ G.P. ਦਾ ਚੌਥਾ ਪਦ ਉਸਦੇ ਦੂਜੇ ਪਦ ਦਾ ਵਰਗ ਹੈ ਅਤੇ ਪਹਿਲਾ ਪਦ – 3 ਹੈ। ਇਸਦਾ 7ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦਾ ਕਿਹੜਾ ਪਦ
   (a) $2, 2\sqrt{2}, 4, \dots; 128$ ਹੈ ? $\qquad$ (b) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, \dots; 729$ ਹੈ ?
   (c) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots; \frac{1}{19683}$ ਹੈ?
6. x ਦੇ ਕਿਸ ਮੁੱਲ ਲਈ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $-\frac{2}{7}, x, -\frac{7}{2}$ G.P. ਹਨ ?

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 7 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਹਰੇਕ G.P. ਦਾ ਦਿੱਤੇ ਪਦਾਂ ਤੱਕ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ

7. 0.15, 0.015, 0.0015, ... 20 ਪਦਾਂ ਦਾ
8. $\sqrt{7}, \sqrt{21}, 3\sqrt{7}, \dots$ n ਪਦਾਂ ਦਾ
9. $1, -a, a^2, -a^3, \dots$ n ਪਦਾਂ ਦਾ (ਜੇਕਰ $a \neq -1$).
10. $x^3, x^5, x^7, \dots$ n ਪਦਾਂ ਦਾ (ਜੇਕਰ $x \neq \pm 1$).

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

11. ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ : $\sum_{k=1}^{11}(2+3^k)$

12. ਇੱਕ G.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $\frac{39}{10}$ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ 1 ਹੈ। ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਅਤੇ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

13. G.P. 3, 3^2, 3^3, … ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਪਦਾਂ ਜਾ ਜੋੜ 120 ਹੋਵੇਗਾ ?

14. ਇੱਕ G.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 16 ਹੈ ਅਤੇ ਅਗਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 128 ਹੈ। ਪਹਿਲਾ ਪਦ, ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਅਤੇ G.P ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

15. ਇੱਕ G.P. ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ a = 729,7ਵਾਂ ਪਦ 64 ਤਾਂ S_7 ਪਤਾ ਕਰੋ।

16. ਇੱਕ G.P. ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਪਹਿਲੇ ਦੋ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ – 4 ਅਤੇ ਪੰਜਵਾਂ ਪਦ ਤੀਜੇ ਪਦ ਦਾ 4 ਗੁਣਾ ਹੈ।

17. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ G.P. ਦਾ ਚੌਥਾ, ਦਸਵਾਂ ਅਤੇ 16ਵਾਂ ਪਦ ਕ੍ਰਮਵਾਰ x, y ਅਤੇ z ਹਨ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ x, y, z G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

18. ਅਨੁਕ੍ਰਮ 8, 88, 888, 8888… . ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

19. ਅਨੁਕ੍ਰਮ 2, 4, 8, 16, 32 ਅਤੇ 128, 32, 8, 2, $\frac{1}{2}$ ਦੇ ਸੰਗਤ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਨਾਲ ਬਣੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

20. ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਅਨੁਕ੍ਰਮ a, ar, ar^2, …,ar^{n-1} ਅਤੇ A, AR, AR^2, … AR^{n-1} ਦੇ ਸੰਗਤ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਨਾਲ ਬਣਿਆ ਅਨੁਕ੍ਰਮ G.P. ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

21. ਅਜਿਹੇ ਚਾਰ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ (G.P.) ਵਿਚ ਹੋਣ, ਜਿਸਦਾ ਤੀਸਰਾ ਪਦ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਤੋਂ 9 ਵੱਧ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਪਦ, ਚੌਥੇ ਪਦ ਤੋਂ 18 ਵੱਧ ਹੋਵੇ।

22. ਕਿਸੇ G.P. ਦਾ pਵਾਂ, qਵਾਂ ਅਤੇ rਵਾਂ ਪਦ ਕ੍ਰਮਵਾਰ a, b ਅਤੇ c ਹੈ।

ਸਿੱਧ ਕਰੋ $$a^{q-r}\, b^{r-p} c^{p-q} = 1$$

23. ਇੱਕ G.P. ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਅਤੇ nਵਾਂ ਪਦ ਕ੍ਰਮਵਾਰ a ਅਤੇ b ਹੈ, ਅਤੇ ਜੇਕਰ P, n ਪਦਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ $P^2 = (ab)^n$.

24. ਦਿਖਾਉ ਕਿ G.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਜੋੜ ਅਤੇ $(n + 1)$ਵੇਂ ਪਦ ਤੋਂ $(2n)$ਵੇਂ ਪਦ ਤੱਕ ਦੇ ਜੋੜ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ $\frac{1}{r^n}$ ਹੈ।

25. ਜੇਕਰ a, b, c ਅਤੇ d, G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ, ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ

$$(a^2 + b^2 + c^2)\,(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$$

26. ਅਜਿਹੀਆਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ 3 ਅਤੇ 81 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਰੱਖਣ ਤੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ G.P. ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ।

27. n ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$, a ਅਤੇ b ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਮੱਧ (G.M.) ਹੋਵੇ।

28. ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਉਹਨਾਂ ਦੇ G.M. ਤੋਂ 6 ਗੁਣਾ ਹੈ ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $\left(3+2\sqrt{2}\right):\left(3-2\sqrt{2}\right)$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ।

29. ਜੇਕਰ A ਅਤੇ G ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ A.M. ਅਤੇ G.M., ਹੋਣ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ

$A \pm \sqrt{(A+G)(A-G)}$ ਹਨ।

30. ਕਿਸੇ ਕਲਚਰ (Culture) ਵਿੱਚ ਬੈਕਟੀਰੀਆ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹਰ ਘੰਟੇ ਬਾਅਦ ਦੁੱਗਣੀ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਉਸ ਵਿੱਚ 30 ਬੈਕਟੀਰੀਆ ਸੀ ਤਾਂ ਦੂਜੇ, ਚੌਥੇ ਅਤੇ nਵੇਂ ਘੰਟੇ ਬਾਅਦ ਬੈਕਟੀਰੀਆ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ ?

31. 500 ਰੁਪਏ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ 10% ਸਾਲਾਨਾ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਵਿਆਜ ਨਾਲ 10 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਕਿੰਨੀ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ ? ਪਤਾ ਕਰੋ।

32. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ A.M. ਅਤੇ G.M. ਕ੍ਰਮਵਾਰ 8 ਅਤੇ 5 ਹੈ ਤਾਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

9.7 ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਅਨੁਕ੍ਰਮਾਂ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ (Sum of n terms of Special Series)

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਅਨੁਕ੍ਰਮਾਂ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ, ਜੋ ਕਿ ਹੈ

(i) $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ (ਪਹਿਲੀਆਂ n ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ)

(ii) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ (ਪਹਿਲੀਆਂ n ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ)

(iii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ (ਪਹਿਲੀਆਂ n ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਘਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ)

ਆਉ ਇਹਨਾਂ 'ਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਕਰਕੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ :

(i) $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$, ਤਾਂ $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (9.4 ਭਾਗ ਵੇਖੋ)

(ii) ਇੱਥੇ $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

ਅਸੀਂ ਤਤਸਮਕ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ $\quad k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$

ਕ੍ਰਮਵਾਰ $k = 1, 2, \ldots, n$ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$1^3 - 0^3 = 3(1)^2 - 3(1) + 1$$
$$2^3 - 1^3 = 3(2)^2 - 3(2) + 1$$
$$3^3 - 2^3 = 3(3)^2 - 3(3) + 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n^3 - (n-1)^3 = 3(n)^2 - 3(n) + 1$$

ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਜੋੜਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$n^3 - 0^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n$$

$$n^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + n$$

(i), ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

ਇਸ ਲਈ $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left[n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n\right] = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(iii) ਇੱਥੇ $S_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$

ਅਸੀਂ ਤਤਸਮਕ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, $\quad (k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$

$k = 1, 2, 3 \ldots n$, ਰੱਖਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$2^4 - 1^4 = 4(1)^3 + 6(1)^2 + 4(1) + 1$$
$$3^4 - 2^4 = 4(2)^3 + 6(2)^2 + 4(2) + 1$$
$$4^4 - 3^4 = 4(3)^3 + 6(3)^2 + 4(3) + 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n-1)^4 - (n-2)^4 = 4(n-2)^3 + 6(n-2)^2 + 4(n-2) + 1$$
$$n^4 - (n-1)^4 = 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

$$(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਜੋੜਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$(n+1)^4 - 1^4 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) + 4(1 + 2 + 3 + ... + n) + n$$

$$= 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n \quad ... (1)$$

ਭਾਗ (i) ਅਤੇ (ii) ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{ਅਤੇ} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ (1), ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - \frac{6n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} - n$$

ਜਾਂ $\quad 4S_n = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - n(2n^2 + 3n + 1) - 2n(n+1) - n$

$$= n^4 + 2n^3 + n^2$$

$$= n^2(n+1)^2$$

ਇਸ ਲਈ, $\quad S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = \dfrac{[n(n+1)]^2}{4}$

ਉਦਾਹਰਣ 19 : ਲੜੀ 5 + 11 + 19 + 29 + 41… ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਆਉ ਲਿਖੀਏ

$$S_n = 5 + 11 + 19 + 29 + ... + a_{n-1} + a_n$$

ਜਾਂ $\quad S_n = 5 + 11 + 19 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

ਘਟਾਉਣ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ,

$$0 = 5 + [6 + 8 + 10 + 12 + ... + (n-1) \text{ ਪਦ}] - a_n$$

ਜਾਂ $\quad a_n = 5 + \dfrac{(n-1)[12 + (n-2)\times 2]}{2}$

$$= 5 + (n-1)(n+4) = n^2 + 3n + 1$$

ਇਸ ਲਈ $\quad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(k^2 + 3k + 1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n+2)(n+4)}{3}.$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 20 : ਉਸ ਲੜੀ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ $n\ (n + 3)$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $a_n = n\ (n + 3) \quad = n^2 + 3n$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{n\ (n+1)\ (2n+1)}{6} + \frac{3n\ (n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+5)}{3}.$$

ਅਭਿਆਸ 9.4

ਅਭਿਆਸ 1 ਤੋਂ 7 ਤੱਕ ਹਰੇਕ ਲੜੀ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + ...$

2. $1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + ...$

3. $3 \times 1^2 + 5 \times 2^2 + 7 \times 3^2 + ...$

4. $\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + ...$

5. $5^2 + 6^2 + 7^2 + ... + 20^2$

6. $3 \times 8 + 6 \times 11 + 9 \times 14 + ...$

7. $1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + ...$

ਅਭਿਆਸ 8 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਹਰੇਕ ਲੜੀ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ nਵਾਂ ਪਦ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

8. $n\ (n+1)\ (n+4)$

9. $n^2 + 2^n$

10. $(2n - 1)^2$

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 21 : ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) ਦਾ pਵਾਂ, qਵਾਂ, rਵਾਂ ਅਤੇ sਵਾਂ ਪਦ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ (G.P.) ਵਿੱਚ ਹੈ ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $(p - q)$, $(q - r)$, $(r - s)$ ਵੀ G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ,

$$a_p = a + (p - 1)\ d \qquad ...\ (1)$$
$$a_q = a + (q - 1)\ d \qquad ...\ (2)$$
$$a_r = a + (r - 1)\ d \qquad ...\ (3)$$
$$a_s = a + (s - 1)\ d \qquad ...\ (4)$$

ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ a_p, a_q, a_r ਅਤੇ a_s , G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ

ਇਸ ਲਈ $$\frac{a_q}{a_p} = \frac{a_r}{a_q} = \frac{a_q - a_r}{a_p - a_q} = \frac{q-r}{p-q} \quad \text{(ਕਿਉਂ ?)} \qquad ...\ (5)$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $\frac{a_r}{a_q} = \frac{a_s}{a_r} = \frac{a_r - a_s}{a_q - a_r} = \frac{r-s}{q-r}$ (ਕਿਉਂ ?) ... (6)

ਇਸ ਲਈ (5) ਅਤੇ (6) ਦੁਆਰਾ $\frac{q-r}{p-q} = \frac{r-s}{q-r}$, ਭਾਵ $(p-q)$, $(q-r)$ ਅਤੇ $(r-s)$ G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 22 : ਜੇਕਰ $a, b, c,$ G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ ਅਤੇ $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $x, y, z,$ A.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}} = k$ ਤਾਂ

$a = k^x$, $b = k^y$ ਅਤੇ $c = k^z$. ... (1)

ਕਿਉਂਕਿ a, b, c, G.P. ਵਿਚ ਹਨ ਇਸ ਲਈ

$b^2 = ac$ ... (2)

(1) ਅਤੇ (2), ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$k^{2y} = k^{x+z}$, ਜਿਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $2y = x + z$

ਇਸ ਲਈ, x, y ਅਤੇ z A.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 23 : ਜੇਕਰ a, b, c, d ਅਤੇ p ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ $(a^2 + b^2 + c^2)p^2 - 2(ab + bc + cd)\,p + (b^2 + c^2 + d^2) \le 0$, ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ a, b, c ਅਤੇ d G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ

$(a^2 + b^2 + c^2)\,p^2 - 2\,(ab + bc + cd)\,p + (b^2 + c^2 + d^2) \le 0$ ... (1)

ਪ੍ਰੰਤੂ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ

$= (a^2p^2 - 2abp + b^2) + (b^2p^2 - 2bcp + c^2) + (c^2p^2 - 2cdp + d^2)$,

ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $(ap - b)^2 + (bp - c)^2 + (cp - d)^2 \ge 0$ ... (2)

ਕਿਉਂਕਿ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ

ਇਸ ਲਈ (1) ਅਤੇ (2), ਤੋਂ ਸਾਡੇ ਕੋਲ $(ap - b)^2 + (bp - c)^2 + (cp - d)^2 = 0$

ਜਾਂ $ap - b = 0,\ bp - c = 0,\ cp - d = 0$

ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = p$

ਇਸ ਲਈ a, b, c ਅਤੇ d, G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 24 : ਜੇਕਰ p,q,r, G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਣ $px^2 + 2qx + r = 0$ ਅਤੇ $dx^2 + 2ex + f = 0$ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਮੂਲ ਹਨ ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ $\frac{d}{p}, \frac{e}{q}, \frac{f}{r}$, A.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਸਮੀਕਰਣ $px^2 + 2qx + r = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਹਨ

$$x = \frac{-2q \pm \sqrt{4q^2 - 4rp}}{2p}$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਕਿਉਂਕਿ p, q, r, G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ। $q^2 = pr$; $x = \frac{-q}{p}$ ਪ੍ਰੰਤੂ $\frac{-q}{p}$, $dx^2 + 2ex + f = 0$ ਦਾ ਵੀ ਮੂਲ ਹੈ (ਕਿਉਂ ?) ਇਸ ਲਈ

$$d\left(\frac{-q}{p}\right)^2 + 2e\left(\frac{-q}{p}\right) + f = 0,$$

ਜਾਂ $$dq^2 - 2eqp + fp^2 = 0 \qquad \ldots (1)$$

(1) ਨੂੰ pq^2 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਅਤੇ $q^2 = pr$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਨ 'ਤੇ

$$\frac{d}{p} - \frac{2e}{q} + \frac{fp}{pr} = 0, \text{ ਜਾਂ } \qquad \frac{2e}{q} = \frac{d}{p} + \frac{f}{r}$$

ਇਸ ਲਈ $\frac{d}{p}, \frac{e}{q}, \frac{f}{r}$ A.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਅਧਿਆਇ 9 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ $(m + n)$ਵੇਂ ਅਤੇ $(m - n)$ਵੇਂ ਪਦ ਦਾ ਜੋੜ m ਵੇਂ ਪਦ ਦਾ ਦੁਗਣਾ ਹੈ।
2. ਕਿਸੇ A.P. ਦੀਆਂ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 24 ਅਤੇ ਗੁਣਾ 440 ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ n, $2n$, $3n$ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕ੍ਰਮਵਾਰ S_1, S_2 ਅਤੇ S_3, ਦਿਖਾਉ ਕਿ $S_3 = 3(S_2 - S_1)$
4. 200 ਅਤੇ 400 ਵਿਚਕਾਰ ਸਾਰੀਆ ਉਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕਰੋ ਜੋ 7 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹਨ।
5. 1 ਅਤੇ 100 ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕਰੋ ਜੋ 2 ਜਾਂ 5 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹਨ।
6. ਦੋ ਅੰਕਾ ਵਾਲੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ 4 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ 1 ਬਾਕੀ ਬੱਚਦਾ ਹੋਵੇ।
7. ਸਾਰੇ $x, y \in \mathrm{N}$ ਦੇ ਲਈ $f(x + y) = f(x) f(y)$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਫਲਨ ਹੈ ਕਿ

   $f(1) = 3$ ਅਤੇ $\sum_{x=1}^{n} f(x) = 120$, n ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. ਕਿਸੇ G.P. ਦੇ ਕੁਝ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 315 ਹੈ, ਉਸਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 5 ਅਤੇ 2 ਹੈ। ਆਖ਼ਰੀ ਪਦ ਅਤੇ ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।
9. ਕਿਸੇ G.P. ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ 1 ਹੈ। ਤੀਜੇ ਅਤੇ ਪੰਜਵੇਂ ਪਦ ਦਾ ਜੋੜ 90 ਹੈ। G.P. ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।
10. ਕਿਸੇ G.P. ਦੇ ਤਿੰਨ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 56 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 1, 7 ਅਤੇ 21 ਘਟਾਈਏ ਤਾਂ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।
11. ਕਿਸੇ G.P. ਦੇ ਪਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਸਦੇ ਸਾਰੇ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਟਾਂਕ ਸਥਾਨਾਂ ਵਾਲੇ ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦਾ 5 ਗੁਣਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।
12. ਇੱਕ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਚਾਰ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 56 ਹੈ। ਆਖਰੀ ਚਾਰ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 112 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਸਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ 11 ਹੈ ਤਾਂ ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।
13. ਜੇਕਰ $\frac{a+bx}{a-bx} = \frac{b+cx}{b-cx} = \frac{c+dx}{c-dx} (x \neq 0)$, ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ a, b, c ਅਤੇ d G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

14. ਕਿਸੇ G.P. ਵਿੱਚ S, n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, P ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਅਤੇ R ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $P^2R^n = S^n$.

15. ਕਿਸੇ A.P. ਦਾ pਵਾਂ, qਵਾਂ and rਵਾਂ ਪਦ ਕ੍ਰਮਵਾਰ a, b, ਅਤੇ c ਹੈ ਦਿਖਾਉ ਕਿ

$$(q-r)a + (r-p)b + (p-q)c = 0$$

16. ਜੇਕਰ $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right), b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right), c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ A.P., ਵਿੱਚ ਹਨ, ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ a, b, c, A.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

17. ਜੇਕਰ a, b, c, d, G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(a^n + b^n)$, $(b^n + c^n)$, $(c^n + d^n)$ G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

18. ਜੇਕਰ a ਅਤੇ b, $x^2 - 3x + p = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਹਨ ਅਤੇ c, d , $x^2 - 12x + q = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ a, b, c, d, G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(q + p) : (q - p) = 17:15$।

19. ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ A.M. ਅਤੇ G.M. ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ $m : n$ ਹੈ। ਦਿਖਾਉ ਕਿ

$$a:b=\left(m+\sqrt{m^2-n^2}\right):\left(m-\sqrt{m^2-n^2}\right)$$

20. ਜੇਕਰ a, b, c, A.P. ਵਿੱਚ ਹਨ, b, c, d, G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ ਅਤੇ $\frac{1}{c},\frac{1}{d},\frac{1}{e}$ A.P. ਵਿੱਚ ਹਨ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ a, c, e G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

21. ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਲੜੀਆਂ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $5 + 55 + 555 + \ldots$ (ii) $.6 + .66 + .666 + \ldots$

22. ਲੜੀ ਦਾ 20ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ : $2 \times 4 + 4 \times 6 + 6 \times 8 + \ldots + n$ ਪਦ

23. ਲੜੀ ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ : $3 + 7 + 13 + 21 + 31 + \ldots$

24. ਜੇਕਰ S_1, S_2, S_3 ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪਹਿਲੀਆਂ n ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਘਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $9S_2^2 = S_3(1 + 8S_1)$

25. ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਲੜੀ ਦਾ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ :

$$\frac{1^3}{1}+\frac{1^3+2^3}{1+3}+\frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+\ldots$$

26. ਦਿਖਾਉ ਕਿ $\dfrac{1\times 2^2+2\times 3^2+\ldots+n\times(n+1)^2}{1^2\times 2+2^2\times 3+\ldots+n^2\times(n+1)}=\dfrac{3n+5}{3n+1}$

27. ਇੱਕ ਕਿਸਾਨ ਪੁਰਾਣਾ ਟ੍ਰੈਕਟਰ 12000 ਰੁਪਏ ਵਿਚ ਖਰੀਦਦਾ ਹੈ। ਉਹ 6000 ਰੁਪਏ ਨਕਦ ਭੁਗਤਾਨ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਰਾਸ਼ੀ ਨੂੰ 500 ਰੁਪਏ ਦੀ ਸਾਲਾਨਾ ਕਿਸ਼ਤ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਉਸ ਰਾਸ਼ੀ 'ਤੇ ਜੋ ਭੁਗਤਾਨ ਨਹੀਂ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ। 12% ਸਲਾਨਾ ਵਿਆਜ ਵੀ ਦੇਣ ਦਾ ਵਾਅਦਾ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਕਿਸਾਨ ਨੂੰ ਟ੍ਰੈਕਟਰ ਦੀ ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੀ ਕੀਮਤ ਦੇਣੀ ਪਵੇਗੀ।

28. ਸ਼ਮਸ਼ਾਦ ਅਲੀ 22000 ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਕੂਟਰ ਖਰੀਦਦਾ ਹੈ। ਉਹ 4000 ਰੁਪਏ ਨਕਦ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਰਾਸ਼ੀ ਨੂੰ 1000 ਰੁਪਏ ਸਲਾਨਾ ਕਿਸ਼ਤ ਦੇ ਨਾਲ ਉਸ ਰਾਸ਼ੀ 'ਤੇ ਜੋ ਭੁਗਤਾਨ ਨਹੀਂ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ, 10% ਸਲਾਨਾ ਵਿਆਜ ਵੀ ਦੇਣ ਦਾ ਵਾਅਦਾ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਉਸ ਨੂੰ ਸਕੂਟਰ ਦੀ ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੀ ਕੀਮਤ ਅਦਾ ਕਰਨੀ ਪਵੇਗੀ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

29. ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਆਪਣੇ ਚਾਰ ਮਿੱਤਰਾਂ ਨੂੰ ਪੱਤਰ ਲਿਖਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਹਰੇਕ ਨੂੰ ਉਸਦੀ ਨਕਲ ਕਰਕੇ ਚਾਰ ਹੋਰ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਨੂੰ ਭੇਜਣ ਲਈ ਕਹਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਵੀ ਇਹੀ ਕਰਨ ਲਈ ਕਹਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਹਰੇਕ ਪੱਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਇਹ ਲੜੀ ਜਾਰੀ ਰੱਖੇ। ਇਹ ਮੰਨ ਲਿਆ ਜਾਵੇ ਕਿ ਲੜੀ ਨਾ ਟੁੱਟੇ ਅਤੇ ਇੱਕ ਪੱਤਰ ਦਾ ਡਾਕ ਖਰਚ 50 ਪੈਸੇ ਹੈ ਤਾਂ 8ਵੇਂ ਸਮੂਹ ਤੱਕ ਪੱਤਰ ਭੇਜੇ ਜਾਣ ਦਾ ਖਰਚ ਪਤਾ ਕਰੋ।

30. ਇੱਕ ਆਦਮੀ ਨੇ ਬੈਂਕ ਵਿੱਚ 10000 ਰੁਪਏ 5% ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਨਾਲ ਸਾਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਤੇ ਜਮ੍ਹਾ ਕਰਵਾਏ। ਜਦੋਂ ਤੋਂ ਰਾਸ਼ੀ ਜਮਾਂ ਕਰਵਾਈ ਤਦ ਤੋਂ 15ਵੇਂ ਸਾਲ ਵਿਚ ਉਸ ਦੇ ਖਾਤੇ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀ ਰਾਸ਼ੀ ਹੋ ਗਈ ਅਤੇ 20 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੀ ਰਾਸ਼ੀ ਹੋ ਗਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

31. ਇੱਕ ਨਿਰਮਾਤਾ ਘੋਸ਼ਣਾ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਦੀ ਮਸ਼ੀਨ ਜਿਸ ਦਾ ਮੁੱਲ 15625 ਰੁਪਏ ਹੈ, ਹਰ ਸਾਲ 20% ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਕੀਮਤ ਘੱਟ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। 5 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਮਸ਼ੀਨ ਦਾ ਅੰਦਾਜਨ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

32. ਕਿਸੇ ਕੰਮ ਨੂੰ ਕੁਝ ਦਿਨਾਂ ਵਿਚ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਲਈ 150 ਮਜ਼ਦੂਰ ਲਗਾਏ ਗਏ। ਦੂਜੇ ਦਿਨ 4 ਮਜ਼ਦੂਰਾਂ ਨੇ ਕੰਮ ਛੱਡ ਦਿੱਤਾ, ਤੀਜੇ ਦਿਨ 4 ਹੋਰ ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਨੇ ਕੰਮ ਛੱਡ ਦਿੱਤਾ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਰਾਂ ਨੇ। ਹੁਣ ਕੰਮ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ 8 ਦਿਨ ਵੱਧ ਲੱਗਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਦਿਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੱਸੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਪੂਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ।

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਤੋਂ ਸਾਡਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ, "ਕਿਸੇ ਨਿਯਮ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਲੜੀ ਵਿਚ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਵਿਵਸਥਾ।" ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਨੂੰ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿਚ ਵੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜਾਂ ਉਸ ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3, ..., k\}$ ਦੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਜਿਸ ਵਿਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਸੀਮਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਸੀਮਿਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਸੀਮਿਤ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ ਅਸੀਮਿਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

- ਮੰਨ ਲਉ $a_1, a_2, a_3, ...$ ਇੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਹੈ ਤਾਂ $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜੋੜ ਲੜੀ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਜਿਸ ਲੜੀ ਵਿੱਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਸੀਮਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਉਸਨੂੰ ਸੀਮਿਤ ਲੜੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

- ਇੱਕ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) ਉਹ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਪਦ ਸਮਾਨ ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਨਾਲ ਵੱਧਦੇ ਜਾਂ ਘੱਟਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ A.P. ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਸੀਂ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਨੂੰ a, ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਨੂੰ d ਅਤੇ ਆਖਰੀ ਪਦ ਨੂੰ l ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। A.P. ਦਾ ਆਮ ਪਦ ਜਾਂ nਵਾਂ ਪਦ $a_n = a + (n-1)d$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

  A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $S_n = \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right] = \frac{n}{2}(a+l)$ ਹੈ।

- ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦਾ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਮੱਧ A, $\frac{a+b}{2}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਅਨੁਕ੍ਰਮ a, A, b, A.P. ਵਿੱਚ ਹੈ।

- ਇੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਨੂੰ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਜਾਂ G.P., ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਪਦ ਆਪਣੇ ਪਿਛਲੇ ਪਦ ਤੋਂ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿਚ ਵੱਧਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਰ ਅਨੁਪਾਤ ਨੂੰ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਸੀਂ G.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਨੂੰ a ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਨੂੰ r ਨਾਲ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। G.P. ਦਾ ਆਮ ਪਦ ਜਾਂ nਵਾਂ ਪਦ $a_n = ar^{n-1}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

  G.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦ ਦਾ ਜੋੜ $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ ਜਾਂ $\frac{a(1-r^n)}{1-r}$, ਜੇਕਰ $r \neq 1$

- ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਮੱਧ (G.M.) $\sqrt{ab}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਅਨੁਕ੍ਰਮ a, G, b, G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਸਬੂਤ ਮਿਲਦੇ ਹਨ ਕਿ 4000 ਸਾਲ ਪਹਿਲਾਂ ਬੇਬੀ ਲੋਨੀਆ ਦੇ ਵਾਸੀਆਂ ਨੂੰ ਅੰਕਗਣਿਤ ਅਤੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਨੁਕ੍ਰਮਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਸੀ। Boethius (510 A.D.) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅੰਕਗਣਿਤ ਅਤੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਨੁਕ੍ਰਮਾਂ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਸ਼ੁਰੂ ਦੇ ਯੂਨਾਨੀ ਲੇਖਕਾਂ ਨੂੰ ਸੀ। ਭਾਰਤੀ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿਚ ਆਰੀਆ ਭੱਟ (476 A.D.) ਨੇ ਪਹਿਲੀ ਵਾਰ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਅਤੇ ਘਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਆਪਣੀ ਮਸ਼ਹੂਰ ਪੁਸਤਕ 'ਆਰੀਆ ਭਟਿਅਮ' ਜੋ ਲਗਭਗ 499 A.D. ਵਿੱਚ ਲਿਖੀ ਗਈ ਸੀ, ਵਿਚ ਦਿੱਤਾ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ pਵਾਂ ਪਦ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ, ਅੰਕਗਣਿਤਕ ਲੜੀ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦਾ ਸੂਤਰ ਵੀ ਦਿੱਤਾ। ਹੋਰ ਮਹਾਨ ਭਾਰਤੀ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ ਬ੍ਰਹਮਗੁਪਤ (598 A.D.), ਮਹਾਵੀਰ (850 A.D.) ਅਤੇ ਭਾਸਕਰ (1114–1185 A.D.) ਨੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਅਤੇ ਘਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤਾ। ਇੱਕ ਹੋਰ ਖਾਸ ਕਿਸਮ ਦਾ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਜਿਸ ਦੀ ਗਣਿਤ ਵਿਚ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਵਰਤੋਂ ਹੈ ਜੋ ਫ਼ਿੱਬੋਨਾਕੀ (1170–1250 A.D.) ਨੇ ਦਿੱਤਾ। ਸਤਾਰ੍ਹਵੀਂ ਸਦੀ ਵਿੱਚ ਲੜੀਆਂ ਦਾ ਵਰਗੀਕਰਣ ਖਾਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ। 1671 ਈ: ਵਿਚ James Gregory ਨੇ ਅਸੀਮਿਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਅਸੀਮਿਤ ਲੜੀ ਸ਼ਬਦ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ। ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਅਤੇ ਸਮੂਹ ਸਿਧਾਂਤਾ ਦੇ ਸੰਪੂਰਨ ਵਿਕਾਸ ਦੇ ਉਪਰੰਤ ਹੀ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਲੜੀਆਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਜਾਣਕਾਰੀ ਚੰਗੇ ਢੰਗ ਨਾਲ ਪੇਸ਼ ਹੋ ਸਕੀ।

— ❖ —

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਧਿਆਇ 10

ਸਿੱਧੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ
(Straight Lines)

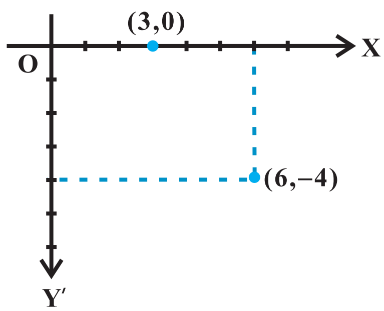
❖ *Geometry, as a logical system, is a means and even the most powerful means to make children feel the strength of the human spirit that is of their own spirit. – H. FREUDENTHAL* ❖

10.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਅਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀਆਂ ਤੋਂ ਦੋ ਵਿਮਾਈ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਿਮਾਇਤੀ ਤੋਂ ਜਾਣੂ ਹਾਂ। ਮੁੱਖ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇਹ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਹੈ। ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦਾ ਸੁਚੱਜੇ ਢੰਗ ਨਾਲ ਅਧਿਐਨ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾ ਮਸ਼ਹੂਰ ਫਰਾਂਸੀਸੀ ਦਾਰਸ਼ਨਿਕ ਅਤੇ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ Rene Descartes ਨੇ 1637 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਆਪਣੀ ਪੁਸਤਕ La Geometry ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਇਸ ਪੁਸਤਕ ਤੋਂ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਵਿੱਚ ਵਕਰ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਚਾਰ ਅਤੇ ਸੰਬੰਧਿਤ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਵਿਧੀਆਂ ਦਾ ਅਰੰਭ ਹੋਇਆ। ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਤੇ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਦਾ ਪਰਿਣਾਮੀ ਸੰਯੋਜਨ ਹੁਣ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣਾਤਮਕ ਜਿਮਾਇਤੀ ਨੂੰ ਪੇਸ਼ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਪਿਛਲੀਆਂ ਸ਼ੇਣੀਆਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਸ਼ੁਰੂ ਕੀਤਾ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ-ਧੁਰੇ, ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਤਲ, ਤਲ ਵਿਚ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਆਲੇਖਿਤ ਕਰਨਾ, ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ, ਵਿਭਾਜਨ ਸੂਤਰ ਆਦਿ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ। ਇਹ ਸਾਰੀਆਂ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦਾ ਅਧਾਰ ਹਨ।

Rene Descartes (1596 -1650)

ਆਉ ਪਿਛਲੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦੀ ਦੁਹਰਾਈ ਕਰੀਏ। ਦੁਹਰਾਈ ਲਈ XY ਤਲ ਵਿੱਚ (6, –4) ਅਤੇ (3, 0) ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 10.1 ਵਿਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10.1

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (6, –4) ਧਨ x ਧੁਰੇ ਤੇ y-ਧੁਰੇ ਤੋਂ 6 ਇਕਾਈ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਅਤੇ ਰਿਣ-y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ x-ਧੁਰੇ ਤੋਂ 4 ਇਕਾਈ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂ (3, 0) ਧਨ। x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ y-ਧੁਰੇ ਤੋਂ 3 ਇਕਾਈ ਦੂਰੀ ਅਤੇ x-ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਸਿਫ਼ਰ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਸੂਤਰਾਂ ਦਾ ਵੀ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ।

I. P (x_1, y_1) ਅਤੇ Q (x_2, y_2) ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਹੈ।

$$PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ (6, – 4) ਅਤੇ (3, 0) ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਹੈ।

$$\sqrt{(3-6)^2+(0+4)^2}=\sqrt{9+16}=5 \text{ ਇਕਾਈ}$$

II. (x_1, y_1) ਅਤੇ (x_2, y_2) ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ ਅੰਦਰੂਨੀ $m : n$ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ $\left(\dfrac{m x_2+n x_1}{m+n}, \dfrac{m y_2+n y_1}{m+n}\right)$.

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਬਿੰਦੂਆਂ A (1, –3) ਅਤੇ B (–3, 9) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ ਅੰਦਰੂਨੀ ਅਨੁਪਾਤ 1: 3 ਵਿਚ ਵੰਡਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $x = \frac{1.(-3)+3.1}{1+3} = 0$ ਅਤੇ $y = \frac{1.9+3.(-3)}{1+3} = 0$ ਹਨ।

III. ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ $m = n$ ਤਾਂ (x_1, y_1) ਅਤੇ (x_2, y_2) ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ਹਨ।

IV. ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਜਿਸਦੇ ਸਿਖਰ (x_1, y_1), (x_2, y_2) ਅਤੇ (x_3, y_3) ਹਨ।

$$\frac{1}{2}\left| x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$$

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਜਿਸਦੇ ਸਿਖਰ (4, 4), (3, – 2) ਅਤੇ (– 3, 16) ਹੈ।

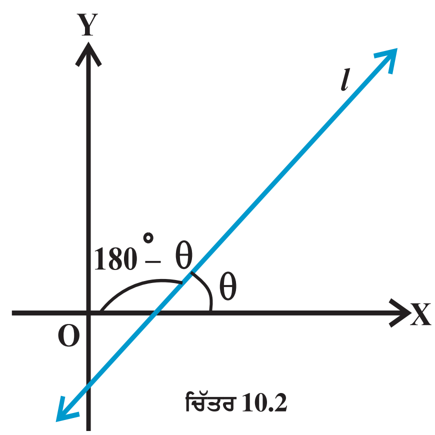
$$\frac{1}{2}\left| 4(-2-16)+3(16-4)+(-3)(4+2)\right| = \frac{|-54|}{2} = 27$$

ਟਿੱਪਣੀ ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ ਤਾਂ ਤਿੰਨੋਂ ਬਿੰਦੂ A, B ਅਤੇ C ਇੱਕ ਹੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਹੋਣਗੇ ਅਰਥਾਤ ਉਹ ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿਚ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਿਮਾਇਤੀ ਤੇ ਅਧਿਐਨ ਨੂੰ ਸਰਲ ਜਿਮਾਇਤੀ ਚਿੱਤਰ-ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਲਈ ਜਾਰੀ ਰੱਖਾਂਗੇ। ਇਸ ਦੀ ਸਰਲਤਾ ਦੇ ਹੋਣ ਤੇ ਵੀ ਰੇਖਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦੀ ਇਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਧਾਰਨਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਡੇ ਰੋਜਾਨਾ ਜੀਵਨ ਦੇ ਅਨੁਭਵ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਹੀ ਰੋਚਕ ਅਤੇ ਉਪਯੋਗੀ ਰੂਪ ਨਾਲ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਇਥੇ ਸਾਡਾ ਮੁੱਖ ਉਦੇਸ਼ ਰੇਖਾ ਦਾ ਬੀਜਗਣਿਤਕ ਨਿਰੂਪਣ ਹੈ ਜਿਸ ਲਈ ਢਲਾਣ (Slope) ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਬਹੁਤ ਹੀ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ।

10.2 ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ (Slope of a Line)

ਇੱਕ ਰੇਖਾ, ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਤਲ ਵਿੱਚ, x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ ਦੋ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਜੋ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸੰਪੂਰਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਕੋਣ θ (ਮੰਨ ਲਉ) ਜੋ ਰੇਖਾ l, x-ਧੁਰੇ ਦੀ ਧਨਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਨਾਲ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਘੜੀ ਦੀ ਸੂਈ ਦੇ ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿਚ ਮਾਪਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਰੇਖਾ l ਦਾ ਝੁਕਾਅ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ $0° \le \theta \le 180°$ (ਚਿੱਤਰ 10.2)।



ਚਿੱਤਰ 10.2

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਜਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਝੁਕਾਅ 0° ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਕ ਖੜ੍ਹੀ ਰੇਖਾ (y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਜਾਂ ਸੰਪਾਤੀ) ਦਾ ਝੁਕਾਅ 90° ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1 ਜੇਕਰ θ ਕਿਸੇ ਰੇਖਾ l ਦਾ ਝੁਕਾਅ ਹੈ ਤਾਂ tan θ ਨੂੰ ਰੇਖਾ l ਦੀ ਢਲਾਣ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਹ ਰੇਖਾ ਜਿਸ ਦਾ ਝੁਕਾਅ 90° ਹੈ, ਦੀ ਢਲਾਣ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਨੂੰ m ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $m = \tan\theta, \theta \ne 90°$

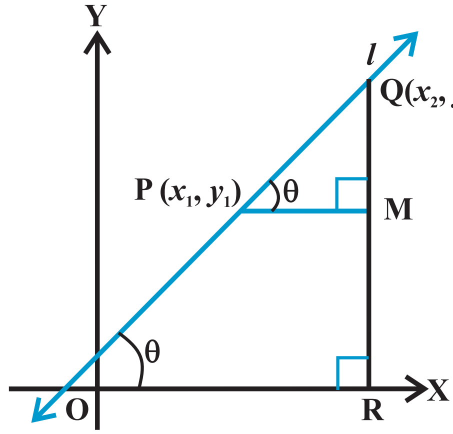
ਇਹ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ x-ਧੁਰੇ ਦੀ ਢਲਾਣ 0 ਹੈ y-ਧੁਰੇ ਦੀ ਢਲਾਣ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

10.2.1 ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ, ਜਦੋਂ ਉਸ ਉੱਪਰ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਣ

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਉੱਪਰ ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਨੂੰ ਉਸ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿਚ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 10. 3 (i)

ਮੰਨ ਲਉ ਦੋ ਬਿੰਦੂ P(x_1, y_1) ਅਤੇ Q(x_2, y_2) ਨਾ ਖੜ੍ਹੀ (non vertical) ਰੇਖਾ ਤੇ ਹਨ ਜਿਸ ਦਾ ਝੁਕਾਅ θ ਹੈ। ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ $x_1 \neq x_2$ ਹੈ, ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਰੇਖਾ x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਲੰਬ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਦੀ ਢਲਾਣ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗੀ। ਰੇਖਾ ਦਾ ਝੁਕਾਅ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਜਾਂ ਅਧਿਕ ਕੋਣ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਦੋਨਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਵਿਚਾਰਦੇ ਹਾਂ।

ਲੰਬ QR, x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ PM ਲੰਬ RQ ਖਿੱਚੋ ਜਿਵੇਂ ਚਿੱਤਰ 10.3 (i) ਅਤੇ (ii) ਵਿਚ ਦਿਖਾਇਆ ਹੈ।

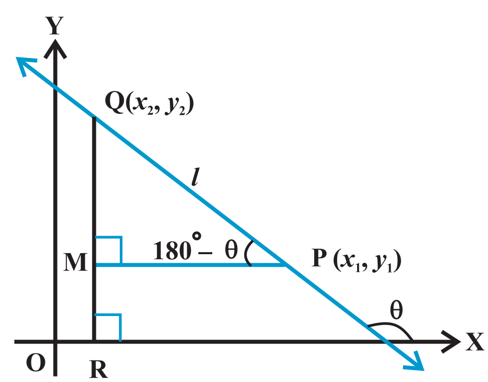
ਸਥਿਤੀ 1 ਜਦੋਂ ਕੋਣ θ ਨਿਊਨਕੋਣ ਹੈ

ਚਿੱਤਰ 10.3 (i) ਵਿੱਚ, $\angle MPQ = \theta$ ...(1)

ਇਸ ਲਈ, ਰੇਖਾ l ਦੀ ਢਲਾਣ $= m = \tan\theta$.

ਪ੍ਰੰਤੂ ΔMPQ, ਵਿਚ ਸਾਡੇ ਕੋਲ $\tan\theta = \dfrac{MQ}{MP} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. ...(2)

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਅਤੇ (2), ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



ਚਿੱਤਰ 10. 3 (ii)

ਸਥਿਤੀ 2. ਜਦੋਂ ਕੋਣ θ ਅਧਿਕ ਕੋਣ ਹੈ

ਚਿੱਤਰ 10.3 (ii), ਵਿੱਚ ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$\angle MPQ = 180° - \theta$

ਇਸ ਲਈ, $\theta = 180° - \angle MPQ$

ਹੁਣ ਰੇਖਾ l ਦੀ ਢਲਾਣ

$$m = \tan\theta$$
$$= \tan(180° - \angle MPQ) = -\tan \angle MPQ$$
$$= -\frac{MQ}{MP} = -\frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

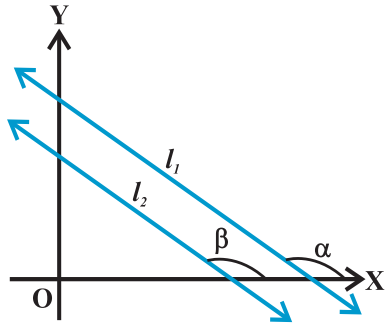
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਨਤੀਜੇ ਵਜੋਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋਨਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿਚ ਰੇਖਾ l ਦੀ ਢਲਾਣ ਜੋ ਬਿੰਦੂਆਂ (x_1, y_1) ਅਤੇ (x_2, y_2) ਵਿਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ :

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ਹੈ।

10.2.2 ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਅਤੇ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਹੋਣ ਦੀ ਢਲਾਣ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸ਼ਰਤ

ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਤਲ ਵਿਚ ਨਾ-ਖੜ੍ਹਵੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ l_1 ਅਤੇ l_2 ਦੀ ਢਲਾਣ ਕ੍ਰਮਵਾਰ m_1 ਅਤੇ m_2 ਹੈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਝੁਕਾਅ ਕ੍ਰਮਵਾਰ α ਅਤੇ β ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10. 4

ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ l_1 ਅਤੇ l_2 ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਤਾਂ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਝੁਕਾਅ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਭਾਵ

$\alpha = \beta$ ਅਤੇ $\tan \alpha = \tan \beta$

ਇਸ ਲਈ $m_1 = m_2$, ਭਾਵ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਢਲਾਣ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਇਸ ਦੇ ਉਲਟ ਜੇਕਰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ l_1 ਅਤੇ l_2 ਦੀ ਢਲਾਣ ਬਰਾਬਰ ਹੈ

ਅਰਥਾਤ

$$m_1 = m_2$$

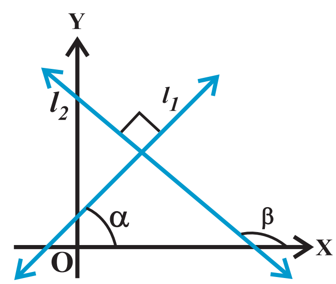
ਤਾਂ $\tan \alpha = \tan \beta$

ਟੇਂਜੈਂਟ ਫਲਨ ਦੀ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਤੋਂ ($0°$ ਅਤੇ $180°$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ), $\alpha = \beta$.

ਇਸ ਲਈ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਨਾ-ਖੜ੍ਹਵੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ l_1 ਅਤੇ l_2 ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਢਲਾਣ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ l_1 ਅਤੇ l_2 ਲੰਬ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 10.5), ਤਾਂ $\beta = \alpha + 90°$



ਚਿੱਤਰ 10. 5

ਇਸ ਲਈ, $\tan \beta = \tan (\alpha + 90°)$

$$= -\cot \alpha = -\frac{1}{\tan \alpha}$$

ਅਰਥਾਤ $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$

ਜਾਂ $m_1 m_2 = -1$

ਇਸ ਦੇ ਉਲਟ ਜੇਕਰ $m_1 m_2 = -1$, ਅਰਥਾਤ $\tan \alpha \tan \beta = -1$

ਤਾਂ $\tan \alpha = -\cot \beta = \tan (\beta + 90°)$ ਜਾਂ $\tan (\beta - 90°)$

ਇਸ ਲਈ, α ਅਤੇ β ਦਾ ਅੰਤਰ $90°$ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਰਥਾਤ ਰੇਖਾਵਾਂ l_1 ਅਤੇ l_2 ਆਪਸ ਵਿਚ ਲੰਬ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਨਾ ਖੜ੍ਹਵੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਆਪਸ ਵਿਚ ਲੰਬ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਢਲਾਣ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੀ ਰਿਣਾਤਮਕ ਉਲਟ (ਗੁਣਾਤਮਕ) ਹੋਣ।

ਅਰਥਾਤ $$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

ਜਾਂ $$m_1 m_2 = -1.$$

ਆਉ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੇਖੀਏ :

ਉਦਾਹਰਣ 1: ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਢਲਾਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ

(a) ਬਿੰਦੂਆਂ (3, – 2) ਅਤੇ (–1, 4) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ,

(b) ਬਿੰਦੂਆਂ (3, – 2) ਅਤੇ (7, – 2) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ,

(c) ਬਿੰਦੂਆਂ (3, – 2) ਅਤੇ (3, 4) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ,

(d) ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਨਾਲ 60° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ

ਹੱਲ : (a) ਬਿੰਦੂਆਂ (3, – 2) ਅਤੇ (– 1, 4) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਹੈ

$$m = \frac{4-(-2)}{-1-3} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}.$$

(b) ਬਿੰਦੂਆਂ (3, – 2) ਅਤੇ (7, – 2) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਹੈ

$$m = \frac{-2-(-2)}{7-3} = \frac{0}{4} = 0$$

(c) ਬਿੰਦੂਆਂ (3, – 2) ਅਤੇ (3, 4) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਹੈ

$$m = \frac{4-(-2)}{3-3} = \frac{6}{0},$$ ਜੋ ਕਿ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(d) ਇੱਥੇ ਰੇਖਾ ਦਾ ਝੁਕਾਅ $\alpha = 60°$ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ

$$m = \tan 60° = \sqrt{3}$$

10.2.3 ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦਾ ਕੋਣ

ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੀ ਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਰੇਖਾਵਾਂ ਬਾਰੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਾਂ ਤਾਂ ਇਹ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ ਜਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਬਾਰੇ, ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਢਲਾਣ ਦੇ ਅਧਾਰਿਤ, ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

ਮੰਨ ਲਉ L_1 ਅਤੇ L_2 ਦੋ ਨਾ-ਖੜ੍ਹਵੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਢਲਾਣ ਕ੍ਰਮਵਾਰ m_1 ਅਤੇ m_2 ਹੈ। ਜੇਕਰ α_1 ਅਤੇ α_2 ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਰੇਖਾਵਾਂ L_1 ਅਤੇ L_2 ਦੇ ਝੁਕਾਅ ਹਨ, ਤਾਂ

$$m_1 = \tan\alpha_1 \quad \text{ਅਤੇ} \quad m_2 = \tan\alpha_2$$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਦੋਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਸਿਖਰ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਦੋ ਜੋੜੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣਦੇ ਹਨ ਕਿ ਕੋਈ ਵੀ ਦੋ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 180° ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ θ ਅਤੇ ϕ ਰੇਖਾਵਾਂ L_1 ਅਤੇ L_2 (ਚਿੱਤਰ 10.6) ਵਿੱਚ ਦੋ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣ ਹਨ ਤਾਂ

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1 \text{ ਅਤੇ } \alpha_1, \alpha_2 \neq 90°$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

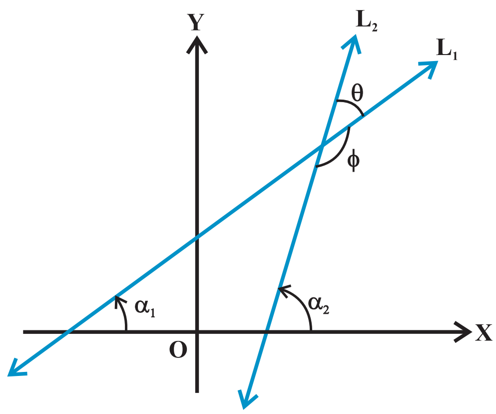
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਸ ਲਈ $\tan\theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \dfrac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1+\tan\alpha_1\tan\alpha_2} = \dfrac{m_2 - m_1}{1+m_1m_2}$ (ਕਿਉਂਕਿ $1 + m_1m_2 \neq 0$)

ਅਤੇ $\phi = 180° - \theta$ ਇਸ ਲਈ

$$\tan\phi = \tan(180° - \theta) = -\tan\theta = -\frac{m_2 - m_1}{1+m_1m_2}, \text{ as } 1 + m_1m_2 \neq 0$$

ਹੁਣ ਦੋ ਸਥਿਤੀਆਂ ਪੈਦਾ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ :



ਚਿੱਤਰ 10. 6

ਸਥਿਤੀ 1 ਜੇਕਰ $\dfrac{m_2 - m_1}{1+m_1m_2}$ ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ ਤਾਂ $\tan\theta$ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ $\tan\phi$ ਰਿਣਾਤਮਕ, ਜਿਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ θ ਨਿਊਣ ਕੋਣ ਅਤੇ ϕ ਅਧਿਕ ਕੋਣ ਹੋਵੇਗਾ।

ਸਥਿਤੀ 2 ਜੇਕਰ $\dfrac{m_2 - m_1}{1+m_1m_2}$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ, ਤਾਂ $\tan\theta$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ $\tan\phi$ ਧਨਾਤਮਕ ਜਿਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ θ ਅਧਿਕ ਕੋਣ ਅਤੇ ϕ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਹੋਵੇਗਾ।

ਅਰਥਾਤ ਰੇਖਾਵਾਂ L_1 ਅਤੇ L_2 ਦੀਆਂ ਢਲਾਣਾਂ m_1 ਅਤੇ m_2 ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਨਿਊਨ ਕੋਣ (ਮੰਨ ਲਉ θ)

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1+m_1m_2}\right|, \text{ ਜਿੱਥੇ } 1+m_1m_2 \neq 0 \qquad \text{... (1)}$$

ਅਧਿਕ ਕੋਣ (ਮੰਨਿਆ ਕਿ ϕ) $\phi = 180^0 - \theta$ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 2: ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ $\dfrac{\pi}{4}$ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ $\dfrac{1}{2}$, ਹੈ ਦੂਜੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ m_1 ਅਤੇ m_2 ਢਲਾਣ ਵਾਲੀਆਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1+m_1m_2}\right| \qquad \text{... (1)}$$

ਮੰਨ ਲਉ $m_1 = \dfrac{1}{2}$, $m_2 = m$ ਅਤੇ $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

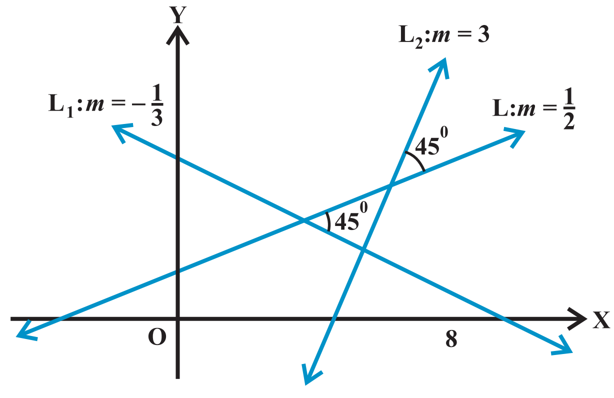
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਹੁਣ ਇਹਨਾਂ ਕੀਮਤਾਂ ਨੂੰ (1), ਵਿਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ

$$\tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{m-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}m}\right| \quad \text{ਜਾਂ} \quad 1 = \left|\frac{m-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}m}\right|,$$

ਜਿਸ ਤੋਂ $\frac{m-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}m} = 1$ ਜਾਂ $\frac{m-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}m} = -1$

ਅਰਥਾਤ $m = 3$ ਜਾਂ $m = -\frac{1}{3}$



ਚਿੱਤਰ 10.7

ਇਸ ਲਈ ਦੂਜੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ 3 ਜਾਂ $-\frac{1}{3}$ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 10.7 ਵਿੱਚ ਦੋ ਉੱਤਰ ਦਾ ਕਾਰਨ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3: (–2, 6) ਅਤੇ (4, 8) ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ (8, 12) ਅਤੇ (x, 24) ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾਂ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ। x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : (– 2, 6) ਅਤੇ (4, 8) ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ

$$m_1 = \frac{8-6}{4-(-2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(8, 12) ਅਤੇ (x, 24) ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ

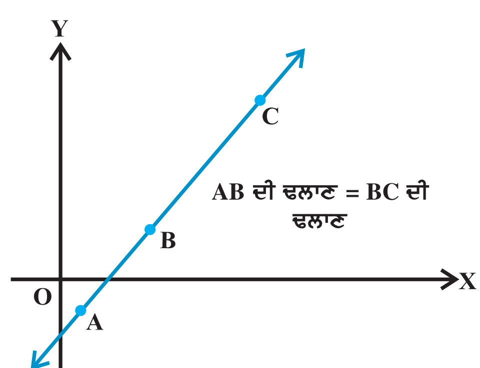
$$m_2 = \frac{24-12}{x-8} = \frac{12}{x-8}$$

ਕਿਉਂਕਿ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਲੰਬ ਹਨ

$m_1 m_2 = -1$, ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$\frac{1}{3} \times \frac{12}{x-8} = -1 \quad \text{ਜਾਂ} \quad x = 4.$$

10.2.4 *ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਸਮਰੇਖਿਕਤਾ (Collinearity)* ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਢਲਾਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਢਲਾਣ ਬਰਾਬਰ ਅਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀਆਂ ਹੋਣ ਤਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋਣਗੀਆਂ। ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ A, B ਅਤੇ C, XY-ਤਲ ਵਿਚ ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਤੇ ਹੋਣਗੇ ਅਰਥਾਤ ਤਿੰਨੋ ਬਿੰਦੂ ਸਮਰੇਖੀ ਹੋਣਗੇ (ਚਿੱਤਰ 10.8) ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ AB ਦੀ ਢਲਾਣ = BC ਦੀ ਢਲਾਣ।



ਚਿੱਤਰ 10.8

ਉਦਾਹਰਣ 4: ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂ P (h, k), Q (x_1, y_1) ਅਤੇ R (x_2, y_2) ਇੱਕ ਹੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਬਿੰਦੂ ਹਨ। ਦਿਖਾਉ ਕਿ $(h - x_1)(y_2 - y_1) = (k - y_1)(x_2 - x_1)$

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਬਿੰਦੂ P, Q ਅਤੇ R ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ

PQ ਦੀ ਢਲਾਣ = QR ਦੀ ਢਲਾਣ, ਜੋ ਕਿ, $\frac{y_1-k}{x_1-h} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

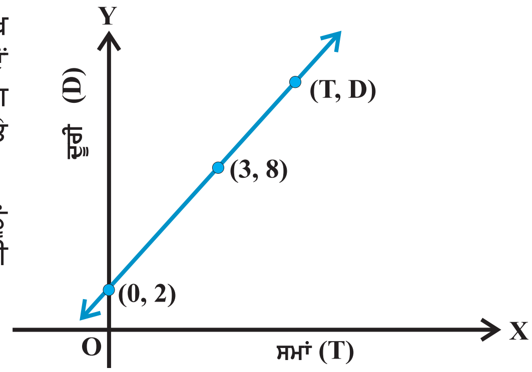
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਜਾਂ $\dfrac{k-y_1}{h-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

ਜਾਂ $(h-x_1)(y_2-y_1) = (k-y_1)(x_2-x_1)$

ਉਦਾਹਰਣ 5: ਚਿੱਤਰ 10.9 ਵਿੱਚ, ਰੇਖੀ ਗਤੀ ਦਾ ਸਮੇਂ ਅਤੇ ਦੂਰੀ ਦਾ ਆਲੇਖ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਸਮੇਂ ਅਤੇ ਦੂਰੀ ਦੇ ਦੋ ਸਥਾਨ ਜਦੋਂ T = 0, D = 2 ਅਤੇ ਜਦੋਂ T = 3, D = 8 ਹੈ ਦਰਜ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਢਲਾਣ ਦੀ ਧਾਰਣਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਗਤੀ ਦਾ ਨਿਯਮ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਰਥਾਤ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੂਰੀ, ਸਮੇਂ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10.9

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ (T, D) ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਹੈ। ਜਿੱਥੇ T ਸਮੇਂ ਤੇ D ਦੂਰੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਬਿੰਦੂ (0, 2), (3, 8) ਅਤੇ (T, D) ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\frac{8-2}{3-0}=\frac{D-8}{T-3} \quad \text{ਜਾਂ} \quad 6(T-3)=3(D-8)$$

ਜਾਂ $D = 2(T+1)$,

ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

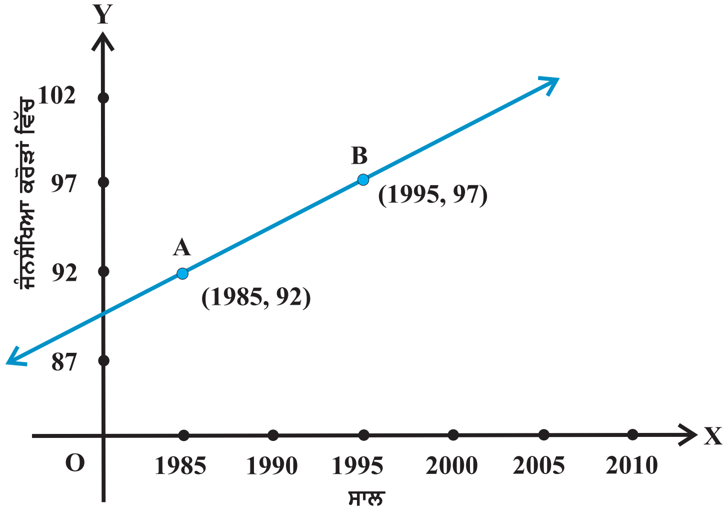
ਅਭਿਆਸ 10.1

1. ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਤਲ (Cartesian Plane) ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਖਿੱਚੋ, ਜਿਸਦੇ ਸਿਖਰ (– 4, 5), (0, 7), (5, – 5) ਅਤੇ (– 4, –2) ਹਨ। ਇਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਇੱਕ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਜਿਸਦੀ ਭੁਜਾ $2a$ ਹੈ, ਦਾ ਅਧਾਰ y-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਅਧਾਰ ਦਾ ਮੱਧ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. P (x_1, y_1) ਅਤੇ Q (x_2, y_2) ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ : (i) PQ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ। (ii) PQ, x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ।
4. x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਬਿੰਦੂਆਂ (7, 6) ਅਤੇ (3, 4) ਤੋਂ ਬਰਾਬਰ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੈ।
5. ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ P (0, – 4) ਅਤੇ B (8, 0) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ।
6. ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (4, 4), (3, 5) ਅਤੇ (–1, –1) ਸਮਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ ਹਨ।
7. ਉਸ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਧਨਾਤਮਕ y-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਘੜੀ ਦੀ ਸੂਈ ਦੇ ਉਲਟ 30° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ।
8. x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ $(x, -1)$, (2,1) ਅਤੇ (4, 5) ਸਮਰੇਖੀ ਹੋਣ।
9. ਦੂਰੀ ਸੂਤਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (– 2, – 1), (4, 0), (3, 3) ਅਤੇ (–3, 2) ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ ਹਨ।
10. x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ (3,–1), (4,–2) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ 'ਤੇ ਬਣੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
11. ਕਿਸੇ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ, ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਤੋਂ ਦੁੱਗਣੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਦੋਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੇ ਕੋਣ ਦਾ ਟੇਂਜੈਂਟ $\frac{1}{3}$ ਹੈ ਤਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਢਲਾਣਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।
12. ਇੱਕ ਰੇਖਾ (x_1, y_1) ਅਤੇ (h, k) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ (Slope) m ਹੈ ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $k-y_1=m(h-x_1)$
13. ਜੇਕਰ ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂ $(h, 0)$, (a, b) ਅਤੇ $(0, k)$ ਇੱਕ ਰੇਖਾਂ 'ਤੇ ਹੋਣ ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $\frac{a}{h}+\frac{b}{k}=1$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

14. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਜੰਨਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਸਾਲ ਦੇ ਗਰਾਫ਼ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ (ਚਿੱਤਰ 10.10), ਰੇਖਾ AB ਦੀ ਢਲਾਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਸਾਲ 2010 ਵਿੱਚ ਜੰਨਸੰਖਿਆ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ ?



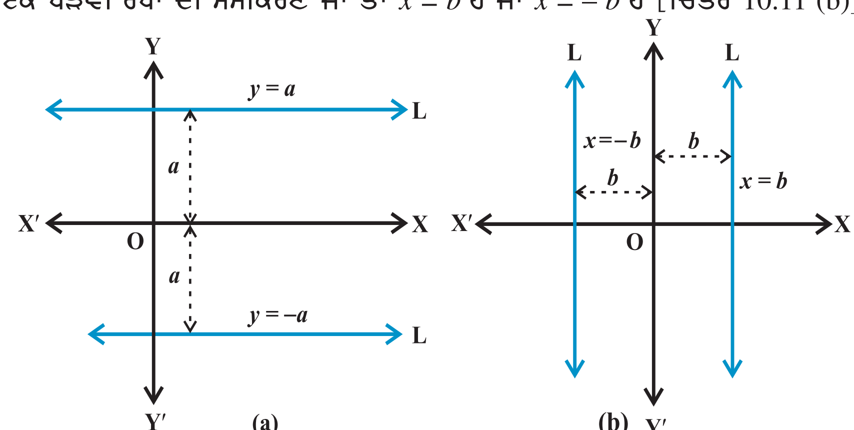
ਚਿੱਤਰ 10.10

10.3 ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਰੂਪ *(Various forms of the equation of a line)*

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਤਲ ਵਿੱਚ ਰੇਖਾ ਤੇ ਅਨੰਤ ਬਿੰਦੂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿਚਕਾਰ ਇਹ ਸੰਬੰਧ ਸਾਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿਚ ਸਹਾਇਕ ਹੈ :

ਅਸੀਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਬਿੰਦੂ, ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਉੱਤਰ ਇਹ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ ਲਈ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਹੋਣ ਦੀ ਇਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸ਼ਰਤ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ $P(x, y)$, XY-ਤਲ ਵਿਚ ਇੱਕ ਅਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ L ਇਕ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ ਹੈ। L ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਲਈ ਅਸੀ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਕਥਨ ਜਾਂ ਸ਼ਰਤ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਤਾਂ ਹੀ ਸੱਚ ਹੈ, ਜਦੋਂ P, L ਉੱਤੇ ਹੈ, ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਝੂਠ ਹੈ। ਬਿਨਾਂ ਸ਼ੱਕ ਇਹ ਕਥਨ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਬੀਜਗਣਿਤਕ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿਚ ਚਲ x ਅਤੇ y ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਹੁਣ, ਅਸੀਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਬਾਰੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸ਼ਰਤਾਂ ਅਧੀਨ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

10.3.1 *ਲੇਟਵੀਆਂ ਅਤੇ ਖੜ੍ਹਵੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ (Horizontal and Vertical Lines)* ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਲੇਟਵੀਂ ਰੇਖਾ L, x-ਧੁਰੇ ਤੋਂ a ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ ਤਾਂ ਰੇਖਾ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਕੋਟੀ ਜਾਂ ਤਾਂ a ਜਾਂ $-a$ ਹੈ [ਚਿੱਤਰ 10.11(a)] ਇਸ ਲਈ L ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜਾਂ ਤਾਂ $y = a$ ਜਾਂ $y = -a$ ਹੈ। ਚਿੰਨ੍ਹ ਦੀ ਚੋਣ, ਇਸ 'ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਰੇਖਾ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਉੱਪਰ ਹੈ ਜਾਂ ਹੇਠਾਂ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, x-ਧੁਰੇ ਤੋਂ b ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਇਕ ਖੜ੍ਹਵੀਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜਾਂ ਤਾਂ $x = b$ ਹੈ ਜਾਂ $x = -b$ ਹੈ [ਚਿੱਤਰ 10.11 (b)]।



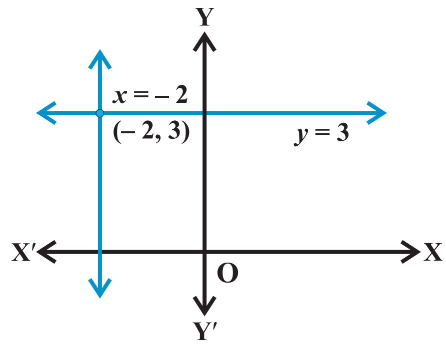
ਚਿੱਤਰ 10.11

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 6: ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ (– 2, 3) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਲਿਖੋ।

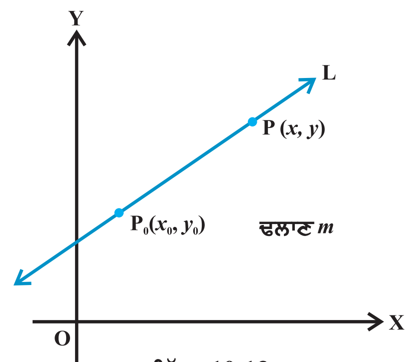
ਹੱਲ : ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਚਿੱਤਰ 10.12 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਈ ਗਈ ਹੈ। x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਕੋਟੀ 3 ਹੈ, ਇਸ ਲਈ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਅਤੇ (– 2, 3) ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਕਲਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $y = 3$ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਅਤੇ (– 2, 3) ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਕਲਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $x = -2$ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 10.12)।



ਚਿੱਤਰ 10.12

10.3.2 *ਬਿੰਦੂ-ਢਲਾਣ ਰੂਪ (Point-slope form)* ਮੰਨ ਲਉ $P_0(x_0, y_0)$ ਇੱਕ ਨਾ ਖੜ੍ਹਵੀਂ ਰੇਖਾ L ਜਿਸ ਦੀ ਢਲਾਣ m ਹੈ 'ਤੇ ਨਿਸ਼ਚਿਤ (Fixed) ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ $P(x, y)$ ਰੇਖਾ L 'ਤੇ ਇੱਕ ਅਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਿੰਦੂ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 10.13)।

ਤਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਅਨੁਸਾਰ ਰੇਖਾ L ਦੀ ਢਲਾਣ ਹੈ



ਚਿੱਤਰ 10.13

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}, \quad \text{ਭਾਵ}, \quad y - y_0 = m(x - x_0) \qquad ...(1)$$

ਕਿਉਂਕਿ ਬਿੰਦੂ $P_0(x_0, y_0)$, L ਦੇ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ (x, y) ਦੇ ਨਾਲ (1) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂ (1) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਹੀ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਰੇਖਾ L ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਿੰਦੂ $P_0(x_0, y_0)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ, ਢਲਾਣ m ਦੀ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਸਮੀਕਰਣ

$y - y_0 = m(x - x_0)$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 7: ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ (– 2, 3) ਵਿੱਚ ਲੰਘਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸਦੀ ਢਲਾਣ – 4 ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $m = -4$ ਅਤੇ ਦਿੱਤਾ ਬਿੰਦੂ $(x_0, y_0) = (-2, 3)$ ਹੈ

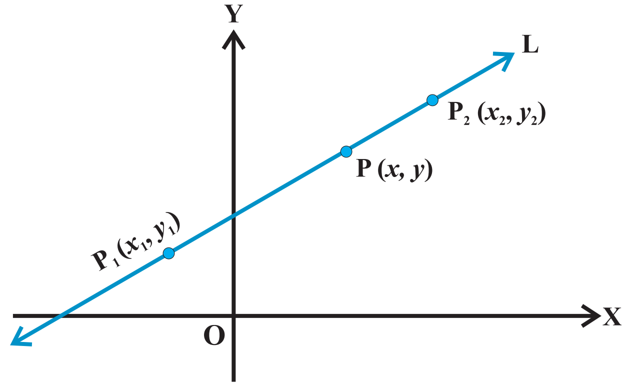
ਬਿੰਦੂ ਢਲਾਣ ਰੂਪ (Point slope Form) ਸੂਤਰ (1) ਤੋਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ

$y - 3 = -4(x + 2)$ ਜਾਂ $4x + y + 5 = 0$, ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

10.3.3 *ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਰੂਪ (Two Point Form)* ਮੰਨ ਲਉ ਰੇਖਾ L ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ $P_1(x_1, y_1)$ ਅਤੇ $P_2(x_2, y_2)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ ਅਤੇ $P(x, y)$ ਰੇਖਾ L 'ਤੇ ਕੋਈ ਆਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 10.14)।



ਚਿੱਤਰ 10.14

ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂ P_1, P_2 ਅਤੇ P ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ ਇਸ ਲਈ ਸਾਡੇ ਕੋਲ
P_1P ਢਲਾਣ = P_1P_2 ਦੀ ਢਲਾਣ

ਭਾਵ $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, ਜਾਂ $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ (x_1, y_1) ਅਤੇ (x_2, y_2) ਵਿਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ :

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \quad \ldots (2)$$

ਉਦਾਹਰਣ 8: ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਲਿਖੋ ਜੋ ਬਿੰਦੂਆਂ (1, –1) ਅਤੇ (3, 5) ਵਿਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $x_1 = 1$, $y_1 = -1$, $x_2 = 3$ ਅਤੇ $y_2 = 5$, ਉਪਰੋਕਤ ਤੋਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਰੂਪ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$$y-(-1)=\frac{5-(-1)}{3-1}(x-1)$$

ਜਾਂ $-3x+y+4=0$, ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ

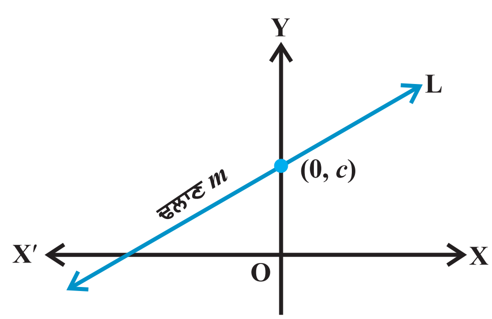
10.3.4 *ਢਲਾਣ-ਅੰਤਰਖੰਡ ਰੂਪ (Slope-intercept form)* ਕਈ ਵਾਰ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਅਤੇ ਉਸ ਦੁਆਰਾ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਕੱਟੇ ਅੰਤਰਖੰਡ ਤੋਂ ਉਸ ਰੇਖਾ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ 1 ਮੰਨ ਲਉ ਢਲਾਣ m ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ, y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ c ਦੂਰੀ ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ10.15)। ਦੂਰੀ c, ਰੇਖਾ L ਦੀ y-ਅੰਤਰਖੰਡ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਸਪਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਿੱਥੇ ਰੇਖਾ y-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਮਿਲਦੀ ਹੈ, $(0, c)$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਰੇਖਾ L ਦੀ ਢਲਾਣ m ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਿੰਦੂ $(0, c)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ ਢਲਾਣ ਰੂਪ ਤੋਂ, ਰੇਖਾ L ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

$y-c=m(x-0)$ ਜਾਂ $y=mx+c$

ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ (x, y), ਰੇਖਾ ਜਿਸ ਦੀ ਢਲਾਣ m ਅਤੇ y-ਅੰਤਰਖੰਡ c, 'ਤੇ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ

$$y=mx+c \quad \ldots(3)$$



ਚਿੱਤਰ 10.15

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ c ਦਾ ਮੁੱਲ ਧਨਾਤਮਕ ਜਾਂ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ। ਜੇਕਰ y-ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਅੰਤਰਖੰਡ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਧਨਾਤਮਕ ਜਾਂ ਰਿਣਾਤਮਕ ਭਾਗ ਤੋਂ ਬਣਿਆ ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ 2 ਮੰਨ ਲਉ ਢਲਾਣ m ਦੀ ਰੇਖਾ x-ਧੁਰੇ ਤੇ d ਅੰਤਰਖੰਡ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ L ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$y = m(x - d)$ ਹੈ। ... (4)

ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਖੁਦ ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸਥਿਤੀ-I ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 9: ਉਹਨਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਲਿਖੋ ਜਿਸ ਲਈ $\tan\theta = \frac{1}{2}$, ਜਿੱਥੇ θ ਰੇਖਾ ਦਾ ਝੁਕਾਅ ਹੈ ਅਤੇ (i) y - ਅੰਤਰਖੰਡ $-\frac{3}{2}$ ਹੈ (ii) x - ਅੰਤਰਖੰਡ 4 ਹੈ।

ਹੱਲ : (i) ਇਥੇ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ $m = \tan\theta = \frac{1}{2}$ ਅਤੇ y - ਅੰਤਰਖੰਡ $c = -\frac{3}{2}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਢਲਾਣ ਅੰਤਰਖੰਡ ਰੂਪ (3) ਤੋਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \quad \text{ਜਾਂ} \quad 2y - x + 3 = 0,$$

ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

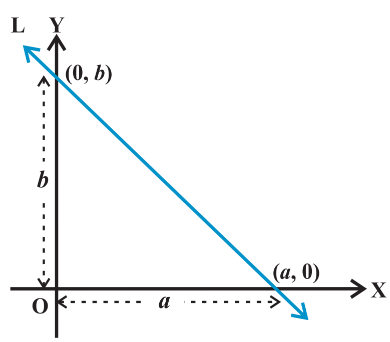
(ii) ਇੱਥੇ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ $m = \tan\theta = \frac{1}{2}$ ਅਤੇ $d = 4$

ਇਸ ਲਈ, ਢਲਾਣ ਅੰਤਰਖੰਡ ਰੂਪ (4) ਤੋਂ, ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$$y = \frac{1}{2}(x - 4) \quad \text{ਜਾਂ} \quad 2y - x + 4 = 0,$$

ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

10.3.5 *ਅੰਤਰਖੰਡ ਰੂਪ (Intercept - form)* ਮੰਨ ਲਉ L ਰੇਖਾ, ਧੁਰਿਆਂ ਤੇ x-ਅੰਤਰਖੰਡ a ਅਤੇ y-ਅੰਤਰਖੰਡ b ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ ਰੇਖਾ L, x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ $(a, 0)$ ਅਤੇ y-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ $(0, b)$ ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 10.16)।



ਚਿੱਤਰ 10.16

ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋ-ਬਿੰਦੂ ਰੂਪ ਤੋਂ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a) \quad \text{ਜਾਂ} \quad ay = -bx + ab,$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਰਥਾਤ, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ x - ਧੁਰੇ ਅਤੇ y - ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ a ਅਤੇ b ਅੰਤਰਖੰਡ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ—

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad \text{... (5)}$$

ਉਦਾਹਰਣ 10: ਉਸ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ x–ਧੁਰੇ ਅਤੇ y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਅੰਤਰਖੰਡ –3 ਅਤੇ 2 ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇਥੇ $a = -3$ ਅਤੇ $b = 2$ ਹੈ। ਉਪਰੋਕਤ ਅੰਤਰਖੰਡ ਰੂਪ (5) ਤੋਂ, ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1 \quad \text{ਜਾਂ} \quad 2x-3y+6=0.$$

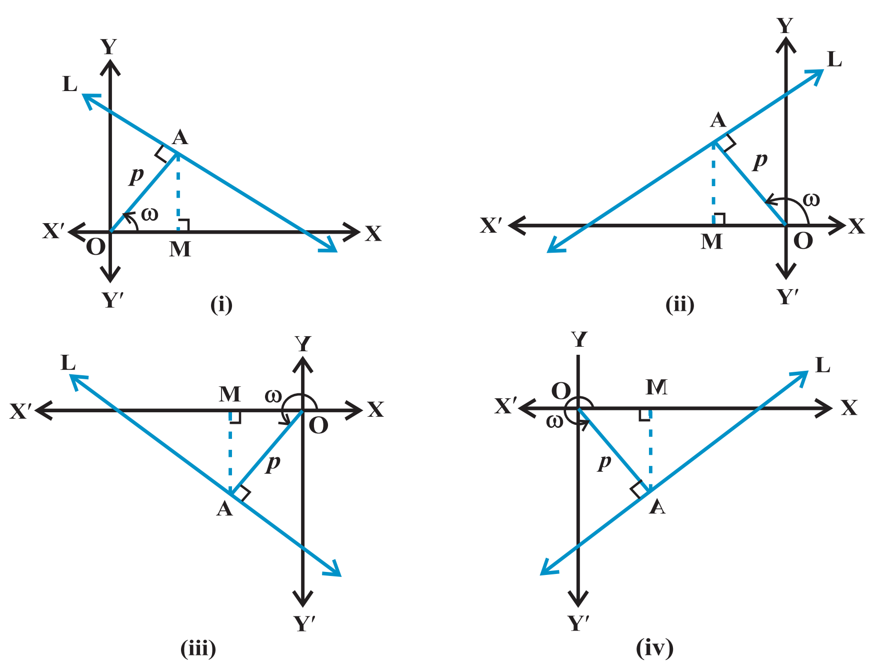
10.3.6 *ਲੰਬ ਰੂਪ (Normal form)* ਮੰਨ ਲਉ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਸਹਿਤ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ–ਨਾ ਖੜ੍ਹਵੀਂ ਰੇਖਾ ਪਤਾ ਹੈ :

(i) ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਲੰਬ ਦੀ ਲੰਬਾਈ।

(ii) ਲੰਬ ਅਤੇ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦਾ ਕੋਣ

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ L ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਤੋਂ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀ OA = p ਅਤੇ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ OA ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦਾ ਕੋਣ $\angle XOA = \omega$ ਹੈ। ਕਾਰਟੀਜਨ ਤਲ ਵਿਚ ਰੇਖਾ L ਦੀ ਸੰਭਵ ਸਥਿਤੀ ਚਿੱਤਰ 10.17 ਵਿਚ ਦਿਖਾਈ ਗਈ ਹੈ।

ਹੁਣ ਸਾਡਾ ਮੰਤਵ ਰੇਖਾ L ਦੀ ਢਲਾਣ (slope) ਅਤੇ ਇਸ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ ਲੱਭਣਾ ਹੈ। ਹਰ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਲੰਬ AM ਖਿੱਚੋ।



ਚਿੱਤਰ 10.17

ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ OM = $p \cos \omega$ ਅਤੇ MA = $p \sin \omega$, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂ A ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(p \cos \omega, p \sin \omega)$ ਹਨ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਦੁਬਾਰਾ, L ਰੇਖਾ OA ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$$\text{L ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ} = -\frac{1}{\text{OA ਦੀ ਢਲਾਣ}} = -\frac{1}{\tan\omega} = -\frac{\cos\omega}{\sin\omega}$$

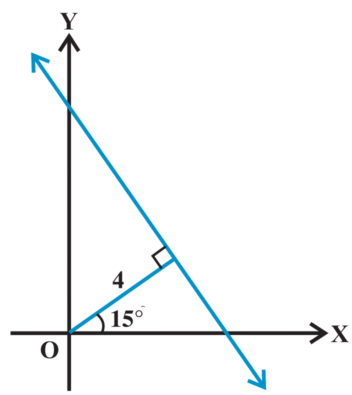
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ L ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ $-\frac{\cos\omega}{\sin\omega}$ ਅਤੇ ਇਸ ਉੱਪਰ ਬਿੰਦੂ $A(p\cos\omega, p\sin\omega)$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਢਲਾਣ ਬਿੰਦੂ ਰੂਪ ਅਨੁਸਾਰ ਰੇਖਾ L ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $y - p\sin\omega = -\frac{\cos\omega}{\sin\omega}(x - p\cos\omega)$ ਜਾਂ $x\cos\omega + y\sin\omega = p(\sin^2\omega + \cos^2\omega)$

ਜਾਂ $x\cos\omega + y\sin\omega = p$ ਹੈ।

ਅਰਥਾਤ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀ p ਅਤੇ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਲੰਬ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ω ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ : $x\cos\omega + y\sin\omega = p$ ... (6)

ਉਦਾਹਰਣ 11: ਇਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ 4 ਇਕਾਈ ਅਤੇ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਲੰਬ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦਾ ਕੋਣ 15° ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $p = 4$ ਅਤੇ $\omega = 15°$ (ਚਿੱਤਰ 10.18).



ਚਿੱਤਰ 10.18

ਹੁਣ $\cos 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

ਅਤੇ $\sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (ਕਿਉਂ?)

ਉਪਰੋਕਤ ਲੰਬ ਰੂਪ (6) ਤੋਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$x\cos 15° + y\sin 15° = 4$ ਜਾਂ $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}y = 4$ ਜਾਂ $(\sqrt{3}+1)x + (\sqrt{3}-1)y = 8\sqrt{2}$

ਇਹ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 12: ਫਾਰਨਹੀਟ ਤਾਪਮਾਨ F ਅਤੇ ਨਿਸਚਿਤ ਤਾਪਮਾਨ K ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ K = 273 ਜਦੋਂ F = 32 ਅਤੇ K = 373 ਜਦੋਂ F = 212 ਹੈ। K ਨੂੰ F ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ ਅਤੇ F ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ K = 0 ਹੈ।

ਹੱਲ : F ਨੂੰ x-ਧੁਰੇ ’ਤੇ K ਨੂੰ y-ਧੁਰੇ ’ਤੇ ਲੈਣ ’ਤੇ ਸਾਡੇ ਕੋਲ xy ਤਲ ਵਿਚ ਦੋ ਬਿੰਦੂ (32, 273) ਅਤੇ (212, 373) ਹਨ। ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਰੂਪ ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ (F, K) ਦੁਆਰਾ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੋਣ ਵਾਲਾ ਸਮੀਕਰਣ

$$K - 273 = \frac{373-273}{212-32}(F-32) \quad \text{ਜਾਂ} \quad K - 273 = \frac{100}{180}(F-32)$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਜਾਂ $$K = \frac{5}{9}(F - 32) + 273 \qquad ...(1)$$

ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਤੋਂ, ਜਦੋ $K = 0$ ਹੈ

$$0 = \frac{5}{9}(F - 32) + 273 \quad \text{ਜਾਂ} \quad F - 32 = -\frac{273 \times 9}{5} = -491.4 \quad \text{ਜਾਂ } F = -459.4$$

ਬਦਲਵੀਂ ਵਿਧੀ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਸਰਲ ਰੂਪ $y = mx + c$ ਹੈ। ਫਿਰ ਤੋਂ F ਨੂੰ x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਅਤੇ K ਨੂੰ y-ਧੁਰੇ ਤੇ ਲੈਣ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ : $K = mF + c$ ... (1)

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਬਿੰਦੂਆਂ (32, 273) ਅਤੇ (212, 373) ਤੋਂ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ,

$$273 = 32m + c \qquad ... (2)$$

ਅਤੇ $$373 = 212m + c \qquad ... (3)$$

(2) ਅਤੇ (3) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ’ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$m = \frac{5}{9} \text{ ਅਤੇ } c = \frac{2297}{9}$$

m ਅਤੇ c ਦੇ ਮਾਨ (1) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ’ਤੇ

$$K = \frac{5}{9}F + \frac{2297}{9} \qquad ... (4)$$

ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਜਦੋਂ $K = 0$, ਤਾਂ (4) ਤੋਂ $F = -459.4$

ਟਿੱਪਣੀ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ $y = mx + c$ ਵਿੱਚ ਦੋ ਸਥਿਰ ਅੰਕ m ਅਤੇ c ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦੋ ਸਥਿਰ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਲਈ ਦੋ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ। ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ, ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਦੋ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 10.2

ਅਭਿਆਸ 1 ਤੋਂ 8 ਤੱਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ—

1. x ਅਤੇ y ਧੁਰੇ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਲਿਖੋ।
2. ਢਲਾਣ $\frac{1}{2}$ ਨਾਲ ਜੋ ਬਿੰਦੂ $(-4, 3)$ ਵਿੱਚੋ ਲੰਘਦੀ ਹੈ।
3. ਢਲਾਣ m ਨਾਲ ਜੋ ਬਿੰਦੂ (0, 0) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ।
4. ਬਿੰਦੂ $\left(2, 2\sqrt{3}\right)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ x-ਧੁਰੇ ਨਾਲ 75° ਕੋਣ ਤੇ ਝੁਕੀ ਹੋਈ ਹੈ।
5. x - ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ 3 ਇਕਾਈ ਦੂਰੀ ’ਤੇ ਕੱਟਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਢਲਾਣ -2 ਵਾਲੀ।
6. y - ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ 2 ਇਕਾਈ ਉੱਪਰ ਅਤੇ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਨਾਲ 30° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੋਵੇ।
7. ਬਿੰਦੂਆਂ $(-1, 1)$ ਅਤੇ $(2, -4)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੋਵੇ।
8. ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀ 5 ਇਕਾਈ ਅਤੇ ਲੰਬ ਦੁਆਰਾ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਨਾਲ 30° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਦਾ ਹੋਵੇ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

9. Δ PQR ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ P (2, 1), Q (–2, 3) ਅਤੇ R (4, 5) ਹਨ। ਸਿਖ਼ਰ R ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
10. ਉਸ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਬਿੰਦੂ (–3, 5) ਵਿਚੋਂ ਲੰਘ ਰਹੀ ਹੈ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ (2, 5) ਅਤੇ (–3, 6) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।
11. ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਬਿੰਦੂਆਂ (1, 0) ਅਤੇ (2, 3) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ 'ਤੇ ਬਣੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਤੇ ਲੰਬ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ 1: n ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੀ ਹੈ। ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
12. ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਿਆਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਅੰਤਰਖੰਡ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ (2, 3) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ।
13. ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਬਿੰਦੂ (2, 2) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘ ਰਹੀ ਹੈ ਅਤੇ ਧੁਰਿਆਂ 'ਤੇ ਅੰਤਰਖੰਡ ਕੱਟ ਰਹੀ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 9 ਹੈ।
14. ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਬਿੰਦੂ (0, 2) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਨਾਲ $\frac{2\pi}{3}$ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਅਤੇ y-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਹੇਠਾਂ ਵੱਲ 2 ਇਕਾਈ ਦੂਰੀ ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੋਵੇ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
15. ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੰਬ ਇਸ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ (–2, 9) ਤੇ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
16. ਤਾਂਬੇ ਦੀ ਛੜ ਦੀ ਲੰਬਾਈ L (ਸੈਂਟੀਮੀਟਰ ਵਿੱਚ) ਸੇਲਸੀਅਸ ਤਾਪ C ਦਾ ਰੇਖਿਕ ਫਲਨ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ L = 124.942 ਤਾਂ C = 20 ਅਤੇ L = 125.134 ਤਾਂ C = 110 ਹੈ। L ਨੂੰ C ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।
17. ਇੱਕ ਦੁੱਧ ਭੰਡਾਰ ਦਾ ਮਾਲਿਕ ਹਰ ਹਫ਼ਤੇ 980 ਲਿਟਰ ਦੁੱਧ 14 ਰੁਪਏ ਪ੍ਰਤੀ ਲਿਟਰ ਅਤੇ 1220 ਲਿਟਰ ਦੁੱਧ 16 ਰੁਪਏ ਪ੍ਰਤੀ ਲਿਟਰ ਵੇਚ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਵੇਚਮੁੱਲ ਅਤੇ ਮੰਗ ਵਿੱਚ ਰੇਖਿਕ ਸੰਬੰਧ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹ ਹਰ ਹਫਤੇ 17 ਰੁਪਏ ਪ੍ਰਤੀ ਲਿਟਰ ਨਾਲ ਕਿੰਨਾ ਦੁੱਧ ਵੇਚ ਸਕਦਾ ਹੈ।
18. P (a, b) ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦਾ ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਦਿਖਾਓ ਕਿ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$ ਹੈ।
19. ਬਿੰਦੂ R(h, k) ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ 1: 2 ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
20. ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂ (3, 0), (– 2, – 2) ਅਤੇ (8, 2) ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

10.4 ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਧਾਰਣ ਜਾਂ ਵਿਆਪਕ ਸਮੀਕਰਣ (General Equation of a Line)

ਪਿਛਲੀਆਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀਆਂ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੀ ਇਕ ਘਾਤੀ ਵਿਆਪਕ ਜਾਂ ਆਮ ਸਮੀਕਰਣ, $\text{A}x + \text{B}y + \text{C} = 0$ ਬਾਰੇ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਜਿੱਥੇ A, B ਅਤੇ C ਵਾਸਤਵਿਕ ਅਚਲ ਹਨ ਅਤੇ A ਅਤੇ B ਇਕੱਠੇ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਸਮੀਕਰਣ $\text{A}x + \text{B}y + \text{C} = 0$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਕੋਈ ਵੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋ $\text{A}x + \text{B}y + \text{C} = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ A ਅਤੇ B ਇਕੱਠੇ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਵਿਆਪਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜਾਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਆਮ ਸਮੀਕਰਣ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ।

10.4.1 $\text{A}x + \text{B}y + \text{C} = 0$ ਦੇ ਵੱਖ ਵੱਖ ਰੂਪ ***(Different forms of Ax + By + C = 0)*** ਰੇਖਾ ਦੀ ਵਿਆਪਕ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਰਾਹੀਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਰੂਪਾਂ ਵਿੱਚ ਰੂਪਾਂਤਰਣ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(a) ਢਲਾਣ ਅੰਤਰਖੰਡ ਰੂਪ (Slope-intercept form) ਜੇਕਰ $\text{B} \neq 0$ ਤਾਂ $\text{A}x + \text{B}y + \text{C} = 0$ ਨੂੰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$y=-\frac{\text{A}}{\text{B}}x-\frac{\text{C}}{\text{B}} \text{ ਜਾਂ } y=mx+c \qquad \dots (1)$$

ਜਿੱਥੇ $$m=-\frac{\text{A}}{\text{B}} \text{ ਅਤੇ } c=-\frac{\text{C}}{\text{B}}$$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ (1) ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਢਲਾਣ ਅੰਤਰ ਖੰਡ ਰੂਪ ਹੈ, ਜਿਸ ਦੀ ਢਲਾਣ $-\frac{\text{A}}{\text{B}}$ ਅਤੇ y - ਅੰਤਰਖੰਡ $-\frac{\text{C}}{\text{B}}$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ B = 0, ਤਾਂ $x=-\frac{\text{C}}{\text{A}}$ ਜੋ ਕਿ ਖੜ੍ਹਵੀਂ (vertical) ਰੇਖਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀ ਢਲਾਣ ਅਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ x - ਅੰਤਰਖੰਡ $-\frac{\text{C}}{\text{A}}$ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

(b) ਅੰਤਰਖੰਡ ਰੂਪ (Intercept form) ਜੇਕਰ $C \neq 0$, ਤਾਂ $Ax + By + C = 0$ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1 \quad \text{or} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \ldots (2)$$

ਜਿੱਥੇ $a = -\frac{C}{A}$ ਅਤੇ $b = -\frac{C}{B}$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ (2) ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਅੰਤਰਖੰਡ ਰੂਪ ਹੈ ਜਿਸਦਾ x - ਅੰਤਰਖੰਡ $-\frac{C}{A}$ ਅਤੇ y - ਅੰਤਰਖੰਡ $-\frac{C}{B}$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $C = 0$, ਤਾਂ $Ax + By + C = 0$ ਨੂੰ $Ax + By = 0$, ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਕਿ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਰੇਖਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਸਦੇ ਧੁਰਿਆਂ ਤੇ ਸਿਫ਼ਰ ਅੰਤਰਖੰਡ ਹਨ।

(c) ਲੰਬ ਰੂਪ (Normal form) ਮੰਨ ਲਉ $x \cos \omega + y \sin \omega = p$ ਰੇਖਾ ਜਿਸ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $Ax + By + C = 0$ ਜਾਂ $Ax + By = -C$ ਦਾ ਲੰਬ ਰੂਪ ਹੈ। ਅਰਥਾਤ ਦੋਨੋਂ ਸਮੀਕਰਣ ਸਮਾਨ ਹਨ ਇਸ ਲਈ, $\frac{A}{\cos \omega} = \frac{B}{\sin \omega} = -\frac{C}{p}$

ਜਿਸ ਤੋਂ $\cos \omega = -\frac{Ap}{C}$ ਅਤੇ $\sin \omega = -\frac{Bp}{C}$

ਹੁਣ $\sin^2\omega + \cos^2\omega = \left(-\frac{Ap}{C}\right)^2 + \left(-\frac{Bp}{C}\right)^2 = 1$

ਜਾਂ $p^2 = \frac{C^2}{A^2+B^2}$ ਜਾਂ $p = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

ਇਸ ਲਈ $\cos\omega = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ ਅਤੇ $\sin \omega = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣ $Ax + By + C = 0$ ਦਾ ਲੰਬ ਰੂਪ $x \cos \omega + y \sin \omega = p$ ਹੈ।

ਜਿੱਥੇ $\cos \omega = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\sin \omega = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ ਅਤੇ $p = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

ਚਿੰਨ੍ਹ ਦੀ ਉਚਿਤ ਵਰਤੋਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਕਿ p ਧਨਾਤਮਕ ਰਹੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $3x - 4y + 10 = 0$ ਹੈ। ਇਸ ਦੀ (i) ਢਲਾਣ (ii) x ਅਤੇ y-ਅੰਤਰਖੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : (i) ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $3x - 4y + 10 = 0$ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2} \qquad \ldots (1)$$

(1) ਦੀ ਤੁਲਨਾ $y = mx + c$ ਨਾਲ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ ਢਲਾਣ $m = \frac{3}{4}$ ਹੈ।

(ii) ਸਮੀਕਰਣ $3x - 4y + 10 = 0$ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ

$$3x - 4y = -10 \quad \text{ਜਾਂ} \quad \frac{x}{-\frac{10}{3}} + \frac{y}{\frac{5}{2}} = 1 \qquad \ldots (2)$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

(2) ਦੀ ਤੁਲਨਾ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ਨਾਲ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ x-ਅੰਤਰਖੰਡ $a = -\frac{10}{3}$ ਅਤੇ y-ਅੰਤਰਖੰਡ $b = \frac{5}{2}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਸਮੀਕਰਣ $\sqrt{3}x + y - 8 = 0$ ਨੂੰ ਲੰਬ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ। p ਅਤੇ ω ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ

$$\sqrt{3}x + y - 8 = 0 \qquad \text{... (1)}$$

(1) ਨੂੰ $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(1)^2} = 2$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ 'ਤੇ

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=4 \text{ ਜਾਂ } \cos 30° x+\sin 30° y=4 \qquad \text{... (2)}$$

(2) ਦੀ ਤੁਲਨਾ $x \cos \omega + y \sin \omega = p$ ਨਾਲ ਕਰਨ 'ਤੇ, $p = 4$ ਅਤੇ $\omega = 30°$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਰੇਖਾਵਾਂ $y-\sqrt{3}x-5=0$ ਅਤੇ $\sqrt{3}y-x+6=0$ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ—

$$y-\sqrt{3}x-5=0 \text{ ਜਾਂ } y=\sqrt{3}x+5 \qquad \text{... (1)}$$

ਅਤੇ

$$\sqrt{3}y-x+6=0 \text{ ਜਾਂ } y=\frac{1}{\sqrt{3}}x-2\sqrt{3} \qquad \text{... (2)}$$

ਰੇਖਾ (1) ਦੀ ਢਲਾਣ $m_1 = \sqrt{3}$ ਅਤੇ ਰੇਖਾ (2) ਦੀ ਢਲਾਣ $m_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ਹੈ

ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਨਿਊਣ ਕੋਣ θ (ਮੰਨ ਲਉ) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}\right| \qquad \text{... (3)}$$

m_1 ਅਤੇ m_2 ਦੇ ਮੁੱਲ (3) ਵਿਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ, ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\tan\theta = \left|\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}}\right| = \left|\frac{1-3}{2\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ਜਿਸ ਤੋਂ $\theta = 30°$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਜਾਂ $30°$ ਜਾਂ $180° - 30° = 150°$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ $a_1x+b_1y+c_1=0$ ਅਤੇ $a_2x+b_2y+c_2=0$ ਜਿੱਥੇ $b_1, b_2 \neq 0$

(i) ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਜੇਕਰ $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$, ਅਤੇ (ii) ਇੱਕ-ਦੂਜੇ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹਨ ਜੇਕਰ $a_1a_2+b_1b_2=0$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ

$$y=-\frac{a_1}{b_1}x-\frac{c_1}{b_1} \qquad \text{... (1)}$$

ਅਤੇ

$$y=-\frac{a_2}{b_2}x-\frac{c_2}{b_2} \qquad \text{... (2)}$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਰੇਖਾਵਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਦੀ ਢਲਾਣਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $m_1 = -\dfrac{a_1}{b_1}$ ਅਤੇ $m_2 = -\dfrac{a_2}{b_2}$ ਹਨ, ਹੁਣ

(i) ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ, ਜੇਕਰ $m_1 = m_2$, ਜਿਸ ਤੋਂ

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \text{ ਜਾਂ } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}.$$

(ii) ਰੇਖਾਵਾਂ ਲੰਬ ਹਨ, ਜੇਕਰ $m_1.m_2 = -1$, ਜਿਸ ਤੋਂ

$$\frac{a_1}{b_1}.\frac{a_2}{b_2} = -1 \text{ ਜਾਂ } a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$

ਉਦਾਹਰਣ 17 : ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਰੇਖਾ $x - 2y + 3 = 0$ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ (1, – 2) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘ ਰਹੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ $x - 2y + 3 = 0$ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \qquad \text{...(1)}$$

ਰੇਖਾ (1) ਦੀ ਢਲਾਣ $m_1 = \dfrac{1}{2}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਰੇਖਾ (1) ’ਤੇ ਲੰਬ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -2$$

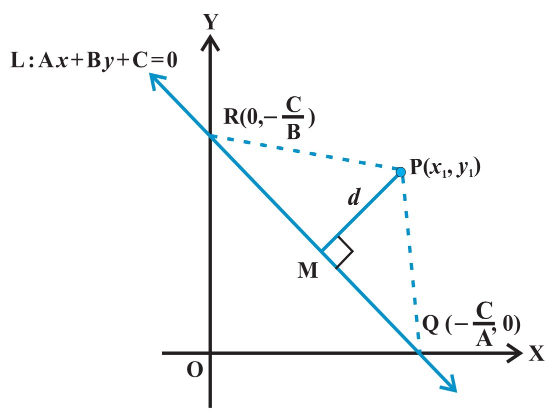
ਢਲਾਣ – 2 ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ (1, – 2) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘ ਰਹੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$$y - (-2) = -2(x - 1) \text{ ਜਾਂ } y = -2x,$$

ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

10.5 ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਰੇਖਾ ਤੋਂ ਦੂਰੀ (Distance of a Point From a Line)

ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਤੋਂ ਦੂਰੀ, ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਰੇਖਾ ਤੇ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਲੰਬ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ L : Ax + By + C = 0 ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਦੀ ਬਿੰਦੂ P (x_1, y_1) ਤੋਂ ਦੂਰੀ d ਹੈ। ਰੇਖਾ L ਤੇ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ PM ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ (ਚਿੱਤਰ 10.19) । ਜੇਕਰ ਰੇਖਾ x-ਅਤੇ y-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂ Q ਅਤੇ R ’ਤੇ ਮਿਲਦੀ ਹੈ; ਤਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $Q\left(-\dfrac{C}{A}, 0\right)$ ਅਤੇ $R\left(0, -\dfrac{C}{B}\right)$ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ PQR ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ



ਚਿੱਤਰ 10.19

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

$$\text{ਖੇਤਰਫਲ } (\Delta PQR) = \frac{1}{2} PM.QR \text{, ਜਿਸ ਤੋਂ } PM = \frac{2 \text{ ਖੇਤਰਫਲ } (\Delta PQR)}{QR} \quad \ldots (1)$$

$$\text{ਫਿਰ ਤੋਂ ਖੇਤਰਫਲ } (\Delta PQR) = \frac{1}{2}\left| x_1\left(0+\frac{C}{B}\right)+\left(-\frac{C}{A}\right)\left(-\frac{C}{B}-y_1\right)+0(y_1-0)\right| = \frac{1}{2}\left|x_1\frac{C}{B}+y_1\frac{C}{A}+\frac{C^2}{AB}\right|$$

$$\text{ਜਾਂ } 2 \text{ ਖੇਤਰਫਲ } (\Delta PQR) = \left|\frac{C}{AB}\right|. \ |Ax_1+By_1+C|, \quad \text{ਅਤੇ } \ QR = \sqrt{\left(0+\frac{C}{A}\right)^2+\left(\frac{C}{B}-0\right)^2} = \left|\frac{C}{AB}\right| \sqrt{A^2+B^2}$$

ਖੇਤਰਫਲ (ΔPQR) ਅਤੇ QR ਦੇ ਮੁੱਲ (1) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$$PM = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{ਜਾਂ} \quad d = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

ਅਰਥਾਤ ਬਿੰਦੂ (x_1, y_1) ਤੋਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀ (d) ਹੈ

$$d = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

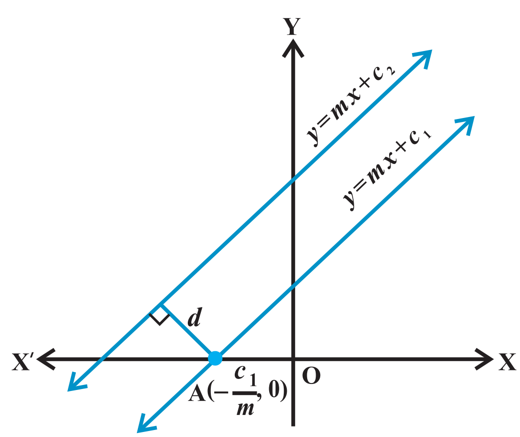
10.5.1 ***ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ (Distance between two parallel lines)*** ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਢਲਾਣਾਂ (Slopes) ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿਚ ਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ—

$$y = mx + c_1 \quad \ldots (1)$$

ਅਤੇ

$$y = mx + c_2 \quad \ldots (2)$$

ਚਿੱਤਰ 10.20 ਵਿਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ, ਰੇਖਾ (1) x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ A $\left(-\frac{c_1}{m},\ 0\right)$ 'ਤੇ ਕੱਟੇਗੀ।



ਚਿੱਤਰ 10.20

ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਦੂਰੀ, ਬਿੰਦੂ A ਤੋਂ ਰੇਖਾ (2) ਤੇ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਰੇਖਾ (1) ਅਤੇ (2) ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ ਹੈ :

$$\frac{\left|(-m)\left(-\frac{c_1}{m}\right)+(-c_2)\right|}{\sqrt{1+m^2}} \quad \text{ਜਾਂ} \quad d = \frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਰਥਾਤ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ $y = mx + c_1$ ਅਤੇ $y = mx + c_2$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਦੂਰੀ $d = \dfrac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{1+m^2}}$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਆਮ (ਸਧਾਰਨ) (General Form) ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਣ ਜੋ ਕਿ $Ax + By + C_1 = 0$ ਅਤੇ $Ax + By + C_2 = 0$, ਤਾਂ ਉਪਰੋਕਤ ਸੂਤਰ ਦਾ ਰੂਪ ਬਣ ਜਾਵੇਗਾ $d = \dfrac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇਸ ਨੂੰ ਆਪਣੇ ਆਪ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 18 : ਬਿੰਦੂ (3, – 5) ਦੀ ਰੇਖਾ $3x - 4y - 26 = 0$ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ $3x - 4y - 26 = 0$ ਹੈ। ... (1)

(1) ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਰੇਖਾ ਦੀ ਆਮ ਸਮੀਕਰਣ $Ax + By + C = 0$ ਨਾਲ ਕਰਨ 'ਤੇ

$$A = 3, B = -4 \text{ ਅਤੇ } C = -26.$$

ਦਿੱਤਾ ਬਿੰਦੂ $(x_1, y_1) = (3, -5)$ ਹੈ। ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਹੈ

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3.3 + (-4)(-5) - 26|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{5}$$

ਉਦਾਹਰਣ 19 : ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ $3x - 4y + 7 = 0$ ਅਤੇ $3x - 4y + 5 = 0$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $A = 3$, $B = -4$, $C_1 = 7$ ਅਤੇ $C_2 = 5$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਦੂਰੀ $d = \dfrac{|7-5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{2}{5}$ ਹੈ ।

ਅਭਿਆਸ 10.3

1. ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਢਲਾਣ-ਅੰਤਰਖੰਡ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਢਲਾਣ ਅਤੇ y - ਅੰਤਰਖੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (i) $x + 7y = 0$ (ii) $6x + 3y - 5 = 0$ (iii) $y = 0$
2. ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਅੰਤਰਖੰਡ ਰੂਪ ਵਿਚ ਬਦਲੋ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਧੁਰਿਆਂ ਤੇ ਅੰਤਰਖੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (i) $3x + 2y - 12 = 0$ (ii) $4x - 3y = 6$, (iii) $3y + 2 = 0$
3. ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਲੰਬ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ। ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਅਤੇ ਇਸ ਤੇ ਲੰਬ ਅਤੇ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (i) $x - \sqrt{3}y + 8 = 0$ (ii) $y - 2 = 0$ (iii) $x - y = 4$
4. ਬਿੰਦੂ (–1, 1) ਦੀ ਰੇਖਾ $12(x + 6) = 5(y - 2)$ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਰੇਖਾ $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = 1$ ਤੋਂ ਦੂਰੀ 4 ਇਕਾਈ ਹੈ।
6. ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ—
   (i) $15x + 8y - 34 = 0$ ਅਤੇ $15x + 8y + 31 = 0$ (ii) $l(x+y) + p = 0$ ਅਤੇ $l(x+y) - r = 0$
7. ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਰੇਖਾ $3x - 4y + 2 = 0$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ (–2, 3) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘ ਰਹੀ ਹੈ।
8. ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਰੇਖਾ $x - 7y + 5 = 0$ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ (– 2, 3) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘ ਰਹੀ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

9. ਰੇਖਾਵਾਂ $\sqrt{3}x + y = 1$ ਅਤੇ $x + \sqrt{3}y = 1$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਬਿੰਦੂਆਂ $(h, 3)$ ਅਤੇ $(4, 1)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ, ਰੇਖਾ $7x - 9y - 19 = 0$ ਨੂੰ ਸਮਕੋਣ ਕੋਣ ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। h ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (x_1, y_1) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ $Ax + By + C = 0$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾ

$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$ ਹੈ।

12. ਬਿੰਦੂ $(2, 3)$ ਵਿਚੋਂ ਲੰਘ ਰਹੀਆਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ 60° ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਇਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ 2, ਹੈ, ਤਾਂ ਦੂਜੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

13. ਬਿੰਦੂਆਂ $(3, 4)$ ਅਤੇ $(-1, 2)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦੇ ਲੰਬ ਸਮਦੁਭਾਜਕ (right bisector) ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

14. ਬਿੰਦੂ $(-1, 3)$ ਤੋਂ ਰੇਖਾ $3x - 4y - 16 = 0$ ਤੋਂ ਸੁੱਟੇ ਗਏ ਲੰਬ ਦੇ ਅਧਾਰ ਬਿੰਦੂ (Foot of perpendicular) ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

15. ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਰੇਖਾ $y = mx + c$ ਤੇ ਲੰਬ ਇਸ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ $(-1, 2)$ ਤੇ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। m ਅਤੇ c ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

16. ਜੇਕਰ p ਅਤੇ q ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਰੇਖਾਵਾਂ $x\cos\theta - y\sin\theta = k\cos 2\theta$ ਅਤੇ $x\sec\theta + y\,\text{cosec}\,\theta = k$, ਤੇ ਲੰਬ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $p^2 + 4q^2 = k^2$.

17. ΔABC ਦੇ ਸਿਖਰ $A(2, 3)$, $B(4, -1)$ ਅਤੇ $C(1, 2)$ ਹਨ, ਸਿਖ਼ਰ A ਤੋਂ ਸਾਹਮਣੇ ਵਾਲੀ ਭੁਜਾ ਤੇ ਸੁੱਟੇ ਲੰਬ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਅਤੇ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

18. ਜੇਕਰ p ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਉਸ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸੁੱਟੇ ਗਏ ਲੰਬ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਹੋਵੇ, ਜਿਸਦੇ ਧੁਰਿਆ ਤੇ ਅੰਤਰਖੰਡ a ਅਤੇ b, ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $\dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$.

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 20 : ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ $2x + y - 3 = 0$, $5x + ky - 3 = 0$ ਅਤੇ $3x - y - 2 = 0$ ਸੰਗਾਮੀ (Concurrent) ਹਨ ਤਾਂ k ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਤਿੰਨ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸੰਗਾਮੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਉਹ ਇੱਕ ਸਾਂਝੇ ਬਿੰਦੂ ਵਿਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਲੰਘਣ ਅਰਥਾਤ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਤੀਜੀ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਹੋਵੇ। ਇੱਥੇ ਦਿੱਤੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ :

$$2x + y - 3 = 0 \quad \ldots (1)$$

$$5x + ky - 3 = 0 \quad \ldots (2)$$

$$3x - y - 2 = 0 \quad \ldots (3)$$

(1) ਅਤੇ (3) ਨੂੰ ਤਿਰਛੀ ਗੁਣਾ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$$\frac{x}{-2-3} = \frac{y}{-9+4} = \frac{1}{-2-3} \quad \text{ਜਾਂ} \quad x = 1, \quad y = 1$$

ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ $(1, 1)$ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਤਿੰਨ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸੰਗਾਮੀ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ $(1,1)$ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰੇਗਾ ਇਸ ਲਈ

$$5.1 + k.1 - 3 = 0 \text{ ਜਾਂ } k = -2$$

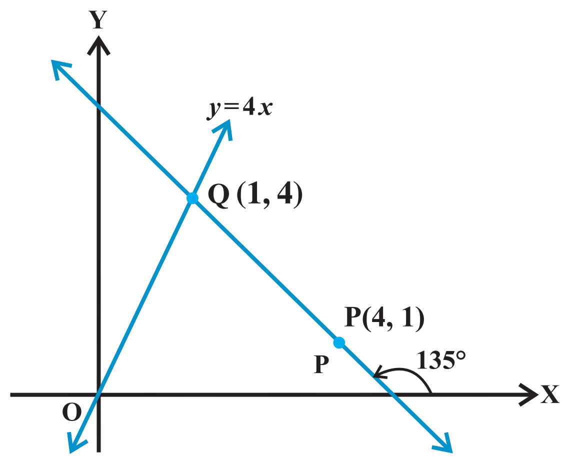
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 21 : ਬਿੰਦੂ (4, 1) ਤੋਂ ਰੇਖਾ $4x - y = 0$ ਦੀ ਦੂਰੀ ਉਸ ਰੇਖਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਨਾਲ 135° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ $4x - y = 0$ ਹੈ ... (1)

ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ (1) ਦੀ ਬਿੰਦੂ P (4, 1) ਤੋਂ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਰੇਖਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਸਾਨੂੰ ਦੋਨਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਉਦੇਸ਼ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਦੂਜੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ। (ਚਿੱਤਰ 10.21)



ਚਿੱਤਰ 10.21

ਦੂਜੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ $\tan 135° = -1$ ਹੈ। ਢਲਾਣ -1 ਅਤੇ P (4, 1) ਵਿਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

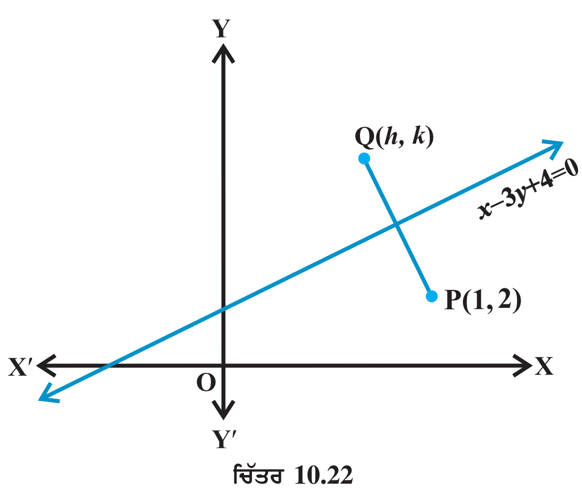
$y - 1 = -1\ (x - 4)$ ਜਾਂ $x + y - 5 = 0$ ਹੈ ... (2)

(1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ, $x = 1$ ਅਤੇ $y = 4$ ਹੈ, ਇਸ ਕਰਕੇ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ Q (1, 4) ਹੈ। ਹੁਣ ਰੇਖਾ (1) ਦੇ ਬਿੰਦੂ P (4, 1) ਤੋਂ ਰੇਖਾ (2) ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ = ਬਿੰਦੂਆਂ P (4, 1) ਅਤੇ Q (1, 4) ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ

$$= \sqrt{(1-4)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{2} \text{ ਇਕਾਈ}$$

ਉਦਾਹਰਣ 22 : ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਸਰਲ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਲਈ ਦਰਪਣ ਦਾ ਕੰਮ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ, ਬਿੰਦੂ (1, 2) ਦਾ ਰੇਖਾ $x - 3y + 4 = 0$ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ (image) ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ Q (h, k) ਬਿੰਦੂ P (1, 2) ਦਾ ਰੇਖਾ $x - 3y + 4 = 0$ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਹੈ। ... (1)



ਚਿੱਤਰ 10.22

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਸ ਲਈ, ਰੇਖਾ (1), ਰੇਖਾ ਖੰਡ PQ ਦਾ ਲੰਬ-ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਹੈ [(ਚਿੱਤਰ10.22)]

ਅਰਥਾਤ ਰੇਖਾ PQ ਦੀ ਢਲਾਣ = $\dfrac{-1}{\text{ਰੇਖਾ } x-3y+4=0 \text{ ਦੀ ਢਲਾਣ}}$

ਇਸ ਲਈ $\dfrac{k-2}{h-1}=\dfrac{-1}{\frac{1}{3}}$ ਜਾਂ $3h+k=5$ ... (2)

ਅਤੇ PQ ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ, ਅਰਥਾਤ ਬਿੰਦੂ $\left(\dfrac{h+1}{2},\dfrac{k+2}{2}\right)$ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰੇਗਾ

ਇਸ ਲਈ $\dfrac{h+1}{2}-3\left(\dfrac{k+2}{2}\right)+4=0$ ਜਾਂ $h-3k=-3$ ... (3)

(2) ਅਤੇ (3) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ’ਤੇ $h=\dfrac{6}{5}$ ਅਤੇ $k=\dfrac{7}{5}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਅਰਥਾਤ ਬਿੰਦੂ (1, 2) ਦਾ ਰੇਖਾ $x-3y+4=0$ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ $\left(\dfrac{6}{5},\dfrac{7}{5}\right)$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 23 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਰੇਖਾਵਾਂ $y=m_1x+c_1, y=m_2x+c_2$ ਅਤੇ $x=0$ ਦੁਆਰਾ ਬਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $\dfrac{(c_1-c_2)^2}{2|m_1-m_2|}$ ਹੈ।

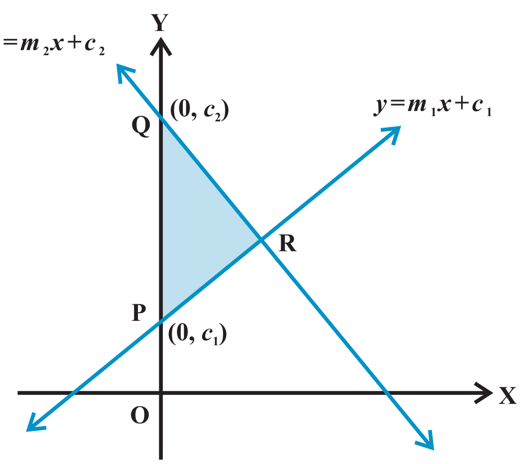
ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ :

$y=m_1x+c_1$ ... (1)

$y=m_2x+c_2$ ... (2)

$x=0$ ... (3)

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਰੇਖਾ $y=mx+c$ ਰੇਖਾ $x=0$ (y-ਧੁਰਾ) ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ $(0, c)$ ’ਤੇ ਮਿਲਦੀ ਹੈ।ਇਸ ਲਈ ਰੇਖਾ (1) ਅਤੇ (3) ਦੁਆਰਾ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਸਿਖਰ P $(0, c_1)$ ਅਤੇ Q $(0, c_2)$ ਬਣਾਏ ਗਏ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 10. 23)। ਤੀਜਾ ਸਿਖ਼ਰ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10.23

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ’ਤੇ

$$x=\frac{(c_2-c_1)}{(m_1-m_2)} \quad \text{ਅਤੇ} \quad y=\frac{(m_1c_2-m_2c_1)}{(m_1-m_2)}$$

ਇਸ ਲਈ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਤੀਜਾ ਸਿਖਰ R $\left(\dfrac{(c_2-c_1)}{(m_1-m_2)}, \dfrac{(m_1c_2-m_2c_1)}{(m_1-m_2)}\right)$

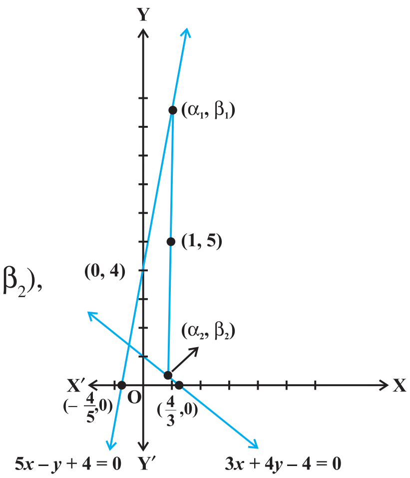
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਹੁਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$=\frac{1}{2}\left| 0 \left(\frac{m_1c_2-m_2c_1}{m_1-m_2}-c_2\right)+\frac{c_2-c_1}{m_1-m_2}(c_2-c_1)+0\left(c_1-\frac{m_1c_2-m_2c_1}{m_1-m_2}\right)\right|=\frac{(c_2-c_1)^2}{2|m_1-m_2|}$$

ਉਦਾਹਰਣ 24 : ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਦੇ ਰੇਖਾਵਾਂ $5x - y + 4 = 0$ ਅਤੇ $3x + 4y - 4 = 0$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ (1, 5) ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 10.24

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ :

$5x - y + 4 = 0$ ... (1)

$3x + 4y - 4 = 0$ ... (2)

ਮੰਨ ਲਉ ਲੋੜੀਂਦੀ ਰੇਖਾ, ਰੇਖਾ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂ (α_1, β_1) ਅਤੇ (α_2, β_2), ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$5\alpha_1 - \beta_1 + 4 = 0$ ਅਤੇ

$3\alpha_2 + 4\beta_2 - 4 = 0$

ਜਾਂ $\beta_1 = 5\alpha_1 + 4$ ਅਤੇ $\beta_2 = \frac{4-3\alpha_2}{4}$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ (1, 5) ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂਆਂ (α_1, β_1) ਅਤੇ (α_2, β_2) ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=1 \quad \text{ਅਤੇ} \quad \frac{\beta_1+\beta_2}{2}=5,$$

ਜਾਂ
$$\alpha_1+\alpha_2=2 \quad \text{ਅਤੇ} \quad \frac{5\alpha_1+4+\frac{4-3\alpha_2}{4}}{2}=5,$$

ਜਾਂ $\alpha_1+\alpha_2=2$ ਅਤੇ $20\alpha_1-3\alpha_2=20$ ... (3)

(3) ਤੋਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ α_1 ਅਤੇ α_2, ਲਈ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\alpha_1=\frac{26}{23} \text{ ਅਤੇ } \alpha_2=\frac{20}{23} \text{ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ, } \beta_1 = 5.\frac{26}{23}+4=\frac{222}{23}$$

ਲੋੜੀਂਦੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋ ਬਿੰਦੂ (1, 5) ਅਤੇ (α_1, β_1) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘ ਰਹੀ ਹੈ

$$y-5=\frac{\beta_1-5}{\alpha_1-1}(x-1) \text{ ਜਾਂ } y-5=\frac{\frac{222}{23}-5}{\frac{26}{23}-1}(x-1)$$

ਜਾਂ $107x - 3y - 92 = 0$,

ਜੋ ਕਿ ਰੇਖਾ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 25 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਇੱਕ ਗਤੀਸ਼ੀਲ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਬਿੰਦੂਪਥ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ $3x - 2y = 5$ ਅਤੇ $3x + 2y = 5$ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਸਮਾਨ ਹੈ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ

$$3x - 2y = 5 \qquad \ldots (1)$$

ਅਤੇ

$$3x + 2y = 5 \qquad \ldots (2)$$

ਮੰਨ ਲਉ (h, k) ਕੋਈ ਅਜਿਹਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀ ਰੇਖਾਵਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\frac{|3h-2k-5|}{\sqrt{9+4}} = \frac{|3h+2k-5|}{\sqrt{9+4}} \quad \text{ਜਾਂ} \quad |3h-2k-5| = |3h+2k-5|,$$

ਜਿਸ ਤੋਂ $3h - 2k - 5 = 3h + 2k - 5$ ਜਾਂ $-(3h - 2k - 5) = 3h + 2k - 5$

ਇਹਨਾਂ ਦੋ ਸੰਬੰਧਾ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ $k = 0$ ਜਾਂ $h = \frac{5}{3}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂ (h, k) ਸਮੀਕਰਣਾਂ $y = 0$ ਜਾਂ $x = \frac{5}{3}$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਕਿ ਸਰਲ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਰੇਖਾਵਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ ਬਰਾਬਰ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਪਥ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ 10 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. k ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਲਈ ਰੇਖਾ $(k - 3)\, x - (4 - k^2)\, y + k^2 - 7k + 6 = 0$ ਹੈ

(a) x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ

(b) y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ

(c) ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ।

2. θ ਅਤੇ p ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਸਮੀਕਰਣ $x \cos \theta + y \sin\theta = p$ ਰੇਖਾ $\sqrt{3}\, x + y + 2 = 0$ ਦਾ ਲੰਬ ਰੂਪ ਹੋਵੇ।

3. ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ, ਦੇ ਧੁਰਿਆਂ ਤੇ ਬਣੇ ਅੰਤਰਖੰਡਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ ਗੁਣਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 1 ਅਤੇ – 6 ਹੈ।

4. y-ਧੁਰੇ ਤੇ ਉਹ ਕਿਹੜੇ ਬਿੰਦੂ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਰੇਖਾ $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ ਤੋਂ ਦੂਰੀ 4 ਇਕਾਈ ਹੈ ?

5. ਬਿੰਦੂਆਂ $(\cos \theta, \sin \theta)$ ਅਤੇ $(\cos \phi, \sin \phi)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਤੇ ਬਣੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ $x - 7y + 5 = 0$ ਅਤੇ $3x + y = 0$ ਦੇ ਕਾਟ ਵਿੱਚੋਂ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਹੈ।

7. ਰੇਖਾ $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$ 'ਤੇ ਲੰਬ, ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਖਿੱਚੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ ਇਹ y-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਮਿਲਦੀ ਹੈ।

8. ਰੇਖਾਵਾਂ $y - x = 0$, $x + y = 0$ ਅਤੇ $x - k = 0$ ਦੁਆਰਾ ਬਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9. p ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਲਈ $3x + y - 2 = 0$, $px + 2y - 3 = 0$ ਅਤੇ $2x - y - 3 = 0$, ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹੋਣ।

10. ਜੇਕਰ ਤਿੰਨ ਰੇਖਾਵਾਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ $y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$ ਅਤੇ $y = m_3x + c_3$ ਸੰਗਾਮੀ ਹਨ ਤਾਂ ਦਿਖਾਓ ਕਿ $m_1(c_2 - c_3) + m_2(c_3 - c_1) + m_3(c_1 - c_2) = 0$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

11. ਬਿੰਦੂ (3, 2) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਅਤੇ ਰੇਖਾ $x - 2y = 3$ ਨਾਲ 45° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

12. ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ $4x + 7y - 3 = 0$ ਅਤੇ $2x - 3y + 1 = 0$ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਵਿਚੋਂ ਲੰਘ ਰਹੀ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸਦੇ ਧੁਰਿਆਂ 'ਤੇ ਅੰਤਰਖੰਡ ਸਮਾਨ ਹਨ।

13. ਦਿਖਾਓ ਕਿ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘ ਰਹੀ ਹੈ ਅਤੇ ਰੇਖਾ $y = mx + c$ ਨਾਲ ਕੋਣ θ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ, $\frac{y}{x} = \frac{m \pm \tan\theta}{1 \mp m\tan\theta}$ ਹੈ।

14. ਬਿੰਦੂਆਂ (–1, 1) ਅਤੇ (5, 7) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ ਰੇਖਾ $x + y = 4$ ਕਿਸ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੀ ਹੈ ?

15. ਰੇਖਾ $4x + 7y + 5 = 0$ ਦੀ ਬਿੰਦੂ (1, 2) ਤੋਂ ਰੇਖਾ $2x - y = 0$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

16. ਬਿੰਦੂ (–1, 2) ਤੋਂ ਖਿੱਚੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਉਸ ਰੇਖਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀ ਰੇਖਾ $x + y = 4$ ਨਾਲ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ, ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ 3 ਇਕਾਈ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੈ।

17. ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕਰਣ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂ (1, 3) ਅਤੇ (– 4, 1) ਹਨ। ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਲੰਬ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

18. ਬਿੰਦੂ (3, 8) ਦਾ ਰੇਖਾ $x + 3y = 7$ ਨਾਲ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਰੇਖਾ ਇੱਕ ਸਧਾਰਨ ਦਰਪਣ ਹੈ।

19. ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ $y = 3x + 1$ ਅਤੇ $2y = x + 3$ ਦਾ ਰੇਖਾ $y = mx + 4$ ਨਾਲ ਝੁਕਾਅ ਬਰਾਬਰ ਹੈ, ਤਾਂ m ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

20. ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ $x + y - 5 = 0$ ਅਤੇ $3x - 2y + 7 = 0$ ਤੋਂ ਚਲ ਬਿੰਦੂ $P(x, y)$ ਦੀ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀਆਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹਮੇਸ਼ਾਂ 10 ਹੈ। ਦਰਸਾਓ ਕਿ P ਪੱਕਾ ਰੇਖਾ ਤੇ ਚੱਲੇਗਾ।

21. ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ $9x + 6y - 7 = 0$ ਅਤੇ $3x + 2y + 6 = 0$ ਤੋਂ ਸਮਾਨ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ।

22. ਬਿੰਦੂ (1, 2) ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ ਦੀ ਕਿਰਨ x-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ A ਤੋਂ ਪਰਾਵਰਤਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਪਰਵਰਤਿਤ ਕਿਰਣ ਬਿੰਦੂ (5, 3) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ। A ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

23. ਦਿਖਾਓ ਕਿ $\left(\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$ ਅਤੇ $\left(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਰੇਖਾ $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$ 'ਤੇ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਲੰਬ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ b^2 ਹੈ।

24. ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ $2x - 3y + 4 = 0$ ਅਤੇ $3x + 4y - 5 = 0$ ਤੋਂ ਬਣੇ ਸਰਲ ਰੇਖੀ ਪੱਥਾਂ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਖੜ੍ਹਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਣ $6x - 7y + 8 = 0$ ਦੇ ਪਥ 'ਤੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਪਹੁੰਚਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਸ ਦੁਆਰਾ ਅਪਣਾਈ ਗਈ ਪੱਥ (Path) ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਇੱਕ ਨਾ-ਖੜ੍ਹਵੀਂ (Non-vertical) ਰੇਖਾ ਜੋ ਬਿੰਦੂਆਂ (x_1, y_1) ਅਤੇ (x_2, y_2) ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਦੀ ਢਲਾਣ (m) ਹੈ-

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad x_1 \neq x_2$$

- ਜੇਕਰ ਇਕ ਰੇਖਾ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਕੋਣ α ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਹੈ : $m = \tan\alpha$, $\alpha \neq 90^\circ$
- ਲੇਟਵੀਂ (Horizontal) ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਖੜ੍ਹਵੀਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਅਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
- ਰੇਖਾਵਾਂ L_1 ਅਤੇ L_2 ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਢਲਾਣ m_1 ਅਤੇ m_2 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਨਿਊਨ ਕੋਣ (ਮੰਨ ਲਓ θ) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|, 1 + m_1 m_2 \neq 0.$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

- ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ ਇਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਢਲਾਣਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।
- ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਲੰਬ ਹਨ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ ਇਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਢਲਾਣਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ –1 ਹੈ।
- ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂ ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ AB ਦੀ ਢਲਾਣ = BC ਦੀ ਢਲਾਣ
- x-ਧੁਰੇ ਤੋਂ a ਦੂਰੀ ਤੇ ਲੇਟਵੀਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜਾਂ
  $y = a$ ਜਾਂ $y = -a$ ਹੈ।
- y-ਧੁਰੇ ਤੋਂ b ਦੂਰੀ ਤੇ ਖੜ੍ਹਵੀਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜਾਂ $x = b$ ਜਾਂ $x = -b$ ਹੈ।
- ਸਥਿਰ ਬਿੰਦੂ (x_o, y_o) ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਢਲਾਣ m ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਸਥਿਰ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਸਮੀਕਰਣ $y - y_o = m(x - x_o)$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹੋਣ।
- ਬਿੰਦੂਆਂ (x_1, y_1) ਅਤੇ (x_2, y_2) ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ।

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

- ਢਲਾਣ m ਅਤੇ y-ਅੰਤਰਖੰਡ c ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ $y = mx + c$ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਢਲਾਣ m ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ x-ਅੰਤਰਖੰਡ d ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ
  $y = m(x - d)$ ਹੈ।
- x ਅਤੇ y-ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ a ਅਤੇ b ਅੰਤਰਖੰਡ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ਹੈ।
- ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀ p ਅਤੇ ਇਸ ਲੰਬ ਅਤੇ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ω ਬਣਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $x\cos\omega + y\sin\omega = p$ ਹੈ।
- ਕੋਈ ਸਮੀਕਰਣ $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿਚ, A ਅਤੇ B ਇਕੱਠੇ ਸਿਫ਼ਰ ਨਾ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ X ਵਿਆਪਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜਾਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਵਿਆਪਕ (General equation of a line) ਸਮੀਕਰਣ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ (x_1, y_1) ਤੋਂ ਰੇਖਾ $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0$ ਦੀ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀ (d) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ : $d = \frac{|\mathrm{A}x_1 + \mathrm{B}y_1 + \mathrm{C}|}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}}$
- ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}_1 = 0$ ਅਤੇ $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}_2 = 0$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ ਹੈ : $d = \frac{|\mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_2|}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}}$

— ❖ —

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਧਿਆਇ 11

ਕਾਨਿਕ ਕਾਟਾਂ
(Conic Sections)

❖*Let the relation of knowledge to real life be very visible to your pupils and let them understand how by knowledge the world could be transformed. – BERTRAND RUSSELL* ❖

11.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਪਿਛਲੇ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਭਿੰਨ ਰੂਪਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਹੋਰ ਵਕਰਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਵੇਂ ਕੀ ਚੱਕਰ (Circle), ਪੈਰਾਬੋਲਾ (Parabola), ਇਲਿਪਸ (ellipse) ਅਤੇ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ (Hyperbola)। ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਅਤੇ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਨਾਂ Apollonius ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਵਾਸਤਵ ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਵਕਰਾਂ ਨੂੰ ਕੱਨਿਕ ਕਾਟ (Conic Sections) ਜਾਂ ਆਮ ਤੌਰ ’ਤੇ ਕਾਨਿਕਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਦੂਹਰੇ ਨੇਪਡ ਕੋਨ (double napped cone) ਅਤੇ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਦੀ ਕਾਟ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਗ੍ਰਹਾਂ ਦੀ ਗਤੀ, ਦੂਰਦਰਸ਼ੀ ਯੰਤਰ (telescope) ਅਤੇ ਐਂਟੀਨਾ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ, ਆਟੋਮੋਬਾਈਲ ਦੀ ਲਾਈਟਾਂ ਵਿੱਚ, ਪਰਾਵਰਤਕਾਂ ਆਦਿ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਹੀ ਲਾਭਦਾਇਕ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਅੱਗੇ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਸੈਕਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਵੇਖਾਂਗੇ ਕਿ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਇੱਕ ਦੂਹਰੇ ਨੇਪਡ ਕੋਨ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਦੀ ਕਾਟ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ ਵਿੱਚ ਭਿੰਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਵਕਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

Apollonius
(262 B.C. -190 B.C.)

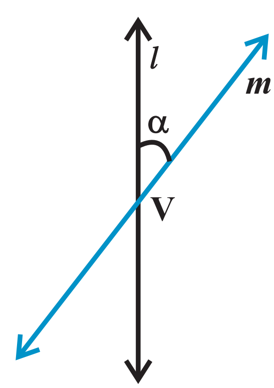
11.2 ਕੋਨ ਦੀਆਂ ਕਾਟਾਂ (Section of a Conic)

ਮੰਨ ਲਓ l ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਖੜ੍ਹੀ ਰੇਖਾ ਹੈ ਅਤੇ m ਦੂਸਰੀ ਰੇਖਾ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਇਸ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਸਥਿਰ ਬਿੰਦੂ V ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਤੋਂ ਇੱਕ ਕੋਣ α ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 11.1)

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਅਸੀਂ ਰੇਖਾ m ਨੂੰ ਰੇਖਾ l ਦੇ ਗਿਰਦ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਘੁਮਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਕੋਣ α ਅਚੱਲ ਰਹੇ ਤਾਂ ਜਨਿਤ ਤੱਲ ਇੱਕ ਦੂਹਰੇ ਨੇਪਡ ਖੋਖਲੇ ਕੋਨ ਹਨ ਜਿਹਨਾ ਨੂੰ ਹੁਣ ਤੋਂ ਕੋਨ ਕਹਾਂਗੇ ਜਿਹੜੇ ਦੋਵੇਂ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਅਨਿਸ਼ਚਿਤ ਦੂਰੀ ਤੱਕ ਵੱਧ ਰਹੇ ਹਨ। (ਚਿੱਤਰ11.2)

ਬਿੰਦੂ V ਨੂੰ ਕੋਨ ਦਾ ਸਿਖਰ (*vertex*) ਅਤੇ ਸਥਿਰ ਰੇਖਾ l ਨੂੰ ਕੋਨ ਦਾ ਧੁਰਾ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਘੁੰਮਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ m ਨੂੰ ਕੋਨ ਦੀ ਜਣਕ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸਿਖਰ ਕੋਨ ਨੂੰ ਦੋ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਨੇਪ (*nappe*) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

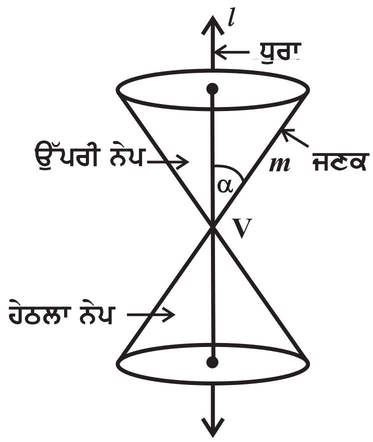
ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਤੱਲ ਅਤੇ ਇੱਕ ਕੋਨ ਦੀ ਕਾਟ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਕਾਟ ਨੂੰ ਵਕਰ ਕੱਨਿਕ ਸ਼ੈਕਸ਼ਨ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੋਨ ਦੀ ਕਾਟ ਉਹ ਵਕਰ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਕੋਨ ਅਤੇ ਇੱਕ ਤਲ ਦੀ ਕਾਟ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।



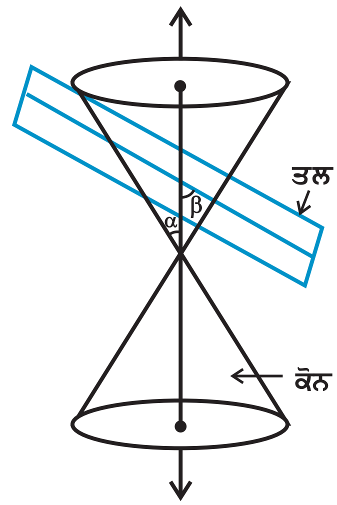
ਚਿੱਤਰ 11. 1

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com



ਚਿੱਤਰ 11. 2



ਚਿੱਤਰ 11. 3

ਕੋਨ ਨੂੰ ਕੱਟਦੇ ਤੱਲ ਅਤੇ ਕੋਨ ਦੇ ਲੰਬ ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਉਸ ਰਾਹੀਂ ਬਣਾਏ ਕੋਣ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸਾਨੂੰ ਵੱਖਰੇ ਤਰਾਂ ਦੀਆਂ ਕੋਨ ਦੀ ਕਾਟਾਂ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ। ਮਨ ਲਓ ਕਿ ਕੱਟਦਾ ਹੋਇਆ ਤਲ ਕੋਨ ਦੇ ਲੰਬ ਧੁਰੇ ਨਾਲ β ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 11.3)।

ਕੋਨ ਦੇ ਨਾਲ ਤੱਲ ਦੀ ਕਾਟ ਜਾਂ ਤਾਂ ਕੋਨ ਦੇ ਸ਼ਿਖਰ ਤੇ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜਾਂ ਨੇਪ ਦੇ ਦੂਜੇ ਕਿਸੇ ਭਾਗ ਉੱਪਰ ਜਾਂ ਨੀਚੇ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।

11.2.1 ਚੱਕਰ (Circle) ਇਲਿਪਸ (ellipse), ਪੈਰਾਬੋਲਾ (Parabola) ਅਤੇ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ (hyperbola) ਜਦੋਂ ਤੱਲ ਕੋਨ ਦੇ ਨੇਪ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ (ਸ਼ਿਖਰ ਛੱਡ ਕੇ), ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ :

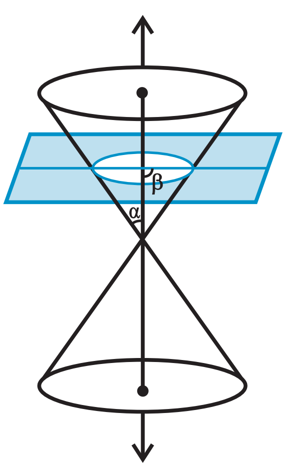
(a) ਜਦ $\beta = 90^{\circ}$, ਤਾਂ ਕਾਟ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.4)।

(b) ਜਦ $\alpha < \beta < 90^{\circ}$, ਤਾਂ ਕਾਟ ਇੱਕ ਇਲਿਪਸ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.5)।

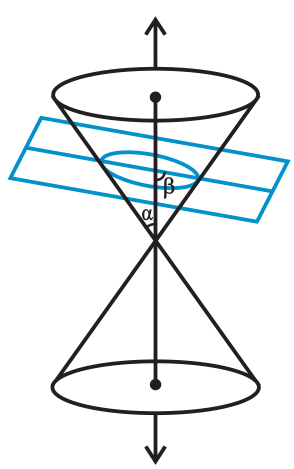
(c) ਜਦ $\beta = \alpha$ ਤਾਂ ਕਾਟ ਇੱਕ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.6)।

(ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦੀ ਹਰ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਕੋਨ ਨੂੰ ਨੇਪ ਦੇ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਆਰ-ਪਾਰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।)

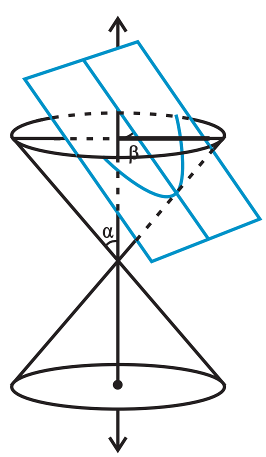
(d) ਜਦ $0 \leq \beta < \alpha$; ਤਾਂ ਤਲ ਦੋਵੇਂ ਨੇਪਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕਾਟ ਦਾ ਵਕਰ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.7)।



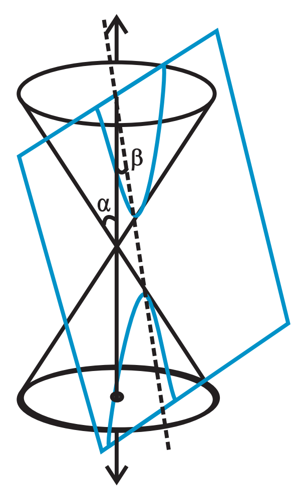
ਚਿੱਤਰ 11. 4



ਚਿੱਤਰ 11. 5



ਚਿੱਤਰ 11. 6



ਚਿੱਤਰ 11. 7

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

11.3 ਨਿਘਰਿਆ ਕਾਨਿਕ ਕਾਟ *(Degenerated conic sections)*

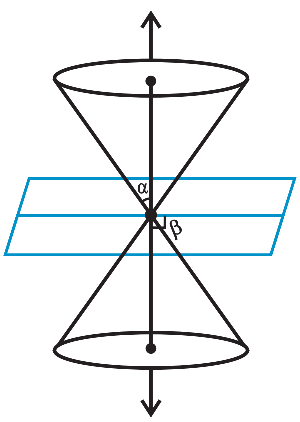
ਜਦੋਂ ਤੱਲ ਕੋਨ ਨੂੰ ਸ਼ਿਖਰ ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਹੇਠ ਦਿੱਤਿਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ :

(a) ਜਦ $\alpha < \beta \le 90^{\circ}$, ਤਾਂ ਕਾਟ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.8)

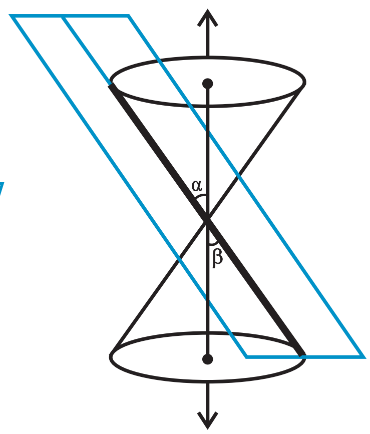
(b) ਜਦ $\beta = \alpha$, ਤਾਂ ਤੱਲ ਵਿੱਚ ਕੋਨ ਦੀ ਜਣਕ ਰੇਖਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਕਾਟ ਇੱਕ ਸਿੱਧੀ ਰੇਖਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.9) । ਇਹ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੀ ਨਿਘਰੀ ਸਥਿਤੀ ਹੈ।

(c) ਜਦ $0 \le \beta < \alpha$, ਤਾਂ ਕਾਟ ਇਕ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.10)। ਇਹ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦੀ ਨਿਘਰੀ ਸਥਿਤੀ ਹੈ।

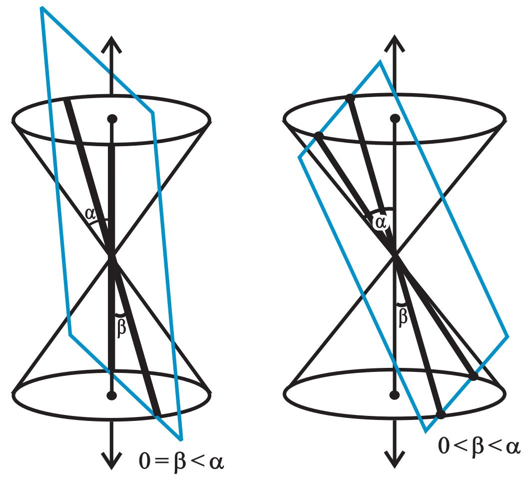
ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਸੈਕਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਕੱਨਿਕ ਕਾਟਾਂ ਦੀਆਂ ਰੇਖਾ-ਗਣਿਤਿਕ ਮਾਨਕਾਂ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਾਂਗੇ।



ਚਿੱਤਰ 11. 8



ਚਿੱਤਰ 11. 9

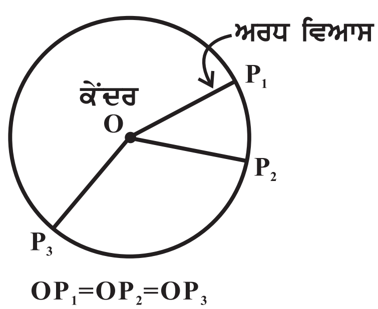


(a) ਚਿੱਤਰ 11. 10 (b)

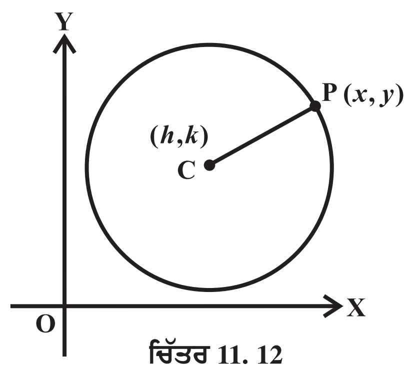
11.4 ਚੱਕਰ (Circle)

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1 ਚੱਕਰ, ਤੱਲ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਤੱਲ ਦੇ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਸਮਾਨ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਸਥਿਰ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਚੱਕਰ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਚੱਕਰ ਤੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਨੂੰ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 11.11)।

ਜੇਕਰ ਚੱਕਰ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਚੱਕਰ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਸਰਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਫਿਰ ਵੀ, ਅਸੀਂ ਦੱਸੇ ਗਏ ਕੇਂਦਰ ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹਾਸਲ ਕਰਾਂਗੇ (ਚਿੱਤਰ 11.12)।



ਚਿੱਤਰ 11. 11



ਚਿੱਤਰ 11. 12

ਚੱਕਰ ਦਾ ਕੇਂਦਰ C (h, k) ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਚੱਕਰ ਤੇ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ $P(x, y)$ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.12)। ਤਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਰਾਹੀਂ, $|CP| = r$ ਦੂਰੀ ਸੂਤਰ ਰਾਹੀਂ, ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ : $\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$

ਜਿਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ, $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਹ ਕੇਂਦਰ (h,k) ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਕੇਂਦਰ (0,0) ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $h = k = 0$ ਇਸ ਕਰਕੇ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ $x^2 + y^2 = r^2$

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਕੇਂਦਰ (–3, 2) ਅਤੇ ਅਰਧ-ਵਿਆਸ 4 ਇਕਾਈ ਦੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $h = -3$, $k = 2$ ਅਤੇ $r = 4$ ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ ਲੋੜੀਂਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ :

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4^2$$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਚੱਕਰ $x^2 + y^2 + 8x + 10y - 8 = 0$ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਸਮੀਕਰਣ

$$(x^2 + 8x) + (y^2 + 10y) = 8$$

ਹੁਣ ਬਰੈਕਟਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣਾਉਣ ਤੇ :

$$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 + 10y + 25) = 8 + 16 + 25$$

$$(x + 4)^2 + (y + 5)^2 = 49$$

$$\{x - (-4)\}^2 + \{y - (-5)\}^2 = 7^2$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਚੱਕਰ ਦਾ ਕੇਂਦਰ (–4,–5) ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 7 ਇਕਾਈ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਬਿੰਦੂਆਂ (2, – 2) ਅਤੇ (3,4) ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਉਸ ਚੱਕਰ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ ਕੇਂਦਰ ਰੇਖਾ $x + y = 2$ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਚੱਕਰ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ ਹੈ।
ਇਹ ਬਿੰਦੂਆਂ (2, – 2) ਅਤੇ (3,4) ਤੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕੀ :

$$(2 - h)^2 + (-2 - k)^2 = r^2 \quad \ldots (1)$$

ਅਤੇ

$$(3 - h)^2 + (4 - k)^2 = r^2 \quad \ldots (2)$$

ਅਤੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਰੇਖਾ $x + y = 2$, ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ, ਇਸ ਕਰਕੇ :

$$h + k = 2 \quad \ldots (3)$$

ਸਮੀਕਰਣਾਂ (1), (2) ਅਤੇ (3), ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਕੇ, ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$h = 0.7, \quad k = 1.3 \text{ ਅਤੇ } r^2 = 12.58$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਚੱਕਰ ਦਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ :

$$(x - 0.7)^2 + (y - 1.3)^2 = 12.58$$

ਅਭਿਆਸ 11.1

ਹਰੇਕ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਭਿਆਸ 1 ਤੋਂ 5 ਤੱਕ, ਚੱਕਰ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ ਕੀ :

1. ਕੇਂਦਰ (0, 2) ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 2 ਹੈ।
2. ਕੇਂਦਰ (–2,3) ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 4 ਹੈ।
3. ਕੇਂਦਰ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ $\frac{1}{12}$ ਹੈ।
4. ਕੇਂਦਰ (1,1) ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ $\sqrt{2}$ ਹੈ।
5. ਕੇਂਦਰ $(-a, -b)$ ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ $\sqrt{a^2 - b^2}$ ਹੈ।

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਭਿਆਸ 6 ਤੋਂ 9 ਤੱਕ, ਚੱਕਰਾਂ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 36$
7. $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 45 = 0$
8. $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$
9. $2x^2 + 2y^2 - x = 0$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

10. ਬਿੰਦੂਆਂ (4,1) ਅਤੇ (6,5) ਤੋਂ ਲੰਘਦੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ ਕੇਂਦਰ ਰੇਖਾ $4x + y = 16$ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ।

11. ਬਿੰਦੂਆਂ (2,3) ਅਤੇ (–1,1) ਤੋਂ ਲੰਘਦੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ ਕੇਂਦਰ ਰੇਖਾ $x - 3y - 11 = 0$ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ।

12. ਬਿੰਦੂ (2,3) ਤੋਂ ਲੰਘਦੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ ਕੇਂਦਰ x ਧੁਰੇ ਤੇ ਹੈ ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 5 ਹੈ।

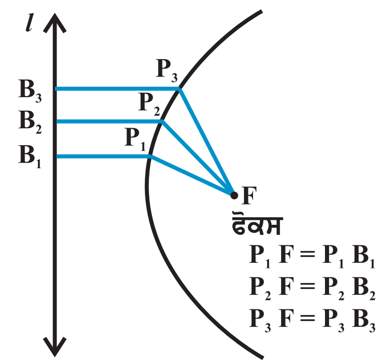
13. ਬਿੰਦੂ (0,0) ਤੋਂ ਲੰਘਦੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਕਿ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਾਂ ਤੇ a ਅਤੇ b ਅੰਤਰ ਖੰਡ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ।

14. ਉਸ ਚੱਕਰ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ ਕੇਂਦਰ (2,2) ਹੈ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ (4,5) ਤੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ।

15. ਕੀ ਬਿੰਦੂ (–2.5, 3.5) ਚੱਕਰ $x^2 + y^2 = 25$ ਦੇ ਅੰਦਰ, ਬਾਹਰ ਜਾਂ ਚੱਕਰ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ ?

11.5 ਪੈਰਾਬੋਲਾ (Parabola)

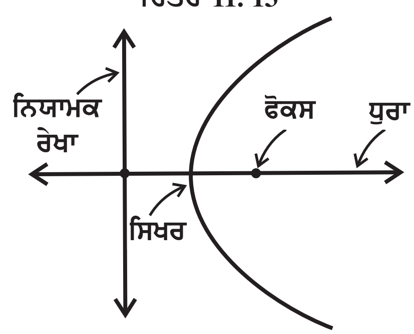
ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2 ਇੱਕ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਤਲ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਤਲ ਦੇ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਿੰਦੂ (ਜਿਹੜਾ ਰੇਖਾ ਤੇ ਨਹੀਂ ਹੈ) ਤੋਂ ਬਰਾਬਰ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੈ। ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੀ ਨਿਯਾਮਕ ਰੇਖਾ (*directrix*) ਅਤੇ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਿੰਦੂ F ਨੂੰ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਫੋਕਸ (*focus*) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 11.13) (ਅੰਗਰੇਜੀ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ 'Para' ਦਾ ਅਰਥ 'ਤੋਂ' ਅਤੇ 'bola' ਦਾ ਅਰਥ ਸੁੱਟਣਾ ਹੈ, ਭਾਵ ਹਵਾ ਵਿੱਚ ਗੇਂਦ ਸੁੱਟਣ ਤੋਂ ਬਣਿਆ ਹੋਇਆ ਪਥ)



ਚਿੱਤਰ 11. 13

ਟਿੱਪਣੀ ਜੇਕਰ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਿੰਦੂ, ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਤੱਲ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਜਿਹੜੇ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਿੰਦੂ ਅਤੇ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੇਖਾ ਤੋਂ ਸਮਾਨ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹਨ, ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੰਘਦੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੇਖਾ ਤੇ ਲੰਬ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੀ ਨਿਘਰੀ ਸਥਿਤੀ ਆਖਦੇ ਹਾਂ।

ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਫੋਕਸ ਤੋਂ ਲੰਘਦੀ ਅਤੇ ਨਿਯਾਮਕ ਰੇਖਾ ਤੇ ਲੰਬ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਧੁਰਾ ਆਖਦੇ ਹਨ। ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਧੁਰਾ ਜਿਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ ਉਸ ਨੂੰ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਸ਼ਿਖਰ ਆਖਦੇ (vertex) ਹਨ। (ਚਿੱਤਰ 11.14)।

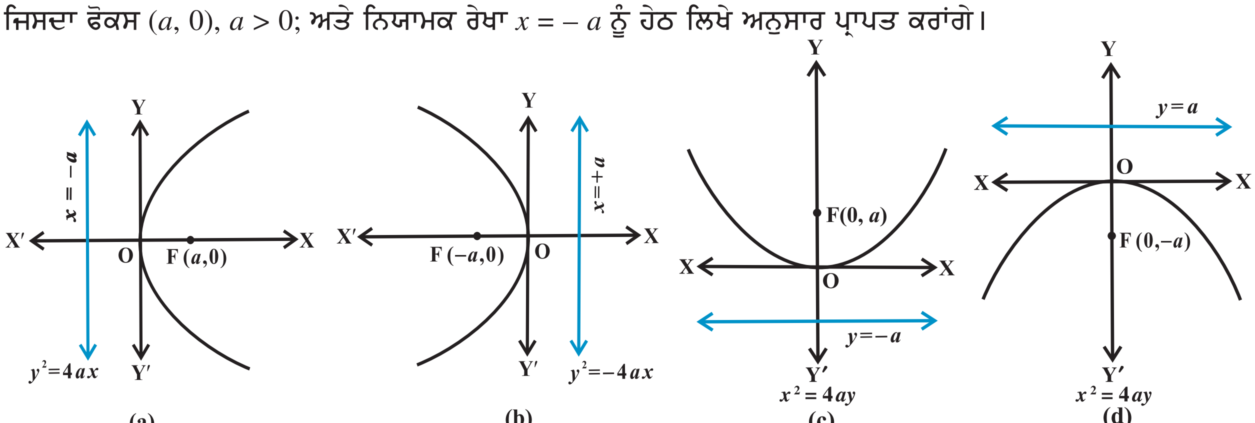


ਚਿੱਤਰ 11.14

11.5.1 *ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਮਾਨਕ ਸਮੀਕਰਣ (Standard equations of parabola)*

ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਸਭ ਤੋਂ ਸਰਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇਸਦਾ ਸ਼ਿਖਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਧੁਰਾ x-ਧੁਰੇ ਜਾਂ y-ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਸਮਮਿਤ ਹੋਵੇ। ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਇਹੋ-ਜਿਹੇ ਚਾਰ ਸੰਭਵ ਦਿਸ਼ਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਰੂਪ ਹੇਠਾਂ ਚਿੱਤਰ 11.15 (a) ਤੋਂ (d) ਤਕ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਹਨ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 11.15 (a) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਜਿਸਦਾ ਫੋਕਸ $(a, 0)$, $a > 0$; ਅਤੇ ਨਿਯਾਮਕ ਰੇਖਾ $x = -a$ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਾਂਗੇ।

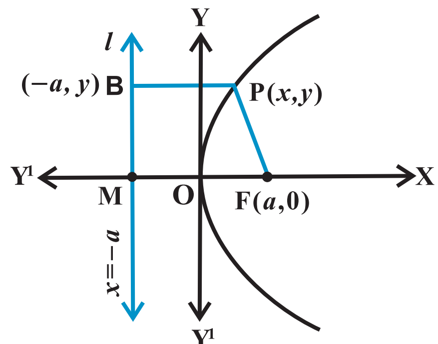


ਚਿੱਤਰ 11.15 (a) ਤੋਂ (d)

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਫੋਕਸ F ਅਤੇ ਨਿਯਾਮਕ ਰੇਖਾ l ਹਨ। ਨਿਯਾਮਕ ਤੇ ਲੰਬ FM ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ FM ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ O ਤੇ ਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰੋ। MO ਨੂੰ X ਤੱਕ ਵਧਾਓ। ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ O ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਤੇ ਹੈ ਅਤੇ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਸ਼ਿਖਰ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। O ਨੂੰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਮੰਨ ਕੇ OX ਨੂੰ x-ਧੁਰਾ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਲੰਬ OY ਨੂੰ y-ਧੁਰਾ ਲਓ। ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਫ਼ੋਕਸ ਦੀ ਨਿਯਾਮਕ ਤੋਂ ਦੂਰੀ $2a$ ਹੈ। ਤਾਂ ਫੋਕਸ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(a, 0)$, $a > 0$ ਹੈ ਅਤੇ ਨਿਯਾਮਕ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $x + a = 0$ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 11.16 ਵਿੱਚ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 11.16

ਮੰਨ ਲਓ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਤੇ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ $P(x, y)$ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ ਕਿ

$$PF = PB \qquad ...(1)$$

ਜਿੱਥੇ PB ਰੇਖਾ l ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ। B ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(-a, y)$ ਹਨ। ਦੂਰੀ ਸੂਤਰ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$PF = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \text{ ਅਤੇ } PB = \sqrt{(x+a)^2}$$

ਕਿਉਂਕੀ PF = PB, ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{(x+a)^2}$$

ਇਸ ਲਈ $(x - a)^2 + y^2 = (x + a)^2$

ਜਾਂ $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$

ਜਾਂ $y^2 = 4ax$ ($a > 0$)

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਤੇ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਸਮੀਕਰਣ

$y^2 = 4ax$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ। ... (2)

ਉਲਟ ਤੌਰ 'ਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਬਿੰਦੂ $P(x, y)$ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਤਾਂ

$$PF = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{(x-a)^2 + 4ax}$$

$$= \sqrt{(x+a)^2} = PB \qquad ... (3)$$

ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ $P(x, y)$ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਤੇ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ (2) ਅਤੇ (3) ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਕਿ ਇੱਕ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਜਿਸਦਾ ਸ਼ਿਖਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ, ਫ਼ੋਕਸ $(a,0)$ ਅਤੇ ਨਿਯਾਮਕ ਰੇਖਾ $x = -a$ ਹੈ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $y^2 = 4ax$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਵਿਚਾਰ-ਚਰਚਾ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ $a > 0$, x ਦਾ ਮੁੱਲ ਧਨਾਤਮਕ ਜਾਂ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਪਰ ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਹੀਂ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿਚ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਨੂੰ ਪਹਿਲੀ ਅਤੇ ਚੌਥੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਅਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਧਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਧੁਰਾ, x-ਧੁਰੇ ਦਾ ਧਨਾਤਮਕ ਭਾਗ ਹੈ। ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਚਿੱਤਰ 11.15 (b) ਵਿੱਚ $y^2 = -4ax$

ਚਿੱਤਰ 11.15 (c) ਵਿੱਚ $x^2 = 4ay$

ਚਿੱਤਰ 11.15 (d) ਵਿੱਚ $x^2 = -4ay$

ਇਹਨਾਂ ਚਾਰਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾ ਨੂੰ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਮਾਨਕ ਸਮੀਕਰਣ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਮਾਨਕ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿਚ, ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਫ਼ੋਕਸ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਸ਼ਿਖਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਨਿਯਾਮਕ ਰੇਖਾ ਦੂਜੇ ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਇਹੋ-ਜਿਹੇ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਅਧਿਐਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਫ਼ੋਕਸ ਕੋਈ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਅਤੇ ਨਿਯਾਮਕ ਰੇਖਾ ਕੋਈ ਵੀ ਰੇਖਾ ਹੋਵੇ, ਇਸ ਕਿਤਾਬ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਚਿੱਤਰ 11.15 ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਮਾਨਕ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਨਿਰੀਖਣ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨਤੀਜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ :

1. ਪੈਰਾਬੋਲਾ, ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਧੁਰੇ ਦੇ ਬਾਬਤ ਸਮਮਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ y^2 ਦਾ ਪਦ ਹੈ ਤਾਂ ਸਮਮਿਤ, x-ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ x^2 ਦਾ ਪਦ ਹੈ ਤਾਂ ਸਮਮਿਤ ਧੁਰਾ, y-ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੈ।
2. ਜੇਕਰ ਸਮਮਿਤ ਧੁਰਾ, x-ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ ਅਤੇ।
   (a) x ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਖੁਲਦਾ ਹੈ।
   (b) x ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਖੁਲਦਾ ਹੈ।
3. ਜੇਕਰ ਸਮਮਿਤ ਧੁਰਾ y-ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ ਅਤੇ
   (c) y ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਉੱਪਰ ਵੱਲ ਖੁਲਦਾ ਹੈ।
   (d) y ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਹੇਠਾਂ ਵੱਲ ਖੁਲਦਾ ਹੈ।

11.5.2 ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ (Latus rectum)

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 3 ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਫ਼ੋਕਸ ਤੋਂ ਲੰਘਦੀ ਅਤੇ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਲੰਬ ਰੇਖਾ ਦਾ ਹਿੱਸਾ ਜਿਸਦੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਤੇ ਹੋਣ, ਨੂੰ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੀ ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 11.17)।

ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y^2 = 4ax$ ਦੀ ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨਾ (ਚਿੱਤਰ 11.18)

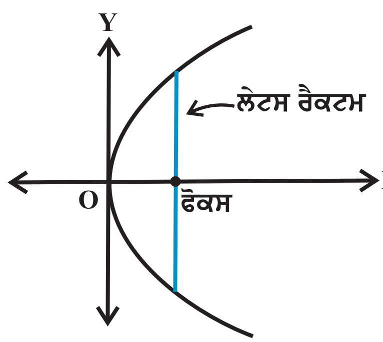
ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ, AF = AC

ਪਰੰਤੂ AC = FM = $2a$

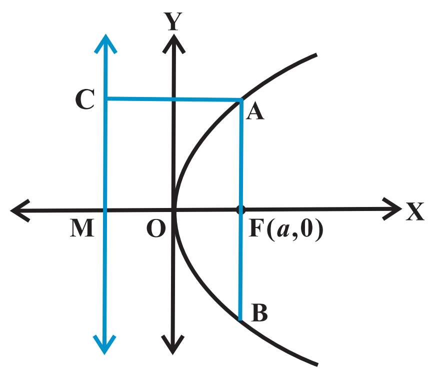
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ AF = $2a$

ਅਤੇ ਕਿਉਂਕਿ ਪੈਰਾਬੋਲਾ, x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਬਾਬਤ ਸਮਮਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ AF = FB ਅਤੇ

ਇਸ ਲਈ AB = ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ = $4a$



ਚਿੱਤਰ 11.17



ਚਿੱਤਰ 11.18

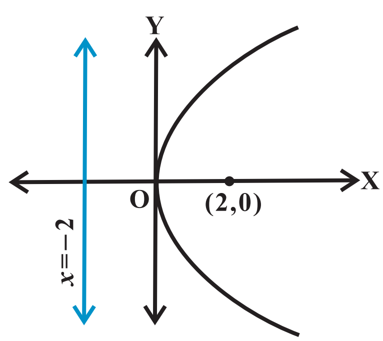
ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $y^2 = 8x$ ਹੈ ਤਾਂ ਫ਼ੋਕਸ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ, ਧੁਰਾ, ਨਿਯਾਮਕ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਅਤੇ ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ y^2, ਦਾ ਪਦ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਪੈਰਾਬੋਲਾ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਬਾਬਤ ਸਮਮਿਤ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਪਦ x ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਖੁਲਦਾ ਹੈ। ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $y^2 = 4ax$, ਤੋਂ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ $a = 2$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਫ਼ੋਕਸ (2, 0) ਹੈ ਅਤੇ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੀ ਨਿਯਾਮਕ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $x = -2$ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.19)।

ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਹੈ $4a = 4 \times 2 = 8$



ਚਿੱਤਰ 11.19

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਫੋਕਸ (2,0) ਅਤੇ ਨਿਯਾਮਕ ਰੇਖਾ $x = -2$ ਵਾਲੇ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਕਿਉਂਕਿ ਫ਼ੋਕਸ (2,0) x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਹੈ ਇਸ ਲਈ x-ਧੁਰਾ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਧੁਰਾ ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $y^2 = 4ax$ ਜਾਂ $y^2 = -4ax$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿਚ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਨਿਯਾਮਕ ਰੇਖਾ $x = -2$ ਹੈ ਅਤੇ ਫੋਕਸ (2,0), ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $y^2 = 4ax$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $a = 2$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ $y^2 = 4(2)x = 8x$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਇੱਕ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ ਸ਼ਿਖਰ (0, 0) ਅਤੇ ਫ਼ੋਕਸ (0, 2) ਹੈ।

ਹੱਲ: ਕਿਉਂਕਿ ਸਿਖਰ (0,0) ਅਤੇ ਫ਼ੋਕਸ (0,2) ਹੈ ਜੋ ਕਿ y-ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਧੁਰਾ y-ਧੁਰਾ ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $x^2 = 4ay$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿਚ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ

$$x^2 = 4(2)y, \text{ ਭਾਵ } x^2 = 8y\text{।}$$

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਉਸ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ y-ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਸਮਮਿਤ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ (2,–3) ਤੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੋਏ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਪੈਰਾਬੋਲਾ y- ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਸਮਮਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਸ਼ਿਖਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਸਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $x^2 = 4ay$ ਜਾਂ $x^2 = -4ay$, ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਚਿੰਨ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਉੱਪਰ ਜਾਂ ਹੇਠ ਵੱਲ ਖੁਲਦਾ ਹੈ ਇਸ 'ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਚੌਥੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ (2,–3) ਤੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰ ਹੀ ਹੇਠਾਂ ਵੱਲ ਖੁੱਲੇਗਾ। ਇਸ ਕਰਕੇ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $x^2 = -4ay$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਪੈਰਾਬੋਲਾ

(2,–3) ਤੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $2^2 = -4a(-3)$, ਭਾਵ $a = \frac{1}{3}$

ਇਸ ਲਈ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ : $x^2 = -4\left(\frac{1}{3}\right)y$, ਭਾਵ $3x^2 = -4y$

ਅਭਿਆਸ 11.2

ਅਭਿਆਸ 1 ਤੋਂ 6 ਤੱਕ ਹਰੇਕ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਤੋਂ ਫ਼ੋਕਸ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ, ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਧੁਰਾ, ਨਿਯਾਮਕ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਅਤੇ ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. $y^2 = 12x$ **2.** $x^2 = 6y$ **3.** $y^2 = -8x$

4. $x^2 = -16y$ **5.** $y^2 = 10x$ **6.** $x^2 = -9y$

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਭਿਆਸ 7 ਤੋਂ 12 ਤੱਕ ਹਰੇਕ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹੜਾ ਕੀ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸ਼ਰਤ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ

7. ਫ਼ੋਕਸ (6,0); ਨਿਯਾਮਕ ਰੇਖਾ $x = -6$ **8.** ਫ਼ੋਕਸ (0,–3); ਨਿਯਾਮਕ ਰੇਖਾ $y = 3$

9. ਸ਼ਿਖਰ (0,0); ਫ਼ੋਕਸ (3,0) **10.** ਸ਼ਿਖਰ (0,0); ਫ਼ੋਕਸ (–2,0)

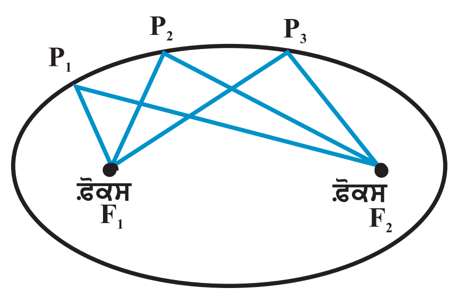
11. ਸ਼ਿਖਰ (0,0), (2,3) ਤੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਧੁਰਾ x-ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੈ।

12. ਸ਼ਿਖਰ (0,0), (5,2) ਤੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ ਅਤੇ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਬਾਬਤ ਸਮਮਿਤ ਹੈ।

11.6 ਇਲਿਪਸ (Ellipse)

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 4 ਇੱਕ ਇਲਿਪਸ ਤੱਲ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਤੱਲ ਵਿੱਚ ਦੋ ਅੱਚਲ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਦਾ ਜੋੜ ਅਚੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਦੋ ਸਥਿਰ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਇਲਿਪਸ ਦੇ ਫ਼ੋਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। (ਚਿੱਤਰ 11.20)।

ਟਿੱਪਣੀ ਇਲਿਪਸ ਤੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਦੋ ਸਥਿਰ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਦੂਰੀਆਂ ਦਾ ਜੋੜ ਅਚੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਉਹ ਸਥਿਰ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।



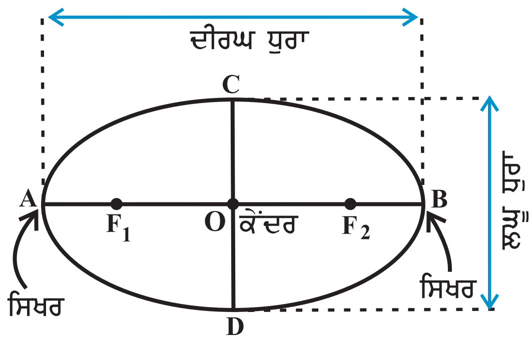
$P_1F_1 + P_1F_2 = P_2F_1 + P_2F_2 = P_3F_1 + P_3F_2$

ਚਿੱਤਰ 11.20

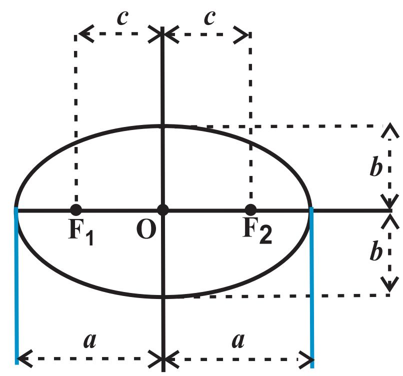
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਫੋਕਸਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਹਿੱਸੇ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਇਲਿਪਸ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਲਿਪਸ ਦੇ ਫ਼ੋਕਸਾਂ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਹਿੱਸੇ ਨੂੰ ਇਲਿਪਸ ਦਾ ਦੀਰਘ ਧੁਰਾ (major axis) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਦੀਰਘ ਧੁਰੇ ਤੇ ਲੰਬ ਰੇਖਾ ਦੇ ਹਿੱਸੇ ਨੂੰ ਲਘੂ ਧੁਰਾ (minor axis) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਦੀਰਘ ਧੁਰੇ ਦੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਇਲਿਪਸ ਦੇ ਸ਼ਿਖਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। (ਚਿੱਤਰ 11.21)।



ਚਿੱਤਰ 11.21



ਚਿੱਤਰ 11.22

ਅਸੀਂ ਦੀਰਘ ਧੁਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਨੂੰ $2a$, ਲਘੂ ਧੁਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਨੂੰ $2b$ ਅਤੇ ਫ਼ੋਕਸਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਦੂਰੀ ਨੂੰ $2c$ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਰਧ-ਦੀਰਘ ਧੁਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ a ਅਤੇ ਅਰਧ-ਲਘੂ ਧੁਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ b ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ11.22)।

11.6.1 *ਅਰਧ-ਦੀਰਘ ਧੁਰੇ, ਅਰਧ-ਲਘੂ ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਇਲਿਪਸ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਫ਼ੋਕਸ ਦੀ ਦੂਰੀ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸੰਬੰਧ (ਚਿੱਤਰ 11.23) ।*

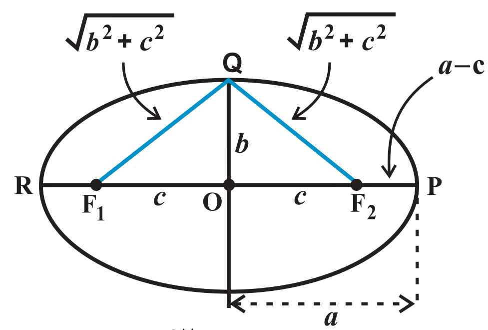
ਚਿੱਤਰ 11.23 ਵਿੱਚ ਇਲਿਪਸ ਦੇ ਦੀਰਘ ਧੁਰੇ ਤੇ ਇੱਕ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ P ਲਵੋ।

ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਫ਼ੋਕਸਾਂ ਤੋਂ ਦੂਰੀਆਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ :

$$F_1P + F_2P = F_1O + OP + F_2P$$

(ਕਿਉਂਕਿ, $F_1P = F_1O + OP$)

$$= c + a + a - c = 2a$$



ਚਿੱਤਰ 11.23

ਹੁਣ ਲਘੂ ਧੁਰੇ ਤੇ ਇੱਕ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ Q ਲਵੋ।

ਬਿੰਦੂ Q ਦੇ ਫੋਕਸਾਂ ਦੀ ਦੂਰੀਆਂ ਦਾ ਜੋੜ $F_1Q + F_2Q$

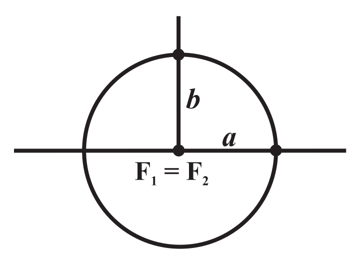
$$= \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2} = 2\sqrt{b^2 + c^2}$$

ਕਿਉਂਕਿ P ਅਤੇ Q ਦੋਵੇਂ ਇਲਿਪਸ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਇਲਿਪਸ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$2\sqrt{b^2 + c^2} = 2a, \text{ ਭਾਵ } a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

ਜਾਂ $$a^2 = b^2 + c^2, \text{ ਭਾਵ } c = \sqrt{a^2 - b^2}$$



ਚਿੱਤਰ 11.24

11.6.2 *ਇੱਕ ਇਲਿਪਸ ਦੀਆਂ ਖ਼ਾਸ ਸਥਿਤੀਆਂ (Special cases of an ellipse)* ਉੱਤੇ

ਪ੍ਰਾਪਤ ਸਮੀਕਰਣ $c^2 = a^2 - b^2$ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ a ਦਾ ਮਾਨ ਸਥਿਰ ਰੱਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ c ਦਾ ਮਾਨ 0 ਤੋਂ a, ਤੱਕ ਵਧਾਇਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਪਰਿਣਾਮੀ ਇਲਿਪਸ ਦੇ ਅਕਾਰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਬਦਲਣਗੇ।

ਸਥਿਤੀ 1. ਜੇਕਰ $c = 0$, ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਫੋਕਸ ਕੇਂਦਰ ਵਿੱਚ ਮਿਲ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ $a^2 = b^2$, ਜਾਂ $a = b$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਲਿਪਸ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਬਣ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 11.24)। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਚੱਕਰ ਇੱਕ ਇਲਿਪਸ ਦੀ ਖ਼ਾਸ ਸਥਿਤੀ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਭਾਗ 11.3 ਵਿੱਚ ਦਸਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ 2. ਜੇਕਰ $c = a$, ਹੋਵੇ ਤਾਂ $b = 0$ ਅਤੇ ਇਲਿਪਸ ਦੋਵੇਂ ਫ਼ੋਕਸਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਹਿੱਸੇ F_1F_2 ਤੱਕ ਸਿਮਟ ਜਾਂਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ11.25)।

ਚਿੱਤਰ 11.25

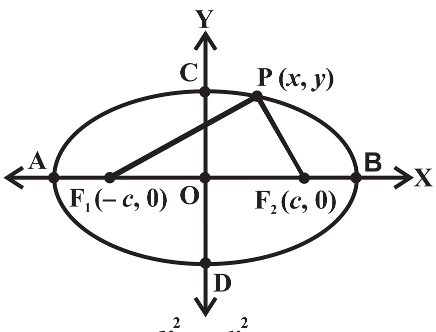
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

11.6.3 ਅਸਮਕੇਂਦਰਤਾ (Ecentricity)

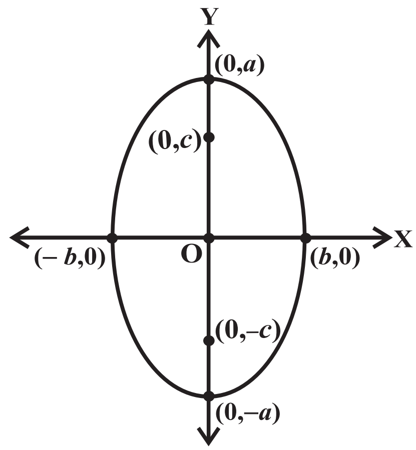
ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 5 ਇਲਿਪਸ ਦੀ ਅਸਮਕੇਂਦਰਤਾ, ਇਲਿਪਸ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਫ਼ੋਕਸ ਅਤੇ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਸ਼ਿਖਰ ਦੀ ਦੂਰੀ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਹੈ। ਅਸਮਕੇਂਦਰਤਾ ਨੂੰ e ਰਾਹੀਂ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ $e = \frac{c}{a}$ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਫ਼ੋਕਸ ਦੀ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਦੂਰੀ c ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸਮਕੇਂਦਰਤਾ ਦੇ ਪਦ ਵਿੱਚ ਫ਼ੋਕਸ ਦੀ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ae ਹੈ।

11.6.4 *ਇਲਿਪਸ ਦਾ ਮਾਨਕ ਸਮੀਕਰਣ (Standard equations of an ellipse)* ਇੱਕ ਇਲਿਪਸ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਸਭ ਤੋਂ ਸਰਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇਲਿਪਸ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਫੋਕਸ x-ਧੁਰੇ ਜਾਂ y-ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਵੇ। ਇਹੋ-ਜਿਹੇ ਦੋ ਸੰਭਵ ਦਿਸ਼ਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਰੂਪ ਚਿੱਤਰ 11.26 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਹੋਏ ਹਨ।



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(a)



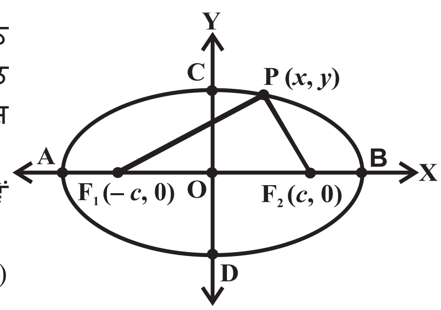
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

(b)

ਚਿੱਤਰ 11.26

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 11.26 (a) ਵਿਚ ਦਰਸਾਏ ਹੋਏ ਇਲਿਪਸ, ਜਿਸਦੇ ਫੋਕਸ x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਨ, ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿਉਤਪਨ ਕਰਾਂਗੇ।

ਮੰਨ ਲਉ F_1 ਅਤੇ F_2 ਫੋਕਸ ਹਨ ਅਤੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ F_1F_2 ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ O ਹੈ। ਮੰਨ ਲਓ O ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ O ਤੋਂ F_2 ਦੇ ਵੱਲ x-ਧੁਰਾ ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ O ਤੋਂ F_1 ਦੇ ਵੱਲ x-ਧੁਰਾ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ। ਮੰਨੋ ਕਿ O ਤੋਂ x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਲੰਬ ਰੇਖਾ y-ਧੁਰਾ ਹੈ। F_1 ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(-c, 0)$ ਅਤੇ F_2 ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(c, 0)$ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ (ਚਿੱਤਰ 11.27)।



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ਚਿੱਤਰ 11.27

ਮੰਨ ਲਉ ਇਲਿਪਸ ਤੇ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ $P(x, y)$ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ ਕਿ P ਤੋਂ ਦੋਵੇਂ ਫ਼ੋਕਸਾਂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਦਾ ਜੋੜ $2a$ ਹੈ ਭਾਵ

$$PF_1 + PF_2 = 2a \qquad \dots (1)$$

ਦੂਰੀ ਸੂਤਰ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

ਭਾਵ $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

ਦੋਵੇਂ ਪਾਸੇ ਵਰਗ ਕਰਨ ਨਾਲ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

ਜਿਸਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ ਤੇ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਦੁਬਾਰਾ ਵਰਗ ਕਰਨ ਅਤੇ ਸਰਲ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

ਭਾਵ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ਕਿਉਂਕਿ $c^2 = a^2 - b^2$)

ਇਸ ਲਈ ਇਲਿਪਸ 'ਤੇ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad \ldots (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਉਲਟ ਤੌਰ 'ਤੇ ਮੰਨੋ P (x, y) ਸਮੀਕਰਣ (2) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ, $0 < c < a$, ਤਾਂ

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

ਇਸ ਲਈ $PF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

$$= \sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(\frac{a^2 - x^2}{a^2}\right)}$$

$$= \sqrt{(x+c)^2 + (a^2-c^2)\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}\right)} \quad \text{(ਕਿਉਂਕਿ } b^2 = a^2 - c^2\text{)}$$

$$= \sqrt{\left(a+\frac{cx}{a}\right)^2} = a + \frac{c}{a}x$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $PF_2 = a - \frac{c}{a}x$

ਇਸ ਲਈ $PF_1 + PF_2 = a + \frac{c}{a}x + a - \frac{c}{a}x = 2a \qquad \ldots (3)$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਜਿਹੜਾ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਉਹ ਜਿਮਾਇਤਿਕ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਵੀ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ P(x, y) ਇਲਿਪਸ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ (2) ਅਤੇ (3), ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਕਿ ਇੱਕ ਇਲਿਪਸ, ਜਿਸਦਾ ਕੇਂਦਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਅਤੇ ਦੀਰਘ ਧੁਰਾ x-ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ਹੈ।

ਵਿਚਾਰ-ਚਰਚਾ ਇਲਿਪਸ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਲਿਪਸ ਤੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ P (x, y) ਦੇ ਲਈ

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \text{ ਭਾਵ } x^2 \leq a^2, \text{ ਇਸ ਲਈ } -a \leq x \leq a.$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਸ ਲਈ ਇਲਿਪਸ ਰੇਖਾਵਾਂ $x = -a$ ਅਤੇ $x = a$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸਥਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਵੀ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਇਲਿਪਸ, ਰੇਖਾਵਾਂ $y = -b$ ਅਤੇ $y = b$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਇਹਨਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਦਾ ਹੋਇਆ ਸਥਿਤ ਹੈ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 11.26 (b) ਵਿਚ, ਦਰਸ਼ਾਏ ਹੋਏ ਇਲਿਪਸ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ ਨੂੰ ਵਿਉਤਪੱਨ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਇਹਨਾਂ ਦੋਵੇਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਇਲਿਪਸ ਦੇ ਮਾਨਕ ਸਮੀਕਰਣ ਆਖਦੇ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ ਇਲਿਪਸ ਦੇ ਮਾਨਕ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ, ਇਲਿਪਸ ਦਾ ਕੇਂਦਰ, ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਹੈ ਅਤੇ ਦੀਰਘ ਧੁਰਾ ਅਤੇ ਲਘੂ ਧੁਰਾ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਾਂ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਨ। ਇੱਥੇ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਇਲਿਪਸਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਕੋਈ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਇਲਿਪਸ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਧੁਰੇ, ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਿਆਂ ਤੋਂ ਵੱਖ ਹੋਣ, ਇਸ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਵਸਤੂ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਹਨ।

ਚਿੱਤਰ 11.26 ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਇਲਿਪਸ ਦੇ ਮਾਨਕ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਨਿਰਿਕਸ਼ਣ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨਤੀਜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

1. ਇਲਿਪਸ ਦੋਵੇਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਾਂ ਦੇ ਬਾਬਤ ਸਮਮਿਤ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਜੇਕਰ ਇਲਿਪਸ ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਹੈ ਤਾਂ ਬਿੰਦੂ $(-x, y)$, $(x, -y)$ ਅਤੇ $(-x, -y)$ ਵੀ ਇਲਿਪਸ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਨ।

2. ਇਲਿਪਸ ਦੇ ਫ਼ੋਕਸ ਸਦਾ ਦੀਰਘ ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਸਮਮਿਤ ਧੁਰਿਆਂ ਤੇ ਅੰਤਰਖੰਡ ਲੱਭ ਕੇ ਦੀਰਘ ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ x^2 ਦਾ ਹਰ ਵੱਡਾ ਹੈ ਤਾਂ ਦੀਰਘ ਧੁਰਾ x-ਧੁਰਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ y^2 ਦਾ ਹਰ ਵੱਡਾ ਹੈ ਤਾਂ ਦੀਰਘ ਧੁਰਾ y-ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

11.6.5 *ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ (Latus rectum)*

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 6 ਇਲਿਪਸ ਦੇ ਫੋਕਸਾਂ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਦੀਰਘ ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਲੰਬ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਜਿਸਦੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ ਇਲਿਪਸ ਤੇ ਹੋਣ, ਨੂੰ ਇਲਿਪਸ ਦੀ ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। (ਚਿੱਤਰ 11.28)।

ਇਲਿਪਸ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ਦੀ ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨਾ :

ਮੰਨਿਆ AF_2 ਦੀ ਲੰਬਾਈ l ਹੈ ਤਾਂ A ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (c, l) ਭਾਵ (ae, l) ਹਨ।

ਕਿਉਂਕਿ A, ਇਲਿਪਸ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ।

ਇਸ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{(ae)^2}{a^2}+\frac{l^2}{b^2}=1$$

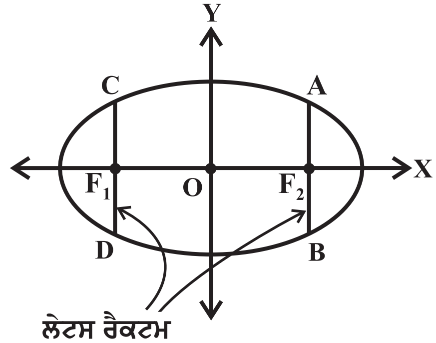
$$\Rightarrow l^2 = b^2(1-e^2)$$

ਪਰੰਤੂ $$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}$$

ਇਸ ਲਈ $$l^2=\frac{b^4}{a^2}\text{, ਭਾਵ } l=\frac{b^2}{a}$$

ਕਿਉਂਕਿ ਇਲਿਪਸ y- ਧੁਰੇ ਦੇ ਬਾਬਤ ਸਮਮਿਤ ਹੈ, (ਬੇਸ਼ਕ ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਧੁਰਾਂ ਦੇ ਬਾਬਤ ਸਮਮਿਤ ਹੈ) ਇਸ ਲਈ $AF_2 = F_2B$।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਸ ਦੀ ਲੰਬਾਈ $\frac{2b^2}{a}$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 11.28

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਇਲਿਪਸ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ਦੇ ਫੋਕਸਾਂ ਅਤੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ, ਦੀਰਘ ਅਤੇ ਲਘੂ ਧੁਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ, ਅਸਮਕੇਂਦਰਤਾ ਅਤੇ ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਕਿਉਂਕਿ x^2 ਦਾ ਹਰ, y^2 ਦੇ ਹਰ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਦੀਰਘ ਧੁਰਾ x-ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, ਨਾਲ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ 'ਤੇ

$a = 5$ ਅਤੇ $b = 3$ ਹੈ।

ਨਾਲ ਹੀ $\quad c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=4$

ਇਸ ਲਈ ਫੋਕਸਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(-4,0)$ ਅਤੇ $(4,0)$ ਹਨ, ਸਿਖਰਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(-5, 0)$ ਅਤੇ $(5, 0)$ ਹਨ। ਦੀਰਘ ਧੁਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ $2a = 10$ ਇਕਾਈ, ਲਘੂ ਧੁਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ $2b = 6$ ਇਕਾਈ ਅਤੇ ਅਸਮਕੇਂਦਰਤਾ $\frac{4}{5}$ ਅਤੇ ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ $\frac{2b^2}{a}=\frac{18}{5}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਇਲਿਪਸ $9x^2 + 4y^2 = 36$ ਦੇ ਫੋਕਸਾਂ ਅਤੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ, ਦੀਰਘ ਅਤੇ ਲਘੂ ਧੁਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈਆਂ ਅਤੇ ਅਸਮਕੇਂਦਰਤਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਮਾਨਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ ਤੇ

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

ਕਿਉਂਕਿ y^2 ਦਾ ਹਰ, x^2 ਦੇ ਹਰ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਦੀਰਘ ਧੁਰਾ y-ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, ਨਾਲ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ 'ਤੇ $b = 2$ ਅਤੇ $a = 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਤੇ $\quad c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

ਅਤੇ $\quad e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

ਇਸ ਲਈ ਫੋਕਸਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(0, \sqrt{5})$ ਅਤੇ $(0, -\sqrt{5})$, ਹਨ। ਸਿਖਰਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(0,3)$ ਅਤੇ $(0, -3)$ ਹਨ। ਦੀਰਘ ਧੁਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ $2a = 6$ ਇਕਾਈ, ਲਘੂ ਧੁਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ $2b = 4$ ਇਕਾਈ ਅਤੇ ਅਸਮਕੇਂਦਰਤਾ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਉਸ ਇਲਿਪਸ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸਦੇ ਫੋਕਸਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(\pm 5, 0)$ ਅਤੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(\pm 13, 0)$ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਇਲਿਪਸ ਦਾ ਸਿਖਰ x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਸਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇਗਾ, ਜਿੱਥੇ ਅੱਧੀ ਦੀਰਘ ਧੁਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ a ਹੈ। ਅਸੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $a = 13$, $c = \pm 5$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $c^2 = a^2 - b^2$, ਦੇ ਸੂਤਰ ਅਨੁਸਾਰ $25 = 169 - b^2$, ਜਾਂ $b = 12$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਲਿਪਸ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ : $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਉਸ ਇਲਿਪਸ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਦੀਰਘ ਧੁਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 20 ਹੈ ਅਤੇ ਫੋਕਸਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(0, \pm 5)$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਫੋਕਸ y-ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਇਲਿਪਸ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ।

ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\quad a =$ ਅੱਧਾ ਦੀਰਘ ਧੁਰਾ $=\frac{20}{2}=10$

ਅਤੇ ਸੂਤਰ $\quad c^2 = a^2 - b^2$ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ,

$5^2 = 10^2 - b^2$ ਜਾਂ $b^2 = 75$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\quad \frac{x^2}{75}+\frac{y^2}{100}=1$

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਉਸ ਇਲਿਪਸ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ ਦੀਰਘ ਧੁਰਾ x-ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ $(4, 3)$ ਅਤੇ $(-1,4)$ ਇਲਿਪਸ ਦੇ ਸਥਿਤ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਇਲਿਪਸ ਦਾ ਮਾਨਕ ਰੂਪ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਬਿੰਦੂ $(4, 3)$ ਅਤੇ $(-1, 4)$ ਇਲਿਪਸ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$\frac{16}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \qquad \text{... (1)}$$

ਅਤੇ

$$\frac{1}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1 \qquad \text{....(2)}$$

ਸਮੀਕਰਣਾਂ (1) ਅਤੇ (2), ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ $a^2=\frac{247}{7}, b^2=\frac{247}{15}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਸਮੀਕਰਣ :

$\frac{x^2}{\left(\frac{247}{7}\right)}+\frac{y^2}{\left(\frac{247}{15}\right)}=1$, ਜਾਂ $7x^2 + 15y^2 = 247$ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 11.3

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਭਿਆਸ 1 ਤੋਂ 9 ਤੱਕ ਹਰੇਕ ਇਲਿਪਸ ਵਿੱਚ ਫੋਕਸਾਂ ਅਤੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ, ਦੀਰਘ ਅਤੇ ਲਘੂ ਧੁਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ, ਅਸਮਕੇਂਦਰਤਾ ਅਤੇ ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ **2.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ **3.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

4. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{100}=1$ **5.** $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$ **6.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{400}=1$

7. $36x^2 + 4y^2 = 144$ **8.** $16x^2 + y^2 = 16$ **9.** $4x^2 + 9y^2 = 36$

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਭਿਆਸ 10 ਤੋਂ 20 ਤੱਕ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ, ਦਿੱਤੀ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਇਲਿਪਸ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ :

10. ਸਿਖਰ $(\pm 5, 0)$, ਫੋਕਸ $(\pm 4, 0)$

11. ਸਿਖਰ $(0, \pm 13)$, ਫੋਕਸ $(0, \pm 5)$

12. ਸਿਖਰ $(\pm 6, 0)$, ਫੋਕਸ $(\pm 4, 0)$

13. ਦੀਰਘ ਧੁਰੇ ਦੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ $(\pm 3, 0)$, ਲਘੂ ਧੁਰੇ ਦੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ $(0, \pm 2)$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

14. ਦੀਰਘ ਧੁਰੇ ਦੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ $(0, \pm\sqrt{5})$, ਲਘੂ ਧੁਰੇ ਦੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ $(\pm 1, 0)$

15. ਦੀਰਘ ਧੁਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 26, ਫੋਕਸ $(\pm 5, 0)$

16. ਦੀਰਘ ਧੁਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 16, ਫੋਕਸ $(0, \pm 6)$

17. ਫੋਕਸ $(\pm 3, 0)$, $a = 4$

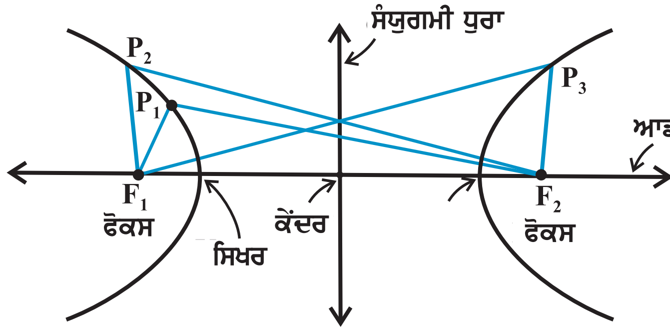
18. $b = 3$, $c = 4$, ਕੇਂਦਰ ਮੂਲ ਬਿਦੂ ਤੇ, ਫੋਕਸ x ਧੁਰੇ 'ਤੇ।

19. ਕੇਂਦਰ (0,0) ਤੇ, ਦੀਰਘ ਧੁਰਾ y- ਧੁਰੇ ਤੇ, ਬਿੰਦੂਆਂ (3, 2) ਅਤੇ (1,6) ਤੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ।

20. ਦੀਰਘ ਧੁਰਾ x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ (4,3) ਅਤੇ (6,2) ਤੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ।

11.7 ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ (Hyperbola)

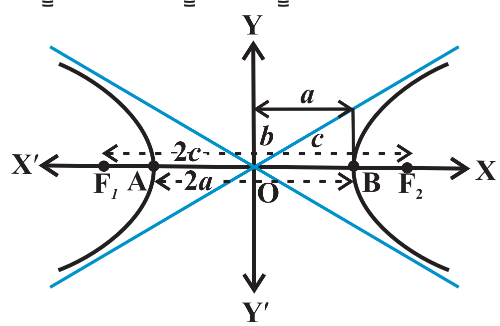
ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 6 ਇੱਕ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ, ਤੱਲ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਤੱਲ ਵਿੱਚ ਦੋ ਸਥਿਰ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਦਾ ਅੰਤਰ ਅਚੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।



$$P_1F_2 - P_1F_1 = P_2F_2 - P_2F_1 = P_3F_1 - P_3F_2$$

ਚਿੱਤਰ 11.29

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ 'ਅੰਤਰ' ਅੱਖਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਦੂਰ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਨਫ਼ੀ ਪਾਸ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ। ਦੋ ਸਥਿਰ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦੇ ਫੋਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਫੋਕਸਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਫੋਕਸਾਂ ਤੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਤਿਰਛਾ ਧੁਰਾ (*transverse axis*) ਅਤੇ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਤਿਰਛੇ ਧੁਰੇ ਤੇ ਲੰਬ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਸੰਯੁਗਮੀ ਧੁਰਾ (*conjugate axis*) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ, ਤਿਰਛੇ ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਜਿਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ, ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦੇ ਸਿਖਰ (*vertices*) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। (ਚਿੱਤਰ 11.29)।



ਚਿੱਤਰ 11.30

ਦੋਵੇਂ ਫੋਕਸਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ ਨੂੰ ਅਸੀਂ $2c$ ਤੋਂ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਦੋਵੇਂ ਸਿਖਰਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਦੂਰੀ (ਤਿਰਛੇ ਧੁਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ) ਨੂੰ $2a$ ਤੋਂ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਅਸੀ ਰਾਸ਼ੀ b ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ । $2b$ ਨੂੰ ਸੰਯੁਗਮੀ ਧੁਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 11.30)।

ਅਚੱਲ $P_1F_2 - P_1F_1$ ਪਤਾ ਕਰਨਾ :

ਚਿੱਤਰ 11.30 ਵਿੱਚ A ਅਤੇ B 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ P ਨੂੰ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$BF_1 - BF_2 = AF_2 - AF_1$ (ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ)

$BA + AF_1 - BF_2 = AB + BF_2 - AF_1$

ਭਾਵ $AF_1 = BF_2$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $BF_1 - BF_2 = BA + AF_1 - BF_2 = BA = 2a$

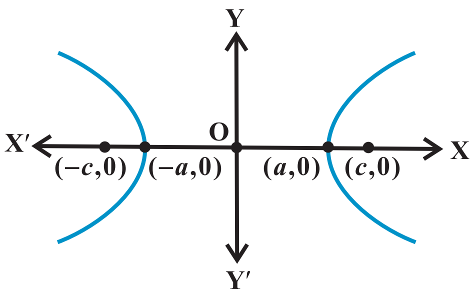
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

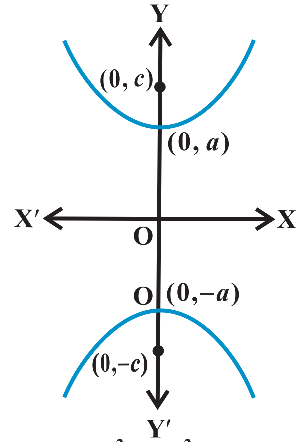
11.7.1 *ਅਸਮਕੇਂਦਰਤਾ (Eccentricity)*

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 8 : ਇਲਿਪਸ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਨੁਪਾਤ $e = \frac{c}{a}$ ਨੂੰ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦੀ ਅਸਮਕੇਂਦਰਤਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ $c \geq a$, ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਅਸਮਕੇਂਦਰਤਾ ਕਦੇ ਵੀ ਇੱਕ ਤੋਂ ਘੱਟ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਅਸਮਕੇਂਦਤਾ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ, ਫੋਕਸ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ae ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

11.7.2 *ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦਾ ਮਾਨਕ ਸਮੀਕਰਣ (Standard equation of Hyperbola)* ਜੇਕਰ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਬਿੰਦੂ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਅਤੇ ਫੋਕਸ x-ਧੁਰੇ ਜਾ y-ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਣ ਤਾਂ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਸਭ ਤੋਂ ਸਰਲ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਹੋ-ਜਿਹੇ ਦੋ ਸੰਭਵ ਦਿਸ਼ਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਰੂਪ ਚਿੱਤਰ 11.31 ਵਿਚ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਹਨ।



(a) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

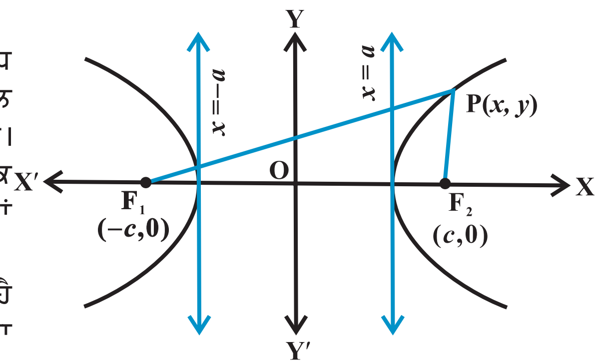


(b) $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

ਚਿੱਤਰ 11.31

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 11.31 (a) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ, ਜਿਸਦੇ ਫੋਕਸ x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਨ, ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿਉਂਤਪਨ ਕਰਾਂਗੇ।

ਮੰਨ ਲਓ F_1 ਅਤੇ F_2 ਫੋਕਸ ਹਨ ਅਤੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ F_1F_2 ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ O ਹੈ। ਮੰਨ ਲਓ O ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ O ਤੋਂ F_2 ਦੇ ਵੱਲ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰਾ ਅਤੇ O ਤੋਂ F_1 ਦੇ ਵੱਲ ਰਿਣਾਤਮਕ x-ਧੁਰਾ ਹੈ। ਮੰਨਿਆ O ਤੋਂ x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਲੰਬ y-ਧੁਰਾ ਹੈ। F_1 ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(-c,0)$ ਅਤੇ F_2 ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(c,0)$ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ (ਚਿੱਤਰ 11.32)।



ਚਿੱਤਰ 11.32

ਮੰਨ ਲਉ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਤੇ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ $P(x, y)$ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ ਕਿ P ਦੀ ਦੂਰੀ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਅਤੇ ਨੇੜੇ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀਆਂ ਦਾ ਅੰਤਰ $2a$ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $PF_1 - PF_2 = 2a$

ਦੂਰੀ ਸੂਤਰ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

ਜਾਂ
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ਦੋਵੇਂ ਪਾਸੇ ਵਰਗ ਕਰਨ ਤੇ, ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$

ਜਿਸਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ ਤੇ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $\frac{cx}{a} - a = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

ਦੁਬਾਰਾ ਦੋਵੇਂ ਪਾਸੇ ਵਰਗ ਕਰਨ ਅਤੇ ਸਰਲ ਕਰਨ ਤੇ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਜਾਂ $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (\text{ਕਿਉਂਕਿ } c^2 - a^2 = b^2 \text{ ਹੈ})$$

ਇਸ ਲਈ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਉਲਟ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਮੰਨ ਲਉ P(x, y) ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $0 < a < c$ ਹੈ, ਤਾਂ

$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2-a^2}{a^2}\right)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$PF_1 = +\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$
$$= +\sqrt{(x+c)^2+b^2\left(\frac{x^2-a^2}{a^2}\right)} = a+\frac{c}{a}x$$

ਇਸੀ ਪ੍ਰਕਾਰ $$PF_2 = a - \frac{a}{c}x$$

ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਵਿੱਚ $c > a$ ਅਤੇ ਕਿਉਂਕਿ P ਰੇਖਾ $x = a$ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਹੈ, $x > a$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $\frac{c}{a}x > a$ ਹੈ ਜਾਂ

$a - \frac{c}{a}x$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $PF_2 = \frac{c}{a}x - a$

ਇਸ ਲਈ $$PF_1 - PF_2 = a + \frac{c}{a}x - \frac{cx}{a} + a = 2a$$

ਇਹ ਵੀ ਧਿਆਨ ਦਿਓ, ਜੇਕਰ P ਰੇਖਾ $x = -a$ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਹੁੰਦਾ ਤਾਂ $PF_1 = \left(a+\frac{c}{a}x\right)$, $PF_2 = a - \frac{c}{a}x$

ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $PF_2 - PF_1 = 2a$ । ਇਸ ਲਈ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਜਿਹੜਾ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਕਿ ਇੱਕ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ, ਜਿਸਦਾ ਕੇਂਦਰ (0,0) ਅਤੇ ਤਿਰਛਾ ਧੁਰਾ x-ਧੁਰਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

ਟਿੱਪਣੀ ਇੱਕ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $a = b$ ਹੋਵੇ, ਸਮਕੋਣੀ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ (*equilateral hyperbola*) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਵਿਚਾਰ ਚਰਚਾ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਹਾਸਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਤੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਦੇ ਲਈ $\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{y^2}{b^2} \geq 1$

ਭਾਵ $\left|\frac{x}{a}\right| \geq 1$, ਭਾਵ $x \leq -a$ ਜਾਂ $x \geq a$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਵਕਰ ਦਾ ਭਾਗ ਰੇਖਾਵਾਂ $x = +a$ ਅਤੇ $x = -a$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸਥਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ (ਭਾਵ ਸੰਯੁਗਮੀ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅੰਤਿਮ ਹਿੱਸੇ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ।)

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਚਿੱਤਰ 11.31 (b) ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ ਵਿਉਂਤਪਨ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਇਹਨਾਂ ਦੋਵੇਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦਾ ਮਾਨਕ ਸਮੀਕਰਣ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦੇ ਮਾਨਕ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ, ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦਾ ਕੇਂਦਰ, ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਅਤੇ ਤਿਰਛਾ ਧੁਰਾ ਅਤੇ ਸੰਯੁਗਮੀ ਧੁਰਾ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਾਂ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਕਿ ਇੱਥੇ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਵੀ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਦੋ ਲੰਬ ਰੇਖਾਵਾਂ ਤਿਰਛਾ ਧੁਰਾ ਅਤੇ ਸੰਯੁਗਮੀ ਧੁਰਾ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਪਰੰਤੂ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਉੱਚੀ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 11.29 ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦੇ ਮਾਨਕ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਨਿਰੀਕਸ਼ਣ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨਤੀਜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ :

1. ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ, ਦੋਵਾਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਾਂ ਦੇ ਬਾਬਰ ਸਮਮਿਤ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ ਜੇਕਰ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਹੈ ਤਾਂ ਬਿੰਦੂ $(-x, y)$, $(x, -y)$ ਅਤੇ $(-x, -y)$ ਵੀ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਨ।
2. ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦੇ ਫੋਕਸ ਸਦਾ ਤਿਰਛੇ ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਸਦਾ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਪਦ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਹਰ ਤਿਰਛਾ ਧੁਰਾ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ ਦਾ ਤਿਰਛਾ ਧੁਰਾ x-ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਲੰਬਾਈ 6 ਹੈ ਜਦੋਂ ਕੀ $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{16}=1$ ਦਾ ਤਿਰਛਾ ਧੁਰਾ y-ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਲੰਬਾਈ 10 ਹੈ।

11.7.3 ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ (Latus rectum)

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 9 ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦੇ ਫੋਕਸ ਤੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਤਿਰਛੇ ਧੁਰੇ ਤੇ ਲੰਬ ਰੇਖਾ ਦੇ ਹਿੱਸੇ ਜਿਸਦੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਤੋਂ ਹੋਣ, ਨੂੰ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦੀ ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਲਿਪਸਾਂ ਦੇ ਵਾਂਗ, ਇਹ ਦਰਸਾਉਣਾ ਸਰਲ ਹੈ ਕਿ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦੀ ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ $\frac{2b^2}{a}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦੇ ਸਿਖਰ ਅਤੇ ਫੋਕਸਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ, ਅਸਮਕੇਂਦਰਤਾ ਅਤੇ ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(*i*) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ (*ii*) $y^2 - 16x^2 = 16$

ਹੱਲ : (*i*) ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ ਦਾ ਮਾਨਕ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ਤੋਂ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ 'ਤੇ

ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ $a = 3$, $b = 4$ ਅਤੇ $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{9+16} = 5$

ਇਸ ਲਈ ਫੋਕਸਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(\pm 5, 0)$ ਹਨ ਅਤੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(\pm 3, 0)$ ਹਨ।

ਅਸਮਕੇਂਦਰਤਾ $e = \frac{c}{a}=\frac{5}{3}$ ਹੈ ਅਤੇ ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ $=\frac{2b^2}{a}=\frac{32}{3}$

(*ii*) ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਦੋਵੇਂ ਪਾਸੇ 16 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ 'ਤੇ $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{1}=1$ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਮਾਨਕ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$, ਤੋਂ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$a = 4$, $b = 1$ ਅਤੇ $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

ਇਸ ਲਈ ਫੋਕਸਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(0, \pm\sqrt{17})$ ਅਤੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(0, \pm 4)$ ਹਨ।

ਅਸਮਕੇਂਦਰਤਾ $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{17}}{4}$ ਅਤੇ ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ $=\frac{2b^2}{a}=\frac{1}{2}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਫੋਕਸਾਂ $(0, \pm 3)$ ਅਤੇ ਸਿਖਰਾਂ $(0, \pm \frac{\sqrt{11}}{2})$ ਵਾਲੇ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਫੋਕਸ y-ਧੁਰੇ ਤੇ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਸਿਖਰ $(0, \pm \frac{\sqrt{11}}{2})$ ਇਸ ਲਈ $a = \frac{\sqrt{11}}{2}$

ਅਤੇ ਫੋਕਸ $(0, \pm 3)$; $c = 3$ ਅਤੇ $b^2 = c^2 - a^2 = \frac{25}{4}$

ਇਸ ਲਈ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ। $\frac{y^2}{\left(\frac{11}{4}\right)} - \frac{x^2}{\left(\frac{25}{4}\right)} = 1$, ਭਾਵ $100y^2 - 44x^2 = 275$

ਉਦਾਹਰਣ 16 : ਉਸ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਫੋਕਸ $(0, \pm 12)$ ਅਤੇ ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 36 ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਫੋਕਸ $(0, \pm 12)$ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $c = 12$

ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ $= \frac{2b^2}{a} = 36$ ਜਾਂ $b^2 = 18a$

ਇਸ ਲਈ $c^2 = a^2 + b^2$; ਤੋਂ

$144 = a^2 + 18a$

ਭਾਵ $a^2 + 18a - 144 = 0$

$a = -24, 6$

ਕਿਉਂਕਿ a ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ $a = 6$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ $b^2 = 108$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦਾ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{108} = 1$, ਹੈ, ਭਾਵ $3y^2 - x^2 = 108$

ਅਭਿਆਸ 11.4

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਭਿਆਸ 1 ਤੋਂ 6 ਤੱਕ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ, ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ, ਫੋਕਸਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ, ਅਸਮਕੇਂਦਰਤਾ ਅਤੇ ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ **2.** $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$ **3.** $9y^2 - 4x^2 = 36$

4. $16x^2 - 9y^2 = 576$ **5.** $5y^2 - 9x^2 = 36$ **6.** $49y^2 - 16x^2 = 784$

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 7 ਤੋਂ 15 ਤੱਕ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ, ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਕੇ ਹੋਏ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ :

7. ਸਿਖਰ $(\pm 2, 0)$, ਫੋਕਸ $(\pm 3, 0)$

8. ਸਿਖਰ $(0, \pm 5)$, ਫੋਕਸ $(0, \pm 8)$

9. ਸਿਖਰ $(0, \pm 3)$, ਫੋਕਸ $(0, \pm 5)$

10. ਫ਼ੋਕਸ $(\pm 5, 0)$, ਆਡੇ ਧੁਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 8 ਹੈ।

11. ਫ਼ੋਕਸ $(0, \pm 13)$, ਸੰਯੁਗਮੀ ਧੁਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 24 ਹੈ।

12. ਫ਼ੋਕਸ $(\pm 3\sqrt{5}, 0)$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 8 ਹੈ।

13. ਫ਼ੋਕਸ $(\pm 4, 0)$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 12 ਹੈ।

14. ਸ਼ਿਖਰ $(\pm 7,0)$, $e = \frac{4}{3}$

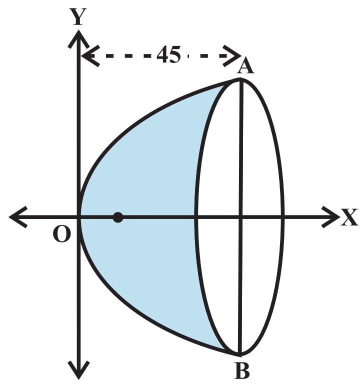
15. ਫ਼ੋਕਸ $(0, \pm \sqrt{10})$, ਹੈ ਅਤੇ $(2,3)$ ਤੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 17 : ਇੱਕ ਪੈਰਾਬੋਲਿਕ ਦਰਪਣ ਦਾ ਫ਼ੋਕਸ, ਇਸਦੇ ਸ਼ਿਖਰ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ 5 ਸੈ. ਮੀ. ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹਨ ਜਿਵੇਂ ਕੀ ਚਿੱਤਰ 11.33 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਦਰਪਣ 45 ਸੈ. ਮੀ. ਡੂੰਘਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਚਿੱਤਰ 11.33 ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ AB ਪਤਾ ਕਰੋ (ਚਿੱਤਰ 11.33)।



ਚਿੱਤਰ 11.33

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਫੋਕਸ ਦੀ ਕੇਂਦਰ ਸਿਖਰ ਤੋਂ ਦੂਰੀ 5 ਸੈ. ਮੀ. ਹੈ, ਅਸੀ $a = 5$ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ ਸਿਖਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਅਤੇ ਦਰਪਣ ਦਾ ਧੁਰਾ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਧਨਾਤਮਕ ਭਾਗ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪੈਰਾਬੋਲਿਕ ਕਾਟ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $y^2 = 4\,(5)\,x = 20x$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $x = 45$

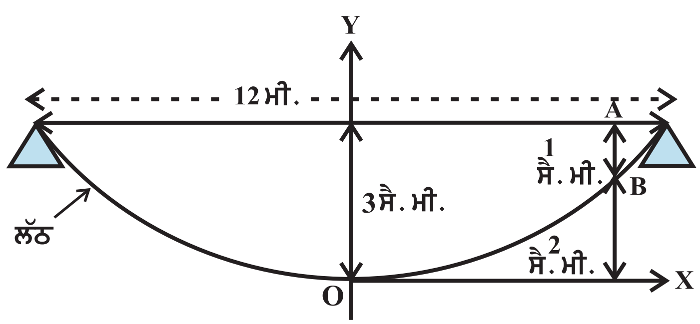
ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ, $y^2 = 900$

ਇਸ ਲਈ $y = \pm 30$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $AB = 2y = 2 \times 30 = 60$ ਸੈ. ਮੀ.

ਉਦਾਹਰਣ 18 : ਇੱਕ ਲੱਠ ਦੇ ਸਿਰੇ, 12 ਮੀਟਰ ਦੂਰ ਰਖੇ ਹੋਏ ਅਧਾਰਾਂ ਤੇ ਟਿਕੇ ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ ਲੱਠ ਦਾ ਭਾਰ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਕੇਂਦਰਿਤ ਹੋਣ ਕਾਰਣ ਲੱਠ ਵਿੱਚ ਕੇਂਦਰ ਤੇ 3 ਸੈ. ਮੀ. ਦਾ ਝੁਕਾਵ ਪੈ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਝੁਕਿਆ ਹੋਇਆ ਲੱਠ ਇੱਕ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੀ ਸ਼ਕਲ ਦਾ ਹੈ। ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਕਿੰਨੀ ਦੂਰੀ ਤੇ ਝੁਕਾਵ 1 ਸੈ.ਮੀ. ਹੈ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਸਿਖਰ ਸਭ ਤੋਂ ਨੀਵਾਂ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਧੁਰਾ ਖੜ੍ਹੀ ਰੇਖਾ ਹੈ। ਮੰਨੋ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰੇ ਚਿੱਤਰ 11.34 ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 11.34

ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $x^2 = 4ay$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ $\left(6, \frac{3}{100}\right)$ ਤੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ

$(6)^2 = 4a\left(\frac{3}{100}\right)$, ਭਾਵ $a = \frac{36\times100}{12} = 300$ ਮੀ. ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

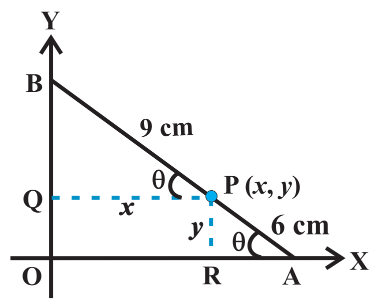
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਹੁਣ ਲੱਠ ਵਿੱਚ ਝੁਕਾਵ AB, $\frac{1}{100}$ ਮੀ. ਹੈ। B ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(x, \frac{2}{100})$ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $$x^2 = 4 \times 300 \times \frac{2}{100} = 24$$

$$x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \text{ ਮੀ.}$$

ਉਦਾਹਰਣ 19 : 15 ਸੈ. ਮੀ. ਲੰਬੀ ਇੱਕ ਛੜ, AB ਦੋਵੇਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਰੱਖੀ ਹੋਈ ਹੈ ਕਿ ਉਸਦਾ ਇੱਕ ਸਿਰਾ A, x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਸਿਰਾ B, y-ਧੁਰੇ ਤੇ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ $P(x, y)$ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ AP = 6 ਸੈ. ਮੀ. ਹੈ। ਦਰਸਾਉ ਕਿ P ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਪਥ ਇੱਕ ਇਲਿਪਸ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 11.35

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਛੜ AB,OX ਦੇ ਨਾਲ θ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 11.35 ਵਿਚ ਵਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। AB ਤੇ ਬਿੰਦੂ $P(x, y)$ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ ਕਿ AP = 6 ਸੈ. ਮੀ. ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ AB = 15 ਸੈ. ਮੀ., ਇਸ ਲਈ

PB = 9 ਸੈ. ਮੀ. ਹੈ।

P ਤੋਂ PQ ਅਤੇ PR ਕ੍ਰਮਵਾਰ y-ਧੁਰੇ ਅਤੇ x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਲੰਬ ਪਾਓ।

Δ PBQ, ਤੋਂ, $\cos\theta = \frac{x}{9}$

Δ PRA, ਤੋਂ, $\sin\theta = \frac{y}{6}$

ਕਿਉਂਕਿ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\left(\frac{x}{9}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 = 1$

ਜਾਂ $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$

ਇਸ ਲਈ P ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਪਥ ਇੱਕ ਇਲਿਪਸ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਧਿਆਇ 11 ’ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਪੈਰਾਬੋਲਿਕ ਦਰਪਣ ਦਾ ਵਿਆਸ 20 ਸੈ. ਮੀ. ਅਤੇ ਗਹਿਰਾਈ 5 ਸੈ. ਮੀ. ਹੈ। ਫੋਕਸ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਇੱਕ ਮਹਿਰਾਬ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਅਕਾਰ ਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਧੁਰਾ ਖੜ੍ਹੀ ਰੇਖਾ ਹੈ। ਮਹਿਰਾਬ 10 ਮੀ. ਉੱਚਾ ਹੈ ਅਤੇ ਅਧਾਰ ਵਿੱਚ 5 ਮੀ. ਚੌੜਾ ਹੈ। ਇਹ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੋ ਮੀਟਰ ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੇ ਸਿਖਰ ਤੋਂ ਕਿੰਨਾ ਚੌੜਾ ਹੋਵੇਗਾ ?
3. ਇੱਕ ਸਰਵਸਮ ਭਾਰੀ ਝੂਲਦਾ ਹੋਇਆ ਪੁਲ ਦੀ ਕੇਬਲ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਟਕੀ ਹੈ। ਸੜਕ ਪਥ ਜਿਹੜੀ ਲੇਟਵੀਂ ਹੈ 100 ਮੀਟਰ ਲੰਬੀ ਹੈ ਅਤੇ ਕੇਬਲ ਤੋਂ ਜੁੜਾ ਖੜਵੀਂ ਤਾਰਾਂ ਤੇ ਟਿਕਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਲੰਬਾ ਤਾਰ 30 ਮੀਟਰ ਅਤੇ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਤਾਰ 6 ਮੀਟਰ ਹੈ। ਮੱਧ ਤੋਂ 18 ਮੀਟਰ ਦੂਰ ਸੜਕ ਪਥ ਤੋਂ ਜੁੜੇ ਸਮਰਥਕ (supporting) ਤਾਰ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਇੱਕ ਮਹਿਰਾਬ ਅਰਧ-ਇਲਿਪਸ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ। ਇਹ 8 ਮੀਟਰ ਚੌੜਾ ਅਤੇ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ 2 ਮੀਟਰ ਉੱਚਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਸਿਰੇ ਤੋਂ 15 ਮੀਟਰ ਦੂਰ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਮਹਿਰਾਬ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. ਇੱਕ 12 ਸੈ. ਮੀ. ਲੰਬੀ ਛੜ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਚਲਦੀ ਹੈ ਕਿ ਇਸਦੇ ਸਿਰੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਾਂ ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਛੜ ਦੇ ਬਿੰਦੂ P ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਪਥ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸੰਪਰਕ ਵਾਲੇ ਸਿਰੇ ਤੋਂ 3 ਸੈ. ਮੀ. ਦੂਰ ਹੈ।
6. ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹੜਾ ਪੈਰਾਬੋਲਾ $x^2 = 12y$ ਦੇ ਸਿਖਰ ਨੂੰ ਇਸਦੀ ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੇ ਸਿਰਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਣ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਤੋਂ ਬਣਿਆ ਹੈ।
7. ਇੱਕ ਮਨੁੱਖ ਦੌੜਪਥ ਤੇ ਦੌੜਦੇ ਹੋਏ ਅੰਕਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਤੋਂ ਦੋ ਝੰਡਾ ਚੌਕੀਆਂ ਦੀ ਦੂਰੀਆਂ ਦਾ ਜੋੜ ਸਦਾ 10 ਮੀਟਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਝੰਡਾ ਚੌਕੀਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ 8 ਮੀਟਰ ਹੈ। ਮਨੁੱਖ ਰਾਹੀਂ ਬਣਾਏ ਪਥ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y^2 = 4\,ax$, ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਇੱਕ ਸਮਭੁਜ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਇੱਕ ਸਿਖਰ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਸਿਖਰ ’ਤੇ ਹੈ। ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੰਕਲਪਾਂ ਅਤੇ ਵਿਆਪਕਤਾਵਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ :

- ਇੱਕ ਚੱਕਰ, ਤਲ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜਿਹੜੇ ਤਲ ਦੇ ਇੱਕ ਸਿਖਰ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਸਮਾਨ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
- ਕੇਂਦਰ (h, k) ਅਤੇ ਅਰਧ-ਵਿਆਸ r ਦੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਤਲ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜਿਹੜੇ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਤਲ ਦੇ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਸਮਾਨ ਦੂਰੀ ’ਤੇ ਹਨ।
- ਫੋਕਸ $(a, 0)$ $a > 0$ ਅਤੇ ਨਿਯਾਮਕ ਰੇਖਾ $x = -a$ ਵਾਲੇ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $y^2 = 4ax$ ਹੈ।
- ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਫੋਕਸ ਤੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਧੁਰੇ ਦੇ ਲੰਬ ਰੇਖਾ ਦੇ ਹਿੱਸੇ, ਜਿਸਦੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਤੇ ਹੋਣ, ਨੂੰ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੀ ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y^2 = 4ax$ ਦੀ ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ $4a$ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਇਲਿਪਸ ਤਲ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਤਲ ਵਿੱਚ ਦੇ ਸਥਿਰ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਦਾ ਜੋੜ ਅੱਚਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਫੋਕਸ ਵਾਲੇ ਇਲਿਪਸ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ਹੈ।
- ਇਲਿਪਸ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਫੋਕਸ ਤੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਦੀਰਘ ਧੁਰੇ ਤੇ ਲੰਬ ਰੇਖਾ ਦੇ ਹਿੱਸੇ, ਜਿਸਦੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ ਇਲਿਪਸ ਤੇ ਹੋਣ, ਨੂੰ ਇਲਿਪਸ ਦੀ ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

- ਇਲਿਪਸ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ਦੀ ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ $\frac{2b^2}{a}$ ਹੈ।
- ਇਲਿਪਸ ਦੀ ਅਸਮਕੇਂਦਰਤਾ, ਇਲਿਪਸ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਫੋਕਸ ਅਤੇ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਸਿਖਰ ਦੀ ਦੂਰੀਆਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਤਲ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਤਲ ਵਿੱਚ ਦੋ ਸਥਿਰ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਦਾ ਅੰਤਰ ਅੱਚਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਫੋਕਸ ਵਾਲੇ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ਹੈ।
- ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਫੋਕਸ ਤੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਤਿਰਛੇ ਧੁਰੇ ਤੇ ਲੰਬ ਰੇਖਾ ਖੰਡ, ਜਿਸਦੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਤੇ ਹੋਣ, ਨੂੰ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦੀ ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ਦੀ ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ $\frac{2b^2}{a}$ ਹੈ।
- ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦੀ ਅਸਮਕੇਂਦਰਤਾ, ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਫੋਕਸ ਅਤੇ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਸਿਖਰ ਦੀ ਦੂਰੀਆਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਹੈ।

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਜਿਆਮਿਤੀ ਗਣਿਤ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਚੀਨ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ ਵਿਚੋਂ ਇੱਕ ਹੈ। ਯੂਨਾਨ ਦੇ ਜਿਆਮਿਤੀਕਾਰਾਂ ਨੇ ਕਈ ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਗੁਣ ਧਰਮਾਂ ਦੀ ਤਫ਼ਤੀਸ਼ ਕੀਤੀ। ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਸਿਧਾਂਤਿਕ ਅਤੇ ਵਿਹਾਰਕ ਮਹੱਤਵ ਹੈ। Euclid ਨੇ ਲਗਭਗ 300 ਈ. ਪੂ. ਜਿਆਮਿਤੀ 'ਤੇ ਆਪਣੀ ਪੁਸਤਕ ਲਿਖੀ। ਉਹ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲੇ ਮਨੁੱਖ ਸੀ ਜਿਹਨਾਂ ਨੇ ਭੌਤਿਕ ਚਿੰਤਨ ਰਾਹੀਂ ਸੁਝਾਏ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਗੰਭੀਰ ਵਿਚਾਰ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਜਿਆਮਿਤੀ ਚਿੱਤਰਾਂ ਨੂੰ ਸੰਗਠਿਤ ਕੀਤਾ। ਜਿਆਮਿਤੀ ਜਿਸਦੀ ਸ਼ੁਰੂਆਤ ਭਾਰਤੀਆਂ ਅਤੇ ਯੂਨਾਨੀਆਂ ਨੇ ਕੀਤਾ, ਉਸਦੇ ਅਧਿਐਨ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾ ਨੇ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦੀ ਵਿਧੀਆਂ ਦੇ ਅਨੁਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਦੱਸਿਆ। ਜਿਆਮਿਤੀ ਵਿਸ਼ੇ ਦੀ ਏਕੀਕਰਣ ਪਹੁੰਚ ਜਿਹੜੀ Euclid , ਨੇ ਦਿੱਤਾ ਅਤੇ ਜਿਹੜੇ ਮੂਲਵਸੂਤਰਾਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੀ ਆਦਿ ਨੇ ਦਿੱਤੀ, ਲਗਭਗ 1300 ਵਰਸ਼ਾਂ ਤੱਕ ਚਲਦੀ ਰਹੀ 200 ਈ. ਪੂ. ਵਿੱਚ Apollonius ਨੇ ਇੱਕ ਪੁਸਤਕ, '*The Conic*' ਲਿਖੀ ਜੋ ਕਿ ਅਨੇਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਤਫ਼ਤੀਸ਼ਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਕਾੱਨਿਕ ਕਾਟਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਸੀ ਅਤੇ 18 ਸ਼ਤਾਬਦੀਆਂ ਤੱਕ ਬੇਜੋੜ ਰਹੀ।

Rene Descartes (1596-1650) ਦੇ ਨਾਂ ਤੇ ਆਧੁਨਿਕ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ੀ ਜਿਆਮਿਤੀ ਨੂੰ ਦਕਾਰਿਕ (Cartesian) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜਿਸਦੀ ਸਾਰਥਕਤਾ 'La Geometry' ਨਾਂ ਨਾਲ 1637 ਈ. ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਹੋਈ। ਪਰੰਤੂ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ੀ ਜਿਆਮਿਤੀ ਦੇ ਮੂਲਭੂਤ ਸਿਧਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਧੀਆਂ ਨੂੰ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ Pierre de Fermat (1601-1665 ਈ.) ਨੇ ਪਤਾ (ਪੜਤਾਲ ਕਰਕੇ) ਕਰ ਲਿਆ ਸੀ। ਮੰਦੇ ਭਾਗੋਂ, Fermats ਦੀ ਵਿਸ਼ੇ ਤੇ ਪੁਸਤਕ *Ad Locus Planos et So LIDOS Isagoge* (Introduction to Plane and Solid Loci) ਕੇਵਲ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਮੌਤ ਦੇ ਬਾਅਦ 1679 ਈ. ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਹੋਈ। ਇਸ ਲਈ Descartes ਦੀ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ੀ ਜਿਆਮਿਤੀ ਨੂੰ ਬੇਜੋੜ ਪੜਤਾਲ ਦਾ ਸਨਮਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ।

Isaac Barrow ਨੇ ਦਕਾਰਿਕ ਵਿਧੀਆਂ ਦਾ ਪਰਹੇਜ਼ ਕੀਤਾ। ਨਿਊਟਨ ਨੇ ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਣਜਾਣੇ ਗੁਣਾਕਾਂ ਦੀ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਕਈ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ਾਕਾਂ, ਧਰੁਵੀ ਅਤੇ ਧਰੁਵੀ ਜੋੜੇ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ।

Leibnitz ਨੇ ਭੁਜ ਕੋਟਿ ਅਤੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਦਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ। L' Hospital (ਲਗਭਗ 1700 ਈ.) ਨੇ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ੀ ਜਿਆਮਿਤੀ ਤੇ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਪਾਠ ਪੁਤਸਕ ਲਿਖੀ clairaut (1729 ਈ) ਨੇ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾ ਦੂਰੀ ਸੂਤਰ ਦਿੱਤਾ। ਹਾਲਾਂਕਿ ਇਹ ਸ਼ੁੱਧ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੀ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਰੇਖਾ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਅੰਤਿਮ ਖੰਡ ਰੂਪ ਵੀ ਦਿੱਤਾ। Cramer (1750 ਈ.) ਨੇ ਉਪਚਾਰਿਕ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਰੂਪ ਤੋਂ ਦੋ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $(y-a)^2+(b-x)^2=r^2$ ਦਿੱਤਾ।

ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਉਸ ਵੇਲੇ ਵਿੱਚ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ੀ ਜਿਆਮਿਤੀ ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਵਧੀਆ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨ ਸੀ। Monge (1781 ਈ.) ਨੇ ਆਧੁਨਿਕ ਬਿੰਦੂ ਪ੍ਰਵਣਤਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਹੇਠ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਦਿੱਤਾ।

$$y-y'=a\,(x-x')$$

ਅਤੇ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਲੰਬ ਹੋਣ ਦੀ ਸ਼ਰਤ $aa'+1=0$ ਦਿੱਤਾ।

S.F. Lacroix (1765–1843 ਈ.) ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਲੇਖਕ ਸੀ, ਪਰੰਤੂ ਉਹਨਾ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ੀ ਜਿਆਮਿਤੀ ਵਿੱਚ ਯੋਗਦਾਨ ਕਿਤੇ-ਕਿਤੇ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਰੂਪ

$$y-\beta=\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}(x-\alpha)$$

ਅਤੇ (α, β) ਤੋਂ $y=ax+b$ ਤੇ ਲੰਬ ਦੀ ਲੰਬਾਈ $\frac{(\beta-a-b)}{\sqrt{1+a^2}}$ ਦੱਸਿਆ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਦਾ ਸੂਤਰ

$\tan\theta=\left(\frac{a'-a}{1+aa'}\right)$ ਵੀ ਦਿੱਤਾ। ਇਹ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਹੈਰਾਨ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ੀ ਜਿਆਮਿਤੀ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਦੇ ਬਾਅਦ ਇਹਨਾ ਮੂਲਭੂਤ ਜ਼ਰੂਰੀ ਸੂਤਰਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ 150 ਸਾਲਾਂ ਤੋਂ ਵੱਧ ਇੰਤਜ਼ਾਰ ਕਰਨਾ ਪਿਆ। 1818 ਈ. ਵਿੱਚ C Lame, ਇੱਕ ਸਿਵਿਲ ਇੰਜੀਨੀਅਰ, ਨੇ ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਪਥ $E=0$ ਅਤੇ $E'=0$ ਦੀ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ $mE+m'E'=0$ ਨੂੰ ਦੱਸਿਆ।

ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਗਣਿਤ ਦੋਵਾਂ ਵਿੱਚ ਕਈ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਪੜਤਾਲ ਕੋਨ ਕਾਟਾਂ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ। ਯੂਨਾਨੀ ਖ਼ਾਸ ਤੌਰ 'ਤੇ Archimedes (287–212 ਈ. ਪੂ.) ਅਤੇ Apollonius (200 ਈ. ਪੂ.) ਨੇ ਕੱਨਿਕ ਕਾਟਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ। ਅੱਜ- ਕੱਲ ਇਹ ਵਕਰ, ਜਿਸ ਤੋਂ ਅੰਤਰਿਕਸ਼ ਅਤੇ ਪਰਮਾਣੂ ਕਣਾਂ ਦਾ ਵਿਹਾਹਰ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਪੜਤਾਲਾਂ ਦੇ ਰਾਹੀਂ ਕਈ ਭੇਦਾਂ ਦਾ ਉਦਘਾਟਨ ਹੋਇਆ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਧਿਆਇ 12

ਤ੍ਰੈ-ਵਿਮਾਈ ਜਿਆਮਿਤੀ ਦਾ ਅਸਥਾਪਨ

(Introduction to three Dimensional Geometry)

❖*Mathematics is both the queen and the hand-maiden of all sciences – E.T. BELL*❖

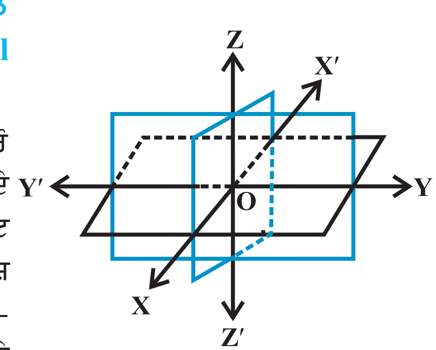
12.1 ਭੂਮਿਕਾ

Leonhard Euler
(1707-1783)

ਅਸੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਤਲ ਤੇ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨਿਰਧਾਰਣ ਦੇ ਲਈ ਉਸ ਤਲ ਵਿੱਚ ਦੋ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਅਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਤੋਂ ਲੰਬਿਕ ਦੂਰੀਆਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੋਵੇ ਲੰਬਿਕ ਦੂਰੀਆਂ ਨੂੰ ਧੁਰਾਂ ਦੇ ਬਾਬਤ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਵਿਚ ਸਾਡਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਹੀ ਸੰਬੰਧ ਨਹੀਂ ਰਹਿ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਕਾਸ਼ ਵਿੱਚ ਸੁੱਟੀ ਗਈ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਦੀ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਸਮਾਂ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤੀ ਜਾਂ ਇੱਕ ਸਥਾਨ ਤੋਂ ਦੂਜੇ ਸਥਾਨ ਤੱਕ ਜਾਣ ਦੇ ਦੌਰਾਨ ਵਿਮਾਨ ਦੀ ਇੱਕ ਖਾਸ ਸਮੇਂ ਤੇ ਸਥਿਤੀ ਆਦਿ ਨੂੰ ਵੀ ਜਾਨਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕ ਕਮਰੇ ਦੀ ਛੱਤ ਤੋਂ ਲਟਕਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਬਿਜਲੀ ਦੇ ਬਲਬ ਦੀ ਹੇਠਲੀ ਨੋਕ ਜਾਂ ਛੱਤ ਦੇ ਪੱਖੇ ਦੀ ਨੋਕ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਦੋ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਦੀਵਾਰਾਂ ਤੋਂ ਲੰਬ ਦੂਰੀਆਂ ਮਾਤਰ ਹੀ ਕਾਫ਼ੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਬਲਕਿ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੀ, ਕਮਰੇ ਦੇ ਫ਼ਰਸ਼ ਤੋਂ ਉੱਚਾਈ ਦੀ ਵੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕੇਵਲ ਦੋ ਨਹੀਂ ਬਲਕਿ ਤਿੰਨ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬਿਕ ਤਲਾਂ ਤੋਂ ਲੰਬਿਕ ਦੂਰੀਆਂ ਨੂੰ ਵਿਖਾਉਣ ਲਈ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਲੋੜ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿਹੜਾ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਦੋ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਦੀਵਾਰਾਂ ਤੋਂ ਦੂਰੀਆਂ ਅਤੇ ਉਸ ਕਮਰੇ ਦੇ ਫਰਸ਼ ਤੋਂ ਉੱਚਾਈ ਨੂੰ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ। ਕਮਰੇ ਦੀ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਦੀਵਾਰਾਂ ਅਤੇ ਉਸ ਦਾ ਫਰਸ਼ ਤਿੰਨ ਪਰਸਪਰ ਕਾਟ ਕਰਣ ਵਾਲੇ ਤਲ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਪਰਸਪਰ ਕਾਟ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਤਲਾਂ ਤੋਂ ਲੰਬ ਦੂਰੀਆਂ ਨੂੰ ਵਿਅਕਤ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਤਿੰਨ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਤਲਾਂ ਦੇ ਬਾਬਤ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕਹਿਲਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਕਾਸ਼ (space) ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਤਿੰਨ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਤ੍ਰੈ-ਵਿਮਾਈ ਅਕਾਸ਼ ਵਿੱਚ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦੇ ਮੂਲਭੂਤ ਸੰਕਲਪਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

12.2 ਤ੍ਰੈ-ਵਿਮਾਈ ਅਕਾਸ਼ ਵਿੱਚ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਤਲ (Coordinate Axes and Coordinate Planes in Three Dimensional Space)



ਚਿੱਤਰ 12.1

ਬਿੰਦੂ O ਤੇ ਕਾਟ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਤਿੰਨ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਤਲਾਂ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਕਰੋ (ਚਿੱਤਰ 12.1)। ਇਹ ਤਿੰਨਾਂ ਤਲ ਰੇਖਾਵਾਂ X′OX, Y′OY ਅਤੇ Z′OZ ਤੇ ਕਾਟ ਕਰਦੇ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ x-ਧੁਰਾ, y-ਧੁਰਾ ਅਤੇ z-ਧੁਰਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਤਿੰਨੋਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸਮਕੋਣੀ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। XOY, YOZ ਅਤੇ ZOX ਤਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ XY-ਤਲ, YZ-ਤਲ ਅਤੇ ZX-ਤਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਤਿੰਨੋਂ ਤਲ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਤਲ ਕਹਿਲਾਉਂਦੇ ਹਨ।

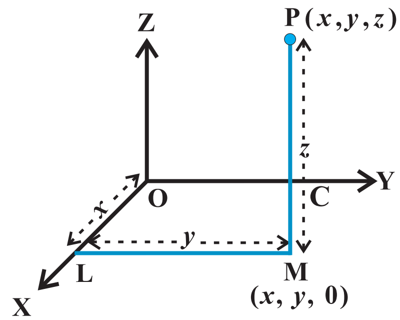
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਸੀਂ ਕਾਗਜ਼ ਦੇ ਤਲ ਨੂੰ XOY ਤਲ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ Z′OZ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਤਲ XOY ਤੇ ਲੰਬ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ ਕਾਗਜ਼ ਦੇ ਤਲ ਨੂੰ ਲੇਟਵਾ ਰੱਖੀਏ ਤਾਂ Z′OZ ਰੇਖਾ ਖੜ੍ਹਵੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। XY-ਤਲ ਤੋਂ OZ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿਚ ਉੱਪਰ ਵੱਲ ਮਾਪੀਆਂ ਗਈਆਂ ਦੂਰੀਆਂ ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ OZ′ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੇਠਾਂ ਵੱਲ ਮਾਪੀਆਂ ਗਈਆਂ ਦੂਰੀਆਂ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਠੀਕ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ZX-ਤਲ ਦੇ ਸੱਜੇ OY ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਮਾਪੀਆਂ ਗਈਆਂ ਦੂਰੀਆਂ ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ZX-ਤਲ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ OY′ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਮਾਪੀਆਂ ਗਈਆਂ ਦੂਰੀਆਂ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। YZ-ਤਲ ਦੇ ਅੱਗੇ OX ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਮਾਪੀਆਂ ਗਈਆਂ ਦੂਰੀਆਂ ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਪਿੱਛੇ OX′ ਵੱਲ ਮਾਪੀਆਂ ਗਈਆਂ ਦੂਰੀਆਂ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਬਿੰਦੂ O ਨੂੰ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਤਿੰਨ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਤਲ ਅਕਾਸ਼ ਨੂੰ ਅੱਠ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੇ ਹਨ, ਇਹਨਾਂ ਅੱਠਾਂ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦਾ ਨਾਂ XOYZ, X′OYZ, X′OY′Z, XOY′Z, XOYZ′, X′OYZ′, X′OY′Z′ ਅਤੇ XOY′Z′ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ I, II, III, ..., VIII ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

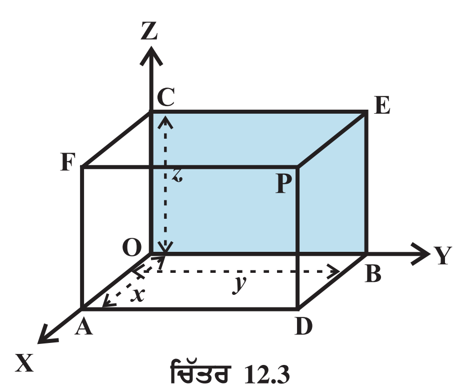
12.3 ਅਕਾਸ਼ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (Coordinates of a Point in Space)

ਅਕਾਸ਼ ਵਿੱਚ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਾਂ, ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਤਲਾਂ ਅਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਾਲ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਾਂ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਚੁਨਾਵ ਦੇ ਬਾਅਦ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਤਿੰਨ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (x,y,z) ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਅਤੇ ਉਲਟ ਤੌਰ 'ਤੇ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਤਿਗੜੀ (triplet) ਦਿੱਤੇ ਜਾਣ ਤੇ ਅਕਾਸ਼ ਵਿੱਚ ਲੋੜੀਂਦਾ ਬਿੰਦੂ (x,y,z) ਨੂੰ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਦੀ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵਿਸਥਾਰ ਨਾਲ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 12.2

ਅਕਾਸ਼ ਵਿਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ XY-ਤਲ ਤੇ PM ਲੰਬ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸਦਾ ਪੈਰ M ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 12.2)। ਤਦ M ਤੋਂ x-ਧੁਰੇ ਤੇ ML ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ ਜੋ ਉਸ ਤੋਂ L ਤੇ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਓ $OL = x$, $LM = y$ ਅਤੇ $PM = z$ ਤਾਂ (x,y,z) ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕਹੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤੋਂ (x, y, z) ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ, y ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਅਤੇ z-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਚਿੱਤਰ 12.2 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਬਿੰਦੂ P (x, y, z) ਅਠਵੇਂ ਅੰਸ਼ XOYZ ਵਿਚ ਸਥਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ x, y ਅਤੇ z ਸਾਰੇ ਧਨਾਤਮਕ ਹਨ। ਜੇਕਰ P ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਅਠਵੇਂ ਅੰਸ਼ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ ਤਾਂ x,y ਅਤੇ z ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਉਸੇ ਅਨੁਸਾਰ ਬਦਲ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਕਾਸ਼ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਵਾਸਤੇ ਇੱਕ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਕ੍ਰਮਿਕ ਤਿਗੜੀ (x, y, z) ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਲਟ ਤੌਰ ਤੇ ਕਿਸੀ ਤਿਗੜੀ (x, y, z) ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਜਾਣ ਤੇ ਅਸੀ x ਦੇ ਸੰਗਤ x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਬਿੰਦੂ L ਨਿਰਧਾਰਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਦੋਬਾਰਾ XY-ਤਲ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ M ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (x, y) ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦੇਵੋ ਕਿ LM ਜਾਂ ਤਾਂ x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ ਜਾਂ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ। ਬਿੰਦੂ M ਤੇ ਪੁੱਜਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ XY-ਤਲ ਤੇ MP ਲੰਬ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ, ਇਸ ਤੇ ਬਿੰਦੂ P ਨੂੰ Z ਦੇ ਬਾਬਤ ਨਿਰਧਾਰਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਿਰਧਾਰਤ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (x, y, z) ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਅਕਾਸ਼ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ ਅਤੇ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਕ੍ਰਮਿਕ ਤਿਗੜੀ (x, y, z) ਵਿੱਚ ਸਦਾ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਨੁਸਰਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 12.3

ਫ਼ੇਰਵੇਂ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਅਕਾਸ਼ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਤਲਾਂ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਤਿੰਨ ਤਲ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ, ਜੋ ਕਿ x-ਧੁਰਾ, y-ਧੁਰਾ ਅਤੇ z-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ A, B ਅਤੇ C ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 12.3)। ਜੇਕਰ $OA = x$, $OB = y$ ਅਤੇ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

OC = z ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ x, y ਅਤੇ z ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਅਸੀਂ P (x, y, z) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਉਲਟ ਤੌਰ ਤੇ x,y ਅਤੇ z ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਜਾਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਾਂ ਤੇ ਬਿੰਦੂ A, B ਅਤੇ C ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਬਿੰਦੂ A, B ਅਤੇ C ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ YZ- ਤਲ, ZX-ਤਲ ਅਤੇ XY-ਤਲ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਤਿੰਨ ਤਲ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਤਿੰਨਾਂ ਤਲਾਂ ਨੂੰ ADPF, BDPE ਅਤੇ CEPF ਦੀ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ, ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ P ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਕ੍ਰਮਿਕ ਤਿਗੜੀ (x, y, z) ਦੇ ਸੰਗਤ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ ਅਕਾਸ਼ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ P (x, y, z) ਹੈ, ਤਾਂ YZ, ZX ਅਤੇ XY ਤਲਾਂ ਤੋਂ ਲੰਬ ਦੂਰੀਆਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ x, y ਅਤੇ z ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (0,0,0) ਹਨ। x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(x,0,0)$ ਅਤੇ YZ-ਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(0, y, z)$ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕਥਨ : ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਉਸ ਅੱਠਵੇਂ ਅੰਸ਼ ਨੂੰ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਅੱਠਾਂ ਅੰਸ਼ਾਂ ਵਿੱਚ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 12.1

ਅੱਠਵਾਂ ਹਿੱਸਾ / ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	–	–	+	+	–	–	+
y	+	+	–	–	+	+	–	–
z	+	+	+	+	–	–	–	–

ਉਦਾਹਰਣ 1: ਚਿੱਤਰ 12.3 ਵਿੱਚ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (2,4,5) ਹਨ ਤਾਂ F ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਬਿੰਦੂ F ਦੇ ਲਈ OY ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਮਾਪੀ ਗਈ ਦੂਰੀ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ F ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (2, 0, 5) ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 2: ਉਹ ਅੱਠਵਾਂ ਅੰਸ਼ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ (–3, 1, 2) ਅਤੇ (–3, 1, –2) ਸਥਿਤ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਸਾਰਣੀ 12.1 ਤੋਂ, ਬਿੰਦੂ (–3, 1, 2) ਦੂਜੇ ਅੱਠਵੇਂ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ (–31 – 2) ਛੇਵੇਂ ਅੱਠਵੇਂ ਅੰਸ਼ ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 12.1

1. ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ। ਇਸਦੇ y-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਅਤੇ z-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕੀ ਹਨ ?

2. ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ XZ-ਤਲ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਇਸਦੇ y-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦੇ ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

3. ਉਹਨਾਂ ਅੱਠਵੇਂ ਹਿੱਸਿਆਂ ਦਾ ਨਾਂ ਦੱਸੋ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਬਿੰਦੂ ਹਨ :

(1, 2, 3), (4, –2, 3), (4, –2, –5), (4, 2, –5), (– 4, 2, –5), (– 4, 2, 5), (–3, –1, 6), (2, – 4, –7).

4. ਖ਼ਾਲੀ ਸਥਾਨ ਭਰੋ :

(*i*) x-ਧੁਰਾ ਅਤੇ y-ਧੁਰਾ ਦੋਵੇਂ ਮਿਲ ਕੇ ਇੱਕ ਤਲ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ, ਉਸ ਤੱਲ ਨੂੰ _______ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

(*ii*) XY-ਤੱਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ _______ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(*iii*) ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਤੱਲ ਅਕਾਸ਼ ਨੂੰ ______ ਅੱਠਵੇਂ ਹਿੱਸਿਆਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੇ ਹਨ।

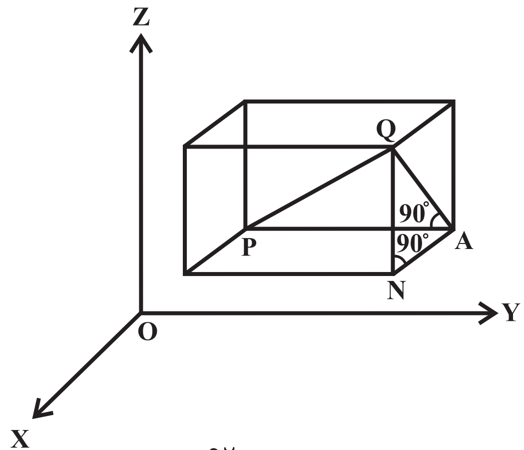
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

12.4 ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ (Distance between Two Points)

ਦੋ-ਵਿਮਾਈ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਅਧਿਐਨ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਤ੍ਰੈ-ਵਿਮਾਈ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਲਈ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਮੰਨ ਲਓ, ਸਮਕੋਣੀ ਧੁਰੇ OX, OY ਅਤੇ OZ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਬਾਬਤ ਦੋ ਬਿੰਦੂ P (x_1, y_1, z_1) ਅਤੇ Q (x_2, y_2, z_2) ਹਨ। P ਅਤੇ Q ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਤਲਾਂ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਤਲ ਖਿੱਚੋ, ਜਿਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣੀ ਸਮਾਂਤਰ ਛੇ-ਫ਼ਲਕ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਇੱਕ ਵਿਕਰਨ PQ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 12.4)



ਚਿੱਤਰ 12.4

ਕਿਉਂਕਿ $\angle PAQ$ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ΔPQA ਵਿੱਚ,

$$PQ^2 = PA^2 + AQ^2 \quad \ldots (1)$$

ਦੋਬਾਰਾ, ਕਿਉਂਕਿ $\angle ANQ$ = ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ,

ਇਸ ਲਈ Δ ANQ ਵਿੱਚ

$$AQ^2 = AN^2 + NQ^2 \quad \ldots (2)$$

ਸਮੀਕਰਣਾਂ (1) ਅਤੇ (2), ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$PQ^2 = PA^2 + AN^2 + NQ^2$$

ਹੁਣ, $PA = y_2 - y_1$, $AN = x_2 - x_1$ ਅਤੇ $NQ = z_2 - z_1$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$

ਇਸ ਲਈ $PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

ਇਹ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ P (x_1, y_1, z_1) ਅਤੇ Q (x_2, y_2, z_2) ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ PQ ਦੇ ਲਈ ਸੂਤਰ ਹੈ।

ਖਾਸ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਜੇਕਰ $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, ਭਾਵ, ਬਿੰਦੂ P, ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਹੋਵੇ ਤਾਂ $OQ = \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}$

ਜਿਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਅਤੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ Q (x_2, y_2, z_2) ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3: ਬਿੰਦੂਆਂ P(1, –3, 4) ਅਤੇ Q (– 4, 1, 2) ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : PQ ਬਿੰਦੂਆਂ P (1,–3, 4) ਅਤੇ Q (– 4, 1, 2) ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ ਹੈ :

$$PQ = \sqrt{(-4-1)^2+(1+3)^2+(2-4)^2}$$

$$= \sqrt{25+16+4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ ਇਕਾਈਆਂ}$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 4: ਦਰਸਾਉ ਕਿ P (–2, 3, 5), Q (1, 2, 3) ਅਤੇ R (7, 0, –1) ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮਰੇਖੀ ਬਿੰਦੂ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਇੱਥੇ, $PQ = \sqrt{(1+2)^2+(2-3)^2+(3-5)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$

$QR = \sqrt{(7-1)^2+(0-2)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{36+4+16} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

ਅਤੇ $PR = \sqrt{(7+2)^2+(0-3)^2+(-1-5)^2} = \sqrt{81+9+36} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $PQ + QR = PR$

ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ P, Q ਅਤੇ R ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 5: ਕੀ ਬਿੰਦੂ A (3, 6, 9), B (10, 20, 30) ਅਤੇ C (25, – 41, 5) ਇੱਕ ਸਮਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰ ਹਨ ?

ਹੱਲ : ਦੂਰੀ ਸੂਤਰ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$AB^2 = (10-3)^2 + (20-6)^2 + (30-9)^2$$
$$= 49 + 196 + 441 = 686$$
$$BC^2 = (25-10)^2 + (-41-20)^2 + (5-30)^2$$
$$= 225 + 3721 + 625 = 4571$$
$$CA^2 = (3-25)^2 + (6+41)^2 + (9-5)^2$$
$$= 484 + 2209 + 16 = 2709$$

ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $CA^2 + AB^2 \neq BC^2$

ਇਸ ਲਈ ΔABC ਇੱਕ ਸਮਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6: ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ (3, 4, 5) ਅਤੇ (–1, 3, –7) ਹਨ। ਗਤੀਸ਼ੀਲ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਪੱਥ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਦੋਂ ਕਿ $PA^2 + PB^2 = 2k^2$

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਚਲ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (x, y, z) ਹਨ।

ਹੁਣ $PA^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2$

$PB^2 = (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+7)^2$

ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸ਼ਰਤ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ, $PA^2 + PB^2 = 2k^2$, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 + (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+7)^2 = 2k^2$$

ਜਾਂ $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x - 14y + 4z = 2k^2 - 109$

ਅਭਿਆਸ 12.2

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ :
   (i) (2, 3, 5) ਅਤੇ (4, 3, 1) (ii) (–3, 7, 2) ਅਤੇ (2, 4, –1)
   (iii) (–1, 3, – 4) ਅਤੇ (1, –3, 4) (iv) (2, –1, 3) ਅਤੇ (–2, 1, 3)
2. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (–2, 3, 5), (1, 2, 3) ਅਤੇ (7, 0, –1) ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।
3. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਲਈ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ :
   (i) (0, 7, –10), (1, 6, – 6) ਅਤੇ (4, 9, – 6) ਇੱਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰ ਹਨ।
   (ii) (0, 7, 10), (–1, 6, 6) ਅਤੇ (– 4, 9, 6) ਇੱਕ ਸਮਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰ ਹਨ।
   (iii) (–1, 2, 1), (1, –2, 5), (4, –7, 8) ਅਤੇ (2, –3, 4) ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰ ਹਨ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

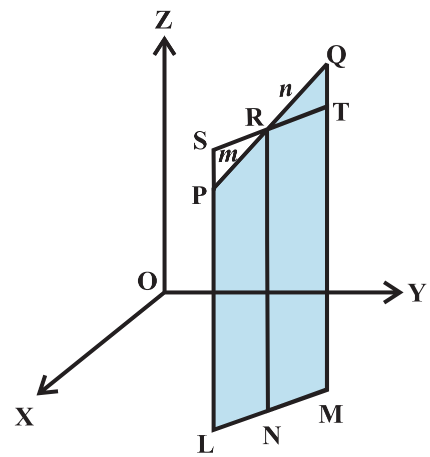
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

4. ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹੜੇ ਬਿੰਦੂਆਂ (1, 2, 3) ਅਤੇ (3, 2, –1) ਤੋਂ ਸਮਦੂਰੀ ਤੇ ਹਨ।
5. ਬਿੰਦੂਆਂ P ਤੋਂ ਬਣੇ ਸਮੂਹ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ A (4, 0, 0) ਅਤੇ B (– 4, 0, 0) ਤੋਂ ਦੂਰੀਆਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ 10 ਹੈ।

12.5 ਕਾਟ ਸੂਤਰ (Section Formula)

ਸਮਰਣ ਕਰੋ ਦੋ–ਵਿਮਾਈ ਜਿਮਾਇਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਕਿਵੇਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਹੜਾ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ ਦਿੱਤੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਅੰਦਰੂਨੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਜਾਂ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀ ਇਸ ਸੰਕਲਪ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਤ੍ਰੈ-ਵਿਮਾਈ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦੇ ਲਈ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਮੰਨ ਲਉ ਅਕਾਸ਼ ਵਿੱਚ ਦੋ ਬਿੰਦੂ $P(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ $Q\ (x_2, y_2, z_2)$. ਹਨ। ਮੰਨੋ $R\ (x, y, z)$ ਰੇਖਾ ਖੰਡ PQ ਨੂੰ $m : n$ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਅੰਦਰੂਨੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। XY-ਤਲ ਤੇ PL, QM ਅਤੇ RN ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ PL || QM ||RN ਹਨ ਅਤੇ ਤਿੰਨਾਂ ਲੰਬਾਂ ਦੇ ਪੈਰ XY-ਤਲ ਤੇ ਬਣਦੀ ਹੈ। ਬਿੰਦੂ L, M ਅਤੇ N XY-ਤੱਲ ਅਤੇ PL, RN ਅਤੇ QM ਤੋਂ ਬਣਦੇ ਤੱਲ ਦੀ ਕਾਟ ਤੇ ਬਣਨਗੇ। ਬਿੰਦੂ R ਤੋਂ ਰੇਖਾ LM ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾ ST ਖਿੱਚੋ। ST ਰੇਖਾ ਖਿਚੇ ਗਏ ਲੰਬ ਦੇ ਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਰੇਖਾ LP (ਬਾਹਰੋਂ) ਨੂੰ S ਅਤੇ MQ ਨੂੰ T ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ ਚਿੱਤਰ 12.5 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 12.5

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਚਤੁਰਭੁਜ LNRS ਅਤੇ NMTR ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹਨ। ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ PSR ਅਤੇ QTR ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ ਸਮਰੂਪ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ

$$\frac{m}{n} = \frac{\text{PR}}{\text{QR}} = \frac{\text{SP}}{\text{QT}} = \frac{\text{SL} - \text{PL}}{\text{QM} - \text{TM}} = \frac{\text{NR}-\text{PL}}{\text{QM}-\text{NR}} = \frac{z - z_1}{z_2 - z}$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $$z = \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}$$

ਠੀਕ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ XZ-ਤਲ ਅਤੇ YZ-ਤਲ ਤੇ ਲੰਬ ਖਿੱਚਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n} \text{ ਅਤੇ } x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$

ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ R ਜਿਹੜਾ ਬਿੰਦੂ $P\ (x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ $Q\ (x_2, y_2, z_2)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ $m : n$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਅੰਦਰੂਨੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵੰਡਦਾ ਹੈ, ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ :

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m + n}\right)$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ R, ਰੇਖਾ ਖੰਡ PQ ਨੂੰ $m : n$ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਬਾਹਰੋਂ ਵੰਡਦਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਸੂਤਰ ਵਿੱਚ n ਨੂੰ $-n$ ਤੋਂ ਬਦਲਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ R ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹੋਣਗੇ।

$$\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n},\ \frac{my_2 - ny_1}{m-n},\ \frac{mz_2 - nz_1}{m-n}\right)$$

ਸਥਿਤੀ 1 : ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ : ਜੇਕਰ R ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੋਵੇ ਤਾਂ

$m : n = 1 : 1$ ਰੱਖਣ ਤੇ $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ ਅਤੇ $z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$

ਇਹ P (x_1, y_1, z_1) ਅਤੇ Q (x_2, y_2, z_2) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ।

ਸਥਿਤੀ 2 : ਰੇਖਾ ਖੰਡ PQ ਨੂੰ $k : 1$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਅੰਦਰੂਨੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵੰਡਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ R ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $k = \dfrac{m}{n}$ ਰੱਖਣ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{1+k},\ \frac{ky_2 + y_1}{1+k},\ \frac{kz_2 + z_1}{1+k}\right)$$

ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਅਕਸਰ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਵਿਆਪਕ ਬਿੰਦੂ ਸੰਬੰਧੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਇਸਤੇਮਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7: ਬਿੰਦੂਆਂ (1, –2, 3) ਅਤੇ (3, 4, –5) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਤੋਂ ਬਣੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ ਅਨੁਪਾਤ 2 : 3 ਵਿੱਚ (i) ਅੰਦਰੂਨੀ ਤੌਰ 'ਤੇ (ii) ਬਾਹਰੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵੰਡਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : (i) ਮੰਨ ਲਉ P (x, y, z), A(1, – 2, 3) ਅਤੇ B (3, 4, –5) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ ਅੰਦਰੂਨੀ ਤੌਰ 'ਤੇ 2 : 3 ਵੰਡਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $x = \dfrac{2(3) + 3(1)}{2+3} = \dfrac{9}{5}$, $y = \dfrac{2(4) + 3(-2)}{2+3} = \dfrac{2}{5}$, $z = \dfrac{2(-5) + 3(3)}{2+3} = \dfrac{-1}{5}$

ਇਸ ਕਰਕੇ ਲੋੜੀਂਦਾ ਬਿੰਦੂ $\left(\dfrac{9}{5}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{-1}{5}\right)$ ਹੈ।

(ii) ਮੰਨ ਲਉ P (x, y, z), A (1, –2, 3) ਅਤੇ B (3, 4, –5) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ ਬਾਹਰੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਨੁਪਾਤ 2 : 3 ਵੰਡਦਾ ਹੈ।

$$x = \frac{2(3) + (-3)(1)}{2 + (-3)} = -3, \quad y = \frac{2(4) + (-3)(-2)}{2 + (-3)} = -14, \quad z = \frac{2(-5) + (-3)(3)}{2 + (-3)} = 19$$

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਬਿੰਦੂ (–3, –14, 19) ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8: ਕਾਟ ਸੂਤਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂ (– 4, 6, 10), (2, 4, 6) ਅਤੇ (14, 0, –2) ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ A (– 4, 6, 10), B (2, 4, 6) ਅਤੇ C (14, 0, – 2) ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ ਬਿੰਦੂ P, AB ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ ਅਨੁਪਾਤ $k : 1$ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ ਤਾਂ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ।

$$\left(\frac{2k-4}{k+1},\ \frac{4k+6}{k+1},\ \frac{6k+10}{k+1}\right)$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਪੜਤਾਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਬਿੰਦੂ P, k ਦੀ ਕਿਸੇ ਮੁੱਲ ਲਈ, C ਤੇ ਸੰਪਾਤੀ ਹੈ।

$\frac{2k-4}{k+1}=14$, ਰੱਖਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $k=-\frac{3}{2}$

ਜਦੋਂ $k=-\frac{3}{2}$, ਹੋਵੇ ਤਾਂ $\frac{4k+6}{k+1}=\frac{4(-\frac{3}{2})+6}{-\frac{3}{2}+1}=0$

ਅਤੇ $$\frac{6k+10}{k+1}=\frac{6(-\frac{3}{2})+10}{-\frac{3}{2}+1}=-2$$

ਇਸ ਲਈ C (14, 0, –2) ਉਹੀ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਜਿਹੜਾ AB ਨੂੰ 3 : 2 ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਬਾਹਰੋਂ ਵੰਡਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹੀ P ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ A, B ਅਤੇ C ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 9: ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਜਿਸਦੇ ਸਿਖਰ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ਅਤੇ (x_3, y_3, z_3) ਹਨ। ਇਸਦੇ ਕੇਂਦਰਕ (Centroid) ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ABC ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਸਿਖਰ A, B ਅਤੇ C ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ਅਤੇ (x_3, y_3, z_3) ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ BC ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ D ਹੈ। ਇਸ ਲਈ D ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ :

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{z_2+z_3}{2}\right)$$

ਮੰਨ ਲਉ G ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਕੇਂਦਰਕ ਹੈ ਤਾਂ G, AD ਨੂੰ 2 : 1 ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ।
ਇਸ ਲਈ G ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ :

$$\left(\frac{2\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+x_1}{2+1}, \frac{2\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)+y_1}{2+1}, \frac{2\left(\frac{z_2+z_3}{2}\right)+z_1}{2+1}\right)$$

ਜਾਂ $$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਬਿੰਦੂਆਂ (4, 8, 10) ਅਤੇ (6, 10, – 8) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ, YZ-ਤਲ ਰਾਹੀਂ ਜਿਹੜੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡੇ ਹੋਏ ਹਨ, ਉਸਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ YZ-ਤਲ ਬਿੰਦੂ P (x, y, z) ਤੇ A (4, 8, 10) ਅਤੇ B (6, 10, – 8) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ k : 1 ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ :

$$\left(\frac{4+6k}{k+1}, \frac{8+10k}{k+1}, \frac{10-8k}{k+1}\right)$$

ਕਿਉਂਕੀ P, YZ-ਤਲ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਸਦਾ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{4+6k}{k+1}=0$

ਜਾਂ $$k=-\frac{2}{3}$$

ਇਸ ਲਈ, YZ-ਤਲ AB ਨੂੰ 2 : 3 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਬਾਹਰੀ ਤੌਰ ’ਤੇ ਵੰਡਦਾ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਭਿਆਸ 12.3

1. ਬਿੰਦੂਆਂ $(-2, 3, 5)$ ਅਤੇ $(1, -4, 6)$ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਅਨੁਪਾਤ $2:3$ ਵਿੱਚ (i) ਅੰਦਰੋਂ (ii) ਬਾਹਰੋਂ ਵੰਡ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਬਿੰਦੂ P $(3, 2, -4)$, Q $(5, 4, -6)$ ਅਤੇ R $(9, 8, -10)$ ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ। ਉਹ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ Q, PR ਨੂੰ ਵੰਡਦਾ ਹੈ।
3. ਬਿੰਦੂਆਂ $(-2, 4, 7)$ ਅਤੇ $(3, -5, 8)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਖੰਡ YZ-ਤਲ ਰਾਹੀਂ ਜਿਸ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ, ਉਹ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਕਾਟ ਸੂਤਰ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਕੇ ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ A $(2, -3, 4)$, B $(-1, 2, 1)$ ਅਤੇ C$\left(0, \frac{1}{3}, 2\right)$ ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।
5. P $(4, 2, -6)$ ਅਤੇ Q $(10, -16, 6)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ PQ ਨੂੰ ਸਮ -ਤ੍ਰੈ ਭਾਜੀ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 11: ਦਰਸਾਓ ਕਿ ਬਿੰਦੂ A $(1, 2, 3)$, B $(-1, -2, -1)$, C $(2, 3, 2)$ ਅਤੇ D $(4, 7, 6)$ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰ ਹਨ ਪਰੰਤੂ ਇਹ ਇੱਕ ਆਇਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇਹ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਕਿ ABCD ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ, ਸਾਨੂੰ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਵਿਖਾਉਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ।

$$AB = \sqrt{(-1-1)^2+(-2-2)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{4+16+16} = 6$$

$$BC = \sqrt{(2+1)^2+(3+2)^2+(2+1)^2} = \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43}$$

$$CD = \sqrt{(4-2)^2+(7-3)^2+(6-2)^2} = \sqrt{4+16+16} = 6$$

$$DA = \sqrt{(1-4)^2+(2-7)^2+(3-6)^2} = \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43}$$

ਕਿਉਂਕੀ AB = CD ਅਤੇ BC = AD ਹੈ,

ਇਸ ਲਈ ABCD ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ। ਹੁਣ, ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿ ABCD ਆਇਤ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਵਿਖਾਉਣਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸਦੇ ਵਿਕਰਣ AC ਅਤੇ BD ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ :

$$AC = \sqrt{(2-1)^2+(3-2)^2+(2-3)^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$BD = \sqrt{(4+1)^2+(7+2)^2+(6+1)^2} = \sqrt{25+81+49} = \sqrt{155}$$

ਕਿਉਂਕੀ $AC \neq BD$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ABCD ਇੱਕ ਆਇਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਵਿਕਰਣ AC ਅਤੇ BD ਪਰਸਪਰ ਸਮ-ਦੋ-ਭਾਜ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਦੇ ਗੁਣ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਵੀ ABCD ਨੂੰ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਬਣੇ ਸਮੂਹ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹੜਾ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਚਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸਦੀ ਬਿੰਦੂਆਂ A $(3, 4, -5)$ ਅਤੇ B $(-2, 1, 4)$ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਸਮਾਨ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ P (x, y, z) ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ ਕਿ PA = PB

ਇਸ ਲਈ $\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2+(z+5)^2} = \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2}$

ਜਾਂ $(x-3)^2+(y-4)^2+(z+5)^2 = (x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2$

ਜਾਂ $10x+6y-18z-29=0$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਕੇਂਦਰਕ (1, 1, 1) ਹੈ। ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ (3, –5, 7) ਅਤੇ (–1, 7, – 6) ਹਨ। ਬਿੰਦੂ C ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : C ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (x, y, z) ਹਨ ਅਤੇ ਕੇਂਦਰਕ G ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (1, 1, 1) ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $\dfrac{x+3-1}{3}=1$, ਜਾਂ, $x = 1$; $\dfrac{y-5+7}{3}=1$, ਜਾਂ, $y = 1$; $\dfrac{z+7-6}{3}=1$, ਜਾਂ, $z = 2$

ਇਸ ਲਈ C ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (1, 1, 2) ਹਨ।

ਅਧਿਆਇ 12 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਤਿੰਨ ਸਿਖਰ A(3, – 1, 2), B (1, 2, – 4) ਅਤੇ C (– 1, 1, 2) ਹਨ। ਚੌਥੇ ਸਿਖਰ D ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ A (0, 0, 6), B (0, 4, 0) ਅਤੇ (6, 0, 0) ਹਨ। ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਮੱਧਿਕਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ PQR ਦਾ ਕੇਂਦਰਕ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਸਿਖਰ P $(2a, 2, 6)$, Q $(– 4, 3b, –10)$ ਅਤੇ R$(8, 14, 2c)$ ਹਨ ਤਾਂ a, b ਅਤੇ c ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. y-ਧੁਰੇ ਤੇ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੀ ਬਿੰਦੂ P (3, –2, 5) ਤੋਂ ਦੂਰੀ $5\sqrt{2}$ ਹੈ।
5. P (2, –3, 4) ਅਤੇ Q (8, 0, 10) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਤੇ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ R ਦਾ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ 4 ਹੈ। ਬਿੰਦੂ R ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   [**ਸੰਕੇਤ :** ਮੰਨ ਲਉ R, PQ ਨੂੰ $k : 1$ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਬਿੰਦੂ R ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $\left(\dfrac{8k+2}{k+1}, \dfrac{-3}{k+1}, \dfrac{10k+4}{k+1}\right)$ ਹਨ।]
6. ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ A ਅਤੇ B ਕ੍ਰਮਵਾਰ (3, 4, 5) ਅਤੇ (–1, 3, –7) ਹਨ। ਚਲ ਬਿੰਦੂ P ਰਾਹੀਂ ਨਿਰਮਿਤ ਸਮੂਹ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ $PA^2 + PB^2 = k^2$, ਜਿੱਥੇ k ਅਚੱਲ ਹੈ।

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

◆ ਤ੍ਰੈ-ਵਿਮਾਈ ਜਿਆਮਿਤੀ ਦੇ ਸਮਕੋਣੀ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿੱਚ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਤਿੰਨ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

◆ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਾ ਦੇ ਯੁਗਮ, ਤਿੰਨ ਤਲ ਨਿਰਧਾਰਤ ਕਰਦੇ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਤਲ XY-ਤਲ, YZ-ਤਲ ਅਤੇ ZX-ਤਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

◆ ਤਿੰਨ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਤਲ ਅਕਾਸ਼ ਨੂੰ ਅੱਠ ਭਾਗਾਂ ਵਿਚ ਵੰਡਦੇ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਅੱਠ ਭਾਗ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

◆ ਤ੍ਰੈ-ਵਿਮਾਈ ਜਿਆਮਿਤੀ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਸਦਾ ਇੱਕ ਤਿਗੜੀ (x, y, z) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ x, YZ-ਤਲ ਤੋਂ ,y, z, x ਤਲ ਤੋਂ ਅਤੇ Z, XY-ਤਲ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਹੈ।

◆ (i) x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(x, 0, 0)$ ਹਨ।

(ii) y-ਧੁਰੇ ਤੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(0, y, 0)$ ਹਨ।

(iii) z-ਧੁਰੇ ਤੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(0, 0, z)$ ਹਨ।

◆ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ $P(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ $Q(x_2, y_2, z_2)$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦਾ ਦੂਰੀ ਸੂਤਰ ਹੈ।

$$PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

- ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ P (x_1, y_1, z_1) ਅਤੇ Q (x_2, y_2, z_2) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ $m : n$ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਅੰਦਰੂਨੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਤੇ ਬਾਹਰੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵੰਡਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ R ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right) \text{ ਅਤੇ } \left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}, \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right) \text{ ਹਨ।}$$

- ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ P(x_1, y_1, z_1) ਅਤੇ Q (x_2, y_2, z_2) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ PQ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ :

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

- ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਜਿਸਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (x_1, y_1, z_1) ਅਤੇ (x_2, y_2, z_2) ਅਤੇ (x_3, y_3, z_3), ਹਨ, ਦੇ ਕੇਂਦਰਕ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+x_3}{3}\right)$

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

1637 ਈ. ਵਿੱਚ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ੀ ਜਿਆਮਿਤੀ ਦੇ ਜਨਕ Rene Descartes (1596–1650 ਈ.) ਸਮਤਲੀ ਜਿਆਮਿਤੀ ਦੇ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਖਾਸ ਕੰਮ ਕੀਤਾ, ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਸਹਿ-ਅਸਿਕਾਰਕ Pierre Fermat (1601-1665 ਈ.) ਅਤੇ La Hire (1640-1718 ਈ.) ਨੇ ਵੀ ਇਸੇ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਕੀਤਾ। ਹਾਲਾਂਕਿ ਇਹਨਾਂ ਲੋਕਾਂ ਦੇ ਕਾਰਜ ਵਿਚ ਤ੍ਰੈ-ਵਿਮਾਈ ਜਿਆਮਿਤੀ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਸੁਝਾਵ ਹਨ, ਪਰੰਤੂ ਵਿਸ਼ਦ ਵਿਵੇਚਨਾ ਨਹੀਂ ਹਨ। Descartes ਨੂੰ ਤ੍ਰੈ-ਵਿਮਾਈ ਅਕਾਸ਼ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿਚ ਜਾਣਕਾਰੀ ਸੀਗੀ ਪਰੰਤੂ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਇਸਨੂੰ ਵਿਕਸਿਤ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ।

1715 ਈ. ਵਿੱਚ J.Bernoulli (1667-1748 ਈ.) ਨੇ Leibnitz ਨੂੰ ਲਿਖੇ ਪੱਤਰ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਤਲਾਂ ਦਾ ਪਰਿਚਯ ਦੱਸਿਆ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਅੱਜਕਲ੍ਹ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ।

ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ 1700 ਈ. ਵਿੱਚ ਫ਼ਰੇਚ ਅਕਾਦਮੀ ਨੂੰ ਪ੍ਰਸਤੁਤ ਕੀਤੇ ਗਏ Antoinne Parent (1666-1716 ਈ.) ਦੇ ਲੇਖ ਵਿੱਚ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ੀ ਠੋਸ ਜਿਆਮਿਤੀ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਕਾਫ਼ੀ ਚਰਚਾ ਹੈ।

L.Euler (1707-1783 ਈ.) ਨੇ 1748 ਈ. ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਆਪਣੀ ਪੁਸਤਕ "ਜਿਆਮਿਤੀ ਦਾ ਅਸਥਾਪਨ" ਦੇ ਦੂਜੇ ਖੰਡ ਦੇ ਜ਼ਮੀਮੇ ਦੇ ਪੰਜਵੇਂ ਅਧਿਆਇ ਵਿਚ ਤ੍ਰੈ-ਵਿਮਾਈ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਿਆਮਿਤੀ ਦਾ ਕ੍ਰਮਬੰਧ ਵਰਣਨ ਪ੍ਰਸਤੁਤ ਕੀਤਾ।

ਉੱਨੀਵੀਂ ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਦੇ ਮੱਧ ਦੇ ਬਾਅਦ ਹੀ ਜਿਆਮਿਤੀ ਦਾ ਤਿੰਨ ਤੋਂ ਵੱਧ ਆਯਾਮਾਂ ਵਿੱਚ ਵਿਸਤਾਰ ਕੀਤਾ ਗਿਆ, ਜਿਸਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਵਧੀਆ ਪ੍ਰਯੋਗ Einstein ਦੇ ਸਾਪੇਖਤਾ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਵਿੱਚ ਅਸਥਾਨ-ਸਮਾਂ ਅਨੁਕ੍ਰਮਣ ਵਿਚ ਦ੍ਰਸ਼ਟਵ ਹੈ।

— ❖ —

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਧਿਆਇ 13

ਸੀਮਾਵਾਂ ਅਤੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ

(Limits and Derivatives)

❖ *With the Calculus as a key, Mathematics can be successfully applied to the explanation of the course of Nature – WHITEHEAD* ❖

13.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਇਹ ਅਧਿਆਇ ਕਲਨ ਦੀ ਇੱਕ ਭੂਮਿਕਾ ਹੈ। ਕਲਨ ਗਣਿਤ ਦੀ ਉਹ ਸ਼ਾਖਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਮੁੱਖ ਤੌਰ 'ਤੇ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਫਲਨ (Function) ਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਬਦਲਾਵਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਾ (ਅਸਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ) ਸਹਿਜ ਸਮਝਣ ਯੋਗ ਬੋਧ (intuitive idea) ਕਰਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਉਸ ਦੇ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ ਸੀਮਾਂ ਦੀ ਸਹਿਜ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇਵਾਂਗੇ ਅਤੇ ਸੀਮਾ ਦੇ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦਾ ਕੁੱਝ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਦੇ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਕਰਨ ਲਈ ਪਲਟ ਆਵਾਂਗੇ ਅਤੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੇ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦਾ ਕੁੱਝ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਮੁੱਲਕ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਾਂਗੇ।

Sir Issac Newton (1642-1727)

13.2 ਡੈਰੀਵੇਟਿਵਾਂ ਦਾ ਸਹਿਜ ਸਮਝਣ ਯੋਗ ਬੋਧ (Intuitive Idea of Derivatives)

ਭੌਤਿਕ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਨੇ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕੀਤੀ ਹੈ ਕਿ ਪਿੰਡ ਇੱਕ ਖੜ੍ਹੀ/ਉੱਚੀ ਚਟਾਨ ਤੋਂ ਡਿੱਗ ਕੇ t ਸੈਕਿੰਡਾਂ ਵਿੱਚ $4.9t^2$ ਮੀਟਰ ਦੂਰੀ ਪਾਰ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ ਪਿੰਡ ਰਾਹੀਂ ਮੀਟਰ ਵਿੱਚ ਪਾਰ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ (s) ਸੈਕਿੰਡਾਂ ਵਿੱਚ ਮਾਪੇ ਗਏ ਸਮਾਂ (t) ਦੇ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $s = 4.9t^2$ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ।

ਨਾਲ ਦੀ ਸਾਰਣੀ 13.1 ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਖੜੀ/ਉੱਚੀ ਚਟਾਨ ਤੋਂ ਡਿੱਗਦੇ ਇੱਕ ਪਿੰਡ ਦੇ ਸੈਕਿੰਡਾਂ ਵਿੱਚ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਸਮਾਂ (t) 'ਤੇ ਮੀਟਰ ਵਿੱਚ ਪਾਰ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ (s) ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ।

ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਸਮਾਂ $t = 2$ ਸੈਕਿੰਡ 'ਤੇ ਪਿੰਡ ਦਾ ਵੇਗ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੀ ਸਾਡਾ ਉਦੇਸ਼ ਹੈ। ਇਸ ਸਮੱਸਿਆ ਤੱਕ ਪੁੱਜਣ ਲਈ $t = 2$ ਸੈਕਿੰਡ ਤੇ ਸਮਾਪਤ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਅਨੇਕ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਤੇ ਮੱਧ ਵੇਗ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਇੱਕ ਢੰਗ ਹੈ ਅਤੇ ਆਸ਼ਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਤੋਂ $t = 2$ ਸੈਕਿੰਡ ਤੇ ਵੇਗ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ ਪਵੇਗਾ।

ਸਾਰਣੀ 13.1

t	s
0	0
1	4.9
1.5	11.025
1.8	15.876
1.9	17.689
1.95	18.63225
2	19.6
2.05	20.59225
2.1	21.609
2.2	23.716
2.5	30.625
3	44.1
4	78.4

$t = t_1$ ਅਤੇ $t = t_2$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਮੱਧ ਵੇਗ $t = t_1$ ਅਤੇ $t = t_2$ ਸੈਕਿੰਡਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਪਾਰ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ ਨੂੰ $(t_2 - t_1)$ ਤੋਂ ਭਾਗ ਦੇਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲਾਂ 2 ਸੈਕਿੰਡ ਵਿੱਚ ਮੱਧ ਵੇਗ

$$= \frac{t_1 = 0 \text{ ਤੇ } t_2 = 2 \text{ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਪਾਰ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ}}{\text{ਅੰਤਰਾਲ } (t_2 - t_1)}$$

$$= \frac{(19.6 - 0)\text{ਮੀ.}}{(2 - 0)\text{ਸੈ.}} = 9.8\text{ਮੀ./ਸੈ.}$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, $t = 1$ ਅਤੇ $t = 2$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਮੱਧ ਵੇਗ

$$\frac{(19.6 - 4.9)\text{ਮੀ.}}{(2 - 1)\text{ਸੈ.}} = 14.7 \text{ ਮੀ./ਸੈ.}$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ $t = t_1$ ਅਤੇ $t = 2$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਅਸੀਂ ਮੱਧ ਵੇਗ ਦਾ ਲੇਖਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ13.2, $t = t_1$ ਅਤੇ $t = 2$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਮੀਟਰ ਪ੍ਰਤਿ ਸੈਕਿੰਡ ਵਿੱਚ ਮੱਧ ਵੇਗ (v) ਦਿੰਦੀ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 13.2

t_1	0	1	1.5	1.8	1.9	1.95	1.99
v	9.8	14.7	17.15	18.62	19.11	19.355	19.551

ਇਸ ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਮੱਧ ਵੇਗ ਹੌਲ਼ੀ-ਹੌਲ਼ੀ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ $t = 2$ ਤੇ ਸਮਾਪਤ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਨੂੰ ਹੋਰ ਛੋਟਾ ਕਰਦੇ ਜਾਂਦੇ ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $t = 2$ ਤੇ ਅਸੀਂ ਵੇਗ ਦਾ ਇੱਕ ਬਹੁਤ ਵਧੀਆ ਬੋਧ ਕਰ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਆਸ਼ਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 1.99 ਸੈਕਿੰਡ ਅਤੇ 2 ਸੈਕਿੰਡ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੁਝ ਹੈਰਾਨੀਜਨਕ ਘਟਨਾ ਨਾ ਵਾਪਰੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਨਿਸ਼ਕਰਸ਼ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $t = 2$ ਸੈਕਿੰਡ ਤੇ ਮੱਧ ਵੇਗ19.55 ਮੀ./ਸੈ. ਤੋਂ ਕੁਝ ਵੱਧ ਕੇ ਹੈ।

ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਭਿਕਲਨਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਤੋਂ ਕੁਝ ਬਲ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। $t = 2$ ਸੈਕਿੰਡ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਤੇ ਮੱਧ ਵੇਗ ਦਾ ਲੇਖਾ ਕਰੋ। ਪਹਿਲਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ $t = 2$ ਸੈਕਿੰਡ ਅਤੇ $t = t_2$ ਸੈਕਿੰਡ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਮੱਧ ਵੇਗ (v)

$$= \frac{2 \text{ ਸੈਕਿੰਡ ਅਤੇ } t_2 \text{ ਸੈਕਿੰਡ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਪਾਰ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ}}{t_2 - 2}$$

$$= \frac{t_2 \text{ ਸੈਕਿੰਡ ਵਿੱਚ ਪਾਰ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ } - 2 \text{ ਸੈਕਿੰਡ ਵਿੱਚ ਪਾਰ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ}}{t_2 - 2}$$

$$= \frac{t_2 \text{ ਸੈਕਿੰਡ ਵਿੱਚ ਪਾਰ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ } - 19.6}{t_2 - 2}$$

ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ 13.3, $t = 2$ ਸੈਕਿੰਡ ਅਤੇ t_2 ਸੈਕਿੰਡਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਮੀਟਰ ਪ੍ਰਤਿ ਸੈਕਿੰਡ ਵਿੱਚ ਮੱਧ ਵੇਗ (v) ਦਿੰਦੀ ਹੈ:

ਸਾਰਣੀ 13.3

t_2	4	3	2.5	2.2	2.1	2.05	2.01
v	29.4	24.5	22.05	20.58	20.09	19.845	19.649

ਇੱਥੇ ਫੇਰ ਅਸੀਂ ਧਿਆਨ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ $t = 2$, ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਹੋਰ ਛੋਟੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਨੂੰ ਲੈਂਦੇ ਜਾਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ $t = 2$ ਤੇ ਵੇਗ ਦਾ ਹੋਰ ਚੰਗਾ ਬੋਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਭਿਕਲਨਾਂ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ $t = 2$ ਤੇ ਸਮਾਪਤ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਵੱਧਦੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਮੱਧ ਵੇਗ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਆਸ਼ਾ ਕੀਤੀ ਹੈ ਕਿ $t = 2$ ਤੋਂ ਕੁੱਝ ਪਹਿਲਾਂ ਕੋਈ ਹੈਰਾਨੀਜਨਕ ਘਟਨਾ ਨਾ ਵਾਪਰੇ। ਅਭਿਕਲਨਾਂ ਦੇ ਦੂਜੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ $t = 2$ ਤੇ ਅੰਤ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਘੱਟਦੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਮੱਧ ਵੇਗ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਹੈ ਅਤੇ ਆਸ਼ਾ ਕੀਤੀ ਹੈ ਕਿ $t = 2$ ਦੇ ਕੁੱਝ ਬਾਅਦ ਹੈਰਾਨੀਜਨਕ ਘਟਨਾ ਨਾ ਵਾਪਰੇ। ਸ਼ੁੱਧ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਭੌਤਿਕੀ ਅਧਾਰ ਤੇ ਮੱਧ ਵੇਗ ਦੇ ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਕ੍ਰਮ ਇੱਕ ਸਮੁੱਲ ਸੀਮਾ ਤੇ ਪੁਜਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੂਪ ਤੋਂ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $t = 2$ ਤੇ ਪਿੰਡ ਦਾ ਵੇਗ 19.551ਮੀ./ਸੈਂ. ਅਤੇ 19.649 ਮੀ./ਸੈਂ. ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੈ। ਤਕਨੀਕੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $t = 2$ ਤੇ ਤਤਕਾਲਿਕ ਵੇਗ 19.551 ਮੀ./ਸੈ. ਅਤੇ 19.649 ਮੀ./ਸੈਂ. ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵੇਗ ਦੂਰੀ ਦੇ ਬਦਲਣ ਦੀ ਦਰ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਜਿਹੜਾ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਿਆ ਹੈ ਉਹ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਹੈ। "ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸਕਿੰਟਾਂ ਤੇ ਦੂਰੀ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਦਾ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਇਆ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੂਰੀ ਫਲਨ $s = 4.9t^2$ ਦਾ $t = 2$ ਤੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ 19.551 ਅਤੇ 19.649 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੈ।"

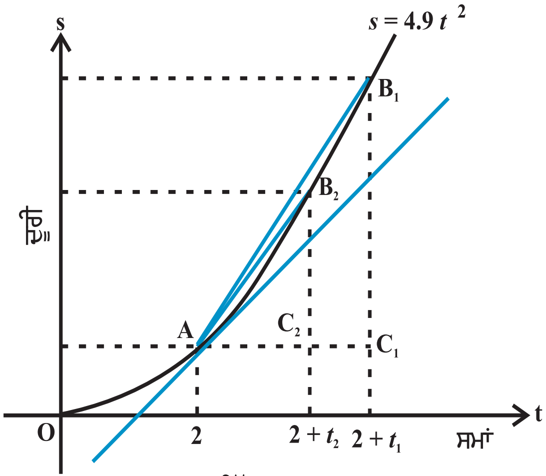
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਸ ਸੀਮਾ ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਦੀ ਇੱਕ ਵਿਕਲਪ ਵਿਧੀ ਚਿੱਤਰ 13.1 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ। ਇਹ ਲੰਘੇ ਸਮਾਂ (t) ਅਤੇ ਚਟਾਨ ਦੇ ਸ਼ਿਖਰ ਤੋਂ ਪਿੰਡ ਦੀ ਦੂਰੀ (s) ਦਾ ਆਲੇਖ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮ h_1, h_2, ..., ਦੀ ਸੀਮਾ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦੀ ਹੈ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੱਧ ਵੇਗਾਂ ਦੇ ਵਧਣ ਦੀ ਉਹੀ ਸੀਮਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜੋ ਕਿ

$$\frac{C_1B_1}{AC_1}, \frac{C_2B_2}{AC_2}, \frac{C_3B_3}{AC_3}, \ldots$$

ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $C_1B_1 = s_1 - s_0$ ਉਹ ਦੂਰੀ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਪਿੰਡ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $h_1 = AC_1$, ਵਿੱਚ ਪਾਰ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਆਦਿ। ਚਿੱਤਰ 13.1 ਤੋਂ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਣਾ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਬਾਅਦ ਦੀ ਕ੍ਰਮ ਵਕਰ ਦੇ ਬਿੰਦੂ A ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਾਲ ਦੀ ਵੱਲ ਵੱਧਦੀ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, $t = 2$ ਸਮਾਂ ਤੇ ਪਿੰਡ ਦਾ ਵੇਗ ਵਕਰ $s = 4.9t^2$ ਦੇ $t = 2$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਾਲ ਦੇ ਸਮੁੱਲ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 13.1

13.3 ਸੀਮਾਵਾਂ (Limits)

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਚਰਚਾ ਇਸ ਤੱਥ ਦੇ ਵੱਲ ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਬਿੰਦੂ ਰੱਖਦੀ ਹੈ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਸੀਮਾ ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਨੂੰ ਹੋਰ ਸਪੱਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮਝਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਸੀਮਾ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਤੋਂ ਜਾਣੂ ਹੋਣ ਲਈ ਕੁਝ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਫਲਨ $f(x) = x^2$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਅਵਲੋਕਨ ਕਰੋ ਕਿ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ x ਨੂੰ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਵੱਧ ਨਿਕਟ ਮੁੱਲ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ, $f(x)$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੀ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਹੈ। (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 2.10 ਅਧਿਆਇ 2) ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

(ਇਸਨੂੰ $f(x)$ ਦੀ ਸੀਮਾ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, ਜਦੋਂ x ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਹੈ, ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।) $f(x)$ ਦੀ ਸੀਮਾ ਜਦੋਂ x ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਹੈ ਨੂੰ ਇਵੇਂ ਸਮਝਿਆ ਜਾਵੇ ਜਿਵੇਂ $x = 0$ ਤੇ $f(x)$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ $x \to a, f(x) \to l$, ਤਾਂ l ਨੂੰ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। $\lim_{x \to a} f(x) = l$

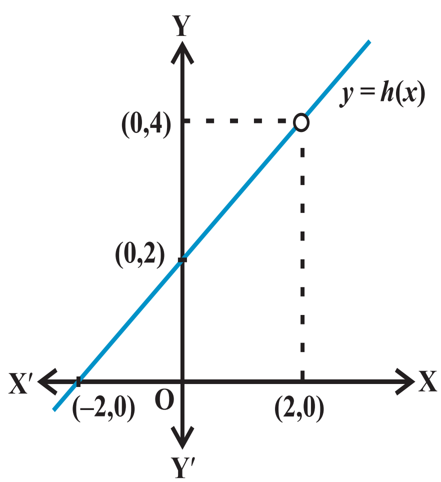
ਫਲਨ $g(x) = |x|, x \neq 0$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $g(0)$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। x ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਬਹੁਤ ਨਿਕਟ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ $g(x)$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦਾ ਪਰਿਕਲਨ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $g(x)$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$, $x \neq 0$ ਦੇ ਲਈ $y = |x|$ ਦੇ ਆਲੇਖ ਤੋਂ ਇਹ ਸਹਿਜਤਾ ਨਾਲ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 2.13 ਅਧਿਆਇ 2)

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

$$h(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, \; x \neq 2$$

x ਦੇ 2 ਦੇ ਵੱਧ ਨੇੜੇ ਮੁੱਲਾਂ (ਪਰੰਤੂ 2 ਨਹੀਂ) ਦੇ ਲਈ $h(x)$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦਾ ਪਰਿਕਲਨ ਕਰੋ। ਆਪਣੇ ਆਪ ਨੂੰ ਮਨਾਓ ਕਿ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲ 4 ਦੇ ਨਿਕਟ ਹਨ। ਇੱਥੇ (ਚਿੱਤਰ 13.2) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ $y = h(x)$ ਦੇ ਆਲੇਖ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਨ ਤੋਂ ਇਸਨੂੰ ਥੋੜ੍ਹਾ ਬਲ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤਾਂ ਤੋਂ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਮੁੱਲ $x = a$ 'ਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਜਿਹੜੇ ਮੁੱਲ ਮਿਲਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ ਉਹ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਨਹੀਂ ਹਨ ਕਿ x ਕਿਵੇਂ a ਵੱਲ ਵਧਿਆ, ਸੱਜੇ ਪਾਸੋਂ ਜਾਂ ਖੱਬੇ ਪਾਸੋਂ ਭਾਵ a ਦੇ ਨਿਕਟ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲ ਜਾਂ ਤਾਂ a ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ ਜਾਂ a ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤੋਂ ਕੁਦਰਤੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਦੋ ਸੀਮਾਵਾਂ-ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਫਲਨ f ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ $f(x)$ ਦਾ ਉਹ ਮੁੱਲ ਹੈ ਜਿਹੜਾ $f(x)$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਤੋਂ ਅਦੇਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ x,



ਚਿੱਤਰ 13.2

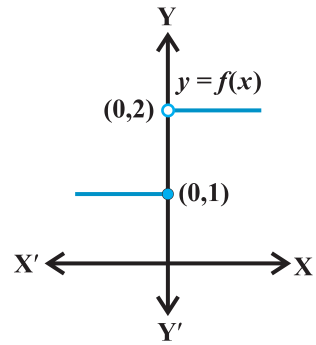
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

a ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਵੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਪੱਖ ਦੀ ਸੀਮਾ ਇਸਦੇ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ ਦੇ ਲਈ, ਫਲਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\le 0\\ 2, & x>0\end{cases}$$

ਚਿੱਤਰ 13.3 ਵਿੱਚ ਇਸ ਫ਼ਲਨ ਦਾ ਆਲੇਖ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਸਿਫ਼ਰ ਤੇ f ਦਾ ਮੁੱਲ $x \le 0$ ਦੇ ਲਈ $f(x)$ ਦੇ ਮੁੱਲ 'ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਕਿ 1 ਦੇ ਸਮੁੱਲ ਹੈ ਭਾਵ ਸਿਫ਼ਰ ਤੇ $f(x)$ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ 0 ਤੇ f ਦਾ ਮੁੱਲ, $x > 0$ ਦੇ ਲਈ $f(x)$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ, 2 ਹੈ ਭਾਵ 0 ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2$ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਦੋਂ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਵੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ $f(x)$ ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਸਤਿਤਵ ਨਹੀਂ ਰੱਖਦੀ (ਭਾਵੇਂ 0 ਤੇ ਫਲਨ f ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।)



ਚਿੱਤਰ 13.3

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $x = a$ ਤੇ $f(x)$ ਦਾ ਅਪੇਕਸ਼ਿਤ (expected) ਮੁੱਲ ਹੈ, ਜਿਸਨੇ x ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਨਿਕਟ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ $f(x)$ ਨੂੰ ਮੁੱਲ ਦਿੱਤੇ ਹਨ। ਇਸ ਮੁੱਲ ਨੂੰ a ਤੇ $f(x)$ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $x = a$ ਤੇ $f(x)$ ਦਾ ਅਪੇਕਸ਼ਿਤ ਮੁੱਲ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ x ਦੇ a ਦੇ ਸੱਜੇ ਵੱਲ ਦੇ ਨਿਕਟ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ $f(x)$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦਿੱਤੇ ਹਨ। ਇਸ ਮੁੱਲ ਨੂੰ a ਤੇ $f(x)$ ਦੀ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਜੇਕਰ ਸੱਜੇ ਅਤੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਸ ਸਾਂਝੇ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਅਸੀਂ $x = a$ ਤੇ $f(x)$ ਦੀ ਸੀਮਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ਤੋਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ 1 : ਫਲਨ $f(x) = x + 10$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਅਸੀਂ $x = 5$ ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹਾਂਗੇ। ਆਉ, ਅਸੀਂ 5 ਦੇ ਬਹੁਤ ਨਿਕਟ x ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ f ਦੇ ਮੁੱਲ ਦਾ ਪਰਿਕਲਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। 5 ਦੇ ਬਹੁਤ ਨਿਕਟ ਖੱਬੇ ਵੱਲ ਕੁਝ ਬਿੰਦੂ 4.9, 4.95, 4.99, 4.995. . ., ਆਦਿ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ $f(x)$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਹੇਠਾਂ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਲਿਖੇ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, 5 ਦੇ ਬਹੁਤ ਨਿਕਟ ਹੋਰ ਸੱਜੇ ਵੱਲ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 5.001, 5.01, 5.1 ਵੀ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਵੀ ਫਲਨ ਦੇ ਮੁੱਲ ਸਾਰਣੀ 13.4 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹਨ।

ਸਾਰਣੀ 13.4

x	4.9	4.95	4.99	4.995	5.001	5.01	5.1
$f(x)$	14.9	14.95	14.99	14.995	15.001	15.01	15.1

ਸਾਰਣੀ 13.4 ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਨਿਗਮਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $f(x)$ ਦਾ ਮੁੱਲ 14.995 ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਅਤੇ 15.001 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ, ਇਹ ਕਲਪਨਾ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਕਿ $x = 4.995$ ਅਤੇ 5.001 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਈ ਹੈਰਾਨੀਜਨਕ ਘਟਨਾ ਨਾ ਵਾਪਰੇ। ਇਹ ਕਲਪਨਾ ਕਰਨਾ ਤਰਕਸੰਗੀ ਹੈ ਕਿ 5 ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ $x = 5$ ਤੇ $f(x)$ ਦਾ ਮੁੱਲ 15 ਹੈ ਭਾਵ

$$\lim_{x\to 5^-} f(x)=15$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਜਦੋਂ x, 5 ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਵੱਧਦਾ ਹੈ, f ਦਾ ਮੁੱਲ 15 ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਭਾਵ

$$\lim_{x\to 5^+} f(x)=15$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ f ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ, ਦੋਵੇਂ 15 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5} f(x) = 15$$

ਸੀਮਾ 15 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਫਲਨ ਦੇ ਆਲੇਖ ਜਿਹੜਾ ਚਿੱਤਰ 2.9(ii) ਅਧਿਆਇ 2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੈ, ਨੂੰ ਵੇਖ ਕੇ ਕੁਝ ਬਲ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਧਿਆਨ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ x, 5 ਦੇ ਵੱਲ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੋਂ ਜਾਂ ਖੱਬੇ ਪਾਸੋਂ ਅੱਗੇ ਵਧੇ, ਫਲਨ $f(x) = x + 10$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਬਿੰਦੂ (5, 15) ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = 5$ ਤੇ ਵੀ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਲ 15 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ 2 : ਫਲਨ $f(x) = x^3$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਆਉ ਅਸੀਂ $x = 1$ ਤੇ ਇਸ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਪਹਿਲਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੱਧਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ x ਦੇ 1 ਦੇ ਨਿਕਟਮੁੱਲਾਂ ਲਈ $f(x)$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਇਸਨੂੰ ਸਾਰਣੀ 13.5 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ :

ਸਾਰਣੀ 13.5

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	0.729	0.970299	0.997002999	1.003003001	1.030301	1.331

ਇਸ ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਨਿਗਮਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = 1$ ਤੇ f ਦਾ ਮੁੱਲ 0.997002999 ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਤੇ 1.003003001 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ, ਇਹ ਕਲਪਨਾ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਕਿ $x = 0.999$ ਅਤੇ 1.001 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੁਝ ਹੈਰਾਨੀਜਨਕ ਘਟਨਾ ਨਾ ਵਾਪਰੇ। ਇਹ ਮੰਨਣਾ ਤਰਕਸੰਗਤ ਹੈ ਕਿ $x = 1$ ਦਾ ਮੁੱਲ 1 ਦੇ ਖੱਬੇ ਵੱਲ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ x, 1 ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੋਂ ਵੱਧਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ f ਦਾ ਮੁੱਲ 1 ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਭਾਵ

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$$

ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਪੱਕਾ ਹੈ ਕਿ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੋਵੇਂ 1 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

ਸੀਮਾ 1 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਦਾ ਨਤੀਜਾ ਫਲਨ ਦੇ ਆਲੇਖ ਜਿਹੜਾ ਚਿੱਤਰ 2.11 ਅਧਿਆਇ 2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਨੂੰ ਵੇਖ ਕੇ ਥੋੜ੍ਹਾ ਬਲ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਧਿਆਨ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ x, 1 ਦੇ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੋ ਜਾਂ ਖੱਬੇ ਪਾਸੋਂ ਵੱਧਦਾ ਹੈ, ਫਲਨ $f(x) = x^3$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਬਿੰਦੂ (1, 1) ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਦੁਬਾਰਾ ਅਵਲੋਕਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = 1$ ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੀ 1 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ 3 : ਫਲਨ $f(x) = 3x$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਆਉ $x = 2$ ਤੇ ਇਸ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ 13.6 ਆਪ ਹੀ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ :

ਸਾਰਣੀ 13.6

x	1.9	1.95	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	5.7	5.85	5.97	5.997	6.003	6.03	6.3

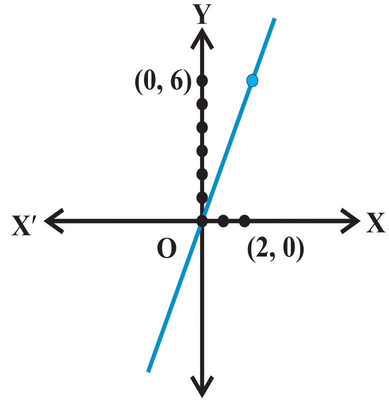
ਪਹਿਲਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਅਵਲੋਕਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ x ਜਾਂ ਤਾਂ ਖੱਬੇ ਪਾਸੋਂ ਜਾਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੋਂ 2 ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਹੈ, $f(x)$ ਦਾ ਮੁੱਲ 6 ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਪ੍ਰਤੀਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ :

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = 6$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਚਿੱਤਰ 13.4 ਵਿੱਚ ਵਿਖਾਇਆ ਇਸ ਦਾ ਆਲੇਖ ਇਸ ਤੱਥ ਨੂੰ ਬਲ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਦੁਬਾਰਾ ਅਸੀਂ ਧਿਆਨ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = 2$ ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਲ $x = 2$ ਤੇ ਸੀਮਾ ਦੇ ਸੰਪਾਤੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 13.4

ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ 4 : ਅਚੱਲ ਫਲਨ $f(x) = 3$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਆਉ ਅਸੀਂ $x = 2$ ਤੇ ਇਸਦੀ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਫਲਨ ਅਚਲ ਫਲਨ ਹੋਣ ਕਾਰਣ ਹਰੇਕ ਜਗ੍ਹਾ ਇੱਕ ਮੁੱਲ (ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ 3) ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ 2 ਦੇ ਕਾਫ਼ੀ ਨਿਕਟ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਲਈ ਇਸਦਾ ਮੁੱਲ 3 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = 3$$

$f(x) = 3$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਹਰੇਕ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ (0, 3) ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ x–ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾ ਹੈ ਅਤੇ ਚਿੱਤਰ 2.9 ਅਧਿਆਇ 2 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਹ ਵੀ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸੀਮਾ 3 ਹੈ। ਤੱਥ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵੀ, ਇਹ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਦਿਸਦਾ ਹੈ ਕਿ $\lim_{x\to a} f(x) = 3$ ਹੈ ਭਾਵੇਂ a ਕੋਈ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇ।

ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ 5 : ਫਲਨ $f(x) = x^2 + x$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਅਸੀਂ $\lim_{x\to 1} f(x)$ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ $x = 1$ ਦੇ ਨਿਕਟ $f(x)$ ਨੂੰ ਮੁੱਲ ਸਾਰਣੀ 13.7 ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

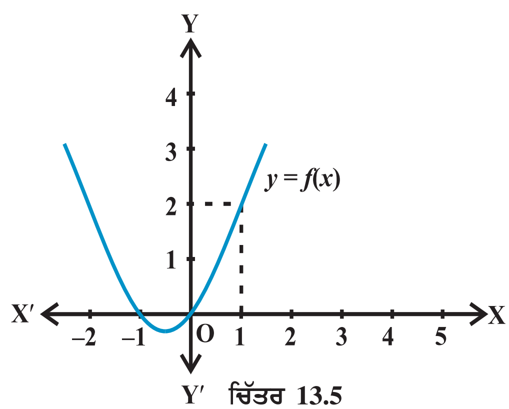
ਸਾਰਣੀ 13.7

x	0.9	0.99	0.999	1.01	1.1	1.2
$f(x)$	1.71	1.9701	1.997001	2.0301	2.31	2.64

ਇਸ ਤੋਂ ਇਹ ਤਰਕਸੰਗਤ ਨਿਗਮਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

ਚਿੱਤਰ 13.5 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ $f(x) = x^2 + x$ ਦੇ ਆਲੇਖ ਤੋਂ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ x, 1 ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਹੈ ਆਲੇਖ (1, 2) ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 13.5

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਦੁਬਾਰਾ ਪ੍ਰੇਖਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

ਹੁਣ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਿੰਨ ਤੱਥਾਂ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਆਪ ਸਵੀਕਾਰ ਕਰਵਾਓ

$$\lim_{x\to 1} x^2 = 1, \quad \lim_{x\to 1} x = 1 \text{ and } \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

ਤਾਂ $$\lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} x = 1 + 1 = 2 = \lim_{x\to 1}\left[x^2 + x\right]$$

ਅਤੇ $$\lim_{x\to 1} x . \lim_{x\to 1}(x+1) = 1.2 = 2 = \lim_{x\to 1}\left[x(x+1)\right] = \lim_{x\to 1}\left[x^2 + x\right]$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ 6 : ਫਲਨ $f(x) = \sin x$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਸਾਡੀ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x$ ਵਿੱਚ ਰੁਚੀ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਕੋਣ ਰੇਡੀਅਨ ਵਿੱਚ ਮਾਪਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇੱਥੇ, ਅਸੀਂ $\frac{\pi}{2}$ ਦੇ ਨਿਕਟ $f(x)$ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਨਿਗਮਨ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

ਸਾਰਣੀ 13.8

x	$\frac{\pi}{2}-0.1$	$\frac{\pi}{2}-0.01$	$\frac{\pi}{2}+0.01$	$\frac{\pi}{2}+0.1$
$f(x)$	0.9950	0.9999	0.9999	0.9950

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = 1$$

ਹੋਰ ਅੱਗੇ, ਇਹ $f(x) = \sin x$ ਦੇ ਅਲੇਖ ਤੋਂ ਪੁਸ਼ਟੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਚਿੱਤਰ 3.8 (ਅਧਿਆਇ 3) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਵੀ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$ ਹੈ।

ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ 7 : ਫਲਨ $f(x) = x + \cos x$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਅਸੀਂ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ 0 ਦੇ ਨਿਕਟ $f(x)$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਲਿਖੇ ਹਨ (ਸਾਰਣੀ 13.9)।

ਸਾਰਣੀ 13.9

x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	0.9850	0.98995	0.9989995	1.0009995	1.00995	1.0950

ਸਾਰਣੀ 13.9 ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਨਿਗਮਨ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਵੀ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$

ਹੁਣ, ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੇ ਆਪ ਨੂੰ ਸਵੀਕਾਰ ਕਰਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ

$\lim\limits_{x \to 0}[x + \cos x] = \lim\limits_{x \to 0} x + \lim\limits_{x \to 0} \cos x$ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਸੱਚ ਹੈ ?

ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ 8 : $x > 0$ ਦੇ ਲਈ, ਫਲਨ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਅਸੀਂ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ। ਇੱਥੇ, ਅਸੀਂ ਅਵਲੋਕਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਫਲਨ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਸਾਰੇ ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ $f(x)$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ, x ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਖੱਬੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਹੈ, ਦਾ ਕੋਈ ਅਰਥ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਅਸੀਂ 0 ਦੇ ਨਿਕਟ x ਦੇ ਧਨਾਤਮਕ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ (ਇਸ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ n ਕਿਸੇ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।)

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ 13.10 ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਦੋਂ x, 0 ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਹੈ, $f(x)$ ਵੱਡਾ ਹੋਰ ਵੱਡਾ ਹੁੰਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ $f(x)$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੀ ਸੰਖਿਆ ਤੋਂ ਵੀ ਵੱਡਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਸਾਰਣੀ 13.10

x	1	0.1	0.01	10^{-n}
$f(x)$	1	100	10000	10^{2n}

ਗਣਿਤਿਕ ਰੂਪ ਤੋਂ, ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

ਅਸੀਂ ਟਿੱਪਣੀ ਵੀ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਪਾਠਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ।

ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ 9 : ਅਸੀਂ $\lim_{x \to 0} f(x)$ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਜਿੱਥੇ

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & x<0 \\ 0 \quad , & x=0 \\ x+2, & x>0 \end{cases}$$

ਪਹਿਲਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ 0 ਦੇ ਨਿਕਟ x ਦੇ ਲਈ $f(x)$ ਦੀ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਨਿਰੀਖਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ x ਦੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ $x - 2$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਕੱਢਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ ਅਤੇ x ਦੇ ਧਨਾਤਮਕ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ $x + 2$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਕੱਢਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 13.11

x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	– 2.1	– 2.01	– 2.001	2.001	2.01	2.1

ਸਾਰਣੀ 13.11 ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਤਿੰਨ ਅੰਦਰਾਜਾਂ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਨਿਗਮਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਲ –2 ਤੱਕ ਘੱਟ ਰਿਹਾ ਹੈ ਅਤੇ

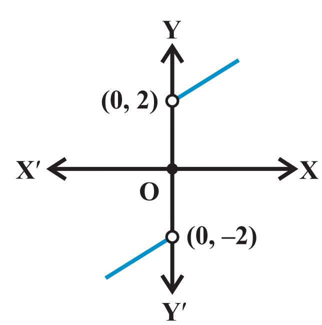
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -2$$

ਸਾਰਣੀ ਦੀ ਅੰਤਿਮ ਤਿੰਨ ਅੰਦਰਾਜਾਂ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਨਿਗਮਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਲ 2 ਤੱਕ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$$

ਕਿਉਂਕਿ 0 ਤੇ ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸਿਆਂ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 0 ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਆਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 13.6 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਟਿੱਪਣੀ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸਲ ਵਿੱਚ 0 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਪਰੰਤੂ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 13.6

ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ 10 : ਇੱਕ ਅੰਤਿਮ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ $\lim_{x \to 1} f(x)$ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਕਿ

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

ਸਾਰਣੀ 13.12

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	2.9	2.99	2.999	3.001	3.01	3.1

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਪਹਿਲਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ 1 ਦੇ ਨਿਕਟ x ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ $f(x)$ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। 1 ਤੋਂ ਘੱਟ x ਦੇ ਲਈ $f(x)$ ਵਿੱਚ ਮੁੱਲਾਂ ਤੋਂ ਇਹ ਪ੍ਰਤੀਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $x = 1$ ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਲ 3 ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਭਾਵ

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3$$

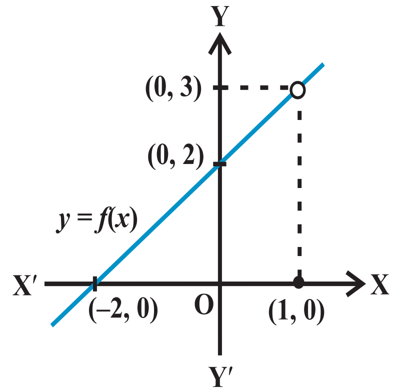
ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, 1 ਤੋਂ ਵੱਡੇ x ਦੇ ਲਈ $f(x)$ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਤੋਂ ਅਪੇਕਸ਼ਿਤ $f(x)$ ਦਾ ਮੁੱਲ 3 ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਭਾਵ

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$$

ਪਰੰਤੂ ਉਸ ਵੇਲੇ ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

ਚਿੱਤਰ 13.7 ਵਿੱਚ ਫਲਨ ਦਾ ਆਲੇਖ ਸੀਮਾ ਦੇ ਬਾਰੇ ਸਾਡੇ ਨਿਗਮਨ ਨੂੰ ਬਲ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ, ਅਸੀਂ ਧਿਆਨ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵਿਆਪਕ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਸੀਮਾ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। (ਭਾਵੇਂ ਦੋਵੇਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋਣ)।



ਚਿੱਤਰ 13.7

13.3.1 ਸੀਮਾਵਾਂ ਦਾ ਬੀਜਗਣਿਤ (Algebra of limits) ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤਾਂ ਤੋਂ, ਅਸੀਂ ਅਵਲੋਕਨ ਕੀਤਾ ਹੈ ਕਿ ਸੀਮਾ ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਜੋੜ, ਘਟਾਵ, ਗੁਣਾ ਅਤੇ ਭਾਗ ਦੀ ਪਾਲਣਾ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਜਦ ਤੱਕ ਕਿ ਸੋਚਿਆ ਹੋਇਆ ਫਲਨ ਅਤੇ ਸੀਮਾਵਾਂ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋਣ। ਇਹ ਸੰਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਬਿਨਾਂ ਸਬੂਤ ਦੇ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਉਪਚਾਰਿਕ ਰੂਪ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ :

ਪ੍ਰਮੇਯ 1 : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f ਅਤੇ g ਦੋ ਫਲਨ ਇਹੋ-ਜਿਹੇ ਹਨ ਕਿ $\lim_{x \to a} f(x)$ ਅਤੇ $\lim_{x \to a} g(x)$ ਦੋਵੇਂ ਹੋਂਦ ਵਿੱਚ ਹਨ, ਤਾਂ

(i) ਦੋਵੇਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੀ ਸੀਮਾ ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ :

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

(ii) ਦੋਵੇਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰ ਦੀ ਸੀਮਾ ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ :

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$

(iii) ਦੋਵੇਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾ ਦੀ ਸੀਮਾ ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ :

$$\lim_{x \to a} [f(x) . g(x)] = \lim_{x \to a} f(x). \lim_{x \to a} g(x)$$

(iv) ਦੋਵੇਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਭਾਗਫਲ ਦੀ ਸੀਮਾ ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦਾ ਭਾਗਫਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

ਟਿੱਪਣੀ : ਖਾਸ ਤੌਰ 'ਤੇ ਸਥਿਤੀ (*iii*) ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਖ਼ਾਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ $g(x)$ ਇੱਕ-ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਅਚੱਲ ਫਲਨ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ λ ਦੇ ਲਈ $g(x) = \lambda$ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

$$\lim_{x \to a} \left[(\lambda.f)(x) \right] = \lambda. \lim_{x \to a} f(x)$$

ਅਗਲੇ ਦੋ ਸੈਕਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ ਦੇਵਾਂਗੇ ਕਿ ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਖ਼ਾਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਕਿਵੇਂ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

13.3.2 ਬਹੁਪਦਾਂ ਅਤੇ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ (Limits of polynomials and rational functions) ਇੱਕ ਫਲਨ $f(x)$ ਨੂੰ ਬਹੁਪਦ ਫਲਨ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ $f(x)$ ਸਿਫ਼ਰ ਫਲਨ ਹੈ ਜਾਂ ਜੇਕਰ $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + . . . + a_nx^n$, ਜਿੱਥੇ $a_i s$ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਕਿ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ n ਦੇ ਲਈ $a_n \neq 0$ ਹਨ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਸੀਂ ਜਾਣੂ ਹਾਂ ਕਿ $\lim_{x \to a} x = a$, ਇਸ ਲਈ

$$\lim_{x \to a} x^2 = \lim_{x \to a} (x.x) = \lim_{x \to a} x . \lim_{x \to a} x = a.\, a = a^2$$

n ਤੇ ਆਗਮਨ ਦਾ ਸਰਲ ਅਭਿਆਸ ਸਾਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n$$

ਹੁਣ, ਮੰਨ ਲਓ $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਫਲਨ $a_0, a_1 x, a_2 x^2, ..., a_n x^n$ ਹਰੇਕ ਨੂੰ ਇੱਕ ਫਲਨ ਜਿਹਾ ਵਿਚਾਰਦੇ ਹੋਏ, ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} \left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \right] \\
&= \lim_{x \to a} a_0 + \lim_{x \to a} a_1 x + \lim_{x \to a} a_2 x^2 + ... + \lim_{x \to a} a_n x^n \\
&= a_0 + a_1 \lim_{x \to a} x + a_2 \lim_{x \to a} x^2 + ... + a_n \lim_{x \to a} x^n \\
&= a_0 + a_1 a + a_2 a^2 + ... + a_n a^n \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

(ਸੁਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਹਰੇਕ ਪਗ ਦਾ ਮਤਲਬ ਸਮਝ ਲਿਆ ਹੈ।)

ਇੱਕ ਫਲਨ f ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, ਹੋਵੇ, ਜਿੱਥੇ $g(x)$ ਅਤੇ $h(x)$ ਬਹੁਪਦ ਹੋਣ ਅਤੇ $h(x) \neq 0$ ਹੈ। ਤਾਂ

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\lim_{x \to a} g(x)}{\lim_{x \to a} h(x)} = \frac{g(a)}{h(a)}$$

ਜਦੋਂ ਕਿ, ਜੇਕਰ $h(a) = 0$, ਦੋ ਸਥਿਤਿਆਂ ਹਨ : (i) ਜਦੋਂ $g(a) \neq 0$ ਅਤੇ (ii) ਅਤੇ $g(a) = 0$ ਪਹਿਲਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸੀਮਾ ਦਾ ਅਸਤਿਤਵ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਬਾਅਦ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ : $g(x) = (x - a)^k g_1(x)$, ਜਿੱਥੇ k, $g(x)$ ਵਿੱਚ $(x - a)$ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਘਾਤ ਹੈ। ਇਸੀ ਪ੍ਰਕਾਰ $h(x) = (x - a)^l h_1(x)$ ਕਿਉਂਕਿ $h(a) = 0$ ਹੁਣ ਜੇਕਰ $k > l$ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim_{x \to a} g(x)}{\lim_{x \to a} h(x)} = \frac{\lim_{x \to a} (x-a)^k g_1(x)}{\lim_{x \to a} (x-a)^l h_1(x)}$$

$$= \frac{\lim_{x \to a} (x-a)^{(k-l)} g_1(x)}{\lim_{x \to a} h_1(x)} = \frac{0.g_1(a)}{h_1(a)} = 0$$

ਜੇਕਰ $k < l$ ਤਾਂ ਸੀਮਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਸੀਮਾਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ : (i) $\lim_{x \to 1} \left[x^3 - x^2 + 1 \right]$ (ii) $\lim_{x \to 3} \left[x(x+1) \right]$

(iii) $\lim_{x \to -1} \left[1 + x + x^2 + ... + x^{10} \right]$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਹੱਲ : ਲੋੜੀਂਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਕੁਝ ਬਹੁਪਦ ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ :

(i) $\lim\limits_{x \to 1} [x^3 - x^2 + 1] = 1^3 - 1^2 + 1 = 1$

(ii) $\lim\limits_{x \to 3}\left[x(x+1)\right] = 3(3+1) = 3(4) = 12$

(iii) $\lim\limits_{x \to -1}\left[1 + x + x^2 + \ldots + x^{10}\right] = 1 + (-1) + (-1)^2 + \ldots + (-1)^{10}$

$$= 1 - 1 + 1 \ldots + 1 = 1$$

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਸੀਮਾਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\lim\limits_{x \to 1}\left[\dfrac{x^2+1}{x+100}\right]$ (ii) $\lim\limits_{x \to 2}\left[\dfrac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4}\right]$

(iii) $\lim\limits_{x \to 2}\left[\dfrac{x^2-4}{x^3-4x^2+4x}\right]$ (iv) $\lim\limits_{x \to 2}\left[\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-5x+6}\right]$

(v) $\lim\limits_{x \to 1}\left[\dfrac{x-2}{x^2-x} - \dfrac{1}{x^3-3x^2+2x}\right]$

ਹੱਲ : ਸਾਰੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦਿੱਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਇਹਨਾਂ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ ਇਹ $\dfrac{0}{0}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ, ਜਿਹੜਾ ਸੀਮਾ ਦੇ $\dfrac{0}{0}$ ਦਾ ਰੂਪ ਹੋਣ ਦੀ ਵਜ੍ਹਾ ਹੈ, ਨੂੰ ਖ਼ਤਮ ਕਰਕੇ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਫ਼ੇਰ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

(i) ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{x^2+1}{x+100} = \dfrac{1^2+1}{1+100} = \dfrac{2}{101}$

(ii) 2 ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ $\dfrac{0}{0}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਲਈ $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to 2}\dfrac{x(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}$

$= \lim\limits_{x \to 2}\dfrac{x(x-2)}{(x+2)}$ ਕਿਉਂਕਿ $x \neq 2$

$= \dfrac{2(2-2)}{2+2} = \dfrac{0}{4} = 0$

(iii) 2 ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ $\dfrac{0}{0}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਸ ਲਈ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-4x^2+4x} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)^2}$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{x(x-2)} = \frac{2+2}{2(2-2)} = \frac{4}{0}$$

ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iv) 2 ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਤੇ, ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ $\dfrac{0}{0}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਲਈ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2(x-2)}{(x-2)(x-3)}$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x^2}{(x-3)} = \frac{(2)^2}{2-3} = \frac{4}{-1} = -4$$

(v) ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਫਲਨ ਨੂੰ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੁਬਾਰਾ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

$$\left[\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{1}{x^3-3x^2+2x}\right] = \left[\frac{x-2}{x(x-1)}-\frac{1}{x(x^2-3x+2)}\right]$$

$$= \left[\frac{x-2}{x(x-1)}-\frac{1}{x(x-1)(x-2)}\right]$$

$$= \left[\frac{x^2-4x+4-1}{x(x-1)(x-2)}\right]$$

$$= \frac{x^2-4x+3}{x(x-1)(x-2)}$$

1 ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ $\dfrac{0}{0}$ ਦੇ ਰੂਪ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਲਈ $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x^2-2}{x^2-x}-\dfrac{1}{x^3-3x^2+2x}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x(x-1)(x-2)}$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-3)(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x(x-2)} = \frac{1-3}{1(1-2)} = 2$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਸੀਂ ਟਿੱਪਣੀ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪਦ $(x - 1)$ ਨੂੰ ਖ਼ਤਮ ਕੀਤਾ ਕਿਉਂਕਿ $x \neq 1$.

ਇੱਕ ਜ਼ਰੂਰੀ ਸੀਮਾ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ, ਜੋ ਕੀ ਅੱਗੇ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਵਿੱਚ ਇਸਤੇਮਾਲ ਹੋਵੇਗੀ, ਹੇਠਾਂ ਇੱਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 2 : ਕਿਸੇ ਧਨ ਪੂਰਣ ਅੰਕ n ਦੇ ਲਈ

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}.$$

ਟਿੱਪਣੀ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਵਿੱਚ ਸੀਮਾ ਦੇ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਪ੍ਰਗਟਾਵ ਸੱਚ ਹੈ ਭਾਵੇਂ n ਕੋਈ ਵੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ a ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : $(x^n - a^n)$ ਨੂੰ $(x - a)$ ਤੋਂ ਭਾਗ ਦੇਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$x^n - a^n = (x - a)\,(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + x\,a^{n-2} + a^{n-1})$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ
$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + x\,a^{n-2} + a^{n-1})$$

$$= a^{n-1} + a\,a^{n-2} + \ldots + a^{n-2}(a) + a^{n-1}$$

$$= a^{n-1} + a^{n-1} + \ldots + a^{n-1} + a^{n-1} \text{ (n terms)}$$

$$= na^{n-1}$$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\lim_{x \to 1} \frac{x^{15} - 1}{x^{10} - 1}$ (ii) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

ਹੱਲ : (i) ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਹੈ :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{15} - 1}{x^{10} - 1} = \lim_{x \to 1} \left[\frac{x^{15} - 1}{x - 1} \div \frac{x^{10} - 1}{x - 1}\right]$$

$$= \lim_{x \to 1} \left[\frac{x^{15} - 1}{x - 1}\right] \div \lim_{x \to 1} \left[\frac{x^{10} - 1}{x - 1}\right]$$

$$= 15\,(1)^{14} \div 10(1)^9 \text{ (ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਮੇਯ ਰਾਹੀਂ)}$$

$$= 15 \div 10 = \frac{3}{2}$$

(ii) $y = 1 + x$, ਜਿਸ ਤੋਂ $y \to 1$ ਜਦੋਂ $x \to 0$ ਤਾਂ

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{y \to 1} \frac{\sqrt{y} - 1}{y - 1}$$

$$= \lim_{y \to 1} \frac{y^{\frac{1}{2}} - 1^{\frac{1}{2}}}{y - 1}$$

$$= \frac{1}{2}(1)^{\frac{1}{2} - 1} \text{ (ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਟਿੱਪਣੀ ਤੋਂ)} = \frac{1}{2}$$

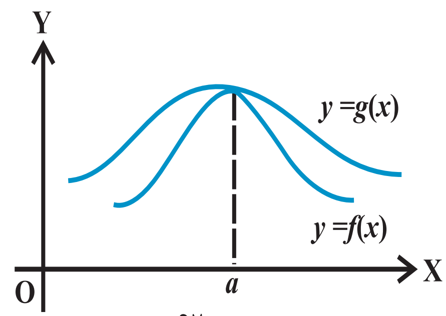
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

13.4 ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ (Limits of Trigonometric Functions)

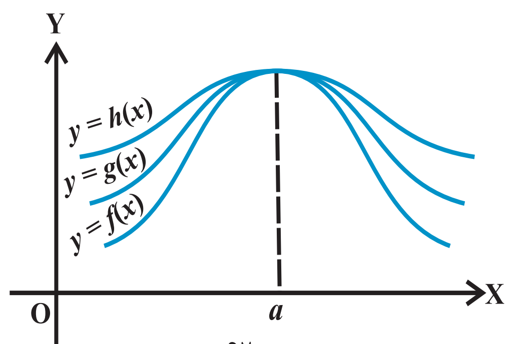
ਵਿਆਪਕ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤੱਥ (ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੇ ਗਏ) ਕੁਝ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦਾ ਪਰਿਕਲਨ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਅਸਾਨ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 3 : ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਾਲੇ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਦੇ ਫਲਨ f ਅਤੇ g ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਹਨ ਕਿ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਸਾਰੇ x ਦੇ ਲਈ $f(x) \le g(x)$ ਹਨ, ਕਿਸੇ a ਦੇ ਲਈ ਜੇਕਰ $\lim_{x\to a} f(x)$ ਅਤੇ $\lim_{x\to a} g(x)$ ਦੋਹਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ $\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$ ਇਸਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 13.8 ਵਿੱਚ ਚਿੱਤਰ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 13.8

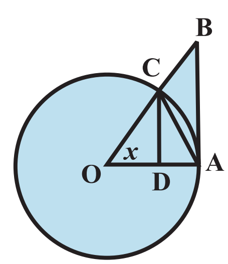
ਪ੍ਰਮੇਯ 4 (ਸੈਂਡਵਿਚ ਪ੍ਰਮੇਯ): ਮੰਨ ਲਉ f, g ਅਤੇ h ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਵਾਲੇ ਫਲਨ ਇਹੋ-ਜਿਹੇ ਹਨ ਕਿ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਸਾਰੇ x ਦੇ ਲਈ $f(x) \le g(x) \le h(x)$ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ a ਦੇ ਲਈ ਜੇਕਰ $\lim_{x\to a} f(x) = l = \lim_{x\to a} h(x)$ ਹੈ ਤਾਂ $\lim_{x\to a} g(x) = l$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 13.9 ਵਿੱਚ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 13.9

ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਜ਼ਰੂਰੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਇੱਕ ਸੁੰਦਰ ਜਿਮਾਇਤੀ ਸਬੂਤ ਹੇਠ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

$0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ ਦੇ ਲਈ $\qquad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$



ਚਿੱਤਰ 13.10

ਸਬੂਤ (*) : ਅਸੀਂ ਜਾਣੂੰ ਹਾਂ ਕਿ $\sin(-x) = -\sin x$ ਅਤੇ $\cos(-x) = \cos x$ ਇਸ ਲਈ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ਦੇ ਲਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 13.10 ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਚੱਕਰ ਦਾ ਕੇਂਦਰ O ਹੈ। ਕੋਣ AOC, x ਰੇਡੀਅਨ ਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ਹੈ। ਰੇਖਾ ਖੰਡ BA ਅਤੇ CD, OA ਦੇ ਲੰਬ ਹਨ। ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ ਵੀ AC ਨੂੰ ਮਿਲਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਤਾਂ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ΔOAC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ < ਚੱਕਰ ਖੰਡ OAC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ < ΔOAB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

ਭਾਵ, $\frac{1}{2}OA.CD < \frac{x}{2\pi}.\pi.(OA)^2 < \frac{1}{2}OA.AB$

ਭਾਵ, $CD < x \,.\, OA < AB$

Δ OCD ਵਿੱਚ,

$\sin x = \frac{CD}{OA}$ (ਕਿਉਂਕਿ OC = OA) ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ CD = OA $\sin x$ ਇਸਦੇ ਇਲਾਵਾ $\tan x = \frac{AB}{OA}$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ AB = OA $\tan x$ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$OA \sin x < OA.\ x < OA.\ \tan x$$

ਕਿਉਂਕਿ ਲੰਬਾਈ OA ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ

$$\sin x < x < \tan x$$

ਕਿਉਂਕਿ $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\sin x$ ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $\sin x$ ਤੋਂ ਸਾਰੇ ਨੂੰ ਭਾਗ ਦੇਣ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$ ਸਾਰੇ ਦਾ ਉਲਟ ਕਰਨ ਤੇ, ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$ ਸਬੂਤ ਪੂਰਨ ਹੋਇਆ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 5 : ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਦੋ ਜ਼ਰੂਰੀ ਸੀਮਾਵਾਂ ਹਨ :

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$

ਸਬੂਤ : (i) (*) ਵਿੱਚ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਫਲਨ $\frac{\sin x}{x}$, ਫਲਨ $\cos x$ ਅਤੇ ਅੱਚਲ ਫਲਨ ਜਿਸਦਾ ਮੁੱਲ 1 ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸਥਿਤ ਹੈ।

ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਕਿਉਂਕਿ $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪ੍ਰਮੇਯ (i) ਦਾ ਸਬੂਤ ਸੈਂਡਵਿਚ ਪ੍ਰਮੇਯ ਤੋਂ ਪੂਰਣ ਹਨ।

(ii) ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਸਰਬਸਮਤਾ $1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ,

ਤਾਂ $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 1.0 = 0$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਵਲੋਕਨ ਕਰੋ ਕਿ ਅਸੀਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇਸ ਤੱਥ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ ਹੈ ਕਿ $x \to 0$, $\frac{x}{2} \to 0$ ਦੇ ਤੁਲ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ $y = \frac{x}{2}$ ਰੱਖ ਕੇ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ : (i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 2x}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

ਹੱਲ : (i)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 4x}{4x}.\frac{2x}{\sin 2x}.2\right]$$

$$= 2.\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 4x}{4x}\right]\div\left[\frac{\sin 2x}{2x}\right]$$

$$= 2.\lim_{4x\to 0}\left[\frac{\sin 4x}{4x}\right]\div\lim_{2x\to 0}\left[\frac{\sin 2x}{2x}\right]$$

= 2.1.1 = 2 (ਜਦੋਂ $x \to 0$, $4x \to 0$ ਅਤੇ $2x \to 0$)

(ii) ਸਾਡੇ ਕੋਲ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1.1 = 1$

ਇੱਕ ਸਮੁੱਲ ਨਿਯਮ, ਜਿਸਨੂੰ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਕੱਢਦੇ ਸਮੇਂ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ, ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆ ਹੈ :

ਮੰਨਿਆ ਕੀ ਸੀਮਾ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਇਸਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ। ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ $f(a)$ ਅਤੇ $g(a)$ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਜਾਂਚਾਗੇ। ਜੇਕਰ ਦੋਵੇਂ ਸਿਫ਼ਰ ਹਨ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਉਸ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਸਮਾਪਤ ਹੋਣ ਦਾ ਕਾਰਣ ਹੈ, ਭਾਵ ਵੇਖੋ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ $f(x) = f_1(x) f_2(x)$ ਲਿਖ ਸਕੀਏ ਜਿਸ ਤੋਂ $f_1(a) = 0$ ਅਤੇ $f_2(a) \neq 0$. ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $g(x) = g_1(x)\ g_2(x)$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਜਿੱਥੇ $g_1(a) = 0$ ਅਤੇ $g_2(a) \neq 0$। $f(x)$ ਅਤੇ $g(x)$ ਵਿੱਚ ਤੋਂ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ (ਜੇਕਰ ਸੰਭਵ ਹੈ) ਤਾਂ ਖਤਮ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(x)}{q(x)}$$, ਜਿੱਥੇ $q(x) \neq 0$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :

ਤਾਂ
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$$

ਅਭਿਆਸ 13.1

ਅਭਿਆਸ 1 ਤੋਂ 22 ਤੱਕ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ :

1. $\lim\limits_{x\to 3} x+3$ **2.** $\lim\limits_{x\to\pi}\left(x-\frac{22}{7}\right)$ **3.** $\lim\limits_{r\to 1}\pi r^2$

4. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{4x+3}{x-2}$ **5.** $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^{10}+x^5+1}{x-1}$ **6.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+1)^5-1}{x}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

7. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4}$

8. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^4 - 81}{2x^2 - 5x - 3}$

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ax + b}{cx + 1}$

10. $\lim\limits_{z\to 1} \dfrac{z^{\frac{1}{3}} - 1}{z^{\frac{1}{6}} - 1}$

11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{ax^2 + bx + c}{cx^2 + bx + a}, a + b + c \neq 0$

12. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}}{x + 2}$

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{bx}$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}, a, b \neq 0$

15. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin(\pi - x)}{\pi(\pi - x)}$

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{\pi - x}$

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - 1}{\cos x - 1}$

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ax + x\cos x}{b\sin x}$

19. $\lim\limits_{x\to 0} x\sec x$

20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax + bx}{ax + \sin bx} a, b, a + b \neq 0$

21. $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{cosec} x - \cot x)$

22. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan 2x}{x - \frac{\pi}{2}}$

23. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ਅਤੇ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 0 \\ 3(x + 1), & x > 0 \end{cases}$ ਹੈ।

24. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1 \\ -x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$ ਹੈ।

25. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ਹੈ।

26. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ਹੈ।

27. $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ $f(x) = |x| - 5$ ਹੈ।

28. ਮੰਨ ਲਉ $f(x) = \begin{cases} a + bx, & x < 1 \\ 4, & x = 1 \\ b - ax, & x > 1 \end{cases}$

ਅਤੇ ਜੇਕਰ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$ ਤਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਸੰਭਵ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹਨ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

29. ਮੰਨ ਲਓ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ਅਚੱਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ ਇੱਕ ਫਲਨ
$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$ ਤੋਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

$\lim_{x \to a_1} f(x)$ ਕੀ ਹੈ ? ਕਿਸੇ $a \neq a_1, a_2, \ldots, a_n$, ਦੇ ਲਈ $\lim_{x \to a} f(x)$ ਦਾ ਪਰਿਕਲਨ ਕਰੋ।

30. ਜੇਕਰ $f(x) = \begin{cases} |x| + 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ |x| - 1, & x > 0 \end{cases}$ ਹੈ।

ਤਾਂ a ਦੇ ਕਿਹੜੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ $\lim_{x \to a} f(x)$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ?

31. ਜੇਕਰ ਫਲਨ $f(x)$, $\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x) - 2}{x^2 - 1} = \pi$, ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ $\lim_{x \to 1} f(x)$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ।

32. ਕਿਹਨਾਂ ਪੂਰਨ ਅੰਕਾਂ m ਅਤੇ n ਦੇ ਲਈ $\lim_{x \to 0} f(x)$ ਅਤੇ $\lim_{x \to 1} f(x)$ ਦੋਹਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ

ਜੇਕਰ $f(x) = \begin{cases} mx^2 + n, & x < 0 \\ nx + m, & 0 \le x \le 1 \\ nx^3 + m, & x > 1 \end{cases}$

13.5 ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ (Derivatives)

ਅਸੀਂ ਅਨੁਛੇਦ 13.2 ਵਿੱਚ ਵੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਤੇ ਪਿੰਡ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਜਾਣ ਕੇ ਉਸ ਦਰ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਸੰਭਵ ਹੈ ਜਿਸ ਤੋਂ ਪਿੰਡ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਬਦਲ ਰਹੀ ਹੈ। ਸਮੇਂ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪਲਾਂ ਤੇ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਪ੍ਰਾਚਲ (parameter) ਦਾ ਜਾਣਨਾ ਅਤੇ ਉਸ ਦਰ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਨਾ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਵ ਹੋ ਰਹੇ ਹਨ, ਬਹੁਤ ਦਿਲਚਸਪੀ ਦਾ ਵਿਸ਼ਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਜ਼ਿੰਦਗੀ ਦੀ ਅਨੇਕ ਸਥਿਤੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਇਹੋ-ਜਿਹੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਇੱਕ ਟੈਂਕੀ ਦੇ ਰੱਖ-ਰਖਾਵ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਇਨਸਾਨ ਦੇ ਲਈ ਸਮੇਂ ਦੇ ਕਈ ਪਲਾਂ ਤੇ ਪਾਣੀ ਦੀ ਡੂੰਘਾਈ ਜਾਣ ਕੇ ਇਹ ਜਾਨਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਟੈਂਕੀ ਕਦੋਂ ਛਲਕੇਗੀ, ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸਮਾਂ ਤੇ ਰਾਕੇਟ ਦੀ ਉਚਾਈ ਜਾਣ ਕੇ ਰਾਕੇਟ ਵਿਗਿਆਨੀ ਨੂੰ ਅਸਲ ਵੇਗ ਦੇ ਪਰਿਕਲਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਜਿਸ ਤੋਂ ਉਪਗ੍ਰਹਿ ਦਾ ਰਾਕੇਟ ਤੋਂ ਪਰਖੇਪਣ ਜ਼ਰੂਰ ਹੋਵੇ। ਵਿੱਤੀ ਸੰਸਥਾਨਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਸਟਾਕ ਦੇ ਵਰਤਮੁੱਲ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਜਾਣ ਕੇ ਇਸਦੇ ਮੁਲਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਕਰਨੀ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਅਤੇ ਇਹੋ-ਜਿਹੀ ਕਈ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਇਹ ਜਾਣਨਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਚਲ ਵਿੱਚ ਦੂਜੇ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਾਚਲ ਦੇ ਬਾਬਤ ਬਦਲਾਵ ਕਿਵੇਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ? ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਇਸ ਵਿਸ਼ੇ ਦਾ ਮੁੱਖ ਉਦੇਸ਼ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1 ਮੰਨ ਲਓ f ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ a ਹੈ। a ਤੇ f ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ਤੋਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਬਸ਼ਰਤੇ ਕਿ ਇਸ ਸੀਮਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੋਵੇ। a ਤੇ $f(x)$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $f'(a)$ ਤੋਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦੇਵੋ ਕਿ $f'(a)$, a ਅਤੇ x ਦੇ ਬਾਬਤ ਬਦਲਾਵ ਦਾ ਪਰਿਮਾਣ ਦੱਸਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : $x = 2$ ਤੇ ਫਲਨ $f(x) = 3x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(2+h) - 3(2)}{h}$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6+3h-6}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h \to 0} 3 = 3$$

ਇਸ ਲਈ $x = 2$ ਤੇ ਫਲਨ $3x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ 3 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : $x = -1$ ਤੇ ਫਲਨ $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇਹ ਵੀ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f'(0) + 3f'(-1) = 0$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ $x = 0$ ਅਤੇ $x = -1$ ਤੇ $f(x)$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[2(-1+h)^2 + 3(-1+h) - 5\right] - \left[2(-1)^2 + 3(-1) - 5\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h^2 - h}{h} = \lim_{h \to 0} (2h - 1) = 2(0) - 1 = -1$$

ਅਤੇ

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[2(0+h)^2 + 3(0+h) - 5\right] - \left[2(0)^2 + 3(0) - 5\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h^2 + 3h}{h} = \lim_{h \to 0} (2h + 3) = 2(0) + 3 = 3$$

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ $f'(0) + 3f'(-1) = 0$ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਨਿਯਮਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵਕਾਰੀ ਇਸਤੇਮਾਲ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਇਸਨੂੰ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ :

ਉਦਾਹਰਣ 7 : $x = 0$ ਤੇ $\sin x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $f(x) = \sin x$ ਹੈ, ਤਾਂ

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(0+h) - \sin(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

ਉਦਾਹਰਣ 8 : $x = 0$ ਅਤੇ $x = 3$ 'ਤੇ ਫਲਨ $f(x) = 3$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਫਲਨ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਵ ਨੂੰ ਮਾਪਦਾ ਹੈ, ਸਹਿਜ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਅੱਚਲ ਫਲਨ ਦਾ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪਰਿਕਲਨ ਤੋਂ ਬਲ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

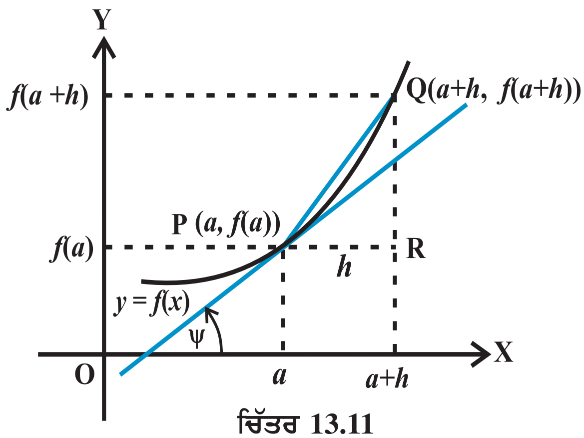
$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3-3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3-3}{h} = 0$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਜਿਮਾਇਤੀ ਵਿਆਖਿਆ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਮੰਨ ਲਉ $y = f(x)$ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਇਸ ਫਲਨ ਦੇ ਆਲੇਖ ਤੇ $P = (a, f(a))$ ਅਤੇ $Q = (a + h, f(a + h))$ ਦੋ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨੇੜੇ ਦੇ ਬਿੰਦੂ ਹਨ। ਚਿੱਤਰ 13.11 ਹੁਣ ਆਪ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 13.11

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

ਤ੍ਰਿਭੁਜ PQR ਤੋਂ ਸਪਸ਼ੱਟ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਅਨੁਪਾਤ ਜਿਸਦੀ ਸੀਮਾ ਅਸੀਂ ਲੈ ਰਹੇ ਹਾਂ, ਅਸਲ ਵਿੱਚ tan(QPR) ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਜੀਵਾ PQ ਦੀ ਫਲਨ ਹੈ। ਸੀਮਾ ਲੈਣ ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਵਿੱਚ, ਜਦੋਂ h, 0 ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਬਿੰਦੂ Q, P ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{Q \to P} \frac{QR}{PR}$$

ਇਹ ਇਸ ਤੱਥ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਕਿ ਜੀਵਾ PQ ਵਕਰ $y = f(x)$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ P ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$f'(a) = \tan \psi$$

ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ f ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਇੱਕ ਨਵੇਂ ਫਲਨ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਫਲਨ f ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਰਸਮੀ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2 ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਵਾਲਾ ਫਲਨ ਹੈ ਤਾਂ :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ਤੋਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ, ਜਿੱਥੇ ਕਿਤੇ ਸੀਮਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ, ਨੂੰ x ਤੇ f ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $f'(x)$ ਤੋਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਇਸ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਸਿਧਾਂਤ ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ, $f'(x)$ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਉਹੀ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਕਿਤੇ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਸੀਮਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ। ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸੰਕੇਤ ਲਿਪੀ ਹਨ। ਕਦੇ-ਕਦੇ $f'(x)$ ਨੂੰ $\frac{d}{dx}(f(x))$ ਤੋਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ $y = f(x)$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਹ $\frac{dy}{dx}$ ਤੋਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ y ਜਾਂ $f(x)$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ D $(f(x))$ ਤੋਂ ਵੀ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ $x = a$ ਤੇ f ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਨੂੰ $\left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_a$ ਜਾਂ $\left.\frac{df}{dx}\right|_a$ ਜਾਂ $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}$ ਤੋਂ ਵੀ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : $f(x) = 10x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

$$= \lim_{h \to 0} \frac{10(x+h)-10(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{10h}{h} = \lim_{h \to 0} (10) = 10$$

ਉਦਾਹਰਣ 10 : $f(x) = x^2$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2-(x)^2}{h} = \lim_{h \to 0} (h+2x) = 2x$$

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਇੱਕ ਅਚੱਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ a ਦੇ ਲਈ, ਅਚੱਲ ਫਲਨ $f(x) = a$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a-a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0 \text{ ਕਿਉਂਕਿ } h \neq 0$$

ਉਦਾਹਰਣ 12 : $f(x) = \frac{1}{x}$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{-h}{x(x+h)}\right] = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

13.5.1 ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਾ ਬੀਜਗਣਿਤ (Algebra of derivatives of functions) ਕਿਉਂਕਿ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਅਸਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਸੀਮਾ ਜ਼ਰੂਰ ਹੀ ਸਿੱਧੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੇ ਨਿਯਮਾਂ ਦੇ ਨੇੜੇ ਤੋਂ ਸੀਮਾ ਦੇ ਨਿਯਮਾਂ ਦੇ ਅਨੁਗਮਨ ਦੀ ਆਸ਼ਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ ਵਿੱਚ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ :

ਪ੍ਰਮੇਯ 5 : ਮੰਨ ਲਉ f ਅਤੇ g ਦੋ ਇਹੋ-ਜਿਹੇ ਫਲਨ ਹਨ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ, ਤਾਂ

(i) ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਉਹਨਾਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ।

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

(ii) ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਉਹਨਾਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ ਹੈ।

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)-g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x).$$

(iii) ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ (Product rule) ਤੋਂ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\,.\,g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x).g(x)+f(x).\frac{d}{dx}g(x)$$

(iv) ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਭਾਗਫਲ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਭਾਗਫਲ ਨਿਯਮ (quotient rule) ਤੋਂ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। (ਜਿੱਥੇ ਹਰ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹੈ)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\frac{d}{dx}f(x).g(x)-f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਸਬੂਤ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦੀ ਤੁਲ ਰੂਪ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ ਤੋਂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਰੂਪ ਤੋਂ ਮਿਲ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇੱਥੇ ਸਿੱਧ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ। ਸੀਮਾਵਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਖਾਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਾ ਕਿਵੇਂ ਪਰਿਕਲਨ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਅੰਤਿਮ ਦੋ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਢੰਗ ਤੋਂ ਦੁਬਾਰਾ ਕਿਹਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਤੋਂ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਅਸਾਨੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ $u = f(x)$ and $v = g(x)$ ਹੈ ਤਾਂ,

$$(uv)' = u'v+uv'$$

ਇਹ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੇ ਲਈ Leibnitz ਨਿਯਮ ਜਾਂ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ ਦਾ ਉਲੇਖ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਭਾਗਫਲ ਨਿਯਮ ਹੈ।

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

ਹੁਣ, ਆਉ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਮਾਨਕ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵਾਂ ਨੂੰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਵੇਖਣਾ ਸਰਲ ਹੈ ਕਿ ਫਲਨ $f(x) = x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਅਚੱਲ ਫਲਨ 1 ਹੈ। ਇਹ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}1=1$$

ਅਸੀਂ ਇਸਦਾ ਅਤੇ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ $f(x) = 10x = x + x + ... + x$ (10 ਪਦ)
(ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ (*i*) ਤੋਂ) ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੇ ਪਰਿਕਲਨ ਵਿੱਚ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(x+x+...+x) \text{ (10 ਪਦ)}$$

$$= \frac{d}{dx}x+...+\frac{d}{dx}x \text{ (10 ਪਦ)}$$

$$= 1+1+...+1 \text{ (10 ਪਦ)} = 10$$

ਅਸੀਂ ਧਿਆਨ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਸੀਮਾ ਦਾ ਮੁੱਲ ਗੁਣਾ ਸੂਤਰ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ, $f(x) = 10x = uv$, ਜਿੱਥੇ u ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਜਿੱਥੇ u ਹਰੇਕ ਜਗ੍ਹਾ ਮੁੱਲ 10 ਲੈ ਕੇ ਅਚੱਲ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ $v(x) = x$ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ u ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ 0 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਨਾਲ ਹੀ $v(x) = x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ 1 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

$$f'(x) = (10x)' = (uv)' = u'v+uv' = 0.x+10.1=10$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਸੇ ਅਧਾਰ ਤੇ $f(x) = x^2$ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ $f(x) = x^2 = x\,.x$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(x.x) = \frac{d}{dx}(x).x + x.\frac{d}{dx}(x)$$

$$= 1.x + x.1 = 2x$$

ਇਸ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਮੇਯ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ :

ਪ੍ਰਮੇਯ 6 : ਕਿਸੇ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਅੰਕ n ਦੇ ਲਈ $f(x) = x^n$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ nx^{n-1} ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਫਲਨ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਕਹਿੰਦਾ ਹੈ

$(x + h)^n = \left({}^nC_0\right)x^n + \left({}^nC_1\right)x^{n-1}h + ... + \left({}^nC_n\right)h^n$ ਅਤੇ $(x + h)^n - x^n = h(nx^{n-1} + ... + h^{n-1})$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h\left(nx^{n-1} + ... + h^{n-1}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1} + ... + h^{n-1}\right) = nx^{n-1}$$

ਵੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ n ਤੇ ਆਗਮਨ ਅਤੇ ਗੁਣਾ ਸੂਤਰ ਤੋਂ ਵੀ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ : $n = 1$ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਪਹਿਲਾਂ ਵਿਖਾਇਆ ਜਾ ਚੁੱਕਿਆ ਹੈ :

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(x.x^{n-1}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(x).\left(x^{n-1}\right) + x.\frac{d}{dx}\left(x^{n-1}\right) \text{ (ਗੁਣਾ ਸੂਤਰ ਤੋਂ)}$$

$$= 1.x^{n-1} + x.\left((n-1)x^{n-2}\right) \text{ (ਆਗਮਨ ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਤੋਂ)}$$

$$= x^{n-1} + (n-1)x^{n-1} = nx^{n-1}$$

ਟਿੱਪਣੀ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਪ੍ਰਮੇਯ x, ਦੀ ਸਾਰੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ ਭਾਵ n ਕੋਈ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। (ਪਰੰਤੂ ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਇੱਥੇ ਸਿੱਧ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ।)

13.5.2 *ਬਹੁਪਦਾਂ ਅਤੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ (Derivatives of polynomials and trigonometric functions)*

ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਮੇਯ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਾਂਗੇ ਜੋ ਸਾਨੂੰ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੱਸਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 7 : ਮੰਨ ਲਉ $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $a_i\,s$ ਸਾਰੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $a_n \neq 0$ ਤਾਂ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਫਲਨ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

$$\frac{df(x)}{dx} = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{x-2} + ... + 2a_2 x + a_1$$

ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਸਬੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ 5 ਅਤੇ 6 ਦੇ ਭਾਗ (i) ਨੂੰ ਸਾਤਰ ਨਾਲ ਰੱਖਣ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 13 : $6x^{100} - x^{55} + x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਸਿੱਧਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਫਲਨ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $600x^{99} - 55x^{54} + 1$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 14 : $x = 1$ ਤੇ $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{50}$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਪ੍ਰਮੇਯ 6 ਦਾ ਸਿੱਧਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + 50x^{49}$ ਹੈ। $x = 1$ ਤੇ ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਲ $1 + 2(1) + 3(1)^2 + \ldots + 50(1)^{49} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 50 = \dfrac{(50)(51)}{2} = 1275$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 15 : $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇਹ ਫਲਨ $x = 0$ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਹਰੇਕ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ $u = x + 1$ ਅਤੇ $v = x$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਭਾਗਫਲ ਨਿਯਮ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। $u' = 1$ ਅਤੇ $v' = 1$ ਇਸ ਲਈ

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{1(x)-(x+1)1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

ਉਦਾਹਰਣ 16 : $\sin x$ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਾ ਪਰਿਕਲਨ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਲ ਲਉ $f(x) = \sin x$ ਹੈ, ਤਾਂ

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} \quad \text{(sin A – sin B ਦੇ ਸੂਤਰ ਰਾਹੀਂ)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x.1 = \cos x$$

ਉਦਾਹਰਣ 17 : $\tan x$ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਾ ਪਰਿਕਲਨ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $f(x) = \tan x$ ਹੈ, ਤਾਂ

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin(x+h)\cos x - \cos(x+h)\sin x}{h\cos(x+h)\cos x}\right]$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h-x)}{h\cos(x+h)\cos x}$$ (sin (A + B) ਦੇ ਸੂਤਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ)

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} . \lim_{h \to 0} \frac{1}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$= 1 . \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

ਉਦਾਹਰਣ 18 : $f(x) = \sin^2 x$ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਾ ਪਰਿਕਲਨ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਇਸਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ Leibnitz ਗੁਣਾ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x \sin x)$$

$$= (\sin x)' \sin x + \sin x (\sin x)'$$

$$= (\cos x)\sin x + \sin x(\cos x)$$

$$= 2\sin x \cos x = \sin 2x$$

ਅਭਿਆਸ 13.2

1. $x = 10$ ਤੇ $x^2 - 2$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2. $x = 100$ ਤੇ $99x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ

3. $x = 1$ ਤੇ x ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਪਹਿਲੇ ਸਿਧਾਂਤ ਰਾਹੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $x^3 - 27$ (ii) $(x-1)(x-2)$

(iii) $\frac{1}{x^2}$ (iv) $\frac{x+1}{x-1}$

5. ਫਲਨ

$$f(x) = \frac{x^{100}}{100} + \frac{x^{99}}{99} + \ldots + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

ਦੇ ਲਈ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f'(1) = 100 f'(0)$

6. ਕਿਸੇ ਅਚੱਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ a ਦੇ ਲਈ $x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \ldots + a^{n-1}x + a^n$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. ਕਿਸੇ ਅਚੱਲਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਲਈ

(i) $(x-a)(x-b)$ (ii) $(ax^2+b)^2$ (iii) $\frac{x-a}{x-b}$

ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਕਿਸੇ ਅਚੱਲ a ਦੇ ਲਈ $\frac{x^n - a^n}{x-a}$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

9. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $2x - \frac{3}{4}$ (ii) $(5x^3 + 3x - 1)(x - 1)$

(iii) $x^{-3}(5 + 3x)$ (iv) $x^5(3 - 6x^{-9})$

(v) $x^{-4}(3 - 4x^{-5})$ (vi) $\frac{2}{x+1} - \frac{x^2}{3x-1}$

10. ਪਹਿਲੇ ਸਿਧਾਂਤ ਰਾਹੀਂ $\cos x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\sin x \cos x$ (ii) $\sec x$ (iii) $5\sec x + 4\cos x$

(iv) $\text{cosec } x$ (v) $3\cot x + 5\text{cosec } x$

(vi) $5\sin x - 6\cos x + 7$ (vii) $2\tan x - 7\sec x$

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 19 : ਪਹਿਲੇ ਸਿਧਾਂਤ ਤੋਂ f ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ f ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ :

(i) $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$ (ii) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

ਹੱਲ : (i) ਧਿਆਨ ਦੇਵੋ ਕਿ ਫਲਨ $x = 2$ 'ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਲੇਕਿਨ, ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ—

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2(x+h)+3}{x+h-2} - \frac{2x+3}{x-2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2x+2h+3)(x-2) - (2x+3)(x+h-2)}{h(x-2)(x+h-2)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2x+3)(x-2) + 2h(x-2) - (2x+3)(x-2) - h(2x+3)}{h(x-2)(x+h-2)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-7}{(x-2)(x+h-2)} = -\frac{7}{(x-2)^2}$$

ਦੁਬਾਰਾ ਧਿਆਨ ਦਵੋ ਕਿ $x = 2$ ਤੇ ਫਲਨ f' ਵੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਲੇਕਿਨ, ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(x+h+\frac{1}{x+h}\right) - \left(x+\frac{1}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[h + \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right]$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[h+\frac{x-x-h}{x(x+h)}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[h\left(1-\frac{1}{x(x+h)}\right)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[1-\frac{1}{x(x+h)}\right] = 1-\frac{1}{x^2}$$

ਦੁਬਾਰਾ ਧਿਆਨ ਦਵੋ ਕਿ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ f' ਵੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 20 : ਪਹਿਲੇ ਸਿਧਾਂਤ ਤੋਂ ਫਲਨ $f(x)$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ $f(x)$

(i) $\sin x + \cos x$ (ii) $x \sin x$

ਹੱਲ : (i) ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ $f'(x) = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)+\cos(x+h)-\sin x-\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h+\cos x\cos h-\sin x\sin h-\sin x-\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h(\cos x-\sin x)+\sin x(\cos h-1)+\cos x(\cos h-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}(\cos x-\sin x)+\lim_{h\to 0}\sin x\frac{(\cos h-1)}{h}+\lim_{h\to 0}\cos x\frac{(\cos h-1)}{h}$$

$$= \cos x - \sin x$$

(ii) $$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)\sin(x+h)-x\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)(\sin x\cos h+\sin h\cos x)-x\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x\sin x(\cos h-1)+x\cos x\sin h+h(\sin x\cos h+\sin h\cos x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x\sin x(\cos h-1)}{h}+\lim_{h\to 0}x\cos x\frac{\sin h}{h}+\lim_{h\to 0}(\sin x\cos h+\sin h\cos x)$$

$$= x\cos x + \sin x$$

ਉਦਾਹਰਣ 21 : (i) $f(x) = \sin 2x$ (ii) $g(x) = \cot x$ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਾ ਪਰਿਕਲਨ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : (i) ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਸੂਤਰ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੋ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(2\sin x\cos x) = 2\frac{d}{dx}(\sin x\cos x)$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

$$= 2\left[(\sin x)' \cos x + \sin x (\cos x)'\right]$$

$$= 2\left[(\cos x)\cos x + \sin x(-\sin x)\right]$$

$$= 2\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)$$

(ii) ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ, g(x) = $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ ਅਸੀਂ ਭਾਗਫਲ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਇਸ ਫਲਨ ਤੇ ਕਰਾਂਗੇ, ਜਿੱਥੇ ਕਿਤੇ ਇਹ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{(\cos x)'(\sin x) - (\cos x)(\sin x)'}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{(-\sin x)(\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{(\sin x)^2}$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

ਹੋਰ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਇਸਨੂੰ ਧਿਆਨ ਦੇ ਕੇ $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$ ਹੈ, ਪਰਿਕਲਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤੱਥ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\tan x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $sec^2 x$ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਅਸੀਂ ਉਦਾਹਰਣ 17 ਵਿੱਚ ਵੇਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾਲ ਹੀ ਅਚੱਲ ਫਲਨ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ 0 ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\tan x}\right)$$

$$= \frac{(1)'(\tan x) - (1)(\tan x)'}{(\tan x)^2}$$

$$= \frac{(0)(\tan x) - (\sec x)^2}{(\tan x)^2}$$

$$= \frac{-\sec^2 x}{\tan^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

ਉਦਾਹਰਣ 22 : (i) $\dfrac{x^5 - \cos x}{\sin x}$ (ii) $\dfrac{x + \cos x}{\tan x}$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : (i) ਮੰਨ ਲਓ $h(x) = \dfrac{x^5 - \cos x}{\sin x}$ ਜਿੱਥੇ ਕਿਤੇ ਵੀ ਇਹ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਫਲਨ 'ਤੇ ਭਾਗਫਲ ਨਿਯਮ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਾਂਗੇ।

$$h'(x) = \frac{(x^5 - \cos x)' \sin x - (x^5 - \cos x)(\sin x)'}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{(5x^4 + \sin x)\sin x - (x^5 - \cos x)\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-x^5 \cos x + 5x^4 \sin x + 1}{(\sin x)^2}$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

(ii) ਅਸੀਂ ਫਲਨ $\dfrac{x+\cos x}{\tan x}$ 'ਤੇ ਭਾਗਫਲ ਨਿਯਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿੱਥੇ ਕਿਤੇ ਵੀ ਇਹ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

$$h'(x) = \frac{(x+\cos x)'\tan x-(x+\cos x)(\tan x)'}{(\tan x)^2}$$

$$= \frac{(1-\sin x)\tan x-(x+\cos x)\sec^2 x}{(\tan x)^2}$$

ਅਧਿਆਇ 13 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਪਹਿਲੇ ਸਿਧਾਂਤ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $-x$ (ii) $(-x)^{-1}$ (iii) $\sin(x+1)$ (iv) $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)$

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ (ਇਹ ਸਮਝਿਆ ਜਾਵੇ ਕਿ a, b, c, d, p, q, r ਅਤੇ s ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਅਚੱਲ ਹਨ ਅਤੇ m ਅਤੇ n ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

2. $(x+a)$ **3.** $(px+q)\left(\dfrac{r}{x}+s\right)$ **4.** $(ax+b)(cx+d)^2$

5. $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ **6.** $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$ **7.** $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

8. $\dfrac{ax+b}{px^2+qx+r}$ **9.** $\dfrac{px^2+qx+r}{ax+b}$ **10.** $\dfrac{a}{x^4}-\dfrac{b}{x^2}+\cos x$

11. $4\sqrt{x}-2$ **12.** $(ax+b)^n$ **13.** $(ax+b)^n(cx+d)^m$

14. $\sin(x+a)$ **15.** $\operatorname{cosec} x \cot x$ **16.** $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

17. $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ **18.** $\dfrac{\sec x-1}{\sec x+1}$ **19.** $\sin^n x$

20. $\dfrac{a+b\sin x}{c+d\cos x}$ **21.** $\dfrac{\sin(x+a)}{\cos x}$ **22.** $x^4(5\sin x-3\cos x)$

23. $(x^2+1)\cos x$ **24.** $(ax^2+\sin x)(p+q\cos x)$

25. $(x+\cos x)(x-\tan x)$ **26.** $\dfrac{4x+5\sin x}{3x+7\cos x}$ **27.** $\dfrac{x^2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x}$

28. $\dfrac{x}{1+\tan x}$ **29.** $(x+\sec x)(x-\tan x)$ **30.** $\dfrac{x}{\sin^n x}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਫਲਨ ਦਾ ਆਕਾਂਖਿਅਤ ਮੁੱਲ ਜਿਹੜਾ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਖੱਬੇ ਵੱਲ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ (Left handed limit) ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ (Right handed limit)
- ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾਵਾਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਲੋੜੀਂਦੇ ਮੁੱਲ ਹਨ ਜੇਕਰ ਉਹ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋਣ।
- ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾਵਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਨਾ ਹੋਣ ਤਾਂ ਇਹ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ a ਅਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਲਈ $\lim_{x\to a} f(x)$ ਅਤੇ $f(a)$ ਸਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੇ (ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਨਹੀਂ)।
- ਫਲਨਾਂ f ਅਤੇ g ਦੇ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ :

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

- ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਕੁਝ ਮੁੱਲਕ ਸੀਮਾਵਾਂ ਹਨ :

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

- a ਤੇ ਫਲਨ f ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $f'(a) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ਤੋਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ, ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਫਲਨ $f'(x)=\dfrac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ਤੋਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਫਲਨਾਂ u ਅਤੇ v ਦੇ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ :

$$(u\pm v)'=u'\pm v'$$

$$(uv)'=u'v+uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$ ਬਸ਼ਰਤੇ ਸਾਰੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ।

- ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕੁਝ ਮੁੱਲਕ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਹਨ :

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਗਣਿਤ ਦੇ ਇਤਿਹਾਸ ਵਿੱਚ ਕਲਨ ਦੇ ਅਨਵੇਸ਼ਣ ਦੀ ਵਡਿਆਈ ਦੀ ਭਾਗੀਦਾਰੀ ਲਈ ਦੋ ਨਾਮ ਮੁੱਖ ਹਨ Issac Newton (1642 – 1727) ਅਤੇ G.W. Leibnitz (1646 – 1717)। ਸਤਾਰ੍ਹਵੀਂ ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਵਿੱਚ ਦੋਨਾਂ ਨੇ ਅਜ਼ਾਦੀ ਨਾਲ ਕਲਨ ਦਾ ਅਨਵੇਸ਼ਣ ਕੀਤਾ। ਕਲਨ ਦੇ ਆਉਣ ਦੇ ਬਾਅਦ ਇਸਦੇ ਅੱਗੇ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਵਿਕਾਸ ਲਈ ਕਈ ਗਣਿਤਗਾਂ ਨੇ ਯੋਗਦਾਨ ਪਾਇਆ। ਕਰੜੇ ਸੰਕਲਪ ਦਾ ਮੁੱਖ ਉਪਰਾਲਾ ਮਹਾਨ ਗਣਿਤਗ A.L. Cauchy, J.L.Lagrange ਅਤੇ Karl Weierstrass ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ। Cauchy ਨੇ ਕਲਨ ਨੂੰ ਅਧਾਰ ਦਿੱਤਾ ਜਿਸਨੂੰ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵਿਆਪਕ ਤੌਰ ’ਤੇ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕਾਂ ਵਿੱਚ ਸਵੀਕਾਰ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। Cauchy ਨੇ D’ Alembert ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਦੇ ਰਾਹੀਂ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਿੱਤੀ।

ਸੀਮਾ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ $\alpha = 0$ ਦੇ ਲਈ $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ ਦੀ ਸੀਮਾ ਜਿਹੇ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿੱਤੇ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+i)-f(x)}{i}$, ਲਿਖਿਆ ਅਤੇ $i \to 0$, ਦੇ ਲਈ ਸੀਮਾ ਨੂੰ $f'(x)$ ਦੇ ਲਈ y' function derive's ਨਾਂ ਦਿੱਤਾ।

1900 ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇਹ ਸੋਚਿਆ ਜਾਂਦਾ ਸੀ ਕਿ ਕਲਨ ਨੂੰ ਪੜ੍ਹਾਉਣਾ ਬਹੁਤ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਕਲਨ ਯੁਵਾਵਾਂ ਦੀ ਪਹੁੰਚ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਸੀ। ਪਰ ਠੀਕ 1900 ਵਿੱਚ ਇੰਗਲੈਂਡ ਵਿੱਚ John Perry ਅਤੇ ਹੋਰਾਂ ਨੇ ਇਸ ਵਿਚਾਰ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਕਰਨਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕੀਤਾ ਕਿ ਕਲਨ ਦੀ ਮੁੱਖ ਵਿਧੀਆਂ ਅਤੇ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਸਰਲ ਹਨ ਅਤੇ ਸਕੂਲ ਦੇ ਸਤਰ ’ਤੇ ਵੀ ਪੜ੍ਹਾਈਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। F.L. Griffin ਨੇ ਕਲਨ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਨੂੰ ਪਹਿਲੇ ਸਾਲ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਕੇ ਅਗਵਾਈ ਕੀਤੀ। ਉਹਨਾਂ ਦਿਨਾਂ ਵਿੱਚ ਇਹ ਬਹੁਤ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਸੀ।

ਅੱਜ ਨਾ ਸਿਰਫ਼ ਗਣਿਤ ਬਲਕਿ ਹੋਰ ਕਈ ਵਿਸ਼ਿਆਂ ਜਿਵੇਂ ਭੌਤਿਕੀ, ਰਸਾਇਣ ਵਿਗਿਆਨ, ਅਰਥ ਸ਼ਾਸ਼ਤਰ, ਜੀਵ ਵਿਗਿਆਨ ਵਿੱਚ ਕਲਨ ਦੀ ਉਪਯੋਗਿਤਾ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ।

— ❖ —

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

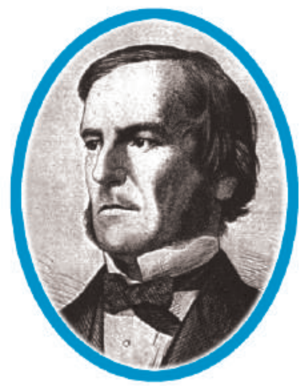
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਧਿਆਇ 14

ਗਣਿਤਕ ਵਿਵੇਚਨ
(Mathematical Reasoning)

❖There are few things which we know which are not capable of mathematical reasoning and when these can not, it is a sign that our knowledge of them is very small and confused and where a mathematical reasoning can be had, it is as great a folly to make use of another, as to grope for a thing in the dark when you have a candle stick standing by you. – ARTHENBOT ❖

14.1 ਭੂਮਿਕਾ



George Boole
(1815 - 1864)

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤਕ ਵਿਵੇਚਨ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕੁਝ ਮੌਲਿਕ ਧਾਰਣਾਵਾਂ 'ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਮਨੁੱਖ ਕਈ ਹਜ਼ਾਰਾਂ ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ, ਹੇਠਲੀਆਂ ਪ੍ਰਜਾਤੀਆਂ ਤੋਂ ਵਿਕਸਿਤ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਮਨੁੱਖ ਵਿੱਚ ਵਿਵੇਚਨ ਕਰਨ ਦੇ ਗੁਣ ਨੇ ਉਸਨੂੰ ਹੋਰ ਪ੍ਰਜਾਤੀਆਂ ਤੋਂ ਸ੍ਰੇਸ਼ਠ ਬਣਾਇਆ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਇਸ ਗੁਣ ਨੂੰ ਕਿੰਨੀ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਉਸਦੇ ਵਿਵੇਚਨ ਸ਼ਕਤੀ 'ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸ਼ਕਤੀ ਨੂੰ ਕਿਵੇਂ ਵਿਕਸਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ? ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਵਿਵੇਚਨ ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਦੀ ਚਰਚਾ ਖ਼ਾਸ ਤੌਰ 'ਤੇ ਗਣਿਤ ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਕਰਾਂਗੇ। ਗਣਿਤੀ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਵਿਵੇਚਨ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ—ਆਗਮੀ ਵਿਵੇਚਨ ਅਤੇ ਨਿਗਮੀ ਵਿਵੇਚਨ। ਗਣਿਤਕ ਆਗਮਨ (Mathematical Induction) ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਆਗਮੀ ਵਿਵੇਚਨ ਦੀ ਚਰਚਾ ਪਹਿਲਾਂ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਮੂਲ ਭੂਤ ਨਿਗਮੀ ਵਿਵੇਚਨ 'ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

14.2 ਕਥਨ (Statements)

ਗਣਿਤਕ ਵਿਵੇਚਨ ਦੀ ਮੌਲਿਕ ਇਕਾਈ ਗਣਿਤੀ ਕਥਨ ਦੀ ਸੰਕਲਪਨਾ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਦੋ ਵਾਕਾਂ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਾਂਗੇ।

"ਸੰਨ 2003 ਵਿੱਚ ਭਾਰਤ ਦੀ ਰਾਸ਼ਟਰਪਤੀ ਇੱਕ ਮਹਿਲਾ ਸੀ।"

"ਕਿਸੇ ਹਾਥੀ ਦਾ ਭਾਰ ਇੱਕ ਮਨੁੱਖ ਦੇ ਭਾਰ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।"

ਇਹਨਾਂ ਵਾਕਾਂ ਨੂੰ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹੀ ਅਸੀਂ ਤੁਰੰਤ ਫ਼ੈਸਲਾ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਹਿਲਾ ਵਾਕ ਗ਼ਲਤ (ਝੂਠ) ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਵਾਕ ਸਹੀ (ਸੱਚ) ਹੈ। ਇਸ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਸ਼ੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਇਹੋ-ਜਿਹੇ ਵਾਕਾਂ ਨੂੰ ਕਥਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਾਕ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

"ਔਰਤਾਂ, ਮਰਦਾਂ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਕਲਮੰਦ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।"

ਕੁਝ ਲੋਕਾਂ ਦੇ ਵਿਚਾਰ ਤੋਂ ਇਹ ਵਾਕ ਸੱਚ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਪਰ ਕੁਝ ਹੋਰ ਇਸ ਤੋਂ ਅਸਹਿਮਤ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਵਾਕ ਦੇ ਬਾਰੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਨਹੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਕਿ ਇਹ ਸੱਚ ਜਾਂ ਝੂਠ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਵਾਕ ਦੋ ਅਰਥਕ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਵਾਕ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਕਥਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਵੀਕਾਰ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

"ਇੱਕ ਵਾਕ ਗਣਿਤ ਅਨੁਸਾਰ ਕਥਨ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਹ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸੱਚ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਝੂਠ ਹੋਵੇ ਪਰ ਦੋਵੇਂ (ਸੱਚ ਅਤੇ ਝੂਠ) ਨਾ ਹੋਵੇ।" ਹੁਣ ਜਦੋਂ ਵੀ ਅਸੀਂ ਕਥਨ ਦਾ ਉਲੇਖ ਕਰਾਂਗੇ ਸਾਡਾ ਭਾਵ ਗਣਿਤ ਅਨੁਸਾਰ ਸਵੀਕਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਕਥਨ ਹੀ ਹੋਵੇਗਾ। ਗਣਿਤ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਦੇ ਦੌਰਾਨ ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਕਈ ਵਾਕ ਮਿਲਦੇ ਹਨ। ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ :

ਦੋ ਜੋੜ ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਚਾਰ।

ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਧਨਾਤਮਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਇਹਨਾਂ ਵਿਚੋਂ ਪਹਿਲੇ ਦੋ ਵਾਕ ਸੱਚ ਹਨ ਅਤੇ ਤੀਜਾ ਵਾਕ ਝੂਠ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਵਾਕਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਕੋਈ ਵੀ ਸ਼ੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਵਾਕ ਕਥਨ ਹਨ।

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਕਿਸੇ ਇਹੋ-ਜਿਹੇ ਵਾਕ ਦੀ ਉਦਾਹਰਣ ਸੋਚ ਸਕਦੇ ਹੋ ਜਿਹੜਾ ਅਸੱਪਸ਼ਟ ਹੋਵੇ? ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਾਕ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

x ਅਤੇ y ਦਾ ਜੋੜਫਲ 0 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਕਿ ਵਾਕ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਝੂਠ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਨਾ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਕਿ x ਅਤੇ y ਕੀ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $x = 1$ ਅਤੇ $y = -3$ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ $x = 1$ ਅਤੇ $y = 0$ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਵਾਕ ਇੱਕ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਵਾਕ ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ :

ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਿਰਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ x ਅਤੇ y ਦਾ ਜੋੜਫਲ 0 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ।

ਹੁਣ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਾਕਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

ਵਾਹ! ਕਿੰਨਾ ਸੁੰਦਰ!

ਦਰਵਾਜਾ ਖੋਲੋ।

ਤੁਸੀਂ ਕਿੱਥੇ ਜਾ ਰਹੇ ਹੋ?

ਕੀ ਇਹ ਕਥਨ ਹਨ? ਨਹੀਂ, ਕਿਉਂਕਿ ਪਹਿਲਾ ਵਿਸਮਿਕ ਵਾਕ ਹੈ, ਦੂਜਾ ਇੱਕ ਆਦੇਸ਼ ਹੈ ਅਤੇ ਤੀਜਾ ਇੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੈ। ਗਣਿਤਕ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਨੂੰ ਵੀ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਵਾਕ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਚਲ ਸਮਾਂ ਹੋਵੇ ਜਿਵੇਂ "ਅੱਜ", "ਕੱਲ੍ਹ", "ਬੀਤ ਚੁੱਕਾ ਕੱਲ੍ਹ", ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਇਸ ਲਈ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਪਤਾ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਕਿ ਕਿਸ ਸਮੇਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਹੋ ਰਹੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਵਾਕ

"ਕੱਲ੍ਹ ਸ਼ੁੱਕਰਵਾਰ ਹੈ।" ਇੱਕ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਹ ਵਾਕ ਕਿਸੇ ਵੀਰਵਾਰ ਦੇ ਲਈ ਤਾਂ ਸੱਚ ਹੋਵੇਗਾ ਪਰੰਤੂ ਹੋਰ ਦਿਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਹ ਗੱਲ ਉਹਨਾਂ ਵਾਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਪੜਨਾਂਵ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਬਿਨਾਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਾਂਵ ਨੂੰ ਦੱਸੇ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਇਹੋ-ਜਿਹੇ ਵਾਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਚਲ ਸਥਾਨਾਂ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ, ਜਿਵੇਂ "ਇੱਥੇ", "ਉੱਥੇ" ਆਦਿ। ਭਾਵ ਇਹ ਹੋਇਆ ਕਿ ਵਾਕ

"ਉਹ ਗਣਿਤ ਦੀ ਇੱਕ ਸਨਾਤਕ ਹੈ"

"ਕਸ਼ਮੀਰ ਇੱਥੋਂ ਬੜੀ ਦੂਰ ਹੈ" ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਇੱਥੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਾਕ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ : *"ਇੱਕ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ 40 ਦਿਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।"*

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਇੱਕ ਕਥਨ ਕਹੋਗੇ? ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਥੇ ਲਿਖਿਆ ਸਮਾਂ "ਚਲ" ਹੈ ਭਾਵ 12 ਮਹੀਨਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਇੱਕ। ਪਰੰਤੂ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਵਾਕ ਹਮੇਸ਼ਾ (ਮਹੀਨੇ ਦਾ ਧਿਆਨ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ) ਝੂਠ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ ਦਿਨਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 31 ਤੋਂ ਵੱਧ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਵਾਕ ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਤੱਥ ਕਿ ਇੱਕ ਵਾਕ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸੱਚ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਝੂਠ ਹੋਵੇ ਪਰੰਤੂ ਦੋਵੇਂ ਨਾ ਹੋ ਸਕੇ ਇੱਕ ਕਥਨ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਅਸੀਂ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਛੋਟੇ ਅੱਖਰਾਂ $p, q, r, \ldots$ ਤੋਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਕਥਨ "ਅੱਗ ਸਦਾ ਗਰਮ ਹੁੰਦੀ ਹੈ" ਨੂੰ ਅਸੀਂ p ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ :

p : ਅੱਗ ਸਦਾ ਗਰਮ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਾਕ ਕਥਨ ਹਨ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਕਾਰਨ ਨਾਲ ਲਿਖੋ।

(i) 8, 6 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।
(ii) ਹਰੇਕ ਸਮੂਹ ਇੱਕ ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
(iii) ਸੂਰਜ ਇੱਕ ਤਾਰਾ ਹੈ।
(iv) ਗਣਿਤ, ਰੌਚਿਕ ਵਿਸ਼ਾ ਹੈ।
(v) ਬਗ਼ੈਰ ਬੱਦਲਾਂ ਦੇ ਮੀਂਹ ਨਹੀਂ ਪੈਂਦਾ ਹੈ।
(vi) ਇੱਥੋਂ ਚੇਨੱਈ ਕਿੰਨੀ ਦੂਰ ਹੈ ?

ਹੱਲ : (i) ਇਹ ਵਾਕ ਝੂਠ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ 8, 6 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ।

(ii) ਇਹ ਵਾਕ ਵੀ ਹਮੇਸ਼ਾ ਝੂਠ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹੋ-ਜਿਹੇ ਵੀ ਸਮੂਹ ਹਨ ਜਿਹੜੇ ਕਿ ਸੀਮਿਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ।

(iii) ਇਹ ਵਿਗਿਆਨਿਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੈ ਕਿ ਸੂਰਜ ਇੱਕ ਤਾਰਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਵਾਕ ਸੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ।

(iv) ਇਹ ਵਾਕ ਵਿਅਕਤੀਨਿਸ਼ਠ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਰੁਚੀ ਹੈ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਕੌਤੁਕ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਹੋਰਾਂ ਦੇ ਲਈ ਇਹੋ-ਜਿਹਾ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੋਇਆ ਕਿ ਇਹ ਵਾਕ ਸੱਚ ਜਾਂ ਝੂਠ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(v) ਇਹ ਵਿਗਿਆਨਿਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕੁਦਰਤੀ ਤੱਥ ਹੈ ਕਿ ਮੀਂਹ ਹੋਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਬੱਦਲ ਬਣਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸਦਾ ਸੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ।

(vi) ਇਹ ਇੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸ਼ਬਦ 'ਇੱਥੇ' ਵੀ ਆਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਪਰ ਦਿੱਤੇ ਉਦਾਹਰਣ ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ ਕਿ ਜਦੋਂ ਕਦੇ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਵਾਕ ਨੂੰ ਕਥਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਵੀ ਦੱਸਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਜਿਹਾ ਕਿਉਂ ਹੈ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਜੋਂ 'ਕਿਉਂ' ਵੱਧ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 14.1

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਾਕਾਂ ਵਿਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਕਥਨ ਹੈ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੇ ਲਈ ਕਾਰਨ ਵੀ ਦੱਸੋ।

(i) ਇੱਕ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ 35 ਦਿਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
(ii) ਗਣਿਤ ਇੱਕ ਔਖਾ (ਮੁਸ਼ਕਿਲ) ਵਿਸ਼ਾ ਹੈ।
(iii) 15 ਅਤੇ 7 ਦਾ ਜੋੜਫਲ 10 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ।
(iv) ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
(v) ਕਿਸੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
(vi) ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦਿਓ।
(vii) (–1) ਅਤੇ 8 ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ 8 ਹੈ।
(viii) ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੰਦਰਲੇ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ 180° ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
(ix) ਅੱਜ ਤੇਜ਼ ਹਵਾਵਾਂ ਵਾਲਾ ਦਿਨ ਹੈ।
(x) ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

2. ਵਾਕਾਂ ਦੇ ਤਿੰਨ-ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿਓ ਜਿਹੜਾ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਉੱਤਰ ਦੇ ਲਈ ਕਾਰਣ ਦੱਸੋ ?

14.3 ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕਥਨਾਂ ਤੋਂ ਨਵੇਂ ਕਥਨ ਬਣਾਉਣਾ (New Statements from Old)

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕਥਨਾਂ ਤੋਂ ਨਵੇਂ ਕਥਨ ਬਣਾਉਣ ਦੀ ਵਿਧੀ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ। 1854 ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅੰਗਰੇਜ਼ ਗਣਿਤਕਾਰ George Boole ਨੇ ਆਪਣੀ ਕਿਤਾਬ "The Law of Thought" ਵਿੱਚ ਵਿਧੀਆਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ, ਅਸੀਂ ਦੋ ਤਕਨੀਕਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਕਥਨ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾ ਚਰਣ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਤਕਨੀਕ ਤੇ ਨਜ਼ਰ ਪਾਵਾਂਗੇ ਜਿਸਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤੀ ਵਾਕਾਂ ਦੀ ਆਪਣੀ ਸਮਝ ਨੂੰ ਵਧਾ ਸਕਾਂਗੇ। ਇਸ ਤਕਨੀਕ ਵਿੱਚ ਆਪਣੇ ਆਪ ਤੋਂ ਨਾ ਸਿਰਫ਼ ਇਹ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਪੁੱਛਾਂਗੇ ਕਿ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਾਕ ਦੇ ਸੱਚ ਹੋਣ ਦਾ ਕੀ ਭਾਵ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਬਲਕਿ ਇਹ ਵੀ ਕਿ ਉਸ ਵਾਕ ਦੇ ਸੱਚ ਨਾ ਹੋਣ ਦਾ ਭਾਵ ਕੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

14.3.1 *ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਖੇਪਨ (Negation of a statement)* ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਦਾ ਨਕਾਰਨਾ ਉਸ ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਖੇਪਨ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਵਾਕ: "ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ ਇੱਕ ਨਗਰ ਹੈ।"

ਇਸਦਾ ਨਿਖੇਪਨ ਹੇਠ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਹ ਵਸਤੂ ਸਥਿਤੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ ਇੱਕ ਨਗਰ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵੀ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

"ਇਹ ਝੂਠ ਹੈ ਕਿ ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ ਇੱਕ ਨਗਰ ਹੈ।"

ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਇਹ ਵੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

"ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ ਇੱਕ ਨਗਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।"

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1 ਜੇਕਰ p ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ ਤਾਂ p ਦਾ ਨਿਖੇਪਨ ਉਹ ਕਥਨ ਹੈ ਜਿਹੜਾ p ਨੂੰ ਨਕਾਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਪ੍ਰਤੀਕ $\sim p$ ਤੋਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਨੂੰ "p ਨਹੀਂ" ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਦੇ ਨਿਖੇਪਨ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ "ਇਹ ਵਸਤੂ ਸਥਿਤੀ ਨਹੀਂ ਹੈ" ਜਾਂ ਇਹ ਝੂਠ ਹੈ ਕਿ ਇੱਥੇ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਇੱਕ ਕਥਨ ਦੇ ਨਿਖੇਪਨ ਦਾ ਅਵਲੋਕਨ ਕਰਕੇ, ਅਸੀਂ ਉਸਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਆਪਣੀ ਸਮਝ ਸੁਧਾਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਵਾਕ *"ਜਰਮਨੀ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਵਿਅਕਤੀ ਜਰਮਨ ਬੋਲਦਾ ਹੈ।"*

ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇਸ ਵਾਕ ਨੂੰ ਨਕਾਰਨ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਵਾਕ

"ਜਰਮਨ ਵਿੱਚ ਹਰ ਕੋਈ ਜਰਮਨ ਭਾਸ਼ਾ ਨਹੀਂ ਬੋਲਦਾ ਹੈ।"

ਇਸਦਾ ਇਹ ਅਰਥ ਨਹੀਂ ਹੋਇਆ ਕਿ "ਜਰਮਨੀ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਵਿਅਕਤੀ ਜਰਮਨ ਭਾਸ਼ਾ ਨਹੀਂ ਬੋਲਦਾ ਹੈ।" ਇਹ ਕੇਵਲ ਇਹ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ "ਜਰਮਨੀ ਵਿੱਚ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਇਹੋ-ਜਿਹਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਜਰਮਨ ਭਾਸ਼ਾ ਨਹੀਂ ਬੋਲਦਾ ਹੈ।" ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦਾ ਨਿਖੇਪਨ ਲਿਖੋ।

(i) ਕਿਸੇ ਆਇਤ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਵਿਕਰਣਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(ii) $\sqrt{7}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : (i) ਇਹ ਕਥਨ ਇਹ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੇ ਆਇਤਾਂ ਵਿੱਚ ਦੋਨਾਂ ਵਿਕਰਣਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੋਇਆ ਕਿ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਕੋਈ ਆਇਤ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਸਦੇ ਦੋਨਾਂ ਵਿਕਰਣਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸ ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਖੇਪਨ,

"ਇਹ ਝੂਠ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਆਇਤ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਵਿਕਰਣਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।" ਭਾਵ "ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਆਇਤ ਇਹੋ-ਜਿਹਾ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਦੋਨਾਂ ਵਿਕਰਣਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।"

(ii) ਇਸ ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਖੇਪਣ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

"ਇਹ ਵਸਤੂ ਸਥਿਤੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ $\sqrt{7}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।"

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਸਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

"$\sqrt{7}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।"

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਨਿਖੇਪਨ ਲਿਖੋ ਅਤੇ ਜਾਂਚੋ ਕਿ ਕੀ ਪਰਿਮਾਣੀ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ?

(i) ਆਸਟ੍ਰੇਲੀਆ ਇੱਕ ਮਹਾਂਦੀਪ ਹੈ।

(ii) ਇਹੋ-ਜਿਹੇ ਕਿਸੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਚਾਰੇ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ।

(iii) ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ 0 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(iv) 3 ਅਤੇ 4 ਦਾ ਜੋੜਫਲ 9 ਹੈ।

ਹੱਲ : (i) "ਇਹ ਝੂਠ ਹੈ ਕਿ ਆਸਟ੍ਰੇਲੀਆ ਇੱਕ ਮਹਾਂਦੀਪ ਹੈ।" ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਖੇਪਨ ਹੈ, ਇਸਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ । *"ਆਸਟ੍ਰੇਲੀਆ ਇੱਕ ਮਹਾਂਦੀਪ ਨਹੀਂ ਹੈ"* ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ।

(ii) ਇਸ ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਖੇਪਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ,
"ਇਹ ਸਥਿਤੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਇਹੋ, ਜਿਹੇ ਕਿਸੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਿਸਦੀਆਂ ਚਾਰੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ।"
ਇਸਦਾ ਤਾਤਪਰਜ ਹੋਇਆ ਕਿ *"ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ, ਜਿਸਦੀ ਚਾਰੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।"*
ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਵਰਗ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਦੀਆਂ ਚਾਰੇ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(iii) ਇਸ ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਖੇਪਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ,

"ਇਹ ਝੂਠ ਹੈ ਕਿ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ 0 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।"

ਇਸਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵੀ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ *"ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਪ੍ਰਾਕਿਰਤਕ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਿਹੜੀ 0 ਤੋਂ ਵੱਧ ਨਹੀਂ ਹੈ।"*

ਇਹ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ।

(iv) ਲੋੜੀਂਦਾ ਨਿਖੇਪਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ, *"ਇਹ ਝੂਠ ਹੈ ਕਿ 3 ਅਤੇ 4 ਦਾ ਜੋੜਫਲ 9 ਹੈ।"* ਇਸਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ,

"3 ਅਤੇ 4 ਦਾ ਜੋੜਫਲ 9 ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।"

ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ।

14.3.2 *ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ (Compound statements)* "ਅਤੇ", "ਜਾਂ" ਆਦਿ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇੱਕ ਜਾਂ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜ ਕੇ ਕਈ ਕਥਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ : "ਬਲਬ ਜਾਂ ਬਿਜਲੀ ਦੇ ਤਾਰ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਖ਼ਰਾਬੀ ਹੈ" ਇਹ ਕਥਨ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਬਲਬ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਖ਼ਰਾਬੀ ਹੈ ਜਾਂ ਬਿਜਲੀ ਦੇ ਤਾਰ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਖ਼ਰਾਬੀ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਦੋ ਸੰਖੇਪ ਕਥਨਾਂ ਤੋਂ ਮਿਲ ਕੇ ਬਣਿਆ ਹੈ, ਜਿਹੜੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ :

q: *'ਬਲਬ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਖ਼ਰਾਬੀ ਹੈ'*

r: *'ਬਿਜਲੀ ਦੇ ਤਾਰ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਖ਼ਰਾਬੀ ਹੈ' ਅਤੇ*

ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸ਼ਬਦ ਜਾਂ ਰਾਹੀਂ ਜੋੜਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਦੋ ਕਥਨ ਦਿੱਤੇ ਹਨ :

p: *'7 ਇੱਕ ਵਿਖਮ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।'*

q: *'7 ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।'*

ਇਹਨਾਂ ਦੋਵਾਂ ਨੂੰ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਰਾਹੀਂ ਜੋੜਨ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਕਥਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ :

r: *'7 ਇੱਕ ਵਿਖਮ ਅਤੇ ਅਭਾਜ ਦੋਵੇਂ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।'*

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਹ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਹੈ।

ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਚਰਚਾ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ :

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2 ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਉਹ ਹੈ, ਜਿਹੜਾ ਦੋ ਜਾਂ ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਕਥਨਾਂ ਤੋਂ ਮਿਲਕੇ ਬਣਿਆ ਹੋਵੇ, ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਕਥਨ ਨੂੰ ਘਟਕ ਕਥਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਆਓ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) ਅਕਾਸ਼ ਨੀਲਾ ਹੈ ਅਤੇ ਘਾਹ ਹਰਾ ਹੈ।

(ii) ਮੀਂਹ ਪੈ ਰਿਹਾ ਹੈ ਅਤੇ ਠੰਢ ਹੈ।

(iii) ਸਾਰੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ, ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਮਿਸ਼ਰਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(iv) 0 ਇੱਕ ਧਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਾਂ ਇੱਕ ਰਿਣ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇਹਨਾਂ ਵਿਚੋਂ ਹਰੇਕ ਤੇ ਅਸੀਂ ਵਾਰੀ-ਵਾਰੀ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

(i) ਘਟਕ ਕਥਨ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨੇ :

p: ਅਕਾਸ਼ ਨੀਲਾ ਹੈ।

q: ਘਾਹ ਹਰਾ ਹੈ।

ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਹੈ।

(ii) ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ :

p: ਮੀਂਹ ਪੈ ਰਿਹਾ ਹੈ।

q: ਠੰਢ ਹੈ।

ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਹੈ।

(iii) ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

p: ਸਾਰੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

q: ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਮਿਸ਼ਰਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਹੈ।

(iv) ਘਟਕ ਕਥਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ :

p: 0 ਇੱਕ ਧਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

q: 0 ਇੱਕ ਰਿਣ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ 'ਜਾਂ' ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹ ਸੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

(i) ਇੱਕ ਵਰਗ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੀਆਂ ਚਾਰੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(ii) ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਿਸਤ ਜਾਂ ਟਾਂਕ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(iii) ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ, ਜਿਸਨੇ ਗਣਿਤ ਜਾਂ ਕੰਪਿਊਟਰ ਵਿਗਿਆਨ ਚੁਣਿਆ ਹੈ, MCA ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(iv) ਚੰਡੀਗੜ੍ਹ, ਹਰਿਆਣਾ ਅਤੇ ਉੱਤਰ ਪ੍ਰਦੇਸ਼ ਦੀ ਰਾਜਧਾਨੀ ਹੈ।

(v) $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਜਾਂ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

(vi) 2, 4 ਅਤੇ 8 ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਜ 24 ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਹੱਲ : (i) ਇੱਥੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ :

p: ਇੱਕ ਵਰਗ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

q: ਇੱਕ ਵਰਗ ਦੀਆਂ ਚਾਰੋਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋਨੋਂ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ। ਇੱਥੇ ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਹੈ।

(ii) ਇੱਥੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ :

p: ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਿਸਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

q: ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਟਾਂਕ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਇਹ ਦੋਨੋਂ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹਨ। ਇੱਥੇ ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ 'ਜਾਂ' ਹੈ।

(iii) ਇੱਥੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਹਨ :

p: ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ, ਜਿਸਨੇ ਗਣਿਤ ਦਾ ਚੁਨਾਵ ਕੀਤਾ ਹੈ, MCA ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ।

q: ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ, ਜਿਸਨੇ ਕੰਪਿਊਟਰ ਵਿਗਿਆਨ ਦਾ ਚੁਨਾਵ ਕੀਤਾ ਹੈ, MCA ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ। ਇੱਥੇ ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ ਜਾਂ ਹੈ।

(iv) ਇੱਥੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ :

p: ਚੰਡੀਗੜ੍ਹ, ਹਰਿਆਣਾ ਦੀ ਰਾਜਧਾਨੀ ਹੈ।

q: ਚੰਡੀਗੜ੍ਹ, ਉੱਤਰ ਪ੍ਰਦੇਸ਼ ਦੀ ਰਾਜਧਾਨੀ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾ ਘਟਕ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਝੂਠ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਹੈ।

(v) ਲੋੜੀਂਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਹਨ :

p: $\sqrt{2}$ *ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।*

q: $\sqrt{2}$ *ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।*

ਇੱਥੇ ਪਹਿਲਾ ਘਟਕ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਸੱਚ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ 'ਜਾਂ' ਹੈ।

(vi) ਇਸ ਵਿੱਚ ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਹਨ :

p: 2 *ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਜ* 24 *ਹੈ।*

q: 4 *ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਜ* 24 *ਹੈ।*

r: 8 *ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਜ* 24 *ਹੈ।*

ਇਹ ਤਿੰਨੋਂ ਹੀ ਘਟਕ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ। ਇੱਥੇ ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਦੋ ਜਾਂ ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ 'ਅਤੇ' 'ਜਾਂ' ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਰਾਹੀਂ ਜੋੜਨ ਤੋਂ ਬਣਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਸ਼ਬਦ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਖ਼ਾਸ ਮਹੱਤਵ ਰੱਖਦੇ ਹਨ। ਅਗਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਅਭਿਆਸ 14.2

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਨਿਖੇਪਣ ਲਿਖੋ :

(i) ਚੇਨੱਈ, ਤਮਿਲਨਾਡੂ ਦੀ ਰਾਜਧਾਨੀ ਹੈ।

(ii) $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਤ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

(iii) ਸਾਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਬਾਹੂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ।

(iv) ਸੰਖਿਆ 2 ਸੰਖਿਆ 7 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ।

(v) ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਾਕਿਰਤਕ ਸੰਖਿਆ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

2. ਕੀ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਯੁਗਮ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਦੇ ਨਿਖੇਪਨ ਹਨ ?

(i) ਸੰਖਿਆ x ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।
ਸੰਖਿਆ x ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) ਸੰਖਿਆ x ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
ਸੰਖਿਆ x ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

3. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਜਾਂਚੋ ਕਿ ਉਹ ਸੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਝੂਠ ਹਨ ?

(i) ਸੰਖਿਆ 3 ਅਭਾਜ ਹੈ ਜਾਂ ਟਾਂਕ ਹੈ।

(ii) ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਧਨ ਹਨ ਜਾਂ ਰਿਣ ਹਨ।

(iii) ਸੰਖਿਆ 100, ਸੰਖਿਆਵਾਂ 3, 11 ਅਤੇ 5 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹੈ।

14.4 ਖ਼ਾਸ ਸ਼ਬਦ/ਵਾਕਾਂ ਦੇ ਅੰਸ਼ (Special Words/Phrases)

ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ 'ਅਤੇ', 'ਜਾਂ' ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਕੁਝ ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਗਣਿਤੀ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸੰਯੋਜਕ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਕਦੇ ਅਸੀਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਭੂਮਿਕਾ ਸਮਝ ਸਕੀਏ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

14.4.1 ***ਸੰਯੋਜਕ 'ਅਤੇ' (The word 'And') :*** ਸੰਯੋਜਕ 'ਅਤੇ' ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਰਾਹੀਂ ਬਣਿਆ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

p: ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਇੱਕ ਸਥਾਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਕਥਨ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਦੋ ਘਟਕ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਵਿਘਟਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

q: ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਇੱਕ ਸਥਾਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

r: ਉਸਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਦੋਨੋਂ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ।
ਇੱਕ ਹੋਰ ਕਥਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

p: ਸੰਖਿਆ 42 ਸੰਖਿਆਵਾਂ 5, 6 ਅਤੇ 7 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹੈ।

ਇਸ ਕਥਨ ਦਾ ਵਿਘਟਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ,

q: ਸੰਖਿਆ 42 ਸੰਖਿਆ 5 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹੈ।

r: ਸੰਖਿਆ 42 ਸੰਖਿਆ 6 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹੈ।

s: ਸੰਖਿਆ 42 ਸੰਖਿਆ 7 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹੈ।

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲਾ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਦੋ ਸੱਚ ਹਨ।
ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨਿਯਮ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

1. ਸੰਯੋਜਕ 'ਅਤੇ' ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਰਾਹੀਂ ਬਣਿਆ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ ਉਸਦੇ ਸਾਰੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੋਣ।
2. ਸੰਯੋਜਕ 'ਅਤੇ' ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਰਾਹੀਂ ਬਣਿਆ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ ਇਸਦਾ ਇੱਕ ਵੀ ਘਟਕ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੋਵੇ (ਇਸ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤੀ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇਸਦੇ ਕੁਝ ਘਟਕ ਕਥਨ ਜਾਂ ਸਾਰੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੋਣ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਲਿਖੋ ਅਤੇ ਜਾਂਚੋ ਕਿ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਝੂਠ ਹੈ।

(i) ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਸਿੱਧੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਦੋਵਾਂ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਅਨੰਤ ਤੱਕ ਫੈਲੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(ii) 0 ਹਰੇਕ ਧਨ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਰਿਣ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਹਰੇਕ ਜ਼ਿੰਦਾ ਜੀਵ ਦੇ ਦੋ ਪੈਰ ਅਤੇ ਦੋ ਅੱਖਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : (i) ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

p: ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਸਿੱਧੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

q: ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੋਵਾਂ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਅਨੰਤ ਤੱਕ ਫੈਲੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਦੋਵੇਂ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ।

(ii) ਇੱਥੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ :

p: 0 *ਹਰੇਕ ਧਨ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।*

q: 0 *ਹਰੇਕ ਰਿਣ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।*

ਇਹਨਾਂ ਵਿਚੋਂ ਦੂਜਾ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਵੀ ਝੂਠ ਹੈ।

(iii) ਲੋੜੀਂਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਹਨ :

p: 'ਹਰੇਕ ਜ਼ਿੰਦਾ ਜੀਵ ਦੇ ਦੋ ਪੈਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।'

q: 'ਹਰੇਕ ਜ਼ਿੰਦਾ ਜੀਵ ਦੀਆਂ ਦੋ ਅੱਖਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।'

ਇਹ ਦੋਨੋਂ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਵੀ ਝੂਠ ਹੈ।

ਹੁਣ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

p: ਐਲਕੋਹਲ ਅਤੇ ਪਾਣੀ ਦੇ ਮਿਸ਼ਰਨ ਨੂੰ ਰਸਾਇਣਿਕ ਵਿਧੀਆਂ ਰਾਹੀਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਕਥਨ ਨੂੰ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਨਾਲ ਬਣਿਆ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਮੰਨਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਦੋ ਵਸਤੂਆਂ ਐਲਕੋਹਲ ਅਤੇ ਪਾਣੀ ਦਾ ਉਲੇਖ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਅੱਗੇ ਟਿੱਪਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੈ :

ਟਿੱਪਣੀ : ਇਹ ਨਹੀਂ ਸਮਝਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਕਿ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਵਾਕ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ', ਦੋ ਵਾਕਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੇ ਲਈ ਨਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ।

14.4.2 ***ਸ਼ਬਦ 'ਜਾਂ' ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਵਾਕ (The word "Or")*** ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

p: ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਤੇ ਸਥਿਤ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਜਾਂ ਤਾਂ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ ਜਾਂ ਉਹ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਸੱਚਾ ਕਥਨ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਕੀ ਅਰਥ ਹੈ ? ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਤੇ ਸਥਿਤ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਜੇਕਰ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਉਹ ਸਮਾਂਤਰ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਜੇਕਰ ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਦੋਨੋਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ।' ਭਾਵ ਇਹ ਕਥਨ ਦੋਨਾਂ ਹੀ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਸੱਚ ਹੈ।

ਸ਼ਬਦ 'ਜਾਂ' ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਸਮਝਣ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ 'ਜਾਂ' ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ :

p: 'ਕਿਸੇ ਢਾਬੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ 'ਥਾਲੀ' ਦੇ ਨਾਲ ਆਈਸਕ੍ਰੀਮ ਜਾਂ ਪੇਪਸੀ ਵੀ ਮਿਲ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।'

ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੋਇਆ ਕਿ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਜਿਹੜਾ ਆਈਸਕ੍ਰੀਮ ਨਹੀਂ ਚਾਹੁੰਦਾ ਉਹ ਥਾਲੀ ਦੇ ਨਾਲ ਪੇਪਸੀ ਲੈ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਉਹ ਥਾਲੀ ਦੇ ਨਾਲ ਆਈਸਕ੍ਰੀਮ ਲੈ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਵਿਅਕਤੀ ਪੇਪਸੀ ਨਹੀਂ ਚਾਹੁੰਦਾ ਉਹ ਆਈਸਕ੍ਰੀਮ ਲੈ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਸਕਦਾ ਹੈ। ਲੇਕਿਨ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਦੋਵੇਂ ਵਸਤੂਆਂ ਭਾਵ ਆਈਸਕ੍ਰੀਮ ਅਤੇ ਪੇਪਸੀ ਨਹੀਂ ਲੈ ਸਕਦਾ ਇਹ ਨਿਵੇਕਲਾ 'ਜਾਂ' ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਇੱਕ ਕਥਨ (ਹੋਰ) ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

'ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ, ਜਿਸਨੇ ਜੀਵ ਵਿਗਿਆਨ ਜਾਂ ਰਸਾਇਣ ਵਿਗਿਆਨ ਵਿਸ਼ਿਆਂ ਨੂੰ ਚੁਣਿਆ ਹੈ ਉਹ ਸੂਕਸ਼ਮ ਜੀਵ ਵਿਗਿਆਨ ਪਾਠਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਐਮ.ਐਸ.ਸੀ. ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ।'

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਹ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਜਿਹਨਾਂ ਨੇ ਜੀਵ ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਰਸਾਇਣ ਵਿਗਿਆਣ ਦੋਨਾਂ ਹੀ ਵਿਸ਼ਿਆਂ ਦਾ ਚੁਨਾਵ ਕੀਤਾ ਹੈ, ਉਹ ਸੂਕਸ਼ਮ ਜੀਵ ਵਿਗਿਆਨ ਪਾਠਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਦਾਖਿਲਾ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਨਾਲ ਹੀ ਉਹ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਜਿਹਨਾਂ ਨੇ ਇਹਨਾਂ ਵਿਸ਼ਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ਾ ਚੁਣਿਆ ਹੈ ਉਹ ਵੀ ਇਸ ਪਾਠਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਦਾਖਿਲਾ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ 'ਜਾਂ' ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਦੋਨਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ ਜਾਨਣਾ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਇਸਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਉਸ ਸਮੇਂ ਜਾਂਚਾਂਗੇ ਕਿ ਕੋਈ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਝੂਠ।

ਆਓ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਰੇਕ ਕਥਨ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਨਿਵੇਕਲਾ 'ਜਾਂ' ਜਾਂ ਸ਼ਾਮਿਲ ਜਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਆਪਣਾ ਉੱਤਰ ਕਾਰਨ ਸਹਿਤ ਦੱਸੋ।

(i) ਕਿਸੇ ਦੇਸ਼ ਵਿੱਚ ਜਾਣ ਲਈ ਪਾਸਪੋਰਟ ਜਾਂ ਮਤਦਾਤਾ ਪਹਿਚਾਣ ਪੱਤਰ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(ii) ਛੁੱਟੀ ਜਾਂ ਐਤਵਾਰ ਦੇ ਦਿਨ ਸਕੂਲ ਬੰਦ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ ਜਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(iv) ਤੀਜੀ ਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਫਰੈਂਚ ਭਾਸ਼ਾ ਜਾਂ ਸੰਸਕ੍ਰਿਤ ਭਾਸ਼ਾ ਦਾ ਚੁਨਾਵ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : (i) ਇੱਥੇ 'ਜਾਂ' ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਕਿਸੇ ਦੇਸ਼ ਵਿੱਚ ਜਾਣ ਲਈ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਕੋਲ ਪਾਸਪੋਰਟ ਅਤੇ ਮਤਦਾਤਾ ਪਹਿਚਾਣ ਪੱਤਰ ਦੋਨੋਂ ਹੀ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

(ii) ਇੱਥੇ ਵੀ 'ਜਾਂ' ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਕੂਲ ਛੁੱਟੀ ਦੇ ਦਿਨ ਅਤੇ ਨਾਲ ਹੀ ਐਤਵਾਰ ਨੂੰ ਬੰਦ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਇੱਥੇ 'ਜਾਂ' ਨਿਵੇਕਲਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਦੋਨੋਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਕੱਟਣ ਅਤੇ ਨਾਲ ਹੀ ਸਮਾਂਤਰ ਵੀ ਹੋਣ।

(iv) ਇੱਥੇ ਵੀ 'ਜਾਂ' ਨਿਵੇਕਲਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਕੋਈ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਤੀਜੀ ਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਫਰੈਂਚ ਅਤੇ ਸੰਸਕ੍ਰਿਤ ਦੋਨੋਂ ਨਹੀਂ ਲੈ ਸਕਦਾ।

ਸੰਯੋਜਕ 'ਜਾਂ' ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਦੇ ਲਈ ਨਿਯਮ

1. ਸ਼ਾਮਿਲ 'ਜਾਂ' ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਉਸਦਾ ਕੋਈ ਇੱਕ ਘਟਕ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਉਸਦੇ ਦੋਨੋਂ ਹੀ ਘੱਟਕ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੋਣ।
2. ਸ਼ਾਮਿਲ 'ਜਾਂ' ਤੋਂ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ (ਮਿਸ਼ਰਿਤ) ਝੂਠ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਸਦੇ ਦੋਨਾਂ ਹੀ ਘੱਟਕ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

p: *'ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ ਜਾਂ ਉਹ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ'*

ਇਸਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

q: *ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ।*

r: *ਉਹ (ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ) ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।*

ਇੱਥੇ ਜੇਕਰ q ਸੱਚ ਹੈ ਤਾਂ r ਝੂਠ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ r ਸੱਚ ਹੈ ਤਾਂ q ਝੂਠ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ p ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇੱਕ ਹੋਰ ਕਥਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

p: *'ਸੰਖਿਆ 125, ਸੰਖਿਆ 7 ਜਾਂ ਸੰਖਿਆ 8 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ।'*

ਇਸਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ :

q: *ਸੰਖਿਆ 125, ਸੰਖਿਆ 7 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ।*

r: *ਸੰਖਿਆ 125, ਸੰਖਿਆ 8 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ।*

ਇੱਥੇ q ਅਤੇ r ਦੋਨੋਂ ਹੀ ਝੂਠ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ p ਵੀ ਝੂਠ ਹੈ।

ਦੁਬਾਰਾ, ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ

p: 'ਸਕੂਲ ਬੰਦ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅੱਜ ਛੁੱਟੀ ਹੈ ਜਾਂ ਐਤਵਾਰ ਹੈ।'

ਇਸਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

q: *ਸਕੂਲ ਬੰਦ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅੱਜ ਛੁੱਟੀ ਹੈ।*

r: *ਸਕੂਲ ਬੰਦ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅੱਜ ਐਤਵਾਰ ਹੈ।*

q ਅਤੇ r ਦੋਨੋਂ ਕਥਨ ਹੀ ਸੱਚ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ।

ਇੱਕ ਹੋਰ ਕਥਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

p: *'ਮੁੰਬਈ, ਕੋਲਕਾਤਾ ਜਾਂ ਕਰਨਾਟਕ ਦੀ ਰਾਜਧਾਨੀ ਹੈ।'*

ਇਸਦੇ ਘਟਕ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹਨ :

q : *ਮੁੰਬਈ, ਕੋਲਕਾਤਾ ਦੀ ਰਾਜਧਾਨੀ ਹੈ।*

r : *ਮੁੰਬਈ, ਕਰਨਾਟਕ ਦੀ ਰਾਜਧਾਨੀ ਹੈ।*

ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀਆਂ ਕਥਨਾਂ ਝੂਠ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਵੀ ਝੂਠ ਹੈ।

ਆਓ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ :

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ 'ਜਾਂ' ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਪਹਿਚਾਣ ਕਰਕੇ ਜਾਂਚੋ ਕਿ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਝੂਠ ਹੈ।

(i) $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਾਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

(ii) ਕਿਸੇ ਪਬਲਿਕ ਪੁਸਤਕਾਲਾ ਵਿੱਚ ਦਾਖਲੇ ਲਈ ਬੱਚਿਆਂ ਨੂੰ ਸਕੂਲ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਪਹਿਚਾਣ ਪੱਤਰ ਜਾਂ ਸਕੂਲ ਅਧਿਕਾਰੀਆਂ ਰਾਹੀਂ ਲਿਖੇ ਪੱਤਰ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(iii) ਆਇਤ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਜਾਂ ਇੱਕ ਪੰਜ-ਭੁਜੀ ਬਹੁਭੁਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : (i) ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹਨ :

p: $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

q: $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲਾ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 'ਜਾਂ' ਨਿਵੇਕਲਾ ਹੈ।

(ii) ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

p: *ਕਿਸੇ ਪਬਲਿਕ ਪੁਸਤਕਾਲਾ ਵਿੱਚ ਦਾਖਲੇ ਲਈ ਬੱਚਿਆਂ ਨੂੰ ਸਕੂਲ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਪਹਿਚਾਣ ਪੱਤਰ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।*

q: *ਕਿਸੇ ਪਬਲਿਕ ਪੁਸਤਕਾਲਾ ਵਿੱਚ ਦਾਖਲੇ ਲਈ ਬੱਚਿਆਂ ਨੂੰ ਸਕੂਲ ਅਧਿਕਾਰੀਆਂ ਰਾਹੀਂ ਲਿਖਿਆ ਪੱਤਰ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।*

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇੱਥੇ ਪੁਸਤਕਾਲਾ ਵਿੱਚ ਦਾਖਲੇ ਦੇ ਲਈ ਬੱਚਿਆਂ ਦੇ ਕੋਲ ਜਾਂ ਤਾਂ ਪਹਿਚਾਣ ਪੱਤਰ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਸਕੂਲ ਦੇ ਅਧਿਕਾਰੀਆਂ ਰਾਹੀਂ ਲਿਖਿਆ ਪੱਤਰ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਦੋਨੋਂ ਕਾਗਜ਼ਾਤ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇੱਥੇ 'ਜਾਂ' ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ।

(iii) ਇੱਥੇ 'ਜਾਂ' ਨਿਵੇਕਲਾ ਹੈ। ਘਟਕ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਅਧਾਰ 'ਤੇ ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ।

ਪਰਿਮਾਣਵਾਚਕ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ (Quantifiers Phrases) "ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ "ਜਾਂ" 'ਸਾਰਿਆਂ ਦੇ ਲਈ/ ਹਰੇਕ ਲਈ" ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਖਾਸ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ਾਂ ਨੂੰ ਪਰਿਮਾਣ ਵਾਚਕ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਗਣਿਤੀ ਕਥਨ ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ "ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ" ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਕਥਨ 'ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਆਇਤ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੀਆਂ ਹਨ' ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇਸ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਆਇਤ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਸਾਰੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਵਾਕ ਅੰਸ਼ "ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਦੀ ਹੋਂਦ" ਤੋਂ ਨੇੜੇ ਦਾ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ "ਹਰੇਕ ਲਈ" ਹੈ। ਆਉ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਭਾਵ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ,

'ਹਰੇਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ p ਦੇ ਲਈ, $\sqrt{p}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।'

ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਹੋਇਆ ਕਿ ਜੇਕਰ S ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਤਾਂ ਸਮੂਹ S ਦੇ ਹਰੇਕ ਮੈਂਬਰ p ਦੇ ਲਈ, $\sqrt{p}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਕਿਸੇ ਗਣਿਤੀ ਕਥਨ ਵਿੱਚ 'ਹਰੇਕ ਲਈ' ਵਾਕ ਅੰਸ਼ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ ਇਹ ਅਰਥ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਖਾਸ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਸਮੂਹ ਦੇ ਹਰੇਕ ਮੈਂਬਰ ਵਿੱਚ ਉਹ ਖ਼ਾਸ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ।

ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਵੀ ਧਿਆਨ ਦੇਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਗੱਲ ਦਾ ਜਾਨਣਾ ਵੀ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵਾਕ ਵਿੱਚ ਸੰਯੋਜਕ ਨੂੰ ਠੀਕ-ਠੀਕ ਕਿਸੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਲਿਖਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਦੋ ਵਾਕਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰੋ :

1. ਹਰੇਕ ਧਨ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ x ਦੇ ਲਈ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਧਨ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ y ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ $y < x$
2. ਇੱਕ ਧਨ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ y ਦਾ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ ਹਰੇਕ ਧਨ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ x ਦੇ ਲਈ $y < x$

ਜਦੋਂ ਕਿ ਇੰਜ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋਨਾਂ ਵਾਕਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਹੀ ਅਰਥ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਇੰਜ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਕਥਨ (1) ਸੱਚ ਹੈ ਜਦੋਂਕਿ (2) ਝੂਠ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਗਣਿਤੀ ਵਾਕ ਦੇ ਅਰਥ ਪੂਰਨ ਹੋਣ ਲਈ ਸੰਯੋਜਕਾਂ ਜਾਂ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦਾ ਠੀਕ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ, ਨਾ ਹੀ ਪਹਿਲਾਂ ਤੇ ਨਾਂ ਹੀ ਬਾਦ ਵਿੱਚ,

ਸ਼ਬਦ 'ਅਤੇ' ਅਤੇ 'ਜਾਂ' ਸੰਯੋਜਕ ਕਹਿਲਾਉਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ "ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ" ਅਤੇ "ਹਰੇਕ ਲਈ" ਨੂੰ ਪਰਿਮਾਣ ਵਾਚਕ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਈ ਗਣਿਤੀ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਖਾਸ ਸ਼ਬਦਾਂ/ਵਾਕ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਨਾਲ ਜੁੜਿਆ ਅਰਥ ਸਮਝਣਾ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ, ਖ਼ਾਸ ਤੌਰ ਤੇ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਥਨਾਂ ਦੀ ਵੈਧਤਾ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰਨੀ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 14.3

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾਂ ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ ਅਤੇ ਫੇਰ ਉਹਨਾ ਨੂੰ ਘਟਕ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡੋ :

(i) ਸਾਰੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਮਿਸ਼ਰਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(ii) ਕਿਸੇ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ ਧਨ ਜਾਂ ਰਿਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਰੇਤ ਧੁੱਪ ਵਿੱਚ ਜਲਦੀ ਗਰਮ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਰਾਤ ਨੂੰ ਜਲਦੀ ਠੰਢੀ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(iv) $x = 2$ ਅਤੇ $x = 3;$ ਸਮੀਕਰਣ $3x^2 - x - 10 = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਹਨ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

2. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਪਰਿਮਾਣਵਾਚਕ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ ਪਹਿਚਾਣੋ ਅਤੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਨਿਸ਼ੇਪਨ ਲਿਖੋ :
   (i) ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ, ਜੋ ਆਪਣੇ ਵਰਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।
   (ii) ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਦੇ ਲਈ x, $(x+1)$ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
   (iii) ਭਾਰਤ ਦੇ ਹਰੇਕ ਰਾਜ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਰਾਜਧਾਨੀ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।
3. ਜਾਂਚੋ ਕਿ ਕੀ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਨਿਸ਼ੇਪਣ ਹਨ। ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਲਈ ਕਾਰਨ ਦੱਸੋ :
   (i) ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ x ਅਤੇ y ਦੇ ਲਈ $x + y = y + x$ ਸੱਚ ਹੈ।
   (ii) ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ x ਅਤੇ y ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਲਈ $x + y = y + x$ ਸੱਚ ਹੈ।
4. ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ 'ਜਾਂ' 'ਨਿਵੇਕਲਾ' ਹੈ ਜਾਂ 'ਸ਼ਾਮਿਲ' ਹੈ। ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਲਈ ਕਾਰਨ ਦੱਸੋ :
   (i) ਸੂਰਜ ਚੜ੍ਹਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਚੰਨ ਢਲਦਾ ਹੈ।
   (ii) ਡਰਾਇਵਿੰਗ ਲਾਈਸੰਸ ਦੇ ਆਵੇਦਨ ਲਈ ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ ਰਾਸ਼ਨ ਕਾਰਡ ਜਾਂ ਪਾਸਪੋਰਟ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।
   (iii) ਸਾਰੀਆਂ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਧਨ ਜਾਂ ਰਿਣ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

14.5 ਅੰਤਰਭਾਵ/ਸ਼ਰਤਬੱਧ ਕਥਨ (Implications/Conditional Statements)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ 'ਜੇਕਰ-ਤਾਂ', 'ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ' ਅਤੇ 'ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ' ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਵਟਾਂਦਰਾ ਕਰਾਂਗੇ।

'ਜੇਕਰ-ਤਾਂ' ਦੇ ਨਾਲ ਕਥਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਬੜਾ ਆਮ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

r: ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਡਾ ਜਨਮ ਕਿਸੇ ਦੇਸ਼ ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਉਸ ਦੇਸ਼ ਦੇ ਨਾਗਰਿਕ ਹੋ।

ਇਸ ਕਥਨ ਨੂੰ ਵੇਖਣ ਤੋਂ ਪਤਾ ਲਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਪਘਟਨਾਂ p ਅਤੇ q ਤੋਂ ਮਿਲਕੇ ਬਣਿਆ ਹੈ।

p : ਤੁਹਾਡਾ ਜਨਮ ਕਿਸੇ ਦੇਸ਼ ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ ਹੈ।

q : ਤੁਸੀ ਉਸ ਦੇਸ਼ ਦੇ ਨਾਗਰਿਕ ਹੋ।

ਤਾਂ ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q" ਇਹ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ p ਸੱਚ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ q ਜ਼ਰੂਰ ਸੱਚ ਹੋਵੇਗਾ।

ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q' ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਇੱਕ ਸਭ ਤੋਂ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਤੱਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ p ਝੂਠ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ q ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਕਹਿੰਦਾ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਡਾ ਜਨਮ ਕਿਸੇ ਦੇਸ਼ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੋਇਆ ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ q ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ।

ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ p ਦੇ ਘਟਿਤ ਨਹੀਂ ਹੋਣ ਦਾ q ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਤੇ ਕੋਈ ਅਸਰ ਨਹੀਂ ਪੈਂਦਾ ਹੈ।

ਕਥਨ "ਜੇਕਰ p, ਤਾਂ q" ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਹੋਰ ਤੱਥ ਵੀ ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਕਥਨ ਵਿੱਚ ਇਹ ਅੰਤਰਨਿਹਤ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ *p ਘਟਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।*

ਕਥਨ "ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q" ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੇ ਕਈ ਤਰੀਕੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਮਾਧਿਅਮ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਾਂਗੇ। *"ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ 9 ਦੀ ਗੁਣਜ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ 3 ਦੀ ਵੀ ਗੁਣਜ ਹੈ।"*

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ p ਅਤੇ q ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਨ।

p : ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ 9 ਦੀ ਗੁਣਜ ਹੈ।

q: ਉਹ ਸੰਖਿਆ 3 ਦੀ ਵੀ ਗੁਣਜ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q' ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹਨ :

1. 'p ਅੰਤਰਭਾਵ q' ਨੂੰ $p \Rightarrow q$ ਤੋਂ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰਤੀਕ '$\Rightarrow$' ਅੰਤਰਭਾਵ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਕਥਨ 'ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ 9 ਦੀ ਗੁਣਜ ਹੈ' ਵਿੱਚ ਇਹ ਕਥਨ ਅੰਤਰਨਿਹਤ ਹੈ ਕਿ 'ਉਹ ਸੰਖਿਆ 3 ਦੀ ਵੀ ਗੁਣਜ ਹੈ'।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

2. p, q ਦੇ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੋਇਆ ਕਿ ਇਹ ਪਤਾ ਹੋਣਾ ਕਿ ਸੰਖਿਆ 9 ਦੀ ਗੁਣਜ ਹੈ, ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਣ ਦੇ ਲਈ ਕਿ ਉਹ ਸੰਖਿਆ 3 ਦੀ ਵੀ ਗੁਣਜ ਹੈ।
3. 'p ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ q' ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੋਇਆ ਕਿ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ 9 ਦੀ ਗੁਣਜ ਹੈ, ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ ਉਹ ਸੰਖਿਆ 3 ਦੀ ਵੀ ਗੁਣਜ ਹੈ।
4. 'q ਜ਼ਰੂਰੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ p ਦੇ ਲਈ।' ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੋਇਆ ਕਿ ਜਦੋਂ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ 9 ਦੀ ਗੁਣਜ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ 'ਤੇ 3 ਦੀ ਵੀ ਗੁਣਜ ਹੈ।
5. '$\sim q$ ਅੰਤਰਭਾਵ $\sim p$'। ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੋਇਆ ਕਿ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ 3 ਦੀ ਗੁਣਜ ਨਹੀਂ ਹੈ,ਤਾਂ ਉਹ ਸੰਖਿਆ 9 ਦੀ ਵੀ ਗੁਣਜ ਨਹੀਂ ਹੈ।

14.5.1 *ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਵਿਲੋਮ (Contrapositive and converse)* ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਵਿਲੋਮ ਕੁਝ ਹੋਰ ਕਥਨ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ "ਜੇਕਰ-ਤਾਂ" ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਰਾਹੀਂ ਬਣਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ 'ਜੇਕਰ-ਤਾਂ' ਵਾਲੇ ਕਥਨ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ,

ਜੇਕਰ ਭੌਤਿਕ ਵਾਤਾਵਰਣ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਵ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਜੈਵਿਕ ਵਾਤਾਵਰਣ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਕਥਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ

"ਜੇਕਰ ਜੈਵਿਕ ਵਾਤਾਵਰਣ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਵ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਭੌਤਿਕ ਵਾਤਾਵਰਣ ਵਿਚ ਤਬਦੀਲੀ ਨਹੀਂ"

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ ਦੋਨੋਂ ਕਥਨ ਸਮਾਨ ਅਰਥ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੇ ਲਈ ਆਉ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ ਲਿਖੋ :

(i) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ 9 ਤੋਂ ਭਾਜ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ 3 ਨਾਲ ਵੀ ਭਾਜ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਜੰਮੇ ਹੋ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਭਾਰਤ ਦੇ ਇੱਕ ਨਾਗਰਿਕ ਹੋ।

(iii) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਬਾਹੂ ਹੈ ਤਾਂ ਸਮਦੋਬਾਹੂ ਵੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਤਿੰਨ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ,

(i) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ 3 ਨਾਲ ਭਾਜ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ 9 ਨਾਲ ਵੀ ਭਾਜ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਭਾਰਤ ਦੇ ਨਾਗਰਿਕ ਨਹੀਂ ਹੋ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਜੰਮੇ ਹੋ।

(iii) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਦੋਬਾਹੂ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਸਮਬਾਹੂ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਉਦਾਹਰਣ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ ਕਿ ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q' ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ q ਨਹੀਂ ਤਾਂ p ਨਹੀਂ' ਭਾਵ 'ਜੇਕਰ $\sim q$, ਤਾਂ $\sim p$' ਹੈ।

ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ ਵਿਲੋਮ ਕਹਾਉਣ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਪਦ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q' ਦਾ ਵਿਲੋਮ ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ q ਤਾਂ p' ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਕਥਨ

p : *'ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ 10 ਨਾਲ ਭਾਜ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ 5 ਨਾਲ ਵੀ ਭਾਜ ਹੈ।' ਦਾ ਵਿਲੋਮ ਕਥਨ*

q : *'ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ 5 ਨਾਲ ਭਾਜ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ 10 ਨਾਲ ਵੀ ਭਾਜ ਹੈ।'*

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਵਿਲੋਮ ਲਿਖੋ :

(i) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ n ਜਿਸਤ ਹੈ ਤਾਂ n^2 ਵੀ ਜਿਸਤ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਹੱਲ ਕਰੋ, ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ A-ਗਰੇਡ ਮਿਲੇਗਾ।

(iii) ਜੇਕਰ ਦੋ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ $a > b$ ਤਾਂ $a - b$ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇੱਕ ਧਨ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਹੱਲ : ਇਹਨਾਂ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਵਿਲੋਮ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਹਨ :

(i) ਜੇਕਰ ਸੰਖਿਆ n^2 ਜਿਸਤ ਹੈ ਤਾਂ n ਵੀ ਜਿਸਤ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ A–ਗਰੇਡ ਮਿਲਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੱਲ ਕੀਤੇ ਹਨ।

(iii) ਜੇਕਰ ਦੋ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ $a > b$ ਤਾਂ $(a - b)$ ਹਮੇਸ਼ਾ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਆਉ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਲਈ ਪਹਿਲਾਂ ਸੰਗਤ ਘਟਕ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ ਅਤੇ ਫੇਰ ਜਾਂਚੋ ਕਿ ਕੀ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

(i) ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਸਮਬਾਹੂ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਸਮਦੋਬਾਹੂ ਵੀ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ a ਅਤੇ b ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ ab ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : (i) ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

p : ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਸਮਬਾਹੂ ਹੈ।

q : ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਬਾਹੂ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਸਮਬਾਹੂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਦੋਬਾਹੂ ਵੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ।

(ii) ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

p : a ਅਤੇ b ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

q : ab ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ ਦੋ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਵੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ।

ਵਾਕ ਅੰਸ਼ 'ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ' ਪ੍ਰਤੀਕ '$\Leftrightarrow$' ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਕਥਨ p ਅਤੇ q ਦੇ ਲਈ ਇਸਦੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸਮਤਲ ਰੂਪ ਹਨ।

(i) 'p ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ q'

(ii) 'q ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ p'

(iii) 'p ਜ਼ਰੂਰੀ ਅਤੇ ਕਾਫ਼ੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ q ਦੇ ਲਈ' ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਉਲਟ

(iv) $p \Leftrightarrow q$

ਇੱਥੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਉਦਾਹਰਣ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਹੇਠਾਂ ਦੋ ਕਥਨ ਯੁਗਮ ਦਿੱਤੇ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਕਥਨ ਯੁਗਮ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ 'ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ' ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਰਾਹੀਂ ਮਿਲਾਓ।

(i) p: ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਆਇਤ ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸ ਦੀਆਂ ਚਾਰੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੀਆਂ ਹਨ।

q: ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਆਇਤ ਦੀ ਚਾਰਾਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਆਇਤ ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੈ।

(ii) p: ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ 3 ਤੋਂ ਭਾਜ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਵੀ 3 ਤੋਂ ਭਾਜ ਹੈ।

q: ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ 3 ਤੋਂ ਭਾਜ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਵੀ 3 ਤੋਂ ਭਾਜ ਹੈ।

ਹੱਲ : (i) ਕੋਈ ਆਇਤ ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ ਉਸ ਦੀਆਂ ਚਾਰਾਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

(ii) ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ 3 ਨਾਲ ਭਾਜ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ ਉਸ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ 3 ਨਾਲ ਭਾਜ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਭਿਆਸ 14.4

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ 'ਜੇਕਰ-ਤਾਂ' ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਪੰਜ ਭਿੰਨ ਰੂਪਾਂ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖੋ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਰਥ ਸਮਾਨ ਹੋਣ।

   ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕਿਰਤਕ ਸੰਖਿਆ ਟਾਂਕ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦਾ ਵਰਗ ਵੀ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

2. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਵਿਲੋਮ ਕਥਨ ਲਿਖੋ :

   (i) ਜੇਕਰ x ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ x ਟਾਂਕ ਹੈ।

   (ii) ਜੇਕਰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ।

   (iii) ਕਿਸੇ ਵਸਤੂ ਦੇ ਠੰਢਾ ਹੋਣ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਉਸਦਾ ਤਾਪਮਾਨ ਘੱਟ ਹੈ।

   (iv) ਤੁਸੀਂ ਜਿਆਮਿਤੀ ਵਿਸ਼ੇ ਨੂੰ ਸਮਝ ਨਹੀਂ ਸਕਦੇ ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਗਿਆਨ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਨਿਗਨਾਤਮਕ ਵਿਵੇਚਨ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

   (v) x ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ x ਸੰਖਿਆ 4 ਨਾਲ ਭਾਜ ਹੈ।

3. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਨੂੰ 'ਜੇਕਰ-ਤਾਂ' ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ :

   (i) ਤੁਹਾਨੂੰ ਨੌਕਰੀ ਮਿਲਣ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਤੁਹਾਡੀ ਯੋਗਤਾ ਚੰਗੀ ਹੈ।

   (ii) ਕੇਲੇ ਦਾ ਰੁੱਖ ਫੁੱਟੇਗਾ ਜੇਕਰ ਉਹ ਇੱਕ ਮਹੀਨੇ ਤੱਕ ਗਰਮ ਵਾਤਾਵਰਨ ਵਿਚ ਰਹੇ।

   (iii) ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਜੇਕਰ ਉਸਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਮਦੋਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

   (iv) ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ A^+ ਗਰੇਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ, ਲਈ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰ ਲੈਂਦੇ ਹੋ।

4. ਹੇਠਾਂ (a) ਅਤੇ (b) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ (i) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਵਿਲੋਮ ਕਥਨ ਪਛਾਣੋ।

   (a) ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਦਿੱਲੀ ਵਿੱਚ ਰਹਿੰਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ ਸਰਦੀਆਂ ਦੇ ਕੱਪੜੇ ਹਨ।

   (i) ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ ਠੰਢ ਦੇ ਕੱਪੜੇ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਦਿੱਲੀ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਰਹਿੰਦੇ ਹੋ।

   (ii) ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ ਸਰਦੀਆਂ ਦੇ ਕੱਪੜੇ ਹਨ, ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਦਿੱਲੀ ਵਿੱਚ ਰਹਿੰਦੇ ਹੋ।

   (b) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਮਦੋਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

   (i) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਮਦੋਭਾਜਿਤ ਨਹੀਂ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ ਚਤੁਰਭੁਜ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਨਹੀਂ ਹੈ।

   (ii) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਮਦੋਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ।

14.6 ਕਥਨਾਂ ਦੀ ਵੈਧਤਾ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਨਾ (Validating Statements)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਇੱਕ ਕਥਨ ਕਿਹੜੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਜਾਨਣ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦਾ ਉੱਤਰ ਜਾਨਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ।

ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦਾ ਕੀ ਅਰਥ ਹੈ? ਇਹ ਕਹਿਣ ਦਾ ਕੀ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਕਦੋਂ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਕਦੋਂ ਝੂਠ ਹੈ?

ਉੱਤੇ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਇਸ ਗੱਲ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੇ ਹਨ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਵਿੱਚ "ਅਤੇ" ਅਤੇ "ਜਾਂ" ਵਿੱਚੋਂ ਸੰਯੋਜਕ ਸ਼ਬਦ ਜਾਂ "ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ" ਅਤੇ "ਜੇਕਰ-ਤਾਂ" ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸ ਸ਼ਰਤ ਦਾ ਜਾਂ "ਹਰੇਕ ਲਈ" ਅਤੇ "ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ" ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸ ਪਰਿਮਾਣਵਾਚਕ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਇਹਨਾਂ ਕਥਨਾਂ ਦੀ ਵੈਧਤਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕੁਝ ਤਕਨੀਕ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹ ਜਾਂਚਣ ਲਈ ਕਿ ਕੋਈ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ਕੁਝ ਆਮ ਨਿਯਮਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਨਿਯਮ 1 : ਜੇਕਰ p ਅਤੇ q ਗਣਿਤੀ ਕਥਨ ਹਨ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿ ਕਥਨ "p ਅਤੇ q" ਸੱਚ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਚਰਨਾਂ ਦਾ ਅਨੁਸਰਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਚਰਨ 1 : ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਕਥਨ p ਸੱਚ ਹੈ।

ਚਰਨ 2 : ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਕਥਨ q ਸੱਚ ਹੈ।

ਨਿਯਮ 2 ਸੰਯੋਜਕ 'ਜਾਂ' ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ

ਜੇਕਰ p ਅਤੇ q ਗਣਿਤੀ ਕਥਨ ਹਨ ਤਾਂ ਕਥਨ "p ਜਾਂ q" ਨੂੰ ਸੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਨੂੰ ਸੱਚ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਸਥਿਤੀ 1 : ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ p ਝੂਠ ਹੈ, q ਨੂੰ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਸੱਚ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ।

ਸਥਿਤੀ 2 : ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ q ਝੂਠ ਹੈ, p ਨੂੰ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਸੱਚ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ।

ਨਿਯਮ 3 : ਵਾਕ ਅੰਸ਼ "ਜੇਕਰ-ਤਾਂ" ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ

ਕਥਨ "ਜੇਕਰ p, ਤਾਂ q" ਨੂੰ ਸੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਨੂੰ ਸੱਚ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਸਥਿਤੀ 1 : ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ p ਸੱਚ ਹੈ, q ਨੂੰ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਸੱਚ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ (ਪ੍ਰਤੱਖ ਵਿਧੀ)।

ਸਥਿਤੀ 2 : ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ q ਝੂਠ ਹੈ, p ਨੂੰ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਝੂਠ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ (ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਵਿਧੀ)।

ਨਿਯਮ 4 : ਵਾਕ ਅੰਸ਼ "ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ" ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ

ਕਥਨ "p ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ q" ਨੂੰ ਸੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

(i) *ਜੇਕਰ p ਸੱਚ ਹੈ ਤਾਂ q ਸੱਚ ਹੈ।* (ii) *ਜੇਕਰ q ਸੱਚ ਹੈ ਤਾਂ p ਸੱਚ ਹੈ।*

ਆਓ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ :

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਜਾਂਚੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

ਜੇਕਰ $x, y \in \mathbf{Z}$ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ x ਅਤੇ y ਟਾਂਕ ਹਨ ਤਾਂ xy ਵੀ ਟਾਂਕ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $p : x, y \in \mathbf{Z}$ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ x ਅਤੇ y ਟਾਂਕ ਹਨ।

$q : xy$ *ਟਾਂਕ ਹੈ।*

ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦੀ ਵੈਧਤਾ ਨੂੰ ਜਾਂਚਣ ਲਈ ਅਸੀਂ ਨਿਯਮ 3 ਦੀ ਸਥਿਤੀ 1 ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਭਾਵ ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ p ਸੱਚ ਹੈ ਅਸੀਂ q ਨੂੰ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਸੱਚ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

p ਸੱਚ ਹੈ ਭਾਵ x ਅਤੇ y ਟਾਂਕ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ

$x = 2m + 1$ ਕਿਸੇ ਪੂਰਨ ਅੰਕ m ਲਈ।

$y = 2n + 1$ ਕਿਸੇ ਪੂਰਨ ਅੰਕ n ਲਈ।

ਇਸ ਲਈ $xy = (2m + 1)(2n + 1)$

$= 2(2mn + m + n) + 1$

ਇਸ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ xy ਵੀ ਟਾਂਕ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਅਸੀਂ ਨਿਯਮ 3 ਦੀ ਸਥਿਤੀ 2 ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਰਾਹੀਂ ਜਾਂਚਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

ਅਸੀਂ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ ਕਿ q ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਕਥਨ q ਦੇ ਨਿਖੇਧਣ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਕਥਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ,

$\sim q$: *ਗੁਣਨਫਲ xy ਜਿਸਤ ਹੈ।*

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਹ ਕੇਵਲ ਉਦੋਂ ਹੀ ਸੰਭਵ ਹੈ ਜਦੋਂ x ਜਾਂ y ਜਿਸਤ ਹੋਣ ਜਿਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ p ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਕਿ :

$$\sim q \Rightarrow \sim p$$

ਟਿੱਪਣੀ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਉਦਾਹਰਣ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਕਥਨ $p \Rightarrow q$ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਕਥਨ $\sim q \Rightarrow \sim p$ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰਕੇ ਇਹ ਪਤਾ ਲਗਾਉ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ, 'ਜੇਕਰ $x, y \in \mathbf{Z}$ 'ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ xy ਟਾਂਕ ਹਨ ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ x ਅਤੇ y ਵੀ ਟਾਂਕ ਹੈ।'

ਹੱਲ : ਆਉ ਅਸੀਂ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਨਾ ਤੋਂ ਬੁਲਾਈਏ :

p : xy ਟਾਂਕ ਹੈ।

q : x ਅਤੇ y ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਟਾਂਕ ਹਨ।

ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ $\sim q \Rightarrow \sim p$ ਨੂੰ ਜਾਂਚ ਕੇ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ $p \Rightarrow q$ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

ਹੁਣ, $\sim q$: ਇਹ ਝੂਠ ਹੈ ਕਿ x ਅਤੇ y ਦੋਵੇਂ ਟਾਂਕ ਹਨ।

ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਹੋਇਆ ਕਿ x (ਜਾਂ y) ਜਿਸਤ ਹੈ।

ਤਾਂ, $x = 2n$ ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $xy = 2ny$ ਹੈ। ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ xy ਜਿਸਤ ਹੈ। ਭਾਵ $\sim p$ ਸੱਚ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ $\sim q \Rightarrow \sim p$ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਬਾਸ਼ਰਤ ਕਥਨ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਵਿਲੋਮ ਕਥਨ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਕੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

p : ਇੱਕ ਗਿਲਾਸ ਅੱਧਾ ਖ਼ਾਲੀ ਹੈ।

q : ਇੱਕ ਗਿਲਾਸ ਅੱਧਾ ਭਰਿਆ ਹੈ।

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਪਹਿਲਾ ਕਥਨ ਘਟਿਤ ਹੋਵੇਗਾ ਤਾਂ ਦੂਜਾ ਵੀ ਘਟਿਤ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਤੱਥ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਵਿਅਕਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਗਿਲਾਸ ਅੱਧਾ ਖ਼ਾਲੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਅੱਧਾ ਭਰਿਆ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਗਿਲਾਸ ਅੱਧਾ ਭਰਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਹ ਅੱਧਾ ਖ਼ਾਲੀ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇੱਕ ਗਿਲਾਸ ਅੱਧਾ ਖ਼ਾਲੀ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ ਉਹ ਅੱਧਾ ਭਰਿਆ ਹੈ।

ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

14.6.1 *ਵਿਰੋਧ ਰਾਹੀਂ (By Contradiction)* ਇਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿ ਕੋਈ ਕਥਨ p ਸੱਚ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ p ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਭਾਵ $\sim p$ ਸੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਨਤੀਜੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਸਾਡੀ ਧਾਰਨਾ ਦਾ ਖੰਡਨ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਪਰਿਣਾਮ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ p ਨੂੰ ਸੱਚ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਰਲ ਉਦਾਹਰਣ ਨੂੰ ਵੇਖੋ :

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਵਿਰੋਧ ਰਾਹੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਨੂੰ ਸੱਚ ਸਾਬਿਤ ਕਰੋ :

p: $\sqrt{7}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਹੱਲ : ਇਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ।

$\sqrt{7}$ ਇਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ $\sqrt{7} = \frac{a}{b}$ ਹੈ ਜਿੱਥੇ a ਅਤੇ b ਦਾ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਰਗ ਕਰਨ ਤੇ : $7 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 7b^2 \Rightarrow$ 7 ਸੰਖਿਆ a ਨੂੰ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ c ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ $a = 7c$ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $a^2 = 49c^2$ ਅਤੇ $a^2 = 7b^2$

$\Rightarrow 7b^2 = 49c^2 \Rightarrow b^2 = 7c^2 \Rightarrow$ 7 ਸੰਖਿਆ b ਨੂੰ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ 7 ਸੰਖਿਆ a ਨੂੰ ਵਿਭਾਜਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਜਿਹੜਾ ਸਾਡੀ ਮਾਨਤਾ 'a ਅਤੇ b ਦਾ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਹੈ' ਮਨੌਤ ਦਾ ਖੰਡਨ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਮਾਨਤਾ ਕਿ $\sqrt{7}$ ਪਰਿਮੇਯ ਹੈ' ਝੂਠ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਕਿ '$\sqrt{7}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ' ਸੱਚ ਹੈ।

ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸਦੇ ਰਾਹੀਂ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ। ਇਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਵੈਧ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ ਨੂੰ 'ਪ੍ਰਤਿਉਦਾਹਰਣ' ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਆਪ ਹੀ ਇਸ਼ਾਰਾ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦਾ ਖੰਡਨ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16 : ਇੱਕ ਪ੍ਰਤਿਉਦਾਹਰਣ ਰਾਹੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ :

'ਜੇਕਰ n ਟਾਂਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ n ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।'

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q' ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਝੂਠ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਦਰਸਾਉਣਾ ਹੈ ਕਿ 'ਜੇਕਰ p ਤਾਂ $\sim q$ ' ਹੈ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਟਾਂਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਖੋਜਣਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਅਭਾਜ ਨਾ ਹੋਵੇ। ਸੰਖਿਆ 9 ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸੰਖਿਆ 9 ਇੱਕ ਪ੍ਰਤਿਉਦਾਹਰਣ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਝੂਠ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਵਿਧੀਆਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤਾ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਰਾਹੀਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

ਟਿੱਪਣੀ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਦਾ ਖੰਡਨ ਕਰਨ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਪੇਸ਼ ਕਰਨ ਤੇ ਕਥਨ ਦੀ ਵੈਧਤਾ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 14.5

1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਕਥਨ

p: 'ਜੇਕਰ x ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਕਿ $x^3 + 4x = 0$, ਤਾਂ $x = 0$, ਸੱਚ ਹੈ'।

(i) ਪ੍ਰਤੱਖ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ (ii) ਵਿਰੋਧ ਰਾਹੀਂ (iii) ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ ਰਾਹੀਂ

2. ਪ੍ਰਤਿਉਦਾਹਰਣ ਰਾਹੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਕਥਨ "ਕਿਸੇ ਵੀ ਇਹੋ ਜਿਹੀਆ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਲਈ ਜਿੱਥੇ $a^2 = b^2$ ਹੈ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ $a = b$" ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ।

3. ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ :

p: ਜੇਕਰ x ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ x^2 ਜਿਸਤ ਹੈ ਤਾਂ x ਵੀ ਜਿਸਤ ਹੈ।

4. ਪ੍ਰਤਿਉਦਾਹਰਣ ਰਾਹੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ :

(i) p: ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਾਰੇ ਕੋਣ ਸਮਾਨ ਹਨ ਤਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਅਧਿਕ ਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।

(ii) q: ਸਮੀਕਰਣ $x^2 - 1 = 0$ ਦਾ ਕੋਈ ਮੂਲ 0 ਅਤੇ 2 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸਥਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

5. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਹੜਾ ਝੂਠ ਹੈ? ਹਰੇਕ ਲਈ ਵੈਧ ਕਾਰਨ ਦੱਸੋ।

(i) p: ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਹਰੇਕ ਅਰਧਵਿਆਸ ਉਸਦੀ ਜੀਵਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(ii) q: ਚੱਕਰ ਦੀ ਜੀਵਾ ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਸਮਦੋਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

(iii) r: ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਕਿਸੇ ਇਲਿਪਸ ਦੀ ਇੱਕ ਖਾਸ ਸਥਿਤੀ ਹੈ।

(iv) s: ਜੇਕਰ x ਅਤੇ y ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਕਿ $x > y$ ਤਾਂ $-x < -y$ ਹੈ।

(v) t : $\sqrt{11}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 17 : ਜਾਂਚੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ 'ਜਾਂ' ਨਿਵੇਕਲਾ ਹੈ ਜਾਂ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਤਰਕ ਸੰਗਤ ਸਿੱਧ ਕਰੋ। ਮਿਸ਼ਰਤ ਕਥਨ ਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਪਤਾ ਕਰਕੇ ਜਾਂਚ ਲਈ ਵਰਤੋ ਕਰੋ ਤੇ ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਮਿਸ਼ਰਤ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

t: ਤੁਸੀਂ ਭਿਜ ਜਾਂਦੇ ਹੋ ਜੇਕਰ ਵਰਖਾ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਤੁਸੀਂ ਨਦੀ ਵਿੱਚ ਹੋਵੋ।

ਉਸਦੇ ਬਾਅਦ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਲਿਖੋ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਇਹ ਜਾਂਚਣ ਲਈ ਕਰੋ ਕਿ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ 'ਜਾਂ' ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਸੰਭਵ ਹੈ ਕਿ ਮੀਂਹ ਪੈ ਰਿਹਾ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਤੁਸੀਂ ਨਦੀ ਵਿਚ ਹੋਵੋ। ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹਨ :

p : *ਜਦੋਂ ਮੀਂਹ ਪੈਂਦਾ ਹੈ ਤੁਸੀਂ ਭਿੱਜ ਜਾਂਦੇ ਹੋ।*

q : *ਜਦੋਂ ਤੁਸੀਂ ਨਦੀ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੇ ਹੋ ਤੁਸੀ ਭਿੱਜ ਜਾਂਦੇ ਹੋ।*

ਇਥੇ ਦੋਨੋਂ ਘਟਕ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 18 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਨਿਸ਼ੇਧਣ ਲਿਖੋ :

(i) p: ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਲਈ $x^2 > x$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(ii) q: ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ x ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ ਜੋ $x^2 = 2$ ਹੈ।

(iii) r: ਹਰੇਕ ਪੰਛੀ ਦੇ ਪੰਖ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(iv) s: ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਸਤਰ ਤੇ ਹਰੇਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਗਣਿਤ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : (i) p ਦਾ ਨਿਸ਼ੇਧਣ "ਇਹ ਝੂਠ ਹੈ ਕਿ p ਸੱਚ ਹੈ" ਹੋਵੇਗਾ, ਭਾਵ ਸ਼ਰਤ $x^2 > x$ ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਲਈ ਲਾਗੂ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵਿਅਕਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

$\sim p$: ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ ਜੋ $x^2 < x$ ਹੈ।

(ii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ q ਇੱਕ ਇਹੋ ਜੇਹੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ x ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ $x^2 = 2$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\sim q$: ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ x ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ $x^2 = 2$ ਹੈ।

ਜਿਸਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$\sim q$: ਹਰੇਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਲਈ $x^2 \neq 2$ ਹੈ।

(iii) ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਸ਼ੇਧਣ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਹੈ:

$\sim r$: ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਪੰਛੀ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਪੰਖ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(iv) ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਸ਼ੇਧਣ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ :

$\sim s$: ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਸਤਰ ਤੇ ਗਣਿਤ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 19 : ਵਾਕ ਅੰਸ਼ "ਜ਼ਰੂਰੀ ਅਤੇ ਕਾਫ਼ੀ" ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਲਿਖੋ। ਇਸਦੀ ਵੈਧਤਾ ਦੀ ਜਾਂਚ ਵੀ ਕਰੋ। "ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਟਾਂਕ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ n^2 ਟਾਂਕ ਹੈ।"

ਹੱਲ : ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਦੇ ਟਾਂਕ ਹੋਣ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਅਤੇ ਕਾਫ਼ੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ ਕਿ n^2 ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਟਾਂਕ ਹੋਵੇ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ p ਅਤੇ q ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਦੱਸਦੇ ਹਨ :

p : ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਟਾਂਕ ਹੈ।

q : n^2 ਟਾਂਕ ਹੈ।

ਤਾਂ "p ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ q" ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸਦੀ ਵੈਧਤਾ ਜਾਂਚਣ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਜਾਂਚਣਾ ਪਵੇਗਾ ਕਿ ਕੀ ਕਥਨ "ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q" ਅਤੇ "ਜੇਕਰ q ਤਾਂ p" ਸੱਚ ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ 1 : "ਜੇਕਰ p, ਤਾਂ q"

ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q ਕਥਨ "ਜੇਕਰ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਟਾਂਕ ਹੈ ਤਾਂ n^2 ਟਾਂਕ ਹੈ" ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣਾ ਹੈ ਕੀ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ? ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ n ਟਾਂਕ ਹੈ, ਤਾਂ $n = 2k + 1$ ਜਿੱਥੇ k ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ

$$n^2 = (2k + 1)^2$$
$$= 4k^2 + 4k + 1$$

n^2, ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਤੋਂ 1 ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ n^2 ਟਾਂਕ ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ 2 : ਜੇਕਰ q, ਤਾਂ p

ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ n ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ n^2 ਟਾਂਕ ਹੈ ਤਾਂ n ਟਾਂਕ ਹੈ।'

ਜੇਕਰ q, ਤਾਂ p ਰਾਹੀਂ ਦੱਸਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ ਕੀ ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

(ਭਾਵ $\sim p \Rightarrow \sim q$) ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਹੈ,

'ਜੇਕਰ n ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ n^2 ਵੀ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।'

n ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $n = 2k$, ਜਿੱਥੇ k ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ ਨਤੀਜੇ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ n^2 ਜਿਸਤ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 20 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਅਤੇ ਕਾਫ਼ੀ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

t: ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ 80 km ਪ੍ਰਤਿ ਘੰਟਾ ਦੀ ਵੱਧ ਗਤੀ ਨਾਲ ਗੱਡੀ ਚਲਾਉਂਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਜੁਰਮਾਨਾ ਲੱਗੇਗਾ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ p ਅਤੇ q ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਨ।

p : ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ 80 km ਪ੍ਰਤੀ ਘੰਟਾ ਤੋਂ ਵੱਧ ਗਤੀ ਨਾਲ ਗੱਡੀ ਚਲਾਉਂਦੇ ਹੋ।

q : ਤੁਹਾਨੂੰ ਜੁਰਮਾਨਾ ਲੱਗੇਗਾ।

ਸ਼ਰਤ ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ p, q ਦੇ ਲਈ ਕਾਫ਼ੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ।

ਭਾਵ ਜੁਰਮਾਨਾ ਹੋਣ ਲਈ 80 km ਪ੍ਰਤਿ ਘੰਟਾ ਤੋਂ ਵੱਧ ਗਤੀ ਨਾਲ ਗੱਡੀ ਚਲਾਉਣਾ ਕਾਫ਼ੀ ਕਥਨ ਹੈ।

ਇੱਥੇ "80 km ਪ੍ਰਤਿ ਘੰਟਾ ਦੀ ਵੱਧ ਗਤੀ ਨਾਲ ਗੱਡੀ ਚਲਾਉਣਾ" ਕਾਫ਼ੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਜੇਕਰ p ਤਾਂ q ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ q, p ਦੇ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ।

ਭਾਵ ਜਦੋਂ ਤੁਸੀਂ 80 km ਪ੍ਰਤਿ ਘੰਟਾ ਦੀ ਵੱਧ ਗਤੀ ਨਾਲ ਗੱਡੀ ਚਲਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਰੂਪ ਤੋਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਜੁਰਮਾਨਾ ਲੱਗੇਗਾ। ਇੱਥੇ "ਜੁਰਮਾਨਾ ਲੱਗੇਗਾ" ਜ਼ਰੂਰੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਧਿਆਇ 14 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਨਿਖੇਧਣ ਲਿਖੋ :

(i) p: ਹਰੇਕ ਧਨ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x, ਲਈ ਸੰਖਿਆ $x - 1$ ਵੀ ਧਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

(ii) q: ਸਾਰੀਆਂ ਬਿੱਲੀਆਂ ਖਰੋਂਚਦੀਆਂ ਹਨ।

(iii) r: ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x, ਲਈ ਜਾਂ ਤਾਂ $x > 1$ ਜਾਂ $x < 1$.

(iv) s: ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਸੰਖਿਆ x ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ $0 < x < 1$.

2. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਬਾਸ਼ਰਤ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਵਿਲੋਮ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ ਲਿਖੋ :

(i) p: ਇੱਕ ਧਨ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜੇਕਰ 1 ਅਤੇ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਉਸਦਾ ਕੋਈ ਹੋਰ ਭਾਜਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) q: ਮੈਂ ਸਮੁੰਦਰ ਤਟ ਤੇ ਜਾਂਦਾ ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਕਦੇ ਧੁੱਪ ਵਾਲਾ ਦਿਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iii) r: ਜੇਕਰ ਬਾਹਰ ਗਰਮੀ ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਪਿਆਸ ਲੱਗਦੀ ਹੈ।

3. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਨੂੰ "ਜੇਕਰ p, ਤਾਂ q" ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

(i) p: ਸਰਵਰ ਤੇ ਲਾਗ ਆਨ ਕਰਨ ਲਈ ਪਾਸਵਰਡ ਦਾ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰਰੀ ਹੈ।

(ii) q: ਜਦੋਂ ਕਦੇ ਮੀਂਹ ਪੈਂਦਾ ਹੈ ਟਰੈਫ਼ਿਕ ਵਿੱਚ ਰੁਕਾਵਟ ਪੈਦਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(iii) r: ਤੁਸੀਂ ਵੇਬਸਾਈਟ ਵਿੱਚ ਦਾਖਲਾ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਫ਼ੀਸ ਦਾ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤਾ ਹੋਵੇ।

4. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿਚੋਂ ਹਰੇਕ ਨੂੰ "p ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ q" ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੋਬਾਰਾ ਲਿਖੋ :

(i) p: ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਦੂਰਦਰਸ਼ਨ ਵੇਖਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਤੁਹਾਡਾ ਮਨ ਮੁਕਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਡਾ ਮਨ ਮੁਕਤ ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਦੂਰਦਰਸ਼ਨ ਵੇਖਦੇ ਹੋ।

(ii) q: ਤੁਹਾਡੇ ਰਾਹੀਂ A-ਗਰੇਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਅਤੇ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਘਰ ਦਾ ਕੰਮ ਲਗਾਤਾਰ ਕਰਦੇ ਹੋ।

(iii) r: ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਸਮਾਨ ਕੋਣੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਆਇਤ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਸਮਾਨ ਕੋਣੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

5. ਹੇਠਾਂ ਦੋ ਕਥਨ ਦਿੱਤੇ ਹਨ :

p : 25 ਸੰਖਿਆ 5 ਦੀ ਇੱਕ ਗੁਣਜ ਹੈ।

q : 25 ਸੰਖਿਆ 8 ਦੀ ਇੱਕ ਗੁਣਜ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਕਥਨਾਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਕ 'ਅਤੇ' ਅਤੇ 'ਜਾਂ' ਰਾਹੀਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਲਿਖੋ। ਦੋਵੇਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨਾਂ ਦੀ ਵੈਧਤਾ ਜਾਂਚੋ।

6. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਦੀ ਵੈਧਤਾ ਦੀ ਜਾਂਚ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸਾਹਮਣੇ ਲਿਖੀ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਕਰੋ।

(i) p: ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਜਾ ਜੋੜਫਲ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਵਿਲੋਮ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ)

(ii) q: ਜੇਕਰ n ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਕਿ $n > 3$, ਤਾਂ $n^2 > 9$ (ਵਿਲੋਮ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ)।

7. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਨੂੰ ਪੰਜ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵਿਅਕਤ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਰਥ ਸਮਾਨ ਹੋਣ:

q: 'ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਾਨ ਕੋਣੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਹ ਅਧਿਕ ਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।'

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕੀਤੀ ਹੈ :

- ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਥਨ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਵਾਕ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸੱਚ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਝੂਠ ਹੋਵੇ।
- ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪਦਾਂ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕੀਤੀ ਹੈ :

– ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਖੇਧਣ : ਜੇਕਰ p ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ ਤਾਂ '$\sim p$ ਝੂਠ ਹੈ' ਕਥਨ p ਦਾ ਨਿਖੇਧਣ ਹੈ ਇਸਨੂੰ $\sim p$ ਤੋਂ ਪ੍ਰਗਟਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

- ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਅਤੇ ਸੰਗਤ ਘਟਕ ਕਥਨ :
  ਦੋ ਜਾਂ ਵੱਧ ਸਰਲ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਤੋਂ ਬਣੇ ਕਥਨ ਨੂੰ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਸਰਲ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ ਦੇ ਘਟਕ ਕਥਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।
- ਸੰਯੋਜਕ 'ਅਤੇ' ਅਤੇ 'ਜਾਂ' ਦੀ ਅਤੇ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ 'ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ' ਅਤੇ 'ਹਰੇਕ ਲਈ' ਦੀ ਭੂਮਿਕਾ।
- ਅੰਤਰਭਾਵ (ਸ਼ਰਤਾਂ) 'ਜੇਕਰ', 'ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ' ਅਤੇ 'ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ'
  ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ' p ਤਾਂ q ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਤੋਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
- p ਅੰਤਰਭਾਵ q (ਪ੍ਰਤੀਕ $p \Rightarrow q$ ਤੋਂ ਦੱਸਿਆ)
- p ਕਾਫ਼ੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ q ਦੇ ਲਈ।
- q ਕਾਫ਼ੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ p ਦੇ ਲਈ।
- p ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ q
- $\sim q$ ਅੰਤਰਭਾਵ $\sim p$
- ਕਥਨ $p \Rightarrow q$ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ $\sim q \Rightarrow \sim p$
- ਕਥਨ $p \Rightarrow q$ ਦਾ ਉਲਟ ਕਥਨ $q \Rightarrow p$ ਹੈ।
- ਕਥਨ $p \Rightarrow q$ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਨੂੰ ਜੋੜ ਕੇ ਕਥਨ p ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ q ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

◆ ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਦੀ ਵੈਧਤਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।
  (i) ਪ੍ਰਤੱਖ ਵਿਧੀ
  (ii) ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਕਮ ਵਿਧੀ
  (iii) ਵਿਰੋਧ ਵਿਧੀ
  (iv) ਪ੍ਰਤਿਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀ ਵਿਧੀ

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਤਰਕ ਸ਼ਾਸਤਰ ਤੇ ਪਹਿਲਾ ਸ਼ੋਧ–ਪ੍ਰਬੰਧ *Aristotle* (384 ਈ. ਪੂ.-322 ਈ. ਪੂ.) ਰਾਹੀਂ ਲਿਖਿਆ ਗਿਆ ਸੀ। ਇਹ ਸ਼ੋਧ–ਪ੍ਰਬੰਧ ਨਿਗਮਨਾਤਮ ਵਿਵੇਚਨ ਦੇ ਲਈ ਨਿਯਮਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਸੰਗ੍ਰਹਿ ਸੀ, ਜਿਸਦਾ ਭਾਵ ਗਿਆਨ ਦੀ ਹਰੇਕ ਸ਼ਾਖਾ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਲਈ ਇੱਕ ਅਧਾਰ ਦਿੰਦਾ ਸੀ। ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ ਸਤਾਰਵੀਂ ਸਦੀ ਵਿੱਚ ਜਰਮਨ ਗਣਿਤਗ G. W. Leibnitz (1646 – 1716) ਨੇ ਨਿਗਮਨਾਤਮਕ ਵਿਵੇਚਨ ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਨੂੰ ਯਾਂਤਰਿਕ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਤਰਕ ਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਕਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਉਨੀਵੀਂ ਸਦੀ ਵਿੱਚ ਅੰਗਰੇਜ਼ ਗਣਿਤਗ *George Boole* (1815–1864) ਅਤੇ *Augustus De Morgan* (1806–1871) ਨੇ ਉਹਨਾਂ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਾਕਾਰ ਕੀਤਾ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤੀਕਾਤਮਕ ਤਰਕਸ਼ਾਸ਼ਤਰ ਵਿਸ਼ੇ ਦੀ ਸਥਾਪਨਾ ਕੀਤੀ।

— ❖ —

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਧਿਆਇ 15

ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ
(Statistics)

❖ *"Statistics may be rightly called the science of averages and their estimates." – A.L.BOWLEY & A.L. BODDINGTON* ❖

15.1 ਭੂਮਿਕਾ

Karl Pearson
(1857-1936)

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਦਾ (ਮੰਤਵ) ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਉਦੇਸ਼ ਲਈ ਇਕੱਠੇ ਕੀਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਨ ਅਤੇ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਕੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਤੱਕ ਪਹੁਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਰਾਹੀਂ ਅਤੇ ਸਾਰਣੀ ਰਾਹੀਂ ਵਿਅਕਤ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪੇਸ਼ ਕਰਨਾ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਗੁਣਾਂ ਅਤੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਇੱਕ ਪ੍ਰਤਿਨਿਧਿਕ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਬਾਰੇ ਵੀ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਮੱਧਮਾਨ, ਮਧਿਕਾ ਅਤੇ ਬਹੁਲਕ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਤਿੰਨ ਮਾਪ ਹਨ। ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪ ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਗੱਲ ਦਾ ਵਿਚਾਰ ਦਿਲਾਉਂਦੇ ਹਨ ਕਿ ਅੰਕੜੇ ਕਿਸ ਸਥਾਨ ਤੇ ਕੇਂਦਰਿਤ ਹਨ ਪਰੰਤੂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਹੋਰ ਚੰਗੀ ਵਿਆਖਿਆ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਵੀ ਪਤਾ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨਾ ਖਿੰਡਾਵ ਹੈ (ਬਿਖਰਾਵ ਹੈ ਜਾਂ) ਉਹ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪ ਦੇ ਚਾਰਾਂ ਪਾਸੇ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਕੱਠਾ ਹਨ।

ਦੋ ਬੱਲੇਬਾਜ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਪਿਛਲੇ ਦਸ ਮੈਚਾਂ ਵਿੱਚ ਬਣਾਈਆਂ ਗਈਆਂ ਦੌੜਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

ਬੱਲੇਬਾਜ਼ A : 30, 91, 0, 64, 42, 80, 30, 5, 117, 71
ਬੱਲੇਬਾਜ਼ B : 53, 46, 48, 50, 53, 53, 58, 60, 57, 52

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮੱਧਿਕਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

	ਬੱਲੇਬਾਜ਼ A	ਬੱਲੇਬਾਜ਼ B
ਮੱਧਮਾਨ	53	53
ਮੱਧਿਕਾ	53	53

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਅਸੀਂ ਮੱਧਮਾਨ ($\bar{x}$ ਰਾਹੀਂ ਨਿਰੂਪਿਤ) ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਜੋੜ ਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਤੋਂ ਭਾਗ ਕਰਕੇ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਭਾਵ
$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

ਅਤੇ, ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਮਾਪ ਲਈ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਪਹਿਲਾਂ ਵੱਧਦੇ ਜਾਂ ਘੱਟਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਕੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨਿਯਮ ਨੂੰ ਲਗਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :.

ਜੇਕਰ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਟਾਂਕ ਹੈ ਤਾਂ ਮੱਧਿਕਾ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ਵੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਜਿਸਤ ਹੈ ਤਾਂ ਮੱਧਿਕਾ $\left(\frac{n}{2}\right)$ ਵੀਂ ਅਤੇ $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ ਵੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

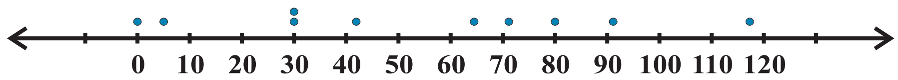
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਬੱਲੇਬਾਜ਼ A ਅਤੇ B ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਈਆਂ ਦੌੜਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮੱਧਿਕਾ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਭਾਵ 53 ਹੈ। ਕੀ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਬੱਲੇਬਾਜ਼ਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨ ਸਮਾਨ ਇਕੋ ਜਿਹਾ ਪਰਿਵਰਤਨਸ਼ੀਲਤਾ ਹੈ ? ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਨਹੀਂ। ਕਿਉਂਕਿ A ਦੀਆਂ ਦੌੜਾਂ ਵਿੱਚ 0 (ਘੱਟੋ-ਘੱਟ) ਤੋਂ 117 (ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ) ਤੱਕ ਹੈ। ਜਦੋਂਕਿ B ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ 46 (ਘੱਟੋ-ਘੱਟ) ਤੋਂ 60 (ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ) ਤੱਕ ਹੈ।

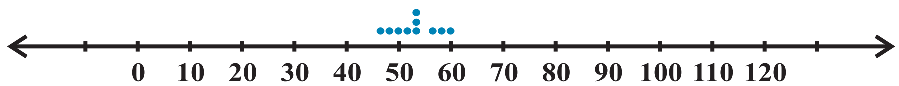
ਆਉ ਅਸੀਂ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਸਕੋਰਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਤੇ ਅੰਕਿਤ ਕਰੀਏ। ਸਾਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਈਆਂ ਗਈਆਂ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। (ਚਿੱਤਰ 15.1 ਅਤੇ 15.2)

ਬੱਲੇਬਾਜ਼ A ਲਈ



ਚਿੱਤਰ 15.1

ਬੱਲੇਬਾਜ਼ B ਲਈ



ਚਿੱਤਰ 15.2

ਅਸੀਂ ਵੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਬੱਲੇਬਾਜ਼ B ਦੇ ਸੰਗਤ ਬਿੰਦੂ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਨੇੜੇ-ਨੇੜੇ ਹਨ ਅਤੇ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪ (ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮੱਧਿਕਾ) ਦੇ ਇਰਦ-ਗਿਰਦ ਗੁੱਛਿਆਂ ਵਿੱਚ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ A ਦੇ ਸੰਗਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਬਿਖਰਾਵ ਹੈ ਜਾਂ ਉਹ ਵੱਧ ਫੈਲੇ ਹੋਏ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਬਾਰੇ ਸਮਪੂਰਨ ਸੂਚਨਾ ਦੇਣ ਲਈ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦਾ ਮਾਪ ਕਾਫ਼ੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਬਿਖਰਾਵ ਇਕ ਹੋਰ ਖੰਡ ਹੈ, ਜਿਸ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਕੇਂਦਰੀ ਪਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਨੂੰ ਬਦਲਾਵ ਜਾਂ ਬਿਖਰਾਵ ਦੇ ਵਰਣਨ ਲਈ ਇੱਕ ਖਾਸ ਸੰਖਿਆ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਵਿਖੇਪਣ ਦਾ ਮਾਪ (Measure of dispersion) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵਿਖੇਪਣ ਦੇ ਕੁਝ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਮਾਪਾਂ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅਤੇ ਬਿਨਾਂ-ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮਾਪਣ ਦੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ।

15.2 ਵਿਖੇਪਣ ਨੂੰ ਮਾਪਣਾ (Measure of Dispersion)

ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਵਿਖੇਪਣ ਜਾਂ ਖਿੰਡਾਵ ਦਾ ਮਾਪ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਅਤੇ ਉੱਥੇ ਦਿੱਤੀ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਵਿਖੇਪਣ ਦੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਮਾਪ ਹਨ :

(i) ਸੀਮਾ (Range) (ii) ਚੌਥਾਈ ਵਿਚਲਨ (Quartile deviation) (iii) ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ (Mean deviation) (iv) ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ (Standard deviation).

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਚੌਥਾਈ ਵਿਚਲਨ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਹੋਰ ਸਾਰੇ ਮਾਪਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

15.3 ਸੀਮਾ (Range)

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋ ਬੱਲੇਬਾਜ਼ਾਂ A ਅਤੇ B ਰਾਹੀਂ ਬਣਾਈਆਂ ਦੌੜਾਂ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਕੋਰਾਂ ਵਿੱਚ ਖਿੰਡਾਅ, ਹਰੇਕ ਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਤੇ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਦੌੜਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਖਾਸ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਲੜੀ ਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਤੇ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਮੁੱਲਾਂ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਅੰਤਰ ਨੂੰ ਸੀਮਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਬੱਲੇਬਾਜ਼ A ਲਈ ਸੀਮਾ = 117 – 0 = 117

ਬੱਲੇਬਾਜ਼ B ਲਈ ਸੀਮਾ = 60 – 46 = 14

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਸੀਮਾ A > ਸੀਮਾ B ਹੈ ਇਸ ਲਈ A ਦੀਆਂ ਦੌੜਾਂ ਦਾ ਖਿੰਡਾਅ ਵੱਧ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ B ਦੀਆਂ ਦੌੜਾਂ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਵੱਧ ਨੇੜੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਲੜੀ ਦੀ ਸੀਮਾ = ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮਾਨ – ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਮਾਨ

ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਸੀਮਾ ਸਾਨੂੰ ਪਰਿਵਰਤਨਸ਼ੀਲਤਾ ਜਾਂ ਖਿੰਡਾਅ ਦਾ ਮੋਟਾ-ਮੋਟਾ ਗਿਆਨ ਦਿੰਦੀ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦਾ ਮਾਪ ਵਿਖੇਪਨ ਦੇ ਬਾਰੇ ਕੁੱਝ ਨਹੀਂ ਦੱਸਦਾ। ਇਸ ਉਦੇਸ਼ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਪਰਿਵਰਤਨਸ਼ੀਲਤਾ ਦੇ ਹੋਰ ਮਾਪਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਮਾਪ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰ (ਜਾਂ ਵਿਚਲਨ) ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ।

ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਤੋਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਵਿਖੇਪਣ ਦੀ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਮਾਪ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਹਨ। ਆਉ ਇਹਨਾਂ ਤੇ ਵਿਸਤਾਰਪੂਰਵਕ ਚਰਚਾ ਕਰੀਏ।

15.4 ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ (Mean Deviation)

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਪ੍ਰੇਖਣ x ਦਾ ਸਥਿਰ ਮਾਨ 'a' ਤੋਂ ਅੰਤਰ $(x - a)$ ਪ੍ਰੇਖਣ x ਦਾ a ਵਿਚਲਨ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰੇਖਣ x ਦਾ ਕੇਂਦਰੀ ਮੁੱਲ 'a' ਤੋਂ ਵਿਖੇਪਣ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ a ਤੋਂ ਵਿਚਲਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਵਿਖੇਪਣ ਦਾ ਮਾਪ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦਾ ਮਾਪ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਤੇ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਕੁਝ ਵਿਚਲਨ ਰਿਣਾਤਮਕ ਅਤੇ ਕੁਝ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਲਈ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਮੱਧਮਾਨ ($\bar{x}$) ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\text{ਨਾਲ ਹੀ, ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ} = \frac{\text{ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ}}{\text{ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}} = \frac{0}{n} = 0$$

ਇਸ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ-ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਕੋਈ ਅਰਥ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਜਿੱਥੋਂ ਤੱਕ ਕਿ ਵਿਖੇਪਨ ਦੇ ਮਾਪਣ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਯਾਦ ਰੱਖੋ ਕਿ ਵਿਖੇਪਣ ਦਾ ਉਚਿਤ ਮਾਪ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਹਰੇਕ ਮਾਨ ਦੀ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦਾ ਮਾਪ ਜਾਂ ਕਿਸੇ ਸਥਿਰ ਸੰਖਿਆ 'a' ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁੱਲ ਉਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਰਾਹੀਂ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਤੇ ਦਰਸਾਏ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਦੂਰੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ ਸਥਿਰ ਸੰਖਿਆ 'a' ਤੋਂ ਵਿਖੇਪਨ ਨੂੰ ਮਾਪਣ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕੇਂਦਰੀ ਮੁੱਲ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਮੱਧਮਾਨ ਨੂੰ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ 'a' ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ 'a' ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। 'a' ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਨੂੰ M.D.(a) ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\text{M.D.}(a) = \frac{\text{'}a\text{' ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਨ ਦਾ ਜੋੜ}}{\text{ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}}$$

ਟਿੱਪਣੀ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਮਾਪ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਅਧਿਐਨ ਵਿੱਚ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਤੋਂ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਅਤੇ ਮੱਧਿਕਾ ਤੋਂ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਸਿੱਖੀਏ।

15.4.1 ਅਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ (Mean deviation for ungrouped data) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ n ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਅੰਕੜੇ $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਮੱਧਮਾਨ ਜਾਂ ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਦੇ ਪਰਿਕਲਨ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਚਰਣ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਚਰਣ 1 : ਉਸ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦਾ ਮਾਪ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਇਹ 'a' ਹੈ।

ਚਰਣ 2 : ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ x_i ਦਾ a, ਤੋਂ ਵਿਚਲਨ ਭਾਵ $x_1 - a, x_2 - a, x_3 - a, . . . , x_n - a$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਚਰਣ 3 : ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਭਾਵ ਜੇਕਰ ਵਿਚਲਨਾਂ ਵਿੱਚ ਰਿਣ ਚਿੰਨ੍ਹ ਲੱਗਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ ਹਟਾ ਦਿਉ।

ਭਾਵ $|x_1 - a|, |x_2 - a|, |x_3 - a|, ..., |x_n - a|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਚਰਨ 4 : ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਨਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇਹ ਮੱਧਮਾਨ 'a' ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਹੈ।

ਭਾਵ $$\text{M.D.}(a) = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - a|}{n}$$

ਇਸ ਲਈ $$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|, \text{ ਜਿੱਥੇ } \bar{x} = \text{ਮੱਧਮਾਨ}$$

ਅਤੇ $$\text{M.D. (M)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \text{M}|, \text{ ਜਿੱਥੇ M = ਮੱਧਿਕਾ}$$

ਟਿੱਪਣੀ ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਮੱਧਿਕਾ ਨੂੰ ਚਿੰਨ੍ਹ M ਰਾਹੀਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕਿ ਹੋਰ ਕਿਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਨਾ ਕਿਹਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ। ਆਓ ਹੁਣ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਚਰਣਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ :

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪਗਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਅੱਗੇ ਵੱਧਦੇ ਹੋਏ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਚਰਣ 1 : ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ

$$\bar{x} = \frac{6+7+10+12+13+4+8+12}{8} = \frac{72}{8} = 9$$

ਚਰਣ 2 : ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$, ਤੋਂ ਤਰਤੀਬਵਾਰ ਵਿਚਲਨ $x_i - \bar{x}$

ਭਾਵ 6 – 9, 7 – 9, 10 – 9, 12 – 9, 13 – 9, 4 – 9, 8 – 9, 12 – 9, ਹਨ।

ਜਾਂ –3, –2, 1, 3, 4, –5, –1, 3 ਹਨ।

ਚਰਣ 3 : ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਨ $|x_i - \bar{x}|$

3, 2, 1, 3, 4, 5, 1, 3 ਹਨ।

ਚਰਣ 4 : ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਹੈ :

$$\text{M.D. }(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{8}|x_i - \bar{x}|}{8}$$

$$= \frac{3+2+1+3+4+5+1+3}{8} = \frac{22}{8} = 2.75$$

ਟਿੱਪਣੀ ਹਰੇਕ ਵਾਰ ਚਰਣਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖਣ ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਚਰਣਾਂ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਹੀ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਪਰਿਕਲਨ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

12, 3, 18, 17, 4, 9, 17, 19, 20, 15, 8, 17, 2, 3, 16, 11, 3, 1, 0, 5

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ($\bar{x}$) ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੋਵੇਗਾ।

$$\bar{x} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{200}{20} = 10$$

ਮੱਧਮਾਨ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਨ ਭਾਵ $|x_i - \bar{x}|$ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ :

2, 7, 8, 7, 6, 1, 7, 9, 10, 5, 2, 7, 8, 7, 6, 1, 7, 9, 10, 5

ਇਸ ਲਈ $$\sum_{i=1}^{20}|x_i - \bar{x}| = 124$$

ਅਤੇ $$\text{M.D. }(\bar{x}) = \frac{124}{20} = 6.2$$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

3, 9, 5, 3, 12, 10, 18, 4, 7, 19, 21

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 11 ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਟਾਂਕ ਹੈ। ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਵੱਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ ਤੇ ਅਸੀਂ 3, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 18, 19, 21 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਹੁਣ ਮੱਧਿਕਾ $= \left(\dfrac{11 + 1}{2}\right)$ ਵੀਂ ਜਾਂ 6 ਵਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣ = 9 ਹੈ।

ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਨ $|x_i - \mathrm{M}|$ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ।

6, 6, 5, 4, 2, 0, 1, 3, 9, 10, 12

ਇਸ ਲਈ $$\sum_{i=1}^{11}|x_i - \mathrm{M}| = 58$$

ਅਤੇ $$\mathrm{M.D.}(\mathrm{M}) = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11}|x_i - \mathrm{M}| = \frac{1}{11}\times 58 = 5.27$$

15.4.2 ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ (Mean deviation for grouped data) ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(a) ਵੱਖਰੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ (Discrete frequency distribution)

(b) ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ (Continuous frequency distribution)

ਆਉ ਇਹਨਾਂ ਦੋਵਾਂ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰੀਏ।

(a) ਵੱਖਰੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ (Discrete frequency distribution) : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ n ਭਿੰਨ ਪ੍ਰੇਖਣ $x_1, x_2, ..., x_n$ ਹਨ। ਜਿਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $f_1, f_2, ..., f_n$ ਹਨ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ ਬੱਧ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਵੱਖਰੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ :

$x : x_1 \quad x_2 \quad x_3 \dots x_n$

$f : f_1 \quad f_2 \quad f_3 \dots f_n$

(i) ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ (Mean deviation about mean)

ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਰਾਹੀਂ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

ਜਿੱਥੇ $\sum_{i=1}^{n} x_i f_i$ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ x_i ਦਾ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ f_i ਤੋਂ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\mathrm{N} = \sum_{i=1}^{n} f_i$ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ।

ਤਦ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ x_i ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁਲ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਭਾਵ ਸਾਰੇ $i = 1, 2, ..., n$ ਲਈ $|x_i - \bar{x}|$ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਨ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਕਿ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਲੋੜੀਂਦਾ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$\mathrm{M.D.}(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i|x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{n} f_i|x_i - \bar{x}|$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

(ii) ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ (Mean deviation about median) : ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵਖਰੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦੀ ਮਧਿਕਾ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਨੂੰ ਵੱਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਗਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਪਤਾ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਤਦ ਉਸ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਦੀ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ $\frac{N}{2}$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ ਇਸ ਤੋਂ ਥੋੜ੍ਹੀ ਵੱਧ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ N ਤੋਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਇਹ ਮਾਨ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਮੱਧ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਮੰਨੀ ਹੋਈ ਮੱਧਿਕਾ ਹੈ। ਮਧਿਕਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ ਮਧਿਕਾਂ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਨਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\text{M.D.(M)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - M|$$

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

x_i	2	5	6	8	10	12
f_i	2	8	10	7	8	5

ਹੱਲ : ਆਉ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਸਾਰਣੀ 15.1 ਬਣਾਈਏ ਅਤੇ ਹੋਰ ਕਾਲਮ ਪਰਿਕਲਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਲਗਾਈਏ।

ਸਾਰਣੀ 15.1

x_i	f_i	$f_i x_i$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
2	2	4	5.5	11
5	8	40	2.5	20
6	10	60	1.5	15
8	7	56	0.5	3.5
10	8	80	2.5	20
12	5	60	4.5	22.5
	40	300		92

$$N = \sum_{i=1}^{6} f_i = 40, \quad \sum_{i=1}^{6} f_i x_i = 300, \quad \sum_{i=1}^{6} f_i |x_i - \bar{x}| = 92$$

ਇਸ ਲਈ $$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} f_i x_i = \frac{1}{40} \times 300 = 7.5$$

ਅਤੇ $$\text{M.D.}\ (\bar{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} f_i\ |x_i - \bar{x}| = \frac{1}{40} \times 92 = 2.3$$

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

x_i	3	6	9	12	13	15	21	22
f_i	3	4	5	2	4	5	4	3

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜੇ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਵੱਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਸੰਗਤ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਦੀ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਹੋਰ ਲਗਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। (ਸਾਰਣੀ 15.2)।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਸਾਰਣੀ 15.2

x_i	3	6	9	12	13	15	21	22
f_i	3	4	5	2	4	5	4	3
$c.f.$	3	7	12	14	18	23	27	30

ਹੁਣ N = 30 ਹੈ ਜੋ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ 15ਵੀਂ ਅਤੇ 16ਵੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਹੈ। ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਪ੍ਰੇਖਣ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ 18 ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹਨ ਜਿਸਦਾ ਸੰਗਤ ਪ੍ਰੇਖਣ 13 ਹੈ।

$$\text{ਇਸ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ } \mathrm{M} = \frac{15 \text{ ਵਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣ} + 16 \text{ ਵਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣ}}{2} = \frac{13+13}{2} = 13$$

ਹੁਣ ਮੱਧਿਕਾ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁੱਲ ਭਾਵ $|x_i - \mathrm{M}|$ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ 15.3 ਵਿਚ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਹਨ।

ਸਾਰਣੀ 15.3

$\lvert x_i - \mathrm{M}\rvert$	10	7	4	1	0	2	8	9
f_i	3	4	5	2	4	5	4	3
$f_i\lvert x_i - \mathrm{M}\rvert$	30	28	20	2	0	10	32	27

$$\sum_{i=1}^{8} f_i = 30 \quad \text{ਅਤੇ} \quad \sum_{i=1}^{8} f_i |x_i - \mathrm{M}| = 149$$

ਇਸ ਲਈ
$$\mathrm{M.D.(M)} = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{8} f_i |x_i - \mathrm{M}|$$

$$= \frac{1}{30} \times 149 = 4.97$$

(b) ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ (Continuous frequency distribution) : ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਉਹ ਲੜੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਬਿਨਾਂ ਅੰਤਰ ਵਾਲੇ ਵਰਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਲਿਖੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ 100 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ :

ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	12	18	27	20	17	6

(i) ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ (Mean deviation about mean) : ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਪਰਿਕਲਨ ਦੇ ਸਮੇਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹਰੇਕ ਵਰਗ (class) ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਉਸਦੇ ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕੇਂਦਰਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਵੀ ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਦਾ ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਖੰਡਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਆਉ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਉਦਾਹਰਣ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ :

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	2	3	8	14	8	3	2

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ 15.4 ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਸਾਰਣੀ 15.4

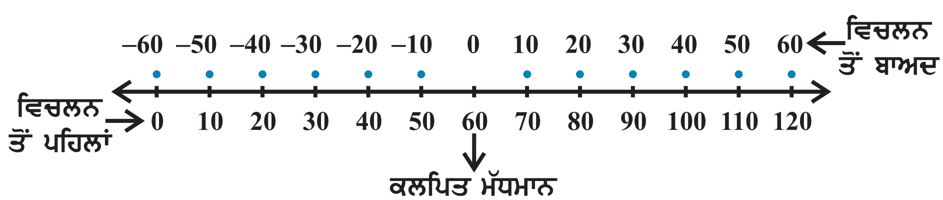
ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ f_i	ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂ x_i	$f_i x_i$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x}\rvert$
10-20	2	15	30	30	60
20-30	3	25	75	20	60
30-40	8	35	280	10	80
40-50	14	45	630	0	0
50-60	8	55	440	10	80
60-70	3	65	195	20	60
70-80	2	75	150	30	60
	40		1800		400

ਇੱਥੇ
$$N = \sum_{i=1}^{7} f_i = 40, \sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 1800, \sum_{i=1}^{7} f_i \lvert x_i - \bar{x}\rvert = 400$$

ਇਸ ਲਈ
$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i x_i = \frac{1800}{40} = 45$$

ਅਤੇ
$$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i \lvert x_i - \bar{x}\rvert = \frac{1}{40}\times 400 = 10$$

ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਛੋਟੀ (ਲਘੂ) ਵਿਧੀ (Shortcut method for calculating mean deviation about mean) : ਅਸੀਂ ਪਗ ਵਿਚਲਨ ਵਿਧੀ (step deviation method) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ $\bar{x}$ ਦੇ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਪਰਿਕਲਨ ਤੋਂ ਬਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਮੱਧ ਜਾਂ ਉਸਦੇ ਨੇੜੇ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰੇਖਣ ਨੂੰ ਕਲਪਿਤ ਮੱਧਮਾਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਤਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ (ਜਾਂ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂਆਂ) ਦਾ ਇਸ ਕਲਪਿਤ ਮੱਧਮਾਨ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਵਿਚਲਨ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ (origin) ਨੂੰ ਸਿਫ਼ਰ ਤੋਂ ਬਦਲਕੇ ਕਲਪਿਤ ਮੱਧਮਾਨ ਤੇ ਲੈ ਜਾਣਾ ਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 15.3 ਵਿੱਚ ਦਰਸ਼ਾਇਆ ਹੋਇਆ ਹੈ।

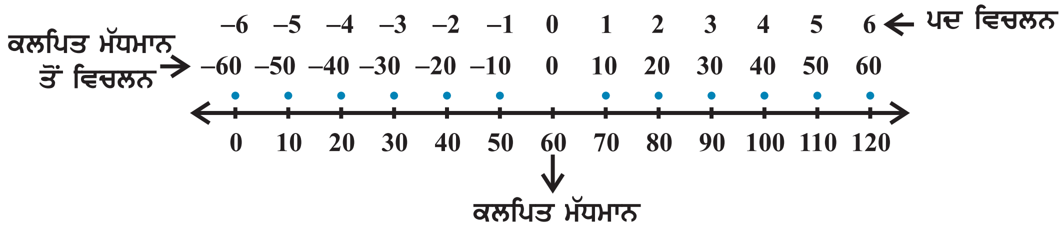


ਚਿੱਤਰ 15.3

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਜੇਕਰ ਸਾਰੇ ਵਿਚਲਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ ਤਾਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਤੋਂ ਭਾਗ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਨਵੇਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਨੂੰ ਪਗ ਵਿਚਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਪਗ ਵਿਚਲਨ ਲੈਣ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਤੇ ਪੈਮਾਨੇ ਦਾ ਬਦਲਾਵ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 15.4 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 15.4

ਵਿਚਲਨ ਅਤੇ ਪਗ ਵਿਚਲਨ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਅਕਾਰ ਨੂੰ ਛੋਟਾ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਨ ਜਿਸ ਤੋਂ ਗੁਣਨ ਜਿਹੀਆਂ ਗਣਨਾਵਾਂ ਸਰਲ ਹੋ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ ਨਵਾਂ ਚਲ $d_i = \dfrac{x_i - a}{h}$, ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ 'a' ਕਲਪਿਤ ਮੱਧਮਾਨ ਹੈ ਅਤੇ h ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ। ਤਾਂ ਪਗ ਵਿਚਲਨ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ $\overline{x}$ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

$$\overline{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{N} \times h$$

ਆਉ ਉਦਾਹਰਣ 6 ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਪਗ ਵਿਚਲਨ ਵਿਧੀ ਲਗਾਈਏ।

ਅਸੀਂ ਕਲਪਿਤ ਮੱਧਮਾਨ a = 45 ਅਤੇ h = 10 ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ 15.5 ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਸਾਰਣੀ 15.5

ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂ	$d_i = \dfrac{x_i - 45}{10}$	$f_i d_i$	$\lvert x_i - \overline{x}\rvert$	$f_i \lvert x_i - \overline{x}\rvert$
	f_i	x_i				
10-20	2	15	– 3	– 6	30	60
20-30	3	25	– 2	– 6	20	60
30-40	8	35	– 1	– 8	10	80
40-50	14	45	0	0	0	0
50-60	8	55	1	8	10	80
60-70	3	65	2	6	20	60
70-80	2	75	3	6	30	60
	40			0		400

ਇਸ ਲਈ
$$\overline{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i d_i}{N} \times h$$

$$= 45 + \frac{0}{40} \times 10 = 45$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਤੇ $$\text{M.D. }(\bar{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i |x_i - \bar{x}| = \frac{400}{40} = 10$$

ਟਿੱਪਣੀ ਪਗ ਵਿਚਲਨ ਵਿਧੀ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ $\bar{x}$ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਬਾਕੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਉੰਝ ਹੀ ਹੈ।

(ii) ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ (Mean deviation about median) : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ ਤੋਂ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕ੍ਰਿਆ ਉੰਝ ਹੀ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਖਾਸ ਅੰਤਰ ਕੇਵਲ ਵਿਚਲਨ ਲੈਣ ਦੇ ਸਮੇਂ ਮੱਧਮਾਨ ਦੀ ਜਗ੍ਹਾ ਮੱਧਿਕਾ ਲੈਣ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਆਉ ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕ੍ਰਿਆ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੀਏ। ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਪਹਿਲਾਂ ਵੱਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਗਾਈਏ ਤਾਂ ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਪਹਿਲਾਂ ਉਸ ਵਰਗ ਨੂੰ ਪੱਕਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਮੱਧਿਕਾ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਇਸ ਵਰਗ ਨੂੰ ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਨੂੰ ਲਗਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

$$\text{ਮੱਧਿਕਾ} = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times h$$

ਜਿੱਥੇ ਮਧਿਕਾ ਵਰਗ ਉਹ ਵਰਗ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ $\frac{N}{2}$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ ਉਸ ਤੋਂ ਕੁਝ ਵੱਧ ਹੋਵੇ, ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ N ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ ਦੀ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ l, ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ f, ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ ਤੋਂ ਠੀਕ ਪਹਿਲਾਂ ਵਾਲੇ ਵਰਗ ਦੀ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ c ਅਤੇ ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ ਦਾ ਵਿਸਤਾਰ h ਹੈ। ਮੱਧਿਕਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਦੀ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂਆਂ x_i ਦਾ ਮੱਧਿਕਾ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਨ ਭਾਵ $|x_i - M|$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਤਾਂ $$\text{M.D. (M)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - M|$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਉਦਾਹਰਣ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਵਰਗ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	6	7	15	16	4	2

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਹੇਠਲੀ ਸਾਰਣੀ 15.6 ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ :

ਸਾਰਣੀ 15.6

ਵਰਗ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ	$\lvert x_i - \text{Med.}\rvert$	$f_i \lvert x_i - \text{Med.}\rvert$
	f_i	$(c.f.)$	x_i		
0-10	6	6	5	23	138
10-20	7	13	15	13	91
20-30	15	28	25	3	45
30-40	16	44	35	7	112
40-50	4	48	45	17	68
50-60	2	50	55	27	54
	50				508

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇੱਥੇ N=50, ਇਸ ਲਈ $\frac{N}{2}$ ਜਾਂ 25ਵਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣ 20-30 ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 20-30 ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ ਹੈ।

ਅਸੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ

$$\text{ਮੱਧਿਕਾ} = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times h$$

ਇੱਥੇ $l = 20$, $C = 13$, $f = 15$, $h = 10$ ਅਤੇ $N = 50$

ਇਸ ਲਈ $\qquad \text{ਮੱਧਿਕਾ} = 20 + \frac{25-13}{15} \times 10 = 20 + 8 = 28$

ਇਸ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ

$$\text{M.D. (M)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} f_i |x_i - M| = \frac{1}{50} \times 508 = 10.16 \text{ ਹੈ।}$$

ਅਭਿਆਸ 15.1

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਅਤੇ 2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. 4, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 17
2. 38, 70, 48, 40, 42, 55, 63, 46, 54, 44

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 3 ਅਤੇ 4 ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

3. 13, 17, 16, 14, 11, 13, 10, 16, 11, 18, 12, 17
4. 36, 72, 46, 42, 60, 45, 53, 46, 51, 49

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 5 ਅਤੇ 6 ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5.

x_i	5	10	15	20	25
f_i	7	4	6	3	5

6.

x_i	10	30	50	70	90
f_i	4	24	28	16	8

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 7 ਅਤੇ 8 ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7.

x_i	5	7	9	10	12	15
f_i	8	6	2	2	2	6

8.

x_i	15	21	27	30	35
f_i	3	5	6	7	8

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 9 ਅਤੇ 10 ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9.

ਆਮਦਨ ਪ੍ਰਤਿਦਿਨ	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800
ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	4	8	9	10	7	5	4	3

10.

ਉੱਚਾਈ (ਸੈਂ.ਮੀ.ਵਿੱਚ)	95-105	105-115	115-125	125-135	135-145	145-155
ਲੜਕਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	9	13	26	30	12	10

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

11. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

ਅੰਕ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	6	8	14	16	4	2

12. ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ 100 ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਉਮਰ ਦੇ ਵੰਡ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਉਮਰ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

ਉਮਰ	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55
ਸੰਖਿਆ	5	6	12	14	26	12	16	9

[ਸੰਕੇਤ : ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਦੀ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ ਵਿੱਚੋਂ 0.5 ਘਟਾਉ ਕਰਕੇ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਉੱਪਰਲੀ ਸੀਮਾ ਵਿੱਚ 0.5 ਜੋੜ ਕੇ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ।]

15.4.3 ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਦੀਆਂ ਕਮੀਆਂ ਜਾਂ ਸੀਮਾਵਾਂ (Limitations of mean deviation) : ਬਹੁਤ ਜ਼ਿਆਦਾ ਵਿਚਰਨ ਜਾਂ ਖਿੰਡਾਅ ਵਾਲੀਆਂ ਲੜੀਆਂ ਵਿੱਚ ਮੱਧਿਕਾ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਲਈ ਸਹੀ ਮਾਪ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਮੱਧਿਕਾ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਤੇ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਸ਼ਵਾਸ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਮੱਧਮਾਨ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ (ਰਿਣ ਚਿੰਨ੍ਹ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ) ਮਧਿਕਾ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਵੱਧ ਵਿਗਿਆਨਿਕ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਬਹੁਤ ਵਾਰ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਅਸੰਤੋਸ਼ਜਨਕ ਨਤੀਜਾ ਦੇ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਨੂੰ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮਾਨ ਤੇ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਹੋਰ ਬੀਜਗਣਿਤੀ ਗਣਨਾਵਾਂ ਦੇ ਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਵਿਖੇਪਨ ਦੇ ਕੋਈ ਹੋਰ ਮਾਪ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਵਿਖੇਪਨ ਦਾ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਮਾਪ ਹੈ।

15.5 ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ (Variance and Standard Deviation)

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਮੱਧਮਾਨ ਜਾਂ ਮਧਿਕਾ ਤੋਂ ਮਧ ਵਿਚਲਨ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ, ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁਲ ਲਿਆ ਸੀ। ਇਹ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁਲ, ਮਧ ਵਿਚਲਨ ਨੂੰ ਅਰਥ ਪੂਰਨ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਕੀਤੇ ਗਏ ਸਨ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕਾਰਨ ਉਤਪੰਨ ਇਸ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਨੂੰ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗ ਲੈ ਕੇ ਵੀ ਦੂਰ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਬੇਸ਼ੱਕ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਇਹ ਵਰਗ ਅ-ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਮੰਨ ਲਉ $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, n ਪ੍ਰੇਖਣ ਹਨ ਅਤੇ $\bar{x}$ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਹੈ। ਤਾਂ

$$(x_1-\bar{x})^2 + (x_2 -\bar{x})^2 + ...+ (x_n-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

ਜੇਕਰ ਇਹ ਜੋੜ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਹਰੇਕ $(x_i-\bar{x})$ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ। ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਵਿਚਲਨ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰੇਖਣ $\bar{x}$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

ਜੇਕਰ $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ ਛੋਟਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਪ੍ਰੇਖਣ $x_1, x_2, x_3,...,x_n$ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$ ਦੇ ਨਜਦੀਕ ਹਨ ਅਤੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਵਿਚਲਨ ਘਟ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਜੇਕਰ ਇਹ ਜੋੜ ਵੱਡਾ ਹੈ ਤਾਂ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਵਿਚਲਨ ਵੱਧ ਹੈ। ਤਾਂ, ਕੀ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੋੜ $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਵਿਖੇਪਨ ਜਾਂ ਵਿਚਲਨ ਦੇ ਮਾਪ ਦਾ ਸੰਤੋਸ਼ਜਨਕ ਪ੍ਰਤੀਕ ਹੈ?

ਆਉ ਇਸਦੇ ਲਈ 6 ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ 5, 15, 25, 35, 45, 55 ਦਾ ਇੱਕ ਸਮੂਹ A ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ 30 ਹੈ। ਇਸ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ $\bar{x}$ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗ ਦਾ ਜੋੜ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਹੈ :

$$\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2 = (5-30)^2 + (15-30)^2 + (25-30)^2 + (35-30)^2 + (45-30)^2 + (55-30)^2$$

$$= 625 + 225 + 25 + 25 + 225 + 625 = 1750$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇੱਕ ਹੋਰ ਸਮੂਹ B ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਦੇ 31 ਪ੍ਰੇਖਣ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ : 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45.

ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{y} = 30$ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਦੋਵੇਂ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ 30 ਹੈ।

ਸਮੂਹ B ਦੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

$$\sum_{i=1}^{31}(y_i - \bar{y})^2 = (15-30)^2 + (16-30)^2 + (17-30)^2 + \ldots + (44-30)^2 + (45-30)^2$$

$$= (-15)^2 + (-14)^2 + \ldots + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 14^2 + 15^2$$

$$= 2\,[15^2 + 14^2 + \ldots + 1^2]$$

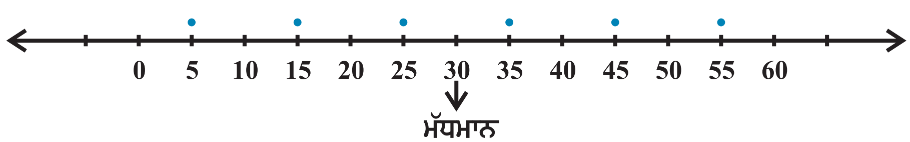
$$= 2 \times \frac{15 \times (15+1)(30+1)}{6} = 5 \times 16 \times 31 = 2480$$

ਕਿਉਂਕਿ ਪਹਿਲੀਆਂ n ਪ੍ਰਾਕਿਰਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇੱਥੇ $n = 15$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ ਹੀ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਵਿਖੇਪਨ ਜਾਂ ਖਿੰਡਾਵ ਦਾ ਮਾਪ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਕਹਿਣਾ ਪਵੇਗਾ ਕਿ 31 ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ B ਦਾ 6 ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਵਾਲੇ ਸਮੂਹ A ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਵੱਧ ਵਿਖੇਪਨ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ 6 ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਖਿੰਡਾਅ (ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਪਸਾਰ -25 ਤੋਂ 25 ਹੈ) ਸਮੂਹ B ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ (ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਪਸਾਰ –15 ਤੋਂ 15 ਹੈ) ਵੱਧ ਹੈ।

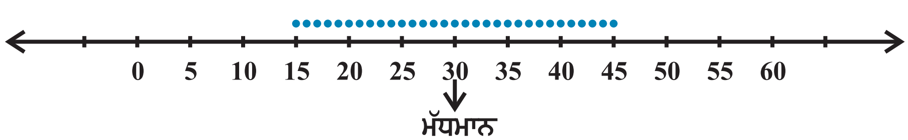
ਇਹ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰਾਂ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ :

ਸਮੂਹ A ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 15.5 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 15.5

ਸਮੂਹ B ਲਈ ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 15.6 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :



ਚਿੱਤਰ 15.6

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਮੱਧਮਾਨ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਵਿਖੇਪਨ ਦਾ ਸਹੀ ਮਾਪ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਨੂੰ ਦੂਰ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਭਾਵ ਅਸੀਂ $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਸਮੂਹ A ਲਈ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਮੱਧਮਾਨ $= \dfrac{1}{6} \times 1750 = 291.6$ ਹੈ ਅਤੇ ਸਮੂਹ B ਦੇ ਲਈ ਇਹ $\dfrac{1}{31} \times 2480 = 80$ ਹੈ।

ਇਹ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ ਖਿੰਡਾਅ ਜਾਂ ਵਿਚਲਨ ਸਮੂਹ B ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵੱਧ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਸਹੀ ਨਤੀਜੇ ਅਤੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਨਿਰੂਪਣ ਤੋਂ ਮੇਲ ਖਾਂਦੇ ਹਨ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ $\frac{1}{n}\sum(x_i - \overline{x})^2$ ਨੂੰ ਵਿਖੇਪਨ ਦੇ ਸਹੀ ਮਾਪ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਸੰਖਿਆ ਭਾਵ ਮੱਧਮਾਨ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਮਧ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ (variance) ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ σ^2 (ਸਿਗਮਾ ਦਾ ਵਰਗ ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ) ਤੋਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ n ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ $x_1, x_2,..., x_n$ ਦੀ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀ

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \text{ ਹੈ।}$$

15.5.1 ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ (Standard Deviation) ਪ੍ਰਸਰਨ ਦੀ ਗਣਨਾ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ x_i ਅਤੇ $\overline{x}$ ਦੀ ਇਕਾਈ ਪ੍ਰਸਰਨ ਦੀ ਇਕਾਈ ਤੋਂ ਭਿੰਨ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਪ੍ਰਸਰਨ ਵਿੱਚ $(x_i - \overline{x})$ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਨੂੰ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਸਰਨ ਦੇ ਧਨਾਤਮਕ ਵਰਗਮੂਲ ਨੂੰ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਾਬਤ ਵਿਖੇਪਨ ਦਾ ਸਹੀ ਮਾਪ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਨੂੰ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ σ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \qquad ... (1)$$

ਆਉ ਅਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਰਣੀ 15.7 ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਮੱਧਮਾਨ ਨੂੰ ਪਦ ਵਿਚਲਨ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ 14 ਨੂੰ ਕਲਪਿਤ ਮੱਧਮਾਨ ਲੈ ਕੇ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 10 ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 15.7

x_i	$d_i = \frac{x_i - 14}{2}$	ਮੱਧਮਾਨ ਤੋਂ ਵਿਚਲਨ $(x_i - \overline{x})$	$(x_i - \overline{x})^2$
6	–4	–9	81
8	–3	–7	49
10	–2	–5	25
12	–1	–3	9
14	0	–1	1
16	1	1	1
18	2	3	9
20	3	5	25
22	4	7	49
24	5	9	81
	5		330

ਇਸ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ $\overline{x}$ = ਕਲਪਿਤ ਮੱਧਮਾਨ + $\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} \times h = 14 + \frac{5}{10} \times 2 = 15$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਤੇ ਪ੍ਰਸਰਨ, $(\sigma^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{10} \times 330 = 33$

ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ $(\sigma) = \sqrt{33} = 5.74$

15.5.2 ਇੱਕ ਵੱਖਰੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦਾ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ *(Standard deviation of a discrete frequency distribution)*

ਮੰਨ ਲਉ ਦਿਤੀ ਹੋਈ ਵੱਖਰੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ :

$x: \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \ldots, x_n$

$f: \quad f_1, \quad f_2, \quad f_3, \ldots, f_n$

ਇਸ ਵੰਡ ਲਈ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ $(\sigma) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2}$ ... (2)

ਜਿੱਥੇ $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

ਆਉ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

x_i	4	8	11	17	20	24	32
f_i	3	5	9	5	4	3	1

ਹੱਲ : ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ 15.8 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਸਾਰਣੀ 15.8

x_i	f_i	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
4	3	12	–10	100	300
8	5	40	–6	36	180
11	9	99	–3	9	81
17	5	85	3	9	45
20	4	80	6	36	144
24	3	72	10	100	300
32	1	32	18	324	324
	30	420			1374

$$N = 30, \sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 420, \sum_{i=1}^{7} f_i (x_i - \bar{x})^2 = 1374$$

ਇਸ ਲਈ $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i x_i}{N} = \frac{1}{30} \times 420 = 14$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਸਰਨ $(\sigma^2) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i(x_i - \bar{x})^2$

$$= \frac{1}{30} \times 1374 = 45.8$$

ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ $(\sigma) = \sqrt{45.8} = 6.77$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

15.5.3 ***ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦਾ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ (Standard deviation of a continuous frequency distribution)*** ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦੇ ਸਾਰੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ ਲੈ ਕੇ ਉਸਨੂੰ ਵੱਖਰੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਵਿੱਚ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਵੱਖਰੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਲਈ ਅਪਣਾਈ ਹੋਈ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਇੱਕ n ਵਰਗਾਂ ਵਾਲੇ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਅੰਤਰਾਲ ਉਸਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ x_i ਅਤੇ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ f_i ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਤਾਂ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2},$$

ਜਿੱਥੇ $\bar{x}$ ਵੰਡ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਹੈ ਅਤੇ $\mathrm{N} = \sum_{i=1}^{n} f_i$.

ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਲਈ ਹੋਰ ਸੂਤਰ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ :

$$\text{ਪ੍ਰਸਰਨ}\,(\sigma^2) = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{x}\, x_i)$$

$$= \frac{1}{\mathrm{N}} \left[\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2 f_i - \sum_{i=1}^{n} 2\bar{x}\, f_i x_i \right]$$

$$= \frac{1}{\mathrm{N}} \left[\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \bar{x}^2 \sum_{i=1}^{n} f_i - 2\bar{x} \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \right]$$

$$= \frac{1}{\mathrm{N}} \left[\sum_{i=1}^{n} f_i x_i + \bar{x}^2\, \mathrm{N} - 2\bar{x}\,.\,\mathrm{N}\,\bar{x} \right] \quad \left[\text{ਇਥੇ } \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = \bar{x} \text{ ਜਾਂ } \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = \mathrm{N}\bar{x} \right]$$

$$= \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{x}^2 = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

ਜਾਂ $$\sigma^2 = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\mathrm{N}} \right)^2 = \frac{1}{\mathrm{N}^2} \left[\mathrm{N} \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i \right)^2 \right]$$

ਇਸ ਲਈ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ $$(\sigma) = \frac{1}{\mathrm{N}} \sqrt{\mathrm{N} \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i \right)^2} \qquad \ldots (3)$$

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵੰਡ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ, ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਵਰਗ	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	3	7	12	15	8	3	2

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ 15.9 ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਸਾਰਣੀ 15.9

ਵਰਗ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ (f_i)	ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ (x_i)	$f_i x_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
30-40	3	35	105	729	2187
40-50	7	45	315	289	2023
50-60	12	55	660	49	588
60-70	15	65	975	9	135
70-80	8	75	600	169	1352
80-90	3	85	255	529	1587
90-100	2	95	190	1089	2178
	50		3100		10050

ਇਸ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i x_i = \frac{3100}{50} = 62$

$$\text{ਪ੍ਰਸਰਨ}\left(\sigma^2\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{50}\times 10050 = 201$$

ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ(σ) $= \sqrt{201} = 14.18$

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

x_i	3	8	13	18	23
f_i	7	10	15	10	6

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ 15.10 ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ :

ਸਾਰਣੀ 15.10

x_i	f_i	$f_i x_i$	x_i^2	$f_i x_i^2$
3	7	21	9	63
8	10	80	64	640
13	15	195	169	2535
18	10	180	324	3240
23	6	138	529	3174
	48	614		9652

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਹੁਣ ਸੂਤਰ (3) ਰਾਹੀਂ

$$\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{N\sum f_i x_i^2 - \left(\sum f_i x_i\right)^2}$$

$$= \frac{1}{48}\sqrt{48 \times 9652 - (614)^2}$$

$$= \frac{1}{48}\sqrt{463296 - 376996}$$

$$= \frac{1}{48} \times 293.77 = 6.12$$

ਇਸ ਲਈ, ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ (σ) = 6.12

15.5.4 *ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਛੋਟੇ ਤਰੀਕੇ (Shortcut method to find variance and standard deviation)* ਕਦੇ-ਕਦੇ ਇੱਕ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ x_i ਜਾਂ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ x_i ਦੇ ਮੁੱਲ ਬਹੁਤ ਵੱਡੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਪ੍ਰਸਰਨ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਵੱਧ ਸਮਾਂ ਲੱਗਦਾ ਹੈ। ਪਦ ਵਿਚਲਨ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਸਰਲ ਬਣਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਕਲਪਿਤ ਮੱਧਮਾਨ 'A' ਹੈ ਅਤੇ ਪੈਮਾਨੇ ਨੂੰ $\frac{1}{h}$ ਗੁਣਾ ਛੋਟਾ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ। (ਇੱਥੇ h ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਹੈ) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਪਦ ਵਿਚਲਨ ਜਾਂ ਨਵਾਂ ਚਲ y_i ਹੈ।

ਭਾਵ $y_i = \frac{x_i - A}{h}$ ਜਾਂ $x_i = A + hy_i$ ... (1)

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N}$ ... (2)

(1) ਤੋਂ x_i ਨੂੰ (2) ਵਿਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (A + hy_i)}{N}$$

$$= \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i A + \sum_{i=1}^{n} h\, f_i y_i\right) = \frac{1}{N}\left(A\sum_{i=1}^{n} f_i + h\sum_{i=1}^{n} f_i y_i\right)$$

$$= A \cdot \frac{N}{N} + h\,\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i y_i}{N} \qquad \left(\text{ਕਿਉਂਕਿ } \sum_{i=1}^{n} f_i = N\right)$$

ਇਸ ਲਈ $\bar{x} = A + h\,\bar{y}$ ... (3)

ਹੁਣ ਚਲ x ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ, $\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\,(A + hy_i - A - h\,\bar{y})^2 \qquad \text{((1) ਅਤੇ (3) ਰਾਹੀਂ)}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\, h^2\,(y_i - \bar{y})^2$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

$$= \frac{h^2}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i (y_i - \bar{y})^2 = h^2 \times \text{ ਚਲ } y_i \text{ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ}$$

ਭਾਵ $\sigma_x{}^2 = h^2\sigma_y{}^2$

ਜਾਂ $\sigma_x = h\sigma_y$ ... (4)

(3) ਅਤੇ (4) ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\sigma_x = \frac{h}{N}\sqrt{N\sum_{i=1}^{n} f_i y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} f_i y_i\right)^2} \quad \text{... (5)}$$

ਆਉ ਉਦਾਹਰਣ 11 ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਸੂਤਰ (5) ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਰਾਹੀਂ ਲਘੂ (ਛੋਟੀ) ਵਿਧੀ ਤੋਂ ਮੱਧਮਾਨ, ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵੰਡ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ, ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

ਵਰਗ	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	3	7	12	15	8	3	2

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਲਪਿਤ ਮੱਧਮਾਨ A = 65 ਹੈ। ਇੱਥੇ $h = 10$

ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ 15.11 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 15.11

ਵਰਗ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ	$y_i = \frac{x_i - 65}{10}$	y_i^2	$f_i\,y_i$	$f_i y_i^2$
	f_i	x_i				
30-40	3	35	– 3	9	– 9	27
40-50	7	45	– 2	4	– 14	28
50-60	12	55	– 1	1	– 12	12
60-70	15	65	0	0	0	0
70-80	8	75	1	1	8	8
80-90	3	85	2	4	6	12
90-100	2	95	3	9	6	18
	N = 50				– 15	105

ਇਸ ਲਈ $\bar{x} = A + \frac{\sum f_i y_i}{50} \times h = 65 - \frac{15}{50} \times 10 = 62$

ਪ੍ਰਸਰਨ $\sigma^2 = \frac{h^2}{N^2}\left[N\sum f_i y_i^2 - \left(\sum f_i y_i\right)^2\right]$

$$= \frac{(10)^2}{(50)^2}\left[50 \times 105 - (-15)^2\right]$$

$$= \frac{1}{25}[5250 - 225] = 201$$

ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ $(\sigma) = \sqrt{201} = 14.18$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਭਿਆਸ 15.2

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਤੋਂ 5 ਤੱਕ ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਪ੍ਰਸਰਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. 6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

2. ਪਹਿਲੀਆਂ n ਪ੍ਰਾਕਿਰਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ

3. ਤਿੰਨ ਦੇ ਪਹਿਲੇ 10 ਗੁਣਜ ਦਾ

4.

x_i	6	10	14	18	24	28	30
f_i	2	4	7	12	8	4	3

5.

x_i	92	93	97	98	102	104	109
f_i	3	2	3	2	6	3	3

6. ਲਘੂ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

x_i	60	61	62	63	64	65	66	67	68
f_i	2	1	12	29	25	12	10	4	5

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 7 ਅਤੇ 8 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਪ੍ਰਸਰਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7.

ਵਰਗ	0-30	30-60	60-90	90-120	120-150	150-180	180-210
ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	2	3	5	10	3	5	2

8.

ਵਰਗ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	5	8	15	16	6

9. ਲਘੂ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਮੱਧਮਾਨ, ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਉਚਾਈ (ਸੇ.ਮੀ. ਵਿੱਚ)	70-75	75-80	80-85	85-90	90-95	95-100	100-105	105-110	110-115
ਬੱਚਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	3	4	7	7	15	9	6	6	3

10. ਇੱਕ ਨਮੂਨੇ (ਡਿਜ਼ਾਇਨ) ਵਿੱਚ ਬਣਾਏ ਹੋਏ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਵਿਆਸ (ਮਿ. ਮੀ. ਵਿੱਚ) ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਨ।

ਵਿਆਸ	33-36	37-40	41-44	45-48	49-52
ਚੱਕਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	15	17	21	22	25

ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਵਿਆਸਾਂ ਦਾ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਅਤੇ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

[ਸੰਕੇਤ : ਪਹਿਲਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਲਗਾਤਾਰ ਬਣਾ ਲਵੋ। ਵਰਗਾਂ ਨੂੰ 32.5-36.5, 36.5-40.5, 40.5-44.5, 44.5 - 48.5, 48.5 - 52.5 ਲਵੋ ਅਤੇ ਫਿਰ ਅੱਗੇ ਵਧੋ।]

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

15.6 ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਨ (Analysis of Frequency Distributions)

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਦੇ ਪਹਿਲਾਂ ਦੇ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵਿਖੇਪਨ ਦੇ ਕੁਝ ਮਾਪਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ। ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਦੀ ਉਹੀ ਇਕਾਈ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅੰਕੜੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਦੋ ਭਿੰਨ ਇਕਾਈਆਂ ਵਾਲੀਆਂ ਵੰਡਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾਂ ਕਰਨੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕੇਵਲ ਵਿਖੇਪਨ ਦੀਆਂ ਮਾਪਾਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਹੀ ਕਾਫ਼ੀ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਬਲਕਿ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਮਾਪ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਇਕਾਈ ਵਿੱਚ ਅਜ਼ਾਦ ਹੋਵੇ। ਇਕਾਈ ਤੋਂ ਅਜ਼ਾਦ ਵਿਚਲਨ ਦੇ ਮਾਪ ਨੂੰ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ (Coefficient of variation) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ C.V. ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 \ , \ \bar{x} \neq 0,$$

ਇੱਥੇ σ ਅਤੇ $\bar{x}$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਅਤੇ ਮੱਧਮਾਨ ਹਨ।

ਲੜੀਆਂ ਵਿੱਚ ਵਿਚਲਨ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਲੜੀ ਦਾ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਵੱਡੇ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ ਵਾਲੀ ਲੜੀ ਨੂੰ ਵੱਧ ਵਿਚਲਨ ਜਾਂ ਖਿੰਡਾਅ ਵਾਲੀ ਲੜੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਘੱਟ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ ਵਾਲੀ ਲੜੀ ਨੂੰ ਦੂਜੀ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਗਤ (Consistent) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

15.6.1 *ਦੋ ਸਮਾਨ ਮੱਧਮਾਨ ਵਾਲੇ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ (Comparison of two frequency distributions with same mean)* ਮੰਨ ਲਉ $\bar{x}_1$ ਅਤੇ σ_1 ਪਹਿਲੀ ਵੰਡ ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਹਨ ਅਤੇ $\bar{x}_2$ ਅਤੇ σ_2 ਦੂਜੀ ਵੰਡ ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਹਨ।

ਤਾਂ C.V. (ਪਹਿਲੀ ਵੰਡ) = $\frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100$

ਅਤੇ C.V. (ਦੂਜੀ ਵੰਡ) = $\frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100$

ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}$ (ਮੰਨ ਲਉ)

ਇਸ ਲਈ C.V. (ਪਹਿਲੀ ਵੰਡ) = $\frac{\sigma_1}{\bar{x}} \times 100$ ... (1)

ਅਤੇ C.V. (ਦੂਜੀ ਵੰਡ) = $\frac{\sigma_2}{\bar{x}} \times 100$ ... (2)

(1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਦੋਵੇਂ C.V. ਦੀ ਤੁਲਨਾ σ_1 ਅਤੇ σ_2 ਦੇ ਅਧਾਰ 'ਤੇ ਹੀ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮਾਨ ਮੱਧਮਾਨ ਵਾਲੀਆਂ ਲੜੀਆਂ ਵਿਚੋਂ ਵੱਧ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ (ਜਾਂ ਪ੍ਰਸਰਨ) ਵਾਲੀ ਲੜੀ ਨੂੰ ਵੱਧ ਵਿਖੇਪਿਤ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਛੋਟੀ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ (ਜਾਂ ਪ੍ਰਸਰਨ) ਵਾਲੀ ਲੜੀ ਨੂੰ ਦੂਜੀ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵੱਧ ਸੰਗਤ (Consistent) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ :

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਦੋ ਕਾਰਖਾਨਿਆਂ A ਅਤੇ B ਵਿੱਚ ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਤਨਖਾਹਾਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਨ।

	A	B
ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	5000	6000
ਔਸਤ ਮਾਸਿਕ ਤਨਖਾਹ	₹ 2500	₹ 2500
ਤਨਖਾਹਾਂ ਦੀ ਵੰਡ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ	81	100

ਵਿਅਕਤੀਗਤ ਤਨਖਾਹ ਵਿੱਚ ਕਿਸ ਕਾਰਖਾਨੇ A ਅਤੇ B ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਵਿਚਲਨ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਕਾਰਖਾਨੇ A ਵਿੱਚ ਤਨਖਾਹ ਦੀ ਵੰਡ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ A (σ_1^2) = 81

ਇਸ ਲਈ, ਕਾਰਖਾਨੇ A ਵਿੱਚ ਤਨਖਾਹ ਦੀ ਵੰਡ ਦਾ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ A (σ_1) = 9

ਨਾਲ ਹੀ ਕਾਰਖਾਨੇ B ਵਿੱਚ ਤਨਖਾਹ ਦੀ ਵੰਡ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ B (σ_2^2) = 100

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਸ ਲਈ ਕਾਰਖਾਨੇ B ਵਿੱਚ ਤਨਖਾਹਾਂ ਦੀ ਵੰਡ ਦਾ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ (σ_2) = 10

ਕਿਉਂਕਿ ਦੋਵੇਂ ਕਾਰਖਾਨਿਆਂ ਵਿੱਚ ਔਸਤ ਤਨਖਾਹ ਸਮਾਨ ਹੈ ਭਾਵ ₹ 2500 ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਵੱਡੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਵਾਲੇ ਕਾਰਖਾਨੇ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਖਿੰਡਾਅ ਜਾਂ ਵਿਚਲਨ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ ਕਾਰਖਾਨੇ B ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤੀਗਤ ਤਨਖਾਹਾਂ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਵਿਚਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਦੋ ਤਨਖਾਹਾਂ ਦਾ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ 60 ਅਤੇ 70 ਹੈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 21 ਅਤੇ 16 ਹੈ। ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ ਕੀ ਹਨ ?

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ, C.V. (ਪਹਿਲੀ ਵੰਡ) = 60, $\sigma_1 = 21$

C.V. (ਦੂਜੀ ਵੰਡ) = 70, $\sigma_2 = 16$

ਮੰਨ ਲਉ $\bar{x}_1$ ਅਤੇ $\bar{x}_2$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪਹਿਲੀ ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਵੰਡ ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ ਹਨ, ਤਾਂ

$$\text{C.V. (ਪਹਿਲੀ ਵੰਡ)} = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100$$

ਇਸ ਲਈ $60 = \frac{21}{\bar{x}_1} \times 100$ ਜਾਂ $\bar{x}_1 = \frac{21}{60} \times 100 = 35$

ਅਤੇ $\text{C.V. (ਦੂਜੀ ਵੰਡ)} = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100$

ਭਾਵ $70 = \frac{16}{\bar{x}_2} \times 100$ ਜਾਂ $\bar{x}_2 = \frac{16}{70} \times 100 = 22.85$

ਇਸ ਲਈ $\bar{x}_1 = 35$ ਅਤੇ $\bar{x}_2 = 22.85$

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਜਮਾਤ 11 ਦੇ ਇੱਕ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਕੱਦ ਅਤੇ ਭਾਰ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪਰਿਕਲਨ ਕੀਤੇ ਹੋਏ ਹਨ :

	ਕੱਦ	ਭਾਰ
ਮੱਧਮਾਨ	162.6 ਸੈ. ਮੀ.	52.36 ਕਿ. ਗ੍ਰਾ
ਪ੍ਰਸਰਨ	127.69 ਸੈਂ. ਮੀ.	23.1361 ਕਿ. ਗ੍ਰਾ

ਕੀ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਭਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਕੱਦ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਵਿਚਲਨ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਵਿਚਲਨਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਲਈ ਅਸੀਂ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਕਾਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨੀ ਹੈ।

ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕੱਦਾਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਸਰਨ = 127.69 ਸੈਂ. ਮੀ.

ਇਸ ਲਈ ਕੱਦਾਂ ਦਾ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ = $\sqrt{127.69}$ ਸੈਂ. ਮੀ. = 11.3 ਸੈਂ. ਮੀ.

ਦੁਬਾਰਾ ਭਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਸਰਨ = 23.1361 ਕਿ. ਗ੍ਰਾ.

ਇਸ ਲਈ ਭਾਰਾਂ ਦਾ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ = $\sqrt{23.1361}$ ਸੈਂ. ਮੀ.= 4.81 ਕਿ. ਗ੍ਰਾ.

ਹੁਣ ਕੱਦਾਂ ਦਾ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ = $\frac{\text{ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ}}{\text{ਮੱਧਮਾਨ}} \times 100$

$$= \frac{11.3}{162.6} \times 100 = 6.95$$

ਅਤੇ ਭਾਰਾਂ ਦਾ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ = $\frac{4.81}{52.36} \times 100 = 9.18$

ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ ਭਾਰ ਦਾ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ ਕੱਦਾਂ ਦੇ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਭਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਕੱਦਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵੱਧ ਵਿਚਲਨ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਭਿਆਸ 15.3

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਦੱਸੋ ਕਿ A ਜਾਂ B ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਖਿੰਡਾਅ ਹੈ :

ਅੰਕ	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
ਸਮੂਹ A	9	17	32	33	40	10	9
ਸਮੂਹ B	10	20	30	25	43	15	7

2. ਸ਼ੇਅਰਾਂ X ਅਤੇ Y ਦੇ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਮੁੱਲਾਂ ਤੋਂ ਦੱਸੋ ਕਿ ਕਿਸ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਸਥਿਰਤਾ ਹੈ।

X	35	54	52	53	56	58	52	50	51	49
Y	108	107	105	105	106	107	104	103	104	101

3. ਇੱਕ ਕਾਰਖਾਨੇ ਦੀਆਂ ਦੋ ਫ਼ਰਮਾਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਤਨਖਾਹ ਦੇ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਦਾ ਨਤੀਜੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ :

	ਫ਼ਰਮ A	ਫ਼ਰਮ B
ਤਨਖਾਹ ਲੈਣ ਵਾਲੇ ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	586	648
ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਤਨਖਾਹ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ	₹ 5253	₹ 5253
ਤਨਖਾਹਾਂ ਦੀ ਵੰਡ ਦੀ ਪ੍ਰਸਰਨ	100	121

(i) A ਅਤੇ B ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਫ਼ਰਮ ਆਪਣੇ ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਨੂੰ ਤਨਖਾਹ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਰਾਸ਼ੀ ਦਿੰਦੀ ਹੈ ?

(ii) ਵਿਅਕਤੀਗਤ ਤਨਖਾਹਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੀ ਫ਼ਰਮ A ਜਾਂ B ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਵਿਚਲਨ ਹੈ ?

4. ਟੀਮ A ਰਾਹੀਂ ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਵਿੱਚ ਖੇਲੇ ਗਏ ਫੁੱਟਬਾਲ ਮੈਚਾਂ ਦੇ ਅੰਕੜੇ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਹਨ :

ਕੀਤੇ ਹੋਏ ਗੋਲਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	0	1	2	3	4
ਮੈਚਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ	1	9	7	5	3

ਟੀਮ B ਰਾਹੀਂ ਖੇਡੇ ਗਏ ਮੈਚਾਂ ਵਿੱਚ ਬਣਾਏ ਹੋਏ ਗੋਲਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ 2 ਪ੍ਰਤੀ ਮੈਚ ਅਤੇ ਗੋਲਾਂ ਦਾ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ 1.25 ਸੀ। ਕਿਸ ਟੀਮ ਨੂੰ ਵੱਧ ਸੰਗਤ (consistent) ਸਮਝ ਜਾਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ?

5. 50 ਵਨਸਪਤੀ ਉਤਪਾਦਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ x (ਸੈਂ. ਮੀ. ਵਿੱਚ) ਅਤੇ ਭਾਰ y (ਗ੍ਰਾਮ ਵਿੱਚ) ਦੇ ਜੋੜ ਅਤੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਨ :

$$\sum_{i=1}^{50} x_i = 212,\ \sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 902.8,\ \sum_{i=1}^{50} y_i = 261,\ \sum_{i=1}^{50} y_i^2 = 1457.6$$

ਲੰਬਾਈ ਜਾਂ ਭਾਰ ਵਿੱਚ ਕਿਸ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਵਿਚਲਨ ਹੈ ?

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 16 : 20 ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ 5 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ ਨੂੰ 2 ਤੋਂ ਗੁਣਾਂ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ $x_1, x_2, ..., x_{20}$ ਅਤੇ $\overline{x}$ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਹੈ। ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀ 5 ਹੈ ਅਤੇ $n = 20$ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ :

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

$$\text{ਪ੍ਰਸਰਨ } \left(\sigma^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{20}(x_i - \overline{x})^2 \quad \text{ਭਾਵ } 5 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(x_i - \overline{x})^2$$

ਜਾਂ $$\sum_{i=1}^{20}(x_i - \overline{x})^2 = 100 \qquad \text{... (1)}$$

ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ ਨੂੰ 2 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਪਰਿਣਾਮੀ ਪ੍ਰੇਖਣ y_i ਹਨ।

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ $$y_i = 2x_i \text{ i.e., } x_i = \frac{1}{2}y_i$$

ਇਸ ਲਈ $$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{20} y_i = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} 2x_i = 2 . \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i$$

ਭਾਵ $$\overline{y} = 2\,\overline{x} \quad \text{ਜਾਂ} \quad \overline{x} = \frac{1}{2}\overline{y}$$

x_i ਅਤੇ $\overline{x}$ ਦੇ ਮੁੱਲ (1) ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{1}{2}y_i - \frac{1}{2}\overline{y}\right)^2 = 100 \quad \text{ਭਾਵ} \quad \sum_{i=1}^{20}(y_i - \overline{y})^2 = 400$$

ਇਸ ਲਈ ਨਵੇਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ = $\frac{1}{20} \times 400 = 20 = 2^2 \times 5$

ਟਿੱਪਣੀ ਪਾਠਕ ਧਿਆਨ ਦੇਣ ਕਿ ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ ਨੂੰ k, ਤੋਂ ਗੁਣਾ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਨਵੇਂ ਬਣੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ ਪਹਿਲੇ ਪ੍ਰਸਰਨ ਦਾ k^2 ਗੁਣਾ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 17 : ਪੰਜ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ 4.4 ਹੈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ 8.24 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਤਿੰਨ ਪ੍ਰੇਖਣ 1, 2 ਅਤੇ 6 ਹਨ ਤਾਂ ਹੋਰ ਦੋ ਪ੍ਰੇਖਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਬਾਕੀ ਦੋ ਪ੍ਰੇਖਣ x ਅਤੇ y ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, ਲੜੀ 1, 2, 6, x, y ਹੈ।

ਹੁਣ ਮੱਧਮਾਨ $$\overline{x} = 4.4 = \frac{1+2+6+x+y}{5}$$

ਜਾਂ $$22 = 9 + x + y$$

ਇਸ ਲਈ $$x + y = 13 \qquad \text{... (1)}$$

ਨਾਲ ਹੀ ਪ੍ਰਸਰਨ $$= 8.24 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \overline{x})^2$$

ਭਾਵ $$8.24 = \frac{1}{5}\left[(3.4)^2 + (2.4)^2 + (1.6)^2 + x^2 + y^2 - 2\times 4.4\,(x+y) + 2\times(4.4)^2\right]$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਜਾਂ $41.20 = 11.56 + 5.76 + 2.56 + x^2 + y^2 - 8.8 \times 13 + 38.72$

ਇਸ ਲਈ $x^2 + y^2 = 97$ ... (2)

ਪਰੰਤੂ (1) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$x^2 + y^2 + 2xy = 169 \quad \text{... (3)}$$

(2) ਅਤੇ (3) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$2xy = 72 \quad \text{... (4)}$$

(2) ਵਿਚੋਂ (4) ਘਟਾਉਣ ’ਤੇ

$$x^2 + y^2 - 2xy = 97 - 72 \text{ ਭਾਵ } (x-y)^2 = 25$$

ਜਾਂ $x - y = \pm 5$ ... (5)

ਹੁਣ (1) ਅਤੇ (5) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$x = 9, \quad y = 4$ ਜਦੋਂ $x - y = 5$

ਜਾਂ $x = 4, \quad y = 9$ ਜਦੋਂ $x - y = -5$

ਇਸ ਲਈ ਬਾਕੀ ਦੋ ਪ੍ਰੇਖਣ 4 ਅਤੇ 9 ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 18 : ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ $x_1, x_2, ..., x_n$ ਨੂੰ ‘a’, ਤੋਂ ਵਧਾਇਆ ਜਾਵੇ ਜਿੱਥੇ a ਇੱਕ ਰਿਣਾਤਕਮ ਜਾਂ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਪ੍ਰਸਰਨ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦਾ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਪ੍ਰੇਖਣ $x_1, x_2, ..., x_n$ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \text{ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।}$$

ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ ਵਿੱਚ ‘a ਜੋੜਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਨਵੇਂ ਪ੍ਰੇਖਣ ਹੋਣਗੇ।

$$y_i = x_i + a \quad \text{... (1)}$$

ਮੰਨ ਲਉ ਨਵੇਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{y}$ ਹੈ ਤਾਂ

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + a)$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} a\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{na}{n} = \bar{x} + a$$

ਭਾਵ $\bar{y} = \bar{x} + a$ ... (2)

ਇਸ ਲਈ ਨਵੇਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਸਰਨ

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + a - \bar{x} - a)^2 \qquad \text{[(1) ਅਤੇ (2) ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਤੋਂ]}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sigma_1^2$$

ਇਸ ਲਈ ਨਵੇਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ ਉਹੀ ਹੈ ਜੋ ਮੂਲ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਸੀ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਟਿੱਪਣੀ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਜੋੜਨ ਜਾਂ ਘਟਾਉਣ 'ਤੇ ਪ੍ਰਸਰਨ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 19 : ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੇ 100 ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ 40 ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ 5.1 ਪਤਾ ਕੀਤਾ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਉਸਨੇ ਗਲਤੀ ਨਾਲ ਪ੍ਰੇਖਣ 40 ਦੀ ਜਗ੍ਹਾ 50 ਲੈ ਲਿਆ ਸੀ। ਠੀਕ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਕੀ ਹਨ ?

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ, ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $(n) = 100$

ਗਲਤ ਮੱਧਮਾਨ $(\bar{x}) = 40,$

ਗਲਤ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ $(\sigma) = 5.1$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

ਭਾਵ $$40 = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} x_i \quad \text{ਜਾਂ} \quad \sum_{i=1}^{100} x_i = 4000$$

ਭਾਵ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਗਲਤ ਜੋੜ = 4000

ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਸਹੀ ਜੋੜ = ਗਲਤ ਜੋੜ – 50 + 40

$$= 4000 - 50 + 40 = 3990$$

ਇਸ ਲਈ $$\text{ਸਹੀ ਮੱਧਮਾਨ} = \frac{\text{ਸਹੀ ਜੋੜ}}{100} = \frac{3990}{100} = 39.9$$

ਨਾਲ ਹੀ $$\text{ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ } \sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2}$$

ਭਾਵ $$5.1 = \sqrt{\frac{1}{100} \times \text{ਗਲਤ} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (40)^2}$$

ਜਾਂ $$26.01 = \frac{1}{100} \times \text{ਗਲਤ} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1600$$

ਇਸ ਲਈ $$\text{ਗਲਤ} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 100\,(26.01 + 1600) = 162601$$

ਹੁਣ $$\text{ਸਹੀ} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \text{ਗਲਤ} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (50)^2 + (40)^2$$

$$= 162601 - 2500 + 1600 = 161701$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਸ ਲਈ ਸਹੀ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ

$$= \sqrt{\frac{\text{ਸਹੀ } \sum x_i^2}{n} - (\text{ਸਹੀ ਮੱਧਮਾਨ})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{161701}{100} - (39.9)^2}$$

$$= \sqrt{1617.01 - 1592.01}$$

$$= \sqrt{25} = 5$$

ਅਧਿਆਇ 15 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਅੱਠ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਪ੍ਰਸਰਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 9 ਅਤੇ 9.25 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਛੇ ਪ੍ਰੇਖਣ 6, 7, 10, 12, 12 ਅਤੇ 13 ਹਨ, ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਦੋ ਪ੍ਰੇਖਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਸੱਤ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਪ੍ਰਸਰਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 8 ਅਤੇ 16 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਪੰਜ ਪ੍ਰੇਖਣ 2, 4, 10, 12, 14 ਹਨ ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਦੋ ਪ੍ਰੇਖਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਛੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 8 ਅਤੇ 4 ਹਨ। ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਪਰਿਣਾਮੀ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਜੇਕਰ n ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ $x_1, x_2, ..., x_n$ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$ ਅਤੇ ਪ੍ਰਸਰਨ σ^2 ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ $ax_1, ax_2, ax_3, ..., ax_n$ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਪ੍ਰਸਰਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $a\bar{x}$ ਅਤੇ $a^2\sigma^2$ $(a \neq 0)$ ਹਨ।
5. ਵੀਹ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 10 ਅਤੇ 2 ਹਨ। ਜਾਂਚ ਕਰਨ ਤੇ ਇਹ ਪਾਇਆ ਕਿ ਇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ 8 ਗਲਤ ਹੈ। ਹੇਠ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਸਹੀ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ :

   (i) ਗਲਤ ਪ੍ਰੇਖਣ ਹਟਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ। (ii) ਉਸਨੂੰ 12 ਨਾਲ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ।
6. ਇੱਕ ਜਮਾਤ ਦੇ ਪੰਜਾਹ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਰਾਹੀਂ ਤਿੰਨ ਵਿਸ਼ਿਆਂ ਗਣਿਤ, ਭੌਤਿਕ ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਰਸਾਇਣ ਵਿਗਿਆਨ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਨ :

ਵਿਸ਼ਾ	ਗਣਿਤ	ਭੌਤਿਕ ਵਿਗਿਆਨ	ਰਸਾਇਣ ਵਿਗਿਆਨ
ਮੱਧਮਾਨ	42	32	40.9
ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ	12	15	20

   ਕਿਸ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵਿਚਲਨ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਸ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ਵਿਚਲਨ ਹੈ ?
7. 100 ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 20 ਅਤੇ 3 ਹਨ। ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਇਹ ਪਾਇਆ ਕਿ ਤਿੰਨ ਪ੍ਰੇਖਣ 21, 21 ਅਤੇ 18 ਗਲਤ ਸੀ। ਜੇਕਰ ਗਲਤ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਨੂੰ ਹਟਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਵਿਖੇਪਨ ਦਾ ਮਾਪ (ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਖਿੰਡਾਅ ਜਾਂ ਵਿਚਲਨ ਦਾ ਮਾਪ) : ਸੀਮਾ, ਚੌਥਾਈ ਵਿਚਲਨ, ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਵਿਖੇਪਨ ਦੇ ਮਾਪ ਹਨ।

  ਸੀਮਾ = ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮੁੱਲ – ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਮੁੱਲ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

◆ ਅਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ

$$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}, \quad \text{M.D. (M)} = \frac{\sum |x_i - \text{M}|}{n}$$

ਜਿੱਥੇ $\bar{x}$ = ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ M = ਮੱਧਿਕਾ

◆ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਮੱਧ ਵਿਚਲਨ

$$\text{M.D.}(\bar{x}) = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{\text{N}}, \quad \text{M.D.(M)} = \frac{\sum f_i |x_i - \text{M}|}{\text{N}}, \text{ ਜਿੱਥੇ } \text{N} = \sum f_i$$

◆ ਅਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2, \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2}$$

◆ ਵੱਖਰੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ

$$\sigma^2 = \frac{1}{\text{N}} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2, \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{\text{N}} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2}$$

◆ ਲਗਾਤਾਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ

$$\sigma^2 = \frac{1}{\text{N}} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2, \qquad \sigma = \frac{1}{\text{N}} \sqrt{\text{N} \sum f_i x_i^2 - \left(\sum f_i x_i\right)^2}$$

◆ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਲਘੂ ਵਿਧੀ

$$\sigma^2 = \frac{h^2}{\text{N}^2} \left[\text{N} \sum f_i y_i^2 - \left(\sum f_i y_i\right)^2\right], \quad \sigma = \frac{h}{\text{N}} \sqrt{\text{N} \sum f_i y_i^2 - \left(\sum f_i y_i\right)^2},$$

ਜਿੱਥੇ $y_i = \dfrac{x_i - \text{A}}{h}$

◆ ਵਿਚਲਨ ਗੁਣਾਂਕ (C.V.) $= \dfrac{\sigma}{\bar{x}} \times 100, \bar{x} \neq 0$

ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ (ਬਰਾਬਰ) ਮੱਧਮਾਨ ਵਾਲੀ ਲੜੀਆਂ ਵਿੱਚ ਛੋਟੀ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਵਾਲੀ ਲੜੀ ਵੱਧ ਸੰਗਤ ਜਾਂ ਘੱਟ ਖਿੰਡਾਅ ਵਾਲੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਦੀ ਸ਼ੁਰੂਆਤ ਲੈਟਿਨ ਸ਼ਬਦ 'status' ਤੋਂ ਹੋਇਆ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਅਰਥ ਇੱਕ ਰਾਜਨੀਤਿਕ ਰਾਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਇਨਸਾਨੀ ਸੱਭਿਅਤਾ ਜਿੰਨੀ ਪੁਰਾਣੀ ਹੈ। ਸ਼ਾਇਦ ਸਾਲ 3050 ਈ. ਪੂ. ਵਿੱਚ ਯੂਨਾਨ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੀ ਜਨਗਣਨਾ ਕੀਤੀ ਗਈ ਸੀ। ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਵੀ ਲਗਭਗ 2000 ਸਾਲ ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਸ਼ਾਸਨਿਕ ਅੰਕੜੇ ਇਕੱਠੇ ਕਰਨ ਦੀ ਵਧੀਆਂ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਸੀ। ਖਾਸ ਤੌਰ 'ਤੇ ਚੰਦਰਗੁਪਤ ਮੌਰਿਆ (324-300 ਈ. ਪੂ.) ਦੇ ਰਾਜ ਦੇ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਕੌਟਿਲਿਆ (ਲਗਭਗ 300 ਈ. ਪੂ.) ਦੇ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿੱਚ ਜਨਮ ਅਤੇ ਮੌਤ ਦੇ ਅੰਕੜੇ ਇੱਕਠੇ ਕਰਨ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਉਲੇਖ ਮਿਲਿਆ ਹੈ। ਅਕਬਰ ਦੇ ਸ਼ਾਸਨਕਾਲ ਵਿੱਚ ਕੀਤੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਸ਼ਾਸਨਿਕ ਸਰਵੇਖਣਾਂ ਦਾ ਵਰਣਨ ਅਬੁਲ ਫਜ਼ਲ ਰਾਹੀਂ ਲਿਖੀ ਪੁਸਤਕ ਆਈਨੇ ਅਕਬਰੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ।

ਲੰਦਨ ਦੇ ਕਪਤਾਨ John Graunt (1620-1675) ਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਰਾਹੀਂ ਜਨਮ ਅਤੇ ਮੌਤ ਦਾ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਦੇ ਕਾਰਨ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਜਨਮ ਅਤੇ ਮੌਤ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਦਾ ਪਿਤਾ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। Jacob Bernoulli (1654-1705) ਨੇ 1713 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਆਪਣੀ ਪੁਸਤਕ "Ars Conjectandi' ਵਿਚ ਵੱਡੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਨਿਯਮ ਨੂੰ ਲਿਖਿਆ ਹੈ।

ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਦਾ ਸਿਧਾਂਤਿਕ ਵਿਕਾਸ ਸਤਾਰ੍ਹਵੀਂ ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਦੇ ਦੌਰਾਨ ਖੇਡਾਂ ਅਤੇ ਸੰਯੋਗ ਘਟਨਾ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਦੇ ਜਾਣ-ਪਛਾਣ ਦੇ ਨਾਲ ਹੋਇਆ ਅਤੇ ਇਸ ਤੋਂ ਅੱਗੇ ਵੀ ਵਿਕਾਸ ਜਾਰੀ ਰਿਹਾ। ਇੱਕ ਅੰਗਰੇਜ਼ Francis Galton (1822-1921) ਨੇ ਜੀਵ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ (Biometry) ਦੇ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਵਿਧੀਆਂ ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਦਾ ਰਸਤਾ ਪੱਕਾ ਕੀਤਾ। Karl Pearson (1857-1936) ਨੇ ਕਈ ਵਰਗ ਪਰੀਕਸ਼ਣ (Chi square test) ਅਤੇ ਇੰਗਲੈਂਡ ਵਿੱਚ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਪ੍ਰਯੋਗਸ਼ਾਲਾ ਦੇ ਅਸਥਾਪਨ ਦੇ ਨਾਲ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨੀ ਅਧਿਐਨ ਦੇ ਵਿਕਾਸ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਯੋਗਦਾਨ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

Sir Ronald A. Fisher (1890-1962) ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਆਧੁਨਿਕ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਦਾ ਪਿਤਾ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਨੇ ਇਸਨੂੰ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਖੇਤਰਾਂ ਜਿਵੇਂ ਅਨੁਵਾਂਸ਼ਿਕੀ, ਜੀਵ-ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ, ਸਿੱਖਿਆ, ਖੇਤੀਬਾੜੀ ਆਦਿ ਵਿੱਚ ਲਗਾਇਆ।

— ❖ —

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਧਿਆਇ 16

ਸੰਭਾਵਨਾ
(Probability)

❖*Where a mathematical reasoning can be had, it is as great a folly to make use of any other, as to grope for a thing in the dark, when you have a candle in your hand. – JOHN ARBUTHNOT* ❖

16.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਪਹਿਲਾਂ ਦੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਸੰਕਲਪਨਾ ਨੂੰ ਭਿੰਨ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦੀ ਅਨਿਸ਼ਚਿਤਤਾ ਦਾ ਮਾਪ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਤੇ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{3}{6}$ ਭਾਵ $\frac{1}{2}$ ਪਤਾ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਇੱਥੇ ਕੁੱਲ ਸੰਭਾਵਿਤ ਨਤੀਜੇ 1,2,3,4,5 ਅਤੇ 6 ਹਨ। ਘਟਨਾ 'ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ' ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਨਤੀਜੇ 2,4,6 (ਭਾਵ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ) ਹਨ। ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਘਟਨਾ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਕੁੱਲ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਨਾਲ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਇਸ ਸਿਧਾਂਤ ਨੂੰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਪੁਰਾਣਾ ਸਿਧਾਂਤ (classical theory of probability) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

Kolmogorov
(1903-1987)

ਜਮਾਤ ਨੌਵੀਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਪ੍ਰੇਖਣ ਅਤੇ ਇੱਕਤਰਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨਿਕ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ (statistical approach) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੋਵੇਂ ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਵਿਚ ਕੁਝ ਗੰਭੀਰ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇਹਨਾਂ ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਤੇ ਨਹੀਂ ਲਗਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸੰਭਾਵਿਤ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਨੰਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਪੁਰਾਣੇ ਸਿਧਾਂਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸੰਭਾਵਿਤ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਸਮ ਸੰਭਵ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਸਮ ਸੰਭਵ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਵਿਸ਼ਵਾਸ ਕਰਨ ਦਾ ਕੋਈ ਕਾਰਨ ਨਾ ਹੋਵੇ ਕਿ ਇੱਕ ਨਤੀਜੇ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੂਜੇ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਰੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ, ਸੰਭਾਵਨਾ ਸਮਾਨ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਸਮ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਹ ਤਰਕ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਠੀਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਰੂਸ ਦੇ ਗਣਿਤਗ A.N. Kolmogorov ਨੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਸਿਧਾਂਤ ਦਾ ਵਿਕਾਸ ਕੀਤਾ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ 1933 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਆਪਣੀ ਪੁਸਤਕ 'ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਅਧਾਰ' (Foundation of Probability) ਵਿੱਚ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਲਈ ਕੁਝ ਅਟਲ ਤੱਥ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕੀਤੇ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਇਸੇ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ, ਜਿਸਨੂੰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਸਵੈਸਿੱਧ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ, ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਲਈ ਕੁਝ ਮੂਲ ਸ਼ਬਦਾਂ ਨੂੰ ਜਾਨਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ (Random Experiment), ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ (Sample Space) ਘਟਨਾਵਾਂ (Events) ਆਦਿ। ਆਉ ਇਹਨਾ ਦੇ ਬਾਰੇ ਅੱਗੇ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕਰੀਏ।

16.2 ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ (Random Experiments)

ਆਮ ਜ਼ਿੰਦਗੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਕਈ ਕੰਮ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਚਾਹੇ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਿੰਨੀ ਵਾਰੀ ਵੀ ਦੁਹਰਾਇਆ ਜਾਵੇ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਨਾ ਜਾਣਦੇ ਹੋਏ ਵੀ ਅਸੀਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੂਪ ਤੋਂ ਕਹਿ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 180° ਹੋਵੇਗਾ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਵੀ ਕਈ ਪ੍ਰਯੋਗੀ ਕੰਮ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸਮਾਨ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਦੁਹਰਾਉਣ ਤੇ ਵੀ ਨਤੀਜਾ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇੱਕੋ ਜਿਹਾ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਚਿੱਤ (head) ਆ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਪਟ (tail) ਆ ਸਕਦਾ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵਾਸਤਵਿਕ ਨਤੀਜਾ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੋਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ? ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇਹ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਦੋ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ :

(*i*) ਇਸਦੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜੇ ਹੋਣ।

(*ii*) ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਦੇ ਪੂਰਨ ਹੋਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਨਤੀਜਾ ਦੱਸਣਾ ਸੰਭਵ ਨਾ ਹੋਵੇ।

ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਬੇਤਰਤੀਬ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ?

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਿਹਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕਿ ਹੋਰ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਅਕਤ ਨਾ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੋਵੇ।

16.2.1 *ਨਤੀਜਾ ਅਤੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ (Outcomes and sample space)* ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਕਿਸੇ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਨਤੀਜਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਪਾਸੇ ਦੇ ਉਪਰੀ ਫਲਕ ਤੇ ਅੰਕਿਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਰੁਚੀ ਰੱਖਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਨਤੀਜੇ 1, 2, 3, 4, 5 ਜਾਂ 6 ਹਨ। ਸਾਰੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਉਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਸੰਕੇਤ S ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਹਰੇਕ ਹਿੱਸਾ ਇੱਕ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਹਰੇਕ ਨਤੀਜਾ ਵੀ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਦੋ ਸਿੱਕਿਆਂ (ਇੱਕ ₹ 1 ਦਾ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ₹ 2 ਦਾ) ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ ਸਿੱਕੇ ਇਸ ਅਰਥ ਵਿੱਚ ਵੱਖ ਹਨ ਕਿ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਲਾ ਸਿੱਕਾ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਸਿੱਕਾ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿਉਂਕਿ ਦੋਨਾਂ ਸਿੱਕਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਤੇ ਚਿਤ (H) ਜਾਂ ਪਟ (T) ਪ੍ਰਗਟ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ :

ਦੋਵੇਂ ਸਿੱਕਿਆਂ ਤੇ ਚਿਤ = (H,H) = HH

ਪਹਿਲੇ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਚਿਤ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਤੇ ਪਟ = (H,T) = HT

ਪਹਿਲੇ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਪਟ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਤੇ ਚਿਤ = (T, H) = TH

ਦੋਵੇਂ ਸਿੱਕਿਆਂ ਤੇ ਪਟ = (T,T) = TT

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S = {HH, HT, TH, TT} ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਨਤੀਜੇ H ਅਤੇ T ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਯੁਗਮ ਹਨ। ਸਰਲਤਾ ਲਈ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਯੁਗਮ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਅਰਧ-ਵਿਰਾਮ (comma) ਨੂੰ ਛੱਡ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਪਾਸੇ (dice) ਦੇ ਜੋੜੇ (ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦਾ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਹੈ) ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਹਿੱਸੇ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮਨ ਲਉ ਕਿ ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੇ ਪਾਸੇ ਤੇ 1 ਅਤੇ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੇ ਪਾਸੇ (dice) ਤੇ 2 ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਯੁਗਮ (1, 2) ਰਾਹੀਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਜੇਕਰ ਨੀਲੇ ਪਾਸੇ ਤੇ 3 ਅਤੇ ਲਾਲ ਪਾਸੇ ਤੇ 5 ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ (3,5) ਰਾਹੀਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਹਰੇਕ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਯੁਗਮ (x, y) ਰਾਹੀਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ x ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੇ ਪਾਸੇ ਤੇ ਅਤੇ y ਲਾਲ ਪਾਸੇ ਤੇ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣ ਵਾਲੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

S = {(x, y) : x ਨੀਲੇ ਪਾਸੇ ਤੇ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ y ਲਾਲ ਪਾਸੇ ਤੇ ਪ੍ਰਗਟ ਸੰਖਿਆ ਹੈ}

ਇਸ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਹਿੱਸਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $6 \times 6 = 36$ ਹੈ ਅਤੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਹੈ :

{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)

(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)

(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

ਉਦਾਹਰਣ 3: ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਲਈ ਸਹੀ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਉਲੇਖ ਕਰੋ :

(i) ਇੱਕ ਬੱਚੇ ਦੀ ਜੇਬ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ₹ 1, ਇੱਕ ₹ 2 ਅਤੇ ਇੱਕ ₹ 5 ਦੇ ਸਿੱਕੇ ਹਨ। ਉਹ ਆਪਣੀ ਜੇਬ 'ਚੋਂ ਇੱਕ ਦੇ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਦੋ ਸਿੱਕੇ ਕੱਢਦਾ ਹੈ।

(ii) ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਕਿਸੇ ਵਿਅਸਤ ਰਾਜ ਮਾਰਗ ਤੇ ਇੱਕ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਵਾਲੀਆਂ ਦੁਰਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਲਿਖਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : (i) ਮੰਨ ਲਓ ₹ 1 ਦਾ ਸਿੱਕਾ Q ਤੋਂ, ₹ 2 ਦਾ ਸਿੱਕਾ H ਤੋਂ ਅਤੇ ₹ 5 ਦਾ ਸਿੱਕਾ R ਤੋਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਉਸਦੇ ਰਾਹੀਂ ਜੇਬ 'ਚੋਂ ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪਹਿਲਾ ਸਿੱਕਾ ਤਿੰਨ ਸਿੱਕਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ Q, H ਜਾਂ R ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਪਹਿਲੇ ਸਿੱਕੇ Q ਦੇ ਸੰਗਤ ਦੂਜੀ ਵਾਰ ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਸਿੱਕਾ H ਜਾਂ R ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਸਿੱਕਿਆਂ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ QH ਜਾਂ QR ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, H ਦੇ ਸੰਗਤ ਦੂਜੀ ਬਾਰ ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਸਿੱਕਾ Q ਜਾਂ R ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਨਤੀਜਾ HQ ਅਤੇ HR ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ R ਦੇ ਸੰਗਤ ਦੂਜੀ ਬਾਰ ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਸਿੱਕਾ H ਜਾਂ Q ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪਰਿਣਾਮ RH ਜਾਂ RQ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S = {QH, QR, HQ, HR, RH, RQ} ਹੈ।

(ii) ਕਿਸੇ ਵਿਅਸਤ ਰਾਜਮਾਰਗ ਤੇ ਦੁਰਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 0 (ਕਿਸੇ ਦੁਰਘਟਨਾ ਨਾ ਹੋਣ ਤੇ) ਜਾਂ 1 ਜਾਂ 2 ਜਾਂ ਕੋਈ ਵੀ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S = {0,1,2,...} ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4: ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਸ ਤੇ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਥੈਲੀ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ 3 ਨੀਲੀ ਅਤੇ 4 ਸਫ਼ੇਦ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ, ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਕੱਢਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਪਟ ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਅਸੀਂ ਨੀਲੀ ਗੇਂਦਾਂ ਨੂੰ B_1, B_2, B_3 ਅਤੇ ਸਫ਼ੇਦ ਗੇਂਦਾਂ ਨੂੰ W_1, W_2, W_3, W_4 ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S = {HB_1, HB_2, HB_3, HW_1, HW_2, HW_3, HW_4, T1, T2, T3, T4, T5, T6} ਹੈ। ਇੱਥੇ HB_i ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਚਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਗੇਂਦ B_i ਕੱਢੀ ਗਈ ਹੈ। HW_i ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਪਟ ਹੈ ਅਤੇ ਗੇਂਦ W_i ਕੱਢੀ ਗਈ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ T_i ਦਾ ਅਰਧ ਹੈ ਕਿ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਪਟ ਅਤੇ ਸੰਖਿਆ (ਪਾਸੇ ਤੇ) i ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਈ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5: ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਬਾਰ-ਬਾਰ ਤਦ ਤੱਕ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਗਟ ਨਾ ਹੋਵੇ। ਇਸਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੀ ਉਛਾਲ ਜਾਂ ਦੂਜੀ ਉਛਾਲ ਜਾਂ ਤੀਜੀ ਉਛਾਲ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S= {H, TH, TTH, TTTH, TTTTH,...} ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਭਿਆਸ 16.1

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਤੋਂ 7 ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।
2. ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਦੋ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।
3. ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਚਾਰ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।
4. ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।
5. ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਉਸ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
6. X ਕਮਰੇ ਵਿੱਚ 2 ਮੁੰਡੇ ਅਤੇ 2 ਕੁੜੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ Y ਕਮਰੇ ਵਿੱਚ 1 ਮੁੰਡਾ ਅਤੇ 3 ਕੁੜੀਆਂ ਹਨ। ਉਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੇ ਇੱਕ ਕਮਰਾ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਫੇਰ ਇੱਕ ਬੱਚਾ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
7. ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦਾ, ਇੱਕ ਸਫ਼ੇਦ ਰੰਗ ਦਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਪਾਸਾ ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦਾ, ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ ਰੱਖੇ ਹੋਏ ਹਨ। ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ ਅਤੇ ਉਸਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਪਾਸੇ ਦਾ ਰੰਗ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਉਪਰਲੇ ਫਲਕ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ ਨੂੰ ਲਿਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰੋ।
8. ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ 2 ਬੱਚਿਆਂ ਵਾਲੇ ਪਰਿਵਾਰਾਂ ਵਿਚੋਂ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਲੜਕੇ-ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

   (i) ਜੇਕਰ ਸਾਡੀ ਰੁਚੀ ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਜਾਨਣ ਵਿੱਚ ਹੈ ਕਿ ਜਨਮ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿਚ ਬੱਚਾ ਲੜਕਾ ਜਾਂ ਲੜਕੀ ਹੈ ਤਾਂ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ?

   (ii) ਜੇਕਰ ਸਾਡੀ ਰੁਚੀ ਕਿਸੇ ਪਰਿਵਾਰ ਵਿੱਚ ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਜਾਨਣ ਵਿਚ ਹੈ ਤਾਂ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ?
9. ਇੱਕ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚ 1 ਲਾਲ ਅਤੇ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀਆਂ 3 ਸਫ਼ੇਦ ਗੇਂਦਾਂ ਰੱਖੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ। ਦੋ ਗੇਂਦਾਂ ਇੱਕ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਬਿਨਾਂ ਪ੍ਰਤਿ ਸਥਾਪਤ ਕੀਤੇ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।
10. ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਉਸ ਤੇ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ ਫੇਰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪਹਿਲੀ ਵਾਰੀ ਵਿੱਚ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।
11. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਬਲਬਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਢੇਰ ਵਿੱਚੋਂ 3 ਬਲਬ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਬਲਬ ਨੂੰ ਜਾਂਚਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਨੂੰ ਖਰਾਬ (D) ਜਾਂ ਠੀਕ (N) ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।
12. ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਨਤੀਜਾ ਚਿਤ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪਾਸੇ ਤੇ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਫੇਰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀ ਵੰਨਗੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
13. ਕਾਗਜ ਦੀਆਂ ਚਾਰ ਪਰਚੀਆਂ ਤੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 1, 2, 3 ਅਤੇ 4 ਵੱਖ-ਵੱਖ ਲਿਖੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਪਰਚੀਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚ ਰੱਖ ਕੇ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮਿਲਾਇਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚੋਂ ਦੋ ਪਰਚੀਆਂ ਇੱਕ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਦੂਜੀ ਬਿਨਾ ਬਦਲੇ ਕੱਢਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।
14. ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਪਾਸੇ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸਤ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਇੱਕ ਵਾਰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪਾਸੇ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆ ਟਾਂਕ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਦੋ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।
15. ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ। ਜੇਕਰ ਉਸ ਤੇ ਪਟ ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚੋਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ 2 ਲਾਲ ਅਤੇ 3 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ, ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ।
16. ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਤਦ ਤੱਕ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਤੱਕ 6 ਪ੍ਰਗਟ ਨਾ ਹੋ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਕੀ ਹੈ?

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

16.3 ਘਟਨਾ (Event)

ਅਸੀਂ ਬੇਤਰਤੀਬੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਉਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਲਈ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ (Universal set) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਦੋ ਵਾਰ ਉਛਾਲਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਸੰਬੰਧਿਤ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S = {HH, HT, TH, TT} ਹੈ।

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਾਡੀ ਰੁਚੀ ਉਹਨਾਂ ਨਤੀਜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਹੈ ਜਿਹੜੇ ਤੱਥ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਅਸੀ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਘਟਨਾ ਦੇ ਹੋਣ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ S ਦੇ ਤੱਤ ਕੇਵਲ HT ਅਤੇ TH ਹਨ। ਇਹ ਦੋ ਤੱਤ ਇੱਕ ਸਮੂਹ E = { HT, TH} ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਅਸੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੂਹ E ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਹੈ। ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਘਟਨਾਵਾਂ ਅਤੇ S ਦੇ ਉਪ-ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸੰਗਤਤਾ ਹੈ :

ਘਟਨਾ ਦਾ ਵਰਣਨ	'S' ਦਾ ਸੰਗਤ ਉਪ-ਸਮੂਹ
ਪਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਠੀਕ ਦੋ ਹੈ	A = {TT}
ਪਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ 1 ਹੈ	B = {HT, TH, TT}
ਚਿੱਤਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 1 ਹੈ	C = {HT, TH, TT}
ਦੂਜੀ ਉਛਾਲ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤ ਨਹੀਂ ਹੈ	D = { HT, TT}
ਚਿੱਤਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ ਹੈ	S = {HH, HT, TH, TT}
ਚਿੱਤਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ	ϕ

ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਚਰਚਾ ਤੋਂ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਕਿਸੇ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਦੇ ਸੰਗਤ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੇ ਸੰਗਤ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਇੱਕ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦਾ ਕੋਈ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਕਹੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

16.3.1 ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਦਾ ਘਟਿਤ ਹੋਣਾ (Occurrence of an event) ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਘਟਨਾ 'ਪਾਸੇ ਤੇ 4 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ' ਨੂੰ E ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪਾਸੇ ਤੇ ਅਸਲ ਵਿੱਚ 1 ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਘਟਨਾ E ਘਟਿਤ ਹੋਈ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਨਤੀਜਾ 2 ਜਾਂ 3 ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਘਟਨਾ E ਘਟਿਤ ਹੋਈ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੀ ਘਟਨਾ E ਘਟਿਤ ਹੋਈ ਕਹੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਜੇਕਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਨਤੀਜਾ w ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ ਕਿ $w \in E$। ਜੇਕਰ ਨਤੀਜਾ w ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਹੈ ਕਿ $w \notin E$ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਘਟਨਾ E ਘਟਿਤ ਨਹੀਂ ਹੋਈ ਹੈ।

16.3.2 *ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰ (Types of events)* ਘਟਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਹਿੱਸਿਆਂ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਪ੍ਰਕਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

1. ਅਸੰਭਵ ਅਤੇ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਘਟਨਾਵਾਂ (Impossible and Sure Events) ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ ϕ ਅਤੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਵੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ϕ ਨੂੰ ਅਸੰਭਵ ਘਟਨਾ ਅਤੇ S ਭਾਵ ਪੂਰਨ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਘਟਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਲਈ ਆਉ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ E ਘਟਨਾ 'ਪਾਸੇ ਤੇ ਪ੍ਰਗਟ ਸੰਖਿਆ 7 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ' ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਘਟਨਾ E ਦੇ ਸੰਗਤ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਨਤੀਜਾ ਘਟਨਾ E ਦੀਆ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਤੱਤ ਘਟਨਾ E ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਨੂੰ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੇਵਲ ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ ਹੀ ਘਟਨਾ E ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਾਸੇ ਦੇ ਉਪਰੀ ਫਲਕ ਤੇ 7 ਦਾ ਗੁਣਜ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ ਅਸੰਭਵ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਘਟਨਾ $E = \phi$ ਇੱਕ ਅਸੰਭਵ ਘਟਨਾ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਘਟਨਾ F 'ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆ ਜਾਂ ਤਾਂ ਜਿਸਤ ਹੈ ਜਾਂ ਟਾਂਕ' ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$, ਭਾਵ ਸਾਰੇ ਨਤੀਜੇ ਘਟਨਾ F ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਨੂੰ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ $F = S$ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਘਟਨਾ ਹੈ।

2. ਸਰਲ ਘਟਨਾ (Simple Event) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ E ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਘਟਨਾ E ਨੂੰ ਸਰਲ ਜਾਂ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਘਟਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਜਿਸਦੇ ਦਿੱਤੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ n ਵੱਖ ਹਿੱਸੇ ਹੋਣ ਵਿੱਚ n ਸਰਲ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਦੇ ਦੋ ਉਛਾਲਾਂ ਵਾਲੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ

$S=\{HH, HT, TH, TT\}$ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਇਸ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੀਆਂ ਚਾਰ ਸਰਲ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ, ਜਿਹੜੀਆਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਹਨ :

$E_1= \{HH\}, E_2=\{HT\}, E_3= \{ TH\}$ ਅਤੇ $E_4=\{TT\}$

3. ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਘਟਨਾ (Compound Events) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਘਟਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਦੀਆਂ ਤਿੰਨ ਉਛਾਲਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ :

E : ਠੀਕ ਇੱਕ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ

F : ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ

G : ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਇੱਕ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ, ਆਦਿ।

ਇਹਨਾਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ S ਦੇ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

$E = \{HTT,THT,TTH\}$

$F = \{HTT,THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH\}$

$G= \{TTT, THT, HTT, TTH\}$

ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਹਰੇਕ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ ਹਨ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸਾਰੀਆਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ।

16.3.3 *ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਾ ਬੀਜਗਣਿਤ (Algebra of events)* ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਜਾਂ ਵੱਧ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੇ ਭਿੰਨ ਤਰੀਕਿਆਂ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਸੀ ਭਾਵ ਸੰਘ, ਕਾਟ, ਅੰਤਰ ਸਮੂਹ ਦੇ ਪੂਰਕ ਆਦਿ ਬਾਰੇ ਸਮਝਿਆ ਸੀ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਸਮੂਹ ਸੰਕੇਤਨਾਂ ਦੇ ਬਾਬਤ ਇਸਤੇਮਾਲ ਰਾਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਮੰਨ ਲਉ A, B, C ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਜਿਸਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਹੈ।

1. ਪੂਰਕ ਘਟਨਾ (Complementary Event) ਹਰੇਕ ਘਟਨਾ A ਦੇ ਬਾਬਤ ਇੱਕ ਹੋਰ ਘਟਨਾ A' ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਘਟਨਾ A ਦੀ ਪੂਰਕ ਘਟਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। A' ਨੂੰ ਘਟਨਾ 'A-ਨਹੀਂ' ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, 'ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਦੀ ਤਿੰਨ ਉਛਾਲਾਂ' ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਲਉ। ਇਸਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ

$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ $A=\{HTH, HHT, THH\}$ ਘਟਨਾ 'ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਪਟ ਦਾ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਨਤੀਜਾ HTT ਦੇ ਹੋਣ ਤੇ ਘਟਨਾ A ਘਟਿਤ ਨਹੀਂ ਹੋਈ ਹੈ। ਕਿੰਤੂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਘਟਨਾ 'A-ਨਹੀਂ' ਘਟਿਤ ਹੋਈ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਘਟਨਾ A ਲਈ ਪੂਰਕ ਘਟਨਾ 'A-ਨਹੀਂ' ਭਾਵ,

$A' = \{HHH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

ਜਾਂ $A' = \{\omega : \omega \in S$ ਅਤੇ $\omega \notin A\} = S - A$ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

2. ਘਟਨਾ 'A ਜਾਂ B' (Event 'A or B') ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਦਾ ਸੰਘ $A \cup B$ ਰਾਹੀਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਉਹ ਸਾਰੇ ਹਿੱਸੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿਹੜੇ ਜਾਂ ਤਾਂ A ਵਿੱਚ ਹਨ ਜਾਂ B ਵਿੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਦੋਵਾਂ ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਜਦੋਂ ਸਮੂਹ A ਅਤੇ B ਕਿਸੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ '$A \cup B$' ਘਟਨਾ A ਜਾਂ B ਜਾਂ ਦੋਨਾਂ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਘਟਨਾ '$A \cup B$' ਨੂੰ 'A ਜਾਂ B' ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਘਟਨਾ 'A ਜਾਂ B' $= A \cup B$

$$= \{\omega : \omega \in A \text{ ਜਾਂ } \omega \in B\}$$

3. ਘਟਨਾ 'A ਅਤੇ B' (Event 'A and B') ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਕਾਟ $A \cap B$ ਉਹ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਉਹ ਹਿੱਸੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿਹੜੇ A ਅਤੇ B ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚ ਪਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਭਾਵ 'A ਅਤੇ B' ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਜੇਕਰ 'A ਅਤੇ B' ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ ਸਮੂਹ $A \cap B$ ਘਟਨਾ 'A ਅਤੇ B' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, $A \cap B = \{\omega : \omega \in A \text{ ਅਤੇ } \omega \in B\}$

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਦੋ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟਣ ਤੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਮੰਨ ਲਉ ਘਟਨਾ A 'ਪਹਿਲੀ ਸੁੱਟੀ ਸੰਖਿਆ 6 ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦੀ ਹੈ 'ਅਤੇ ਘਟਨਾ B 'ਦੋ ਸੁੱਟਾਂ ਤੇ ਪ੍ਰਗਟ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਜੋੜ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ 11 ਹੁੰਦਾ ਹੈ' ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਤਾਂ

$$A = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\} \text{ ਅਤੇ } B = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$$

ਇਸ ਲਈ $A \cap B = \{(6,5), (6,6)\}$

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਸਮੂਹ $A \cap B = \{(6,5), (6,6)\}$ ਘਟਨਾ 'ਪਹਿਲੀ ਸੁੱਟ ਤੇ 6 ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦੋਵਾਂ ਸੁੱਟਾਂ ਤੇ ਪ੍ਰਗਟ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ 11 ਹੁੰਦਾ ਹੈ' ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ।

4. ਘਟਨਾ 'A ਪਰੰਤੂ B ਨਹੀਂ' (The Event 'A but not B') ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ A–B ਉਨ੍ਹਾਂ ਸਾਰੇ ਹਿੱਸਿਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ A ਵਿੱਚ ਤਾਂ ਹਨ ਪਰੰਤੂ B ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਸਮੂਹ 'A–B' ਘਟਨਾ 'A' ਪਰੰਤੂ B ਨਹੀਂ' ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$A - B = A \cap B'$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਘਟਨਾ 'ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ' ਨੂੰ A ਤੋਂ ਅਤੇ ਘਟਨਾ 'ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ' ਨੂੰ B ਤੋਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ (i) A ਜਾਂ B (ii) A ਅਤੇ B (iii) A ਕਿੰਤੂ B ਨਹੀਂ (iv) 'A ਨਹੀਂ' ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਸਮੂਹ ਲਿਖੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 3, 5\}$ ਅਤੇ $B = \{1, 3, 5\}$

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ

(i) 'A ਜਾਂ B' $= A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$

(ii) 'A ਅਤੇ B' $= A \cap B = \{3,5\}$

(iii) 'A ਪਰੰਤੂ B ਨਹੀਂ' $= A - B = \{2\}$

(iv) 'A ਨਹੀਂ' $= A' = \{1,4,6\}$

16.3.4 *ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ (Mutually exclusive events)*

ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਘਟਨਾ A 'ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ' ਅਤੇ ਘਟਨਾ B 'ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ' ਨੂੰ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ A ਘਟਨਾ B ਨੂੰ ਨਿਵੇਕਲਾ ਕਰ ਰਹੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਉਲਟ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਕੋਈ ਪਰਿਣਾਮ ਨਹੀਂ ਹੈ ਜੋ ਘਟਨਾ A ਅਤੇ B ਦੇ ਇੱਕ ਨਾਲ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਨੂੰ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ

$A = \{1, 3, 5\}$ ਅਤੇ $B = \{2, 4, 6\}$

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ $A \cap B = \phi$, ਭਾਵ A ਅਤੇ B ਨਾ-ਜੁੜੇ ਸਮੂਹ ਹਨ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ A ਅਤੇ B ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਕਹੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਜੇਕਰ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਦਾ ਘਟਿਤ ਹੋਣਾ ਦੂਜੀ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਨੂੰ ਨਿਵੇਕਲਾ ਕਰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਉਹ ਇੱਕਠੀ ਘਟਿਤ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਸਮੂਹ A ਅਤੇ B ਨਾ-ਜੁੜੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਦੋਬਾਰਾ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਘਟਨਾ A 'ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ' ਅਤੇ ਘਟਨਾ B '4 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ' ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ $A = \{1, 3, 5\}$ ਅਤੇ $B = \{1, 2, 3\}$

ਹੁਣ $3 \in A$ ਅਤੇ ਨਾਲ ਹੀ $3 \in B$

ਇਸ ਲਈ A ਅਤੇ B ਨਾ-ਜੁੜੇ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ A ਅਤੇ B ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ ਇੱਕ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੀਆਂ ਸਰਲ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

16.3.5 ***ਸਰਵਾਂਗੀ ਘਟਨਾਵਾਂ (Exhaustive events)*** ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ਹੈ। ਆਉ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੀਏ :

A: '4 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ'

B: '2 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਪਰੰਤੂ 5 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ'

ਅਤੇ C: '4 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ'

ਤਾਂ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3,4\}$ ਅਤੇ $C = \{5, 6\}$ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3\} \cup \{3, 4\} \cup \{5, 6\} = S$$

ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ A, B ਅਤੇ C ਨੂੰ ਸਰਵਾਂਗੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਜੇਕਰ $E_1, E_2, ..., E_n$ ਕਿਸੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੀਆਂ n ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ ਜੇਕਰ :

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup ... \cup E_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$$

ਤਾਂ $E_1, E_2, ..., E_n$ ਨੂੰ ਸਰਵਾਂਗੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਘਟਨਾਵਾਂ $E_1, E_2, ..., E_n$ ਸਰਵਾਂਗੀ ਕਹਿਲਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਜੇਕਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਕਰਨ ਤੇ ਇਹਨਾ ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਜ਼ਰੂਰ ਹੀ ਘਟਿਤ ਹੋਵੇ।

ਇਸਦੇ ਇਲਾਵਾ ਜੇਕਰ ਸਾਰੇ $i \neq j$ ਲਈ $E_i \cap E_j = \phi$ ਇਸ ਕਰਕੇ E_i ਅਤੇ E_j ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਹਨ ਅਤੇ $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$, ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਘਟਨਾਵਾਂ $E_1, E_2, ..., E_n$ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਸਰਵਾਂਗੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਕਹਿਲਾਂਦੀਆ ਹਨ।

ਆਉ ਹੋਰ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਦੋ ਪਾਸ਼ਿਆਂ ਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਪਾਸਿਆਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੇਠਲੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ :

A: 'ਪ੍ਰਾਪਤ ਜੋੜ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ'

B: 'ਪ੍ਰਾਪਤ ਜੋੜ 3 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ'

C: 'ਪ੍ਰਾਪਤ ਜੋੜ 4 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ'

D: 'ਪ੍ਰਾਪਤ ਜੋੜ 11 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ'

ਇਨ੍ਹਾਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀਆਂ ਜੋੜੀਆਂ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀਆਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ $S = \{(x, y): x, y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ਵਿੱਚ 36 ਹਿੱਸੇ ਹਨ।

ਤਾਂ $A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4),$
$(4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

$B = \{(1, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 1), (3, 3), (2, 4), (4, 2), (3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4), (6, 6)\}$

$C = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2)\}$ ਅਤੇ $D = \{(6, 6)\}$

ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$A \cap B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 6)\} \neq \phi$$

ਇਸ ਲਈ A ਅਤੇ B ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $A \cap C \neq \phi$, $A \cap D \neq \phi$, $B \cap C \neq \phi$ ਅਤੇ $B \cap D \neq \phi$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਜੋੜੇ (A, C), (A, D), (B, C), (B, D) ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਨਾਲ ਹੀ $C \cap D = \phi$ ਇਸ ਲਈ C ਅਤੇ D ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

A: 'ਕੋਈ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ', B: 'ਠੀਕ ਇੱਕ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ' ਅਤੇ C: 'ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਦੋ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦੇ ਹਨ'। ਕੀ ਇਹ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਅਤੇ ਸਰਵਾਂਗੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ?

ਹੱਲ : ਨਤੀਜੇ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ

S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT} ਹੈ।

ਅਤੇ A = {TTT}, B = {HTT, THT, TTH}, ਅਤੇ C = {HHT, HTH, THH, HHH}

ਹੁਣ $A \cup B \cup C$ = {TTT, HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH} = S

ਇਸ ਲਈ, A, B ਅਤੇ C ਸਰਵਾਂਗੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ।

ਨਾਲ ਹੀ, $A \cap B = \phi$, $A \cap C = \phi$ ਅਤੇ $B \cap C = \phi$

ਇਸ ਲਈ, ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਹਨ ਭਾਵ ਉਹ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ A, B ਅਤੇ C ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਅਤੇ ਸਰਵਾਂਗੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 16.2

1. ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਘਟਨਾ E 'ਪਾਸੇ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 4 ਦਰਸਾਉਂਦਾ' ਹੈ ਅਤੇ F 'ਪਾਸੇ ਤੇ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਕੀ E ਅਤੇ F ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ?
2. ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰੋ :
   (i) A: ਸੰਖਿਆ 7 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।
   (ii) B : ਸੰਖਿਆ 7 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਹੈ।
   (iii) C: ਸੰਖਿਆ 3 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ।
   (iv) D : ਸੰਖਿਆ 4 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।
   (v) E: 4 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
   (vi) F : ਸੰਖਿਆ 3 ਤੋਂ ਘੱਟ ਨਹੀਂ ਹੈ।

   $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cup C$, $E \cap F$, $D \cap E$, $A - C$, $D - E$, $E \cap F'$, F' ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ
3. ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਤੇ ਪ੍ਰਗਟ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰੋ :
   A: ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 8 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ। B : ਦੋਵੇਂ ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 2 ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
   C: ਪ੍ਰਗਟ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ 7 ਹੈ ਅਤੇ 3 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ।
   ਇਹਨਾਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਕਿਹੜੇ ਜੋੜੇ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਹਨ?

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

4. ਤਿੰਨ ਸਿੱਕਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਘਟਨਾ 'ਤਿੰਨ ਚਿੱਤ ਵੇਖਣੀਆਂ' ਨੂੰ A ਨਾਲ, ਘਟਨਾ 'ਦੋ ਚਿੱਤ ਅਤੇ ਇੱਕ ਪਟ ਵੇਖਣਾ' ਨੂੰ B ਨਾਲ, ਘਟਨਾ 'ਤਿੰਨ ਪਟ ਵੇਖਣੇ' ਨੂੰ C ਨਾਲ ਅਤੇ ਘਟਨਾ 'ਪਹਿਲੇ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਚਿਤ ਵੇਖਣਾ' ਨੂੰ D ਨਾਲ, ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਦੱਸੋ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ

(i) ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀਆਂ ਹਨ ? (ii) ਸਰਲ ਹਨ ? (iii) ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਹਨ ?

5. ਤਿੰਨ ਸਿੱਕੇ ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਵਰਣਨ ਕਰੋ।

(i) ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਜੋ ਕਿ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀਆਂ ਹਨ।

(ii) ਤਿੰਨ ਘਟਨਾਵਾਂ ਜੋ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਅਤੇ ਸਰਵਾਂਗੀ ਹਨ।

(iii) ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਜੋ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਨਹੀਂ ਹਨ।

(iv) ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਜੋ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਹਨ ਪਰੰਤੂ ਸਰਵਾਂਗੀ ਨਹੀਂ ਹਨ।

(v) ਤਿੰਨ ਘਟਨਾਵਾਂ ਜੋ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਹਨ ਪਰੰਤੂ ਸਰਵਾਂਗੀ ਨਹੀਂ ਹਨ।

6. ਦੋ ਪਾਸੇ ਸੁੱਟੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਘਟਨਾਵਾਂ A, B ਅਤੇ C ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ :

A: ਪਹਿਲੇ ਪਾਸੇ ਤੇ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ

B: ਪਹਿਲੇ ਪਾਸੇ ਤੇ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ

C: ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ≤ 5 ਹੋਣਾ।

ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰੋ :

(i) A' (ii) B ਨਹੀਂ (iii) A ਜਾਂ B (iv) A ਅਤੇ B

(v) A ਪਰੰਤੂ B ਨਹੀਂ (vi) B ਜਾਂ C (vii) B ਅਤੇ C (viii) $A \cap B' \cap C'$

7. ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 6 ਨੂੰ ਵੇਖੋ ਅਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਿੱਚੋਂ ਸੱਚ ਜਾਂ ਝੂਠ ਦੱਸੋ (ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦਾ ਕਾਰਨ ਦੱਸੋ) :

(i) A ਅਤੇ B ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਹਨ।

(ii) A ਅਤੇ B ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਅਤੇ ਸਰਵਾਂਗੀ ਹਨ।

(iii) $A = B'$

(iv) A ਅਤੇ C ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀਆਂ ਹਨ।

(v) A ਅਤੇ B' ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀਆਂ ਹਨ।

(vi) A', B', C ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਅਤੇ ਸਰਵਾਂਗੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ।

16.4 ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਸਵੈਸਿੱਧ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ (Axiomatic Approach of Probability)

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ, ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਘਟਨਾਵਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਰੋਜ਼ ਦੇ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਲਈ ਕਈ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਸਿਧਾਂਤ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਜਾਂ ਨਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਇੱਕ ਮਾਪ ਦੇਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਹੈ।

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਬਣਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਹੋਣ ਤੇ, ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਵਿਧੀਆਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ।

ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਸਵੈਸਿਧ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਹੈ। ਇਸ ਤਰੀਕੇ ਵਿੱਚ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਸਵੈਸਿਧੀਆਂ ਜਾਂ ਨਿਯਮਾਂ ਨੂੰ ਵਰਣਿਤ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਹੈ। ਸੰਭਾਵਨਾ P ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਦਾ ਫਲਨ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ S ਦਾ ਘਾਤ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਅੰਤਰਾਲ $[0,1]$ ਹੈ ਜੋ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸਵੈਸਿਧੀਆਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ :

(i) ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ E ਲਈ $P(E) \geq 0$

(ii) $P(S) = 1$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

(iii) ਜੇਕਰ E ਅਤੇ F ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$

ਸਵੈਸਿਧੀਆਂ (iii) ਤੋਂ ਇਹ ਅਨੁਸਰਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $P(\phi) = 0$ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ $F = \phi$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ E ਅਤੇ ϕ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਸਵੈਸਿਧੀ (iii) ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$P(E \cup \phi) = P(E) + P(\phi)$ ਜਾਂ $P(E) = P(E) + P(\phi)$ ਭਾਵ $P(\phi) = 0$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$, ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਹਨ ਭਾਵ

$$S = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\} \text{ ਹੈ।}$$

ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਸਵੈਸਿਧ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

(i) ਹਰੇਕ $0 \le P(\omega_i) \le 1$ ਲਈ $\omega_i \in S$

(ii) $P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_n) = 1$

(iii) ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ω_i ਲਈ $P(A) = \sum P(\omega_i)$, $\omega_i \in A$

ਟਿੱਪਣੀ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇੱਕ-ਤੱਤ ਸਮੂਹ $\{\omega_i\}$ ਨੂੰ ਸਰਲ ਘਟਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਸੰਕੇਤਨ ਦੀ ਸੁਵਿਧਾ ਲਈ ਅਸੀਂ $P(\{\omega_i\})$ ਨੂੰ $P(\omega_i)$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਨਤੀਜੇ H ਅਤੇ T ਦੇ ਨਾਲ ਸੰਖਿਆ $\frac{1}{2}$ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ,

ਭਾਵ $P(H) = \frac{1}{2}$

ਅਤੇ $P(T) = \frac{1}{2}$ ...(1)

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇਹ ਨਿਰਧਾਰਣ ਦੋਵੇਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਹਰੇਕ ਸੰਖਿਆ ਨਾ ਤਾਂ ਸਿਫ਼ਰ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਹੈ,

ਅਤੇ $P(H) + P(T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ H ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $= \frac{1}{2}$ ਅਤੇ T ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $= \frac{1}{2}$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ $P(H) = \frac{1}{4}$ ਅਤੇ $P(T) = \frac{3}{4}$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ...(2)

ਕੀ ਇਹ ਨਿਰਧਾਰਣ ਸਵੈਸਿਧ ਤਰੀਕੇ ਦੀ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ?

ਹਾਂ, ਇਸ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ H ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $= \frac{1}{4}$ ਅਤੇ T ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $= \frac{3}{4}$ ਹੈ।

ਅਸੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਿਰਧਾਰਣ (1) ਅਤੇ (2), H ਅਤੇ T ਦੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਲਈ ਵੈਧ ਹਨ।

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਦੋਵੇਂ ਨਤੀਜਿਆਂ H ਅਤੇ T ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਲਈ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ p ਅਤੇ $(1 - p)$ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਦੋਂ ਕਿ $0 \le p \le 1$ ਅਤੇ $P(H) + P(T) = p + (1 - p) = 1$

ਇਹ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਵੀ ਸਵੈਸਿਧ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੇ ਨਾਲ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਕਈ (ਜਾਂ ਇਹ ਕਹਿਣਾ ਉਚਿਤ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਅਨੰਤ) ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਆਉ ਹੁਣ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ :

ਉਦਾਹਰਣ 9: ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S = $\{\omega_1, \omega_2,..., \omega_6\}$ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਨਤੀਜੇ ਲਈ ਕਿਹੜੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਵੈਧ ਹਨ ?

ਨਤੀਜੇ	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
(a)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
(b)	1	0	0	0	0	0
(c)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$
(d)	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{2}$
(e)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6

ਹੱਲ : (a) ਸ਼ਰਤ (i): ਹਰੇਕ ਸੰਖਿਆ p (ω_i) ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਹੈ।

ਸ਼ਰਤ (ii) ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ

$$= \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$$

ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਵੈਧ ਹੈ।

(b) ਸ਼ਰਤ (i) ਹਰੇਕ ਸੰਖਿਆ $p(\omega_i)$ ਜਾਂ ਤਾਂ 0 ਹੈ ਜਾਂ 1 ਹੈ।

ਸ਼ਰਤ (ii) ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ = 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1

ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਨਿਰਧਾਰਣ ਵੈਧ ਹੈ।

(c) ਸ਼ਰਤ (i) ਦੋ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ $p(\omega_5)$ ਅਤੇ $p(\omega_6)$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਨਿਰਧਾਰਣ ਵੈਧ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(d) ਕਿਉਂਕਿ $p(\omega_6) = \frac{3}{2} > 1$ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਵੈਧ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(e) ਕਿਉਂਕਿ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ = 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.4 + 0.5 + 0.6 = 2.1 ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਵੈਧ ਨਹੀਂ ਹੈ।

16.4.1 *ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ (Probability of an event)* ਇੱਕ ਮਸ਼ੀਨ ਰਾਹੀਂ ਨਿਰਮਿਤ ਕਲਮਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਤਿੰਨ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਉਹਨਾ ਨੂੰ ਚੰਗਾ (ਗਲਤੀ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ) ਅਤੇ ਖਰਾਬ (ਗਲਤੀ ਤੋਂ ਯੁਕਤ) ਵਿੱਚ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਫਲਸਰੂਪ ਸਾਨੂੰ 0, 1, 2 ਅਤੇ 3 ਖਰਾਬ ਕਲਮਾਂ ਮਿਲ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਸੰਗਤ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ

S = {BBB, BBG, BGB, GBB, BGG, GBG, GGB, GGG} ਹੈ।

ਜਿੱਥੇ B ਇੱਕ ਗਲਤੀ ਨਾਲ ਜਾਂ ਖਰਾਬ ਕਲਮ ਨੂੰ ਅਤੇ G ਚੰਗੀ ਜਾਂ ਗਲਤੀ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਕਲਮ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਨਤੀਜਿਆਂ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕੀਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ :

ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ :	BBB	BBG	BGB	GBB	BGG	GBG	GGB	GGG
ਸੰਭਾਵਨਾ :	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

ਮੰਨ ਲਉ ਘਟਨਾ 'ਠੀਕ ਇੱਕ ਗਲਤੀ ਨਾਲ ਕਲਮ ਦਾ ਕੱਢਣਾ' ਨੂੰ A ਤੋਂ ਅਤੇ ਘਟਨਾ 'ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਦੋ ਗਲਤੀ ਨਾਲ ਕਲਮਾਂ ਦਾ ਕੱਢਣਾ' ਨੂੰ B ਤੋਂ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ $A = \{BGG, GBG, GGB\}$ ਅਤੇ $B = \{BBG, BGB, GBB, BBB\}$

ਹੁਣ $P(A) = \sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in A$

$= P(BGG) + P(GBG) + P(GGB)$

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

ਅਤੇ $P(B) = \sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in B$

$= P(BBG) + P(BGB) + P(GBB) + P(BBB)$

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

ਆਓ ਇੱਕ ਹੋਰ ਪ੍ਰਯੋਗ 'ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਦੋ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਨਾ' ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ $S = \{HH, HT, TH, TT\}$ ਹੈ।

ਮਨ ਲਓ ਕਿ ਭਿੰਨ ਨਤੀਜਿਆਂ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹਨ :

$$P(HH) = \frac{1}{4},\ P(HT) = \frac{1}{7},\ P(TH) = \frac{2}{7},\ P(TT) = \frac{9}{28}$$

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇਹ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਸਵੈਸਿਧ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਦੀ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਘਟਨਾ E 'ਦੋਵੇਂ ਉਛਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਹੀ ਨਤੀਜਾ ਹੈ' ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੀਏ।

ਇੱਥੇ $E = \{HH, TT\}$

ਹੁਣ ਸਾਰੇ $P(E) = \Sigma P(\omega_i)$, ਲਈ $\omega_i \in E$

$= P(HH) + P(TT) = \frac{1}{4} + \frac{9}{28} = \frac{4}{7}$

ਘਟਨਾ F: 'ਠੀਕ ਦੋ ਚਿਤ' ਲਈ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, $F = \{HH\}$

ਅਤੇ $P(F) = P(HH) = \frac{1}{4}$

16.4.2 ਸਮ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ (Probability of equally likely outcomes) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ

$$S = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\} \text{ ਹੈ।}$$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਾਰੇ ਨਤੀਜੇ ਸਮ ਸੰਭਵ ਹਨ, ਭਾਵ ਹਰੇਕ ਸਰਲ ਘਟਨਾ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਭਾਵ ਸਾਰੇ $\omega_i \in S$ ਲਈ $P(\omega_i) = p$, ਜਿੱਥੇ $0 \leq p \leq 1$

ਕਿਉਂਕਿ $\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$ ਇਸ ਲਈ $p + p + ... + p$ (n ਵਾਰੀ) $= 1$

ਜਾਂ $np = 1$ ਜਾਂ $p = \frac{1}{n}$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੀ ਕੋਈ ਇੱਕ ਘਟਨਾ E, ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ ਕਿ $n(S) = n$ ਅਤੇ $n(E) = m$ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਨਤੀਜਾ ਸਮ ਸੰਭਵ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ :

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{\text{E ਦੇ ਅਨਕੂਲ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}}{\text{ਕੁੱਲ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}}$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

16.4.3 *ਘਟਨਾ 'A ਜਾਂ B' ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ) (Probability of the event 'A or B')* ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਘਟਨਾ 'A ਜਾਂ B' ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਭਾਵ P $(A \cup B)$ ਪਤਾ ਕਰੀਏ।

ਮੰਨ ਲਉ, A = {HHT, HTH, THH} ਅਤੇ B = {HTH, THH, HHH} 'ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਦੀਆਂ ਤਿੰਨ ਉਛਾਲਾਂ' ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀਆਂ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ।

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ $A \cup B$ = {HHT, HTH, THH, HHH}

ਹੁਣ $\qquad P(A \cup B) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) + P(HHH)$

ਜੇਕਰ ਸਾਰੇ ਨਤੀਜੇ ਸਮ ਸੰਭਵ ਹੋਣ ਤਾਂ

$$P(A \cup B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

ਨਾਲ ਹੀ $\qquad P(A) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) = \frac{3}{8}$

ਅਤੇ $\qquad P(B) = P(HTH) + P(THH) + P(HHH) = \frac{3}{8}$

ਇਸ ਲਈ $\qquad P(A) + P(B) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{6}{8}$

ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ $P(A \cup B) \neq P(A) + P(B)$

ਬਿੰਦੂਆਂ HTH ਅਤੇ THH, A ਅਤੇ B ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚ ਤੱਤ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਹਨ। P(A) + P(B) ਦੇ ਪਰਿਕਲਨ ਵਿੱਚ HTH ਅਤੇ THH (ਭਾਵ $A \cap B$ ਦੇ ਹਿੱਸੇ) ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਦੋ ਵਾਰੀ ਗਿਣਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $P(A \cup B)$ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ $A \cap B$ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ P(A) + P(B) ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਉਣਾ ਹੋਵੇਗਾ।

ਭਾਵ $\qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \sum P(\omega_i), \forall \omega_i \in A \cap B$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ਇਸ ਲਈ $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀ ਕੋਈ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$P(A \cup B) = \quad p(\omega_i), \quad \omega_i \quad A \quad B$$

ਕਿਉਂਕਿ $\qquad A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$

ਇਸ ਲਈ

$$P(A \cup B) = \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (A - B)\right] + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in A \cap B\right] + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in B - A\right]$$

(ਕਿਉਂਕਿ A–B, $A \cap B$ ਅਤੇ B – A ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਹਨ।) ... (1)

ਨਾਲ ਹੀ $P(A) + P(B) = \left[\sum p(\omega_i) \ \forall \omega_i \in A\right] + \left[\sum p(\omega_i) \ \forall \omega_i \in B\right]$

$$= \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (A - B) \cup (A \cap B)\right] + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (B - A) \cup (A \cap B)\right]$$

$$= \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (A - B)\right] + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (A \cap B)\right] + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (B - A)\right]$$

$$\left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in (A \cap B)\right]$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

$= P(A \cup B) + \left[\sum P(\omega_i) \forall \omega_i \in A \cap B\right]$ [(1) ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ]

$= P(A \cup B) + P(A \cap B)$.

ਇਸ ਲਈ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ਇਸ ਸੂਤਰ ਦਾ ਵਿਕਲਪਿਕ ਪ੍ਰਮਾਣ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਵੀ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$A \cup B = A \cup (B - A)$, ਜਿੱਥੇ A ਅਤੇ $B - A$ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਹਨ।

ਅਤੇ $B = (A \cap B) \cup (B - A)$, ਜਿੱਥੇ $A \cap B$ ਅਤੇ $B - A$ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਹਨ।

ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਸਵੈਸਿੱਧ (iii) ਰਾਹੀਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A) \qquad \ldots (2)$$

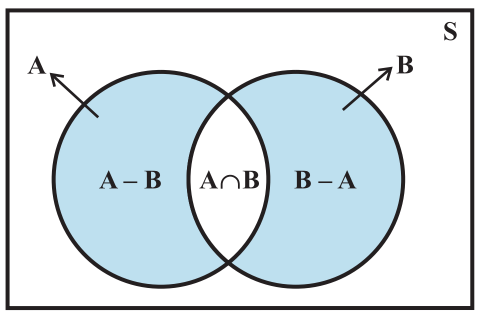
ਅਤੇ
$$P(B) = P(A \cap B) + P(B - A) \qquad \ldots (3)$$

(2) ਵਿੱਚੋਂ (3) ਘਟਾਉਣ ਤੇ

$$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$$

ਜਾਂ
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ਉੱਧਰ ਦਿੱਤੇ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਵੇਨ-ਆਲੇਖ (ਚਿੱਤਰ 16.1) ਦਾ ਅਵਲੋਕਨ ਕਰਕੇ ਵੀ ਦੋਬਾਰਾ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 16.1

ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਅਸੰਯੁਕਤ ਸਮੂਹ ਹੋਣ ਭਾਵ ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ $A \cap B = \phi$

ਇਸ ਲਈ $P(A \cap B) = P(\phi) = 0$

ਇਸ ਲਈ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ A ਅਤੇ B ਲਈ, ਅਸੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

ਜੋ ਕਿ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਸਵੈਸਿੱਧ (iii) ਹੀ ਹੈ।

16.4.4 ਘਟਨਾ 'A ਨਹੀਂ 'ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ (Probability of event 'not A') 1 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਅੰਕਿਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਾਲੇ ਦਸ ਪੱਤਿਆਂ ਦੇ ਡੇਕ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪੱਤਾ ਕੱਢਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀ ਘਟਨਾ $A = \{2, 4, 6, 8\}$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ $S = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਸਾਰੇ ਨਤੀਜਿਆਂ 1, 2, 3,...,10 ਨੂੰ ਸਮ ਸੰਭਵ ਮੰਨ ਲਈਏ ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਨਤੀਜੇ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{10}$ ਹੋਵੇਗੀ।

ਹੁਣ
$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) + P(8)$$
$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਨਾਲ ਹੀ ਘਟਨਾ 'A ਨਹੀਂ' = $A' = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$

ਹੁਣ $P(A') = P(1) + P(3) + P(5) + P(7) + P(9) + P(10)$

$$= \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, $P(A') = \frac{3}{5} = 1 - \frac{2}{5} = 1 - P(A)$

ਨਾਲ ਹੀ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਵੀ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ A′ ਅਤੇ A ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ (exclusive) ਅਤੇ ਸਰਵਾਂਗੀ (exhaustive) ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $A \cap A' = \phi$ ਅਤੇ $A \cup A' = S$

ਜਾਂ $P(A \cup A') = P(S)$

ਹੁਣ $P(A) + P(A') = 1$, (ਸਵੈਸਿੱਧ (ii) ਅਤੇ (iii) ਰਾਹੀਂ)

ਜਾਂ $P(A') = P(A$ ਨਹੀਂ$) = 1 - P(A)$

ਆਉ ਸਮ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜਿਆਂ ਵਾਲੇ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਲਈ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਅਤੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ, ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਹੋਰ ਕੁਝ ਨਾ ਕਿਹਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਤਾਸ਼ ਦੇ 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫੈਂਟੀ ਹੋਈ ਗੱਠੀ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪੱਤਾ ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਕੱਢੇ ਗਏ ਪੱਤੇ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ :

(i) ਪੱਤਾ ਇੱਟ ਦਾ ਹੈ।
(ii) ਪੱਤਾ ਇੱਕਾ ਨਹੀਂ ਹੈ।
(iii) ਪੱਤਾ ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਹੈ (ਭਾਵ ਚਿੜੀ ਜਾਂ ਹੁਕਮ ਦਾ)।
(iv) ਪੱਤਾ ਇੱਟ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ।
(v) ਪੱਤਾ ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਜਦੋਂ 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫੈਂਟੀ ਹੋਈ ਗੱਠੀ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪੱਤਾ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 52 ਹੈ।

(i) ਮੰਨ ਲਉ ਘਟਨਾ 'ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਪੱਤਾ ਇੱਟ ਦਾ ਹੈ' ਨੂੰ A ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ A ਵਿੱਚ ਹਿੱਸਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 13 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

ਭਾਵ, ਇੱਕ ਇੱਟ ਦਾ ਪੱਤਾ ਕੱਢਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ = $\frac{1}{4}$ ਹੈ।

(ii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਘਟਨਾ 'ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਪੱਤਾ ਇੱਕਾ ਹੈ' ਨੂੰ B ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
ਇਸ ਲਈ 'ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਪੱਤਾ ਇੱਕਾ ਨਹੀਂ ਹੈ' ਨੂੰ B′ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਵੇਗਾ।

ਹੁਣ $P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{4}{52} = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$

(iii) ਮੰਨ ਲਉ ਘਟਨਾ 'ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਪੱਤਾ ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਹੈ' ਨੂੰ C ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
ਇਸ ਲਈ ਸਮੂਹ C ਵਿੱਚ ਹਿੱਸਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 26 ਹੈ।

ਭਾਵ $P(C) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਪੱਤਾ ਕੱਢਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ = $\frac{1}{2}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

(iv) ਅਸੀਂ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ (i) ਵਿੱਚ ਮੰਨਿਆ ਹੈ ਕਿ ਘਟਨਾ 'ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਪੱਤਾ ਇੱਟ ਦਾ ਹੈ' ਨੂੰ A ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਘਟਨਾ 'ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਪੱਤਾ ਇੱਟ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ' ਨੂੰ A′ ਜਾਂ 'A ਨਹੀਂ' ਨਾਲ ਦਰਸਾਵਾਂਗੇ।

ਹੁਣ P(A ਨਹੀਂ) = 1 – P(A) = $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

(v) ਘਟਨਾ 'ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਪੱਤਾ ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ' ਨੂੰ C′ ਜਾਂ 'C ਨਹੀਂ' ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ, ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ P(C ਨਹੀਂ) = 1 – P (C) = $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

ਇਸ ਲਈ ਪੱਤਾ ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਨਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ = $\frac{1}{2}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ 9 ਡਿਸਕਾਂ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 4 ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀ, 3 ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀ ਅਤੇ 2 ਪੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀਆਂ ਹਨ। ਡਿਸਕਾਂ ਅਕਾਰ ਅਤੇ ਮਾਪ ਵਿੱਚ ਸਮਰੂਪ ਹਨ। ਥੈਲੇ ਵਿਚੋਂ ਇੱਕ ਡਿਸਕ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢੀ ਗਈ ਹੈ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਕੱਢੀ ਗਈ ਡਿਸਕ (i) ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ (ii) ਪੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ (iii) ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ (iv) ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀ ਨਹੀਂ ਹੈ (v) ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ ਜਾਂ ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਡਿਸਕਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ 9 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ 9 ਹੋਈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਘਟਨਾਵਾਂ A, B ਅਤੇ C ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ

A : 'ਕੱਢੀ ਗਈ ਡਿਸਕ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ।'

B : 'ਕੱਢੀ ਗਈ ਡਿਸਕ ਪੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ।'

C : 'ਕੱਢੀ ਗਈ ਡਿਸਕ ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ।'

(i) ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀਆਂ ਡਿਸਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 4, ਭਾਵ, n (A) = 4

ਇਸ ਕਰਕੇ P(A) = $\frac{4}{9}$

(ii) ਪੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀਆਂ ਡਿਸਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 2, ਭਾਵ, n (B) = 2

ਇਸ ਕਰਕੇ P(B) = $\frac{2}{9}$

(iii) ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀਆਂ ਡਿਸਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 3, ਭਾਵ, n(C) = 3

ਇਸ ਕਰਕੇ P(C) = $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

(iv) ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਘਟਨਾ 'ਡਿਸਕ ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀ ਨਹੀਂ ਹੈ, 'C ਨਹੀਂ' ਹੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ P(C ਨਹੀਂ) = 1 – P(C) ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ P(C – ਨਹੀਂ) = $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

(v) ਘਟਨਾ 'ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀ ਡਿਸਕ ਜਾਂ ਨੀਲੇ ਰੰਗ ਦੀ ਡਿਸਕ' ਦਾ ਸਮੂਹ (A ∪ C) ਤੋਂ ਦੱਸਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ, A ਅਤੇ C ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ

P(A ਜਾਂ C) = P (A ∪ C) = P(A) + P(C) = $\frac{4}{9}+\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 12: ਦੋ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਅਨਿਲ ਅਤੇ ਆਸ਼ਿਮਾ ਇੱਕ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਦਾਖਲ ਹੋਏ। ਅਨਿਲ ਦੇ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਪਾਸ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.05 ਹੈ ਅਤੇ ਆਸ਼ਿਮਾ ਦੇ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਪਾਸ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.10 ਹੈ। ਦੋਵਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿਚ ਪਾਸ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.02 ਹੈ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ

(a) ਅਨਿਲ ਅਤੇ ਆਸ਼ਿਮਾ ਦੋਵੇਂ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਪਾਸ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਣਗੇ।

(b) ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਪਾਸ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ।

(c) ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਪਾਸ ਹੋਵੇਗਾ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ E ਅਤੇ F ਘਟਨਾਵਾਂ (ਅਨਿਲ ਅਤੇ ਆਸ਼ਿਮਾ ਦੇ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਪਾਸ ਕਰਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $P(E) = 0.05$, $P(F) = 0.10$ ਅਤੇ $P(E \cap F) = 0.02$

ਤਾਂ

(a) ਘਟਨਾ 'ਦੋਵੇਂ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਪਾਸ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਣਗੇ' ਨੂੰ $E' \cap F'$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ E' ਘਟਨਾ 'E ਨਹੀਂ', ਭਾਵ ਅਨਿਲ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਪਾਸ ਨਹੀਂ ਕਰੇਗਾ ਅਤੇ F' ਘਟਨਾ 'F ਨਹੀਂ', ਭਾਵ 'ਆਸ਼ਿਮਾ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਪਾਸ ਨਹੀਂ ਕਰੇਗੀ' ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਨਾਲ ਹੀ $E' \cap F' = (E \cup F)'$ (ਡੀ-ਮਾਰਗਨ ਨਿਯਮ ਅਨੁਸਾਰ)

ਹੁਣ $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

ਜਾਂ $P(E \cup F) = 0.05 + 0.10 - 0.02 = 0.13$

ਇਸ ਲਈ $P(E' \cap F') = P(E \cup F)' = 1 - P(E \cup F) = 1 - 0.13 = 0.87$

(b) P (ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਪਾਸ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ)

$= 1 -$ P (ਦੋਵੇਂ ਪਾਸ ਹੋਣਗੇ)

$= 1 - 0.02 = 0.98$

(c) ਘਟਨਾ 'ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਪਾਸ ਹੋਵੇਗਾ' ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਘਟਨਾ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਹੈ :

'ਅਨਿਲ ਪਾਸ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਆਸ਼ਿਮਾ ਪਾਸ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗੀ'

ਜਾਂ 'ਅਨਿਲ ਪਾਸ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਆਸ਼ਿਮਾ ਪਾਸ ਹੋਵੇਗੀ'

ਭਾਵ, $E \cap F'$ ਜਾਂ $E' \cap F$, ਜਿੱਥੇ $E \cap F'$ ਅਤੇ $E' \cap F$ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ P(ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਪਾਸ ਹੋਵੇਗਾ)

$= P(E \cap F' \text{ or } E' \cap F)$

$= P(E \cap F') + P(E' \cap F) = P(E) - P(E \cap F) + P(F) - P(E \cap F)$

$= 0.05 - 0.02 + 0.10 - 0.02 = 0.11$

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਦੋ ਪੁਰਖ ਅਤੇ ਦੋ ਔਰਤਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚੋਂ ਦੋ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਸਮਿਤੀ ਬਣਾਉਣੀ ਹੈ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ਕਿ ਸਮਿਤੀ ਵਿੱਚ (a) ਕੋਈ ਪੁਰਖ ਨਾ ਹੋਵੇ ? (b) ਇੱਕ ਪੁਰਖ ਹੋਵੇ ? (c) ਦੋਵੇਂ ਪੁਰਖ ਹੋਣ ?

ਹੱਲ : ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ $= 2 + 2 = 4$ ਹੈ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਚਾਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਦੋ ਨੂੰ ${}^4C_2$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(a) ਸਮਿਤੀ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਪੁਰਖ ਨਾ ਹੋਣ ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਸਮਿਤੀ ਵਿੱਚ ਦੋ ਔਰਤਾਂ ਹਨ। ਦੋ ਔਰਤਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਦੋਵਾਂ ਦਾ ਚੁਣਨਾ ${}^2C_2 = 1$ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, P (ਕੋਈ ਪੁਰਖ ਨਹੀਂ) $= \dfrac{{}^2C_2}{{}^4C_2} = \dfrac{1 \times 2 \times 1}{4 \times 3} = \dfrac{1}{6}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

(b) ਸਮਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪੁਰਖ ਹੋਣ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਔਰਤ ਹੈ। ਦੋ ਪੁਰਖਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪੁਰਖ ਚੁਨਣ ਦੇ ${}^2C_1$ ਤਰੀਕੇ ਹਨ ਅਤੇ ਦੋ ਔਰਤਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਚੁਨਣ ਦੇ ਵੀ ${}^2C_1$ ਤਰੀਕੇ ਹਨ। ਦੋਵੇਂ ਚੁਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਨਾਲ ਕਰਨ ਦੇ ${}^2C_1 \times {}^2C_1$ ਤਰੀਕੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, $\quad P(\text{ਇੱਕ ਪੁਰਖ}) = \dfrac{{}^2C_1 \times {}^2C_1}{{}^4C_2} = \dfrac{2\times 2}{2\times 3} = \dfrac{2}{3}$

(c) ਦੋ ਪੁਰਖਾਂ ਨੂੰ ${}^2C_2$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਕਰਕੇ $\quad P(\text{ਦੋ ਪੁਰਖ}) = \dfrac{{}^2C_2}{{}^4C_2} = \dfrac{1}{{}^4C_2} = \dfrac{1}{6}$

ਅਭਿਆਸ 16.3

1. ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S $= \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਵੈਧ ਨਹੀਂ ਹਨ :

ਨਤੀਜਾ	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
(a)	0.1	0.01	0.05	0.03	0.01	0.2	0.6
(b)	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
(c)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
(d)	– 0.1	0.2	0.3	0.4	– 0.2	0.1	0.3
(e)	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{15}{14}$

2. ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਦੋ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ?

3. ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ

(ii) 3 ਜਾਂ 3 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ

(iii) 1 ਜਾਂ 1 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ

(iv) 6 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ

(v) 6 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ

4. ਤਾਸ਼ ਦੀ ਗੱਠੀ ਦੇ 52 ਪੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪੱਤਾ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ।

(a) ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਬਿੰਦੂ ਹਨ ?

(b) ਪੱਤੇ ਦਾ ਹੁਕਮ ਦਾ ਇੱਕਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ?

(c) ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਪੱਤਾ (i) ਇੱਕਾ ਹੈ (ii) ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਹੈ।

5. ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ ਸਿੱਕਾ ਜਿਸਦੇ ਇੱਕ ਤਲ ਤੇ 1 ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਤਲ ਤੇ 6 ਅੰਕਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ ਪਾਸੇ ਦੋਹਾਂ ਨੂੰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਪ੍ਰਗਟ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ (i) 3 ਹੈ। (ii) 12 ਹੈ।

6. ਨਗਰ ਪਰਿਸ਼ਦ ਵਿੱਚ ਚਾਰ ਪੁਰਖ ਅਤੇ ਛੇ ਔਰਤਾਂ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸਮਿਤੀ ਲਈ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਇੱਕ ਪਰਿਸ਼ਦ ਮੈਂਬਰ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਔਰਤ ਦੇ ਚੁਣੇ ਜਾਣ ਦੀ ਕਿੰਨੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ?

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

7. ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਚਾਰ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਹਰੇਕ ਚਿਤ ਤੇ ਇੱਕ ਰੁਪਿਆ ਜਿੱਤਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਪਟ ਤੇ 1.50 ਰੁਪਿਆ ਹਾਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਚਾਰ ਉਛਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀਆਂ ਭਿੰਨ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਨਾਲ ਹੀ ਇਹਨਾਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ ?

8. ਤਿੰਨ ਸਿੱਕੇ ਇੱਕੋ ਵਾਰ ਉਛਾਲੇ ਗਏ ਹਨ। ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) ਤਿੰਨ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ (ii) 2 ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ (iii) ਘੱਟੋ-ਘੱਟ 2 ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ

(iv) ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 2 ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ (v) ਇੱਕ ਵੀ ਚਿਤ ਪ੍ਰਗਟ ਨਾ ਹੋਣਾ (vi) 3 ਪਟ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ

(vii) ਠੀਕ 2 ਪਟ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ (viii) ਕੋਈ ਵੀ ਪਟ ਨਾ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ (ix) ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 2 ਪਟ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ

9. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ A ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{2}{11}$ ਹੈ ਤਾਂ ਘਟਨਾ 'A ਨਹੀਂ' ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਸ਼ਬਦ 'ASSASSINATION' ਤੋਂ ਇੱਕ ਅੱਖਰ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ ਅੱਖਰ (i) ਇੱਕ ਸਵਰ (vowel) ਹੈ। (ii) ਇੱਕ ਵਿਅੰਜਨ (consonant) ਹੈ।

11. ਇੱਕ ਲਾਟਰੀ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ 1 ਤੋਂ 20 ਤੱਕ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਛੇ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਇਹ ਚੁਣੀਆਂ ਗਈਆਂ ਛੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਉਹਨਾਂ ਛੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਾਲ ਮੇਲ ਖਾਂਦੀਆਂ ਹਨ, ਜਿਹੜੀਆਂ ਲਾਟਰੀ ਸਮਿਤੀ ਨੇ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰ ਰੱਖੀਆਂ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹ ਵਿਅਕਤੀ ਇਨਾਮ ਜਿੱਤ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਲਾਟਰੀ ਦੇ ਖੇਡ ਵਿੱਚ ਇਨਾਮ ਜਿੱਤਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ? [ਸੰਕੇਤ : ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।]

12. ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠਲੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ P(A) ਅਤੇ P(B) ਯੁਕਤੀ ਸੰਗਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ :

(i) $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.7$, $P(A \cap B) = 0.6$

(ii) $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.4$, $P(A \cup B) = 0.8$

13. ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਖਾਲੀ ਸਥਾਨ ਭਰੋ :

	P(A)	**P(B)**	**$P(A \cap B)$**	**$P(A \cup B)$**
(i)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	. . .
(ii)	0.35	. . .	0.25	0.6
(iii)	0.5	0.35	. . .	0.7

14. $P(A) = \frac{3}{5}$ ਅਤੇ $P(B) = \frac{1}{5}$ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B, ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ P(A ਜਾਂ B) ਪਤਾ ਕਰੋ।

15. ਜੇਕਰ E ਅਤੇ F ਘਟਨਾਵਾਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ $P(E) = \frac{1}{4}$, $P(F) = \frac{1}{2}$ ਅਤੇ P(E ਅਤੇ F) = $\frac{1}{8}$, ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।
(i) P(E ਜਾਂ F), (ii) P(E ਨਹੀਂ ਅਤੇ F ਨਹੀਂ)

16. ਘਟਨਾਵਾਂ E ਅਤੇ F ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ P(E ਨਹੀਂ ਅਤੇ F ਨਹੀਂ) = 0.25, ਦੱਸੋ ਕਿ E ਅਤੇ F ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ?

17. ਘਟਨਾਵਾਂ A ਅਤੇ B ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ $P(A) = 0.42$, $P(B) = 0.48$ ਅਤੇ P(A ਅਤੇ B) = 0.16 ਪਤਾ ਕਰੋ : (i) P(A ਨਹੀਂ), (ii) P(B ਨਹੀਂ) (iii) P(A ਜਾਂ B)

18. ਇੱਕ ਪਾਠਸ਼ਾਲਾ ਦੀ ਜਮਾਤ XI ਦੇ 40% ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਗਣਿਤ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਨ ਅਤੇ 30% ਜੀਵ ਵਿਗਿਆਨ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਨ। ਜਮਾਤ ਦੇ 10% ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਜੀਵ ਵਿਗਿਆਨ ਦੋਵੇਂ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਜਮਾਤ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹ ਗਣਿਤ ਜਾਂ ਜੀਵ ਵਿਗਿਆਨ ਪੜ੍ਹਦਾ ਹੋਵੇਗਾ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

19. ਇੱਕ ਦਾਖਲਾ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਨੂੰ ਦੋ ਟੈਸਟਾਂ ਦੇ ਅਧਾਰ 'ਤੇ ਸ਼੍ਰੇਣੀਕਰਨ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਹੋਇਆ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੀ ਪਹਿਲੇ ਟੈਸਟ ਵਿੱਚ ਪਾਸ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.8 ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਟੈਸਟ ਵਿੱਚ ਪਾਸ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.7 ਹੈ। ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਟੈਸਟ ਪਾਸ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.95 ਹੈ। ਦੋਨਾਂ ਟੈਸਟਾਂ ਨੂੰ ਪਾਸ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ?

20. ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੇ ਅੰਤਿਮ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੇ ਅੰਗਰੇਜੀ ਅਤੇ ਹਿੰਦੀ ਦੋਨਾਂ ਵਿਸ਼ਿਆਂ ਨੂੰ ਪਾਸ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.5 ਹੈ ਅਤੇ ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਵਿਸ਼ਾ ਪਾਸ ਨਾ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.1 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅੰਗਰੇਜੀ ਦੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਪਾਸ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.75 ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਹਿੰਦੀ ਦੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਪਾਸ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ?

21. ਇੱਕ ਜਮਾਤ ਦੇ 60 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 30 ਨੇ ਐਨ.ਸੀ.ਸੀ., 32 ਨੇ ਐਨ. ਐਸ. ਐਸ. ਅਤੇ 24 ਨੇ ਦੋਹਾਂ ਨੂੰ ਚੁਣਿਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ :

(i) ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੇ ਐਨ. ਸੀ. ਸੀ. ਜਾਂ ਐਨ. ਐਸ. ਐਸ ਨੂੰ ਚੁਣਿਆ ਹੈ।

(ii) ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੇ ਨਾ ਤਾਂ ਐਨ. ਸੀ. ਸੀ. ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਐਨ. ਐਸ. ਐਸ. ਨੂੰ ਚੁਣਿਆ ਹੈ।

(iii) ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੇ ਐਨ. ਸੀ. ਸੀ. ਨੂੰ ਚੁਣਿਆ ਹੈ ਪਰ ਐਨ. ਐਸ. ਐਸ. ਨੂੰ ਨਹੀਂ ਚੁਣਿਆ ਹੈ।

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਛੁੱਟੀਆਂ ਵਿੱਚ ਵੀਨਾ ਨੇ ਬੇਤਰਤੀਬੇ ਢੰਗ ਨਾਲ A, B, C ਅਤੇ D ਸ਼ਹਿਰਾਂ ਦਾ ਸਫ਼ਰ ਕੀਤਾ। ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸਨੇ :

(i) A ਦਾ ਸਫ਼ਰ B ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕੀਤਾ ?

(ii) A ਦਾ ਸਫ਼ਰ B ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਤੇ B ਦਾ C ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕੀਤਾ ?

(iii) A ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਤੇ B ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਸਫ਼ਰ ਕੀਤਾ ?

(iv) A ਦਾ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਜਾਂ ਦੂਜੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਸਫ਼ਰ ਕੀਤਾ ?

(v) A ਦਾ ਸਫ਼ਰ B ਤੋਂ ਠੀਕ ਪਹਿਲਾਂ ਕੀਤਾ ?

ਹੱਲ : ਵੀਨਾ ਦੁਆਰਾ ਚਾਰ ਸ਼ਹਿਰਾਂ A, B, C ਅਤੇ D ਦੇ ਸਫ਼ਰ ਦੇ ਭਿੰਨ ਢੰਗਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 4! ਭਾਵ 24 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $n(S) = 24$

ਕਿਉਂਕਿ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਹਿੱਸਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 24 ਹੈ। ਇਹ ਸਾਰੇ ਨਤੀਜੇ ਸਮ ਸੰਭਵ ਮੰਨੇ ਗਏ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ

$$\begin{aligned} S = \{&ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB \\ &BACD, BADC, BDAC, BDCA, BCAD, BCDA \\ &CABD, CADB, CBDA, CBAD, CDAB, CDBA \\ &DABC, DACB, DBCA, DBAC, DCAB, DCBA\} \end{aligned}$$ ਹੈ।

(i) ਮੰਨ ਲਉ ਘਟਨਾ 'ਵੀਨਾ A ਦਾ ਸਫ਼ਰ B ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕਰਦੀ ਹੈ' ਨੂੰ E ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਲਈ, $$\begin{aligned} E = \{&ABCD, CABD, DABC, ABDC, CADB, DACB \\ &ACBD, ACDB, ADBC, CDAB, DCAB, ADCB\} \end{aligned}$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

(ii) ਮੰਨ ਲਉ ਘਟਨਾ 'ਵੀਨਾ ਨੇ A ਦਾ ਸਫ਼ਰ B ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਤੇ B ਦਾ ਸਫ਼ਰ C ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕੀਤਾ' ਨੂੰ F ਤੋਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇੱਥੇ F = {ABCD, DABC, ABDC, ADBC}

ਇਸ ਲਈ $P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਸਲਾਹ ਦਿੱਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਕਿ (iii), (iv) ਅਤੇ (v) ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਆਪ ਪਤਾ ਕਰਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਜਦੋਂ ਤਾਸ਼ ਤੇ 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਗੱਠੀ ਤੋਂ 7 ਪੱਤਿਆਂ ਦਾ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਬਣਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਵਿੱਚ (i) ਸਾਰੇ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ (ii) ਠੀਕ 3 ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਹਨ (iii) ਘੱਟੋ-ਘੱਟ 3 ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਭਵ ਸੰਖਿਆ = ${}^{52}C_7$

(i) 4 ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਨਾਲ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = ${}^{4}C_4 \times {}^{48}C_3$ (ਹੋਰ 3 ਪੱਤੇ ਬਾਕੀ 48 ਪੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਚੁਣੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ)

ਇਸ ਲਈ P (ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਚਾਰ ਬਾਦਸ਼ਾਹ) = $\frac{{}^{4}C_4 \times {}^{48}C_3}{{}^{52}C_7} = \frac{1}{7735}$

(ii) 3 ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਅਤੇ 4 ਹੋਰ ਪੱਤਿਆਂ ਵਾਲੇ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = ${}^{4}C_3 \times {}^{48}C_4$

ਇਸ ਲਈ P (ਸਿਰਫ਼ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ 3 ਬਾਦਸ਼ਾਹ) = $\frac{{}^{4}C_3 \times {}^{48}C_4}{{}^{52}C_7} = \frac{9}{1547}$

(iii) P(ਘੱਟੋ-ਘੱਟ 3 ਬਾਦਸ਼ਾਹ)

= P(ਸਿਰਫ਼ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ 3 ਬਾਦਸ਼ਾਹ) + P (4 ਬਾਦਸ਼ਾਹ)

$= \frac{9}{1547} + \frac{1}{7735} = \frac{46}{7735}$

ਉਦਾਹਰਣ 16 : ਜੇਕਰ A, B, C ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੀਤੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਤਿੰਨ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

ਹੱਲ : ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ : $E = B \cup C$ ਤਾਂ

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup E) = P(A) + P(E) - P(A \cap E) \quad \text{... (1)}$$

ਹੁਣ

$$P(E) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) \quad \text{... (2)}$$

ਨਾਲ ਹੀ $A \cap E = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ [ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਕਾਟ ਦੇ ਵੰਡ ਦੀ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਰਾਹੀਂ]

ਇਸ ਲਈ $P(A \cap E) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P\left[(A \cap B) \cap (A \cap C)\right]$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P[A \cap B \cap C] \quad \text{... (3)}$$

(2) ਅਤੇ (3) ਨੂੰ (1) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ

$$P[A \cup B \cup C] = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 17 : ਇੱਕ ਰਿਲੇ ਦੌੜ ਵਿਚ ਪੰਜ ਟੀਮਾਂ A, B, C, D ਅਤੇ E ਨੇ ਭਾਗ ਲਿਆ ਹੈ।

(a) A, B ਅਤੇ C ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪਹਿਲਾ, ਦੂਜਾ ਅਤੇ ਤੀਜਾ ਸਥਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ?

(b) A, B ਅਤੇ C ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਸਥਾਨਾਂ (ਕਿਸੇ ਵੀ ਕ੍ਰਮ) ਤੇ ਰਹਿਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ?

(ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਾਰੇ ਅੰਤਿਮ ਕ੍ਰਮ ਸਮ-ਸੰਭਵ ਹਨ।)

ਹੱਲ : ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਸਥਾਨਾਂ ਲਈ ਅੰਤਿਮ ਕ੍ਰਮਾਂ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਪਾਵਾਂਗੇ ਕਿ ਇਸ ਵਿੱਚ $^5P_3$, ਭਾਵ $\frac{5!}{(5-3)!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{60}$ ਹੈ।

(a) A, B ਅਤੇ C ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪਹਿਲੇ, ਦੂਜੇ ਅਤੇ ਤੀਜੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਹੀ ਅੰਤਿਮ ਕ੍ਰਮ ਹੈ ਭਾਵ ABC।

ਇਸ ਲਈ P(A, B ਅਤੇ C ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪਹਿਲੇ, ਦੂਜੇ ਅਤੇ ਤੀਜੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ) $= \frac{1}{60}$

(b) A, B ਅਤੇ C ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਸਥਾਨਾਂ ਤੇ ਹਨ। ਇਸਦੇ ਲਈ A, B ਅਤੇ C ਲਈ 3! ਤਰੀਕੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਘਟਨਾ ਦੇ ਸੰਗਤ 3! ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ ਹੋਣਗੇ।

ਇਸ ਲਈ P (A, B ਅਤੇ C ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਸਥਾਨਾਂ ਤੇ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ) $= \frac{3!}{60} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$

ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਇੱਕ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚ 10 ਲਾਲ, 20 ਨੀਲੀਆਂ ਅਤੇ 30 ਹਰੀਆਂ ਗੋਲੀਆਂ ਰੱਖੀਆਂ ਹਨ। ਡੱਬੇ ਵਿੱਚ 5 ਗੋਲੀਆਂ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ਕਿ :

(i) ਸਾਰੀਆਂ ਗੋਲੀਆਂ ਨੀਲੀਆਂ ਹਨ? (ii) ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਗੋਲੀ ਹਰੀ ਹੈ?

2. ਤਾਸ਼ ਦੇ 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫੈਂਟੀ ਹੋਈ ਗੱਠੀ ਵਿੱਚੋਂ 4 ਪੱਤੇ ਕੱਢੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਕੱਢੇ ਹੋਏ ਪੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚ 3 ਇੱਟ ਅਤੇ ਇੱਕ ਹੁਕਮ ਦਾ ਪੱਤਾ ਹੈ?

3. ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਦੇ ਦੋ ਫਲਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 1 ਅੰਕਿਤ ਹੈ, ਤਿੰਨ ਫਲਕਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 2 ਅੰਕਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਫਲਕ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 3 ਅੰਕਿਤ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪਾਸਾ ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) P(2) (ii) P(1 ਜਾਂ 3) (iii) P(3 ਨਹੀਂ)

4. ਇੱਕ ਲਾਟਰੀ ਵਿੱਚ 10,000 ਟਿਕਟ ਵੇਚੇ ਗਏ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਦਸ ਸਮਾਨ ਇਨਾਮ ਦਿੱਤੇ ਜਾਣੇ ਹਨ। ਕੋਈ ਇਨਾਮ ਨਾ ਮਿਲਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ (a) ਇੱਕ ਟਿਕਟ ਖਰੀਦਦੇ ਹੋ (b) ਦੋ ਟਿਕਟਾਂ ਖਰੀਦਦੇ ਹੋ (c) 10 ਟਿਕਟਾਂ ਖਰੀਦਦੇ ਹੋ?

5. 100 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 40 ਅਤੇ 60 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਦੋ ਵਰਗ ਬਣਾਏ ਹੋਏ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਅਤੇ ਤੁਹਾਡਾ ਇੱਕ ਮਿੱਤਰ 100 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵਿੱਚ ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ਕਿ :

(a) ਤੁਸੀਂ ਦੋਵੇਂ ਇੱਕ ਹੀ ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਹੋਣ?

(b) ਤੁਸੀਂ ਦੋਵੇਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਰਗਾਂ ਵਿੱਚ ਹੋਣ?

6. ਤਿੰਨ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਲਈ ਤਿੰਨ ਪੱਤਰ ਲਿਖਵਾਏ ਗਏ ਹਨ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਲਈ ਪਤਾ ਲਿਖਿਆ ਇੱਕ ਲਿਫ਼ਾਫ਼ਾ ਹੈ। ਪੱਤਰਾਂ ਨੂੰ ਲਿਫ਼ਾਫ਼ਿਆਂ ਵਿੱਚ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਹਰੇਕ ਲਿਫ਼ਾਫ਼ੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਹੀ ਪੱਤਰ ਹੈ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਪੱਤਰ ਆਪਣੇ ਠੀਕ ਲਿਫ਼ਾਫ਼ੇ ਵਿੱਚ ਪਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

7. A ਅਤੇ B ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ $P(A) = 0.54$, $P(B) = 0.69$ ਅਤੇ $P(A \cap B) = 0.35$ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $P(A \cup B)$ (ii) $P(A' \cap B')$ (iii) $P(A \cap B')$ (iv) $P(B \cap A')$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

8. ਇੱਕ ਸੰਸਥਾ ਦੇ ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 5 ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਬੰਧ ਸਮਿਤੀ ਲਈ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਪੰਜ ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਦਾ ਬਿਓਰਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

ਕ੍ਰਮ	ਨਾਂ	ਲਿੰਗ	ਉਮਰ (ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ)
1.	ਹਰੀਸ਼	M	30
2.	ਰੋਹਨ	M	33
3.	ਸ਼ੀਤਲ	F	46
4.	ਏਲਿਸ	F	28
5.	ਸਲੀਮ	M	41

ਇਸ ਸਮੂਹ ਤੋਂ ਬੁਲਾਰੇ ਦੇ ਪਦ ਲਈ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ। ਬੁਲਾਰਾ ਇੱਕ ਪੁਰਖ ਜਾਂ 35 ਸਾਲ ਤੋਂ ਵੱਧ ਉਮਰ ਦਾ ਹੋਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ?

9. ਜੇਕਰ 0, 1, 3, 5 ਅਤੇ 7 ਅੰਕਾਂ ਰਾਹੀਂ 5000 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਚਾਰ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਨਿਰਮਾਣ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪੰਜ ਤੋਂ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਜਦੋਂ :

(i) ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਪੁਨਰ ਆਵਰਤੀ ਨਹੀਂ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ? (ii) ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਪੁਨਰ ਆਵਰਤੀ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇ?

10. ਕਿਸੇ ਅਟੈਚੀ ਦੇ ਤਾਲੇ ਵਿੱਚ ਚਾਰ ਚੱਕਰ ਲੱਗੇ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਤੇ 0 ਤੋਂ 9 ਤੱਕ 10 ਅੰਕ ਅੰਕਿਤ ਹਨ। ਤਾਲਾ ਚਾਰ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਖਾਸ ਕ੍ਰਮ (ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਪੁਨਰ ਆਵਰਤੀ ਨਹੀਂ) ਰਾਹੀਂ ਹੀ ਖੁੱਲਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਕੋਈ ਵਿਅਕਤੀ ਅਟੈਚੀ ਖੋਲਣ ਲਈ ਸਹੀ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰ ਲਵੇ ?

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਸਵੈਸਿੱਧ ਤਰੀਕੇ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿਚ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਦੀਆਂ ਮੁੱਖ ਖਾਸੀਅਤਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਹਨ :

- **ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ** : ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ
- **ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ** : ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਹਿੱਸੇ
- **ਘਟਨਾ** : ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਇੱਕ ਉਪ-ਸਮੂਹ
- **ਅਸੰਭਵ ਘਟਨਾ** : ਸਿਫ਼ਰ ਜਾਂ ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ
- **ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਘਟਨਾ** : ਪੂਰਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ
- **ਪੂਰਕ ਘਟਨਾ ਜਾਂ ਘਟਨਾ ਨਹੀਂ** : ਸਮੂਹ A' ਜਾਂ $S - A$
- **ਘਟਨਾ A ਜਾਂ B**: ਸਮੂਹ $A \cup B$
- **ਘਟਨਾ A ਅਤੇ B** : ਸਮੂਹ $A \cap B$
- **ਘਟਨਾ A ਪਰੰਤੂ B ਨਹੀਂ** : ਸਮੂਹ $A - B$
- **ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ** : A ਅਤੇ B ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜੇਕਰ $A \cap B = \phi$ ਹੋਵੇ।
- **ਸਰਵਾਂਗੀ ਅਤੇ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ** : ਘਟਨਾਵਾਂ $E_1, E_2, ..., E_n$ ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੀ ਅਤੇ ਸਰਵਾਂਗੀ ਹਨ ਜੇਕਰ $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n = S$ ਅਤੇ $E_i \cap E_j = \phi \ \forall\ i \neq j$
- **ਸੰਭਾਵਨਾ :** ਹਰੇਕ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ ω_i ਦੇ ਸੰਗਤ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ $P(\omega_i)$ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਹੈ ਕਿ

  (i) $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$ (ii) $\sum P(\omega_i) \ \forall\ \omega_i \in S = 1$

  (iii) $P(A) = \sum P(\omega_i) \ \forall\ \omega_i \in A$. ਸੰਖਿਆ $P(\omega_i)$ ਨਤੀਜੇ ω_i ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

- **ਸਮ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜੇ** : ਸਮਾਨ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਾਲੇ ਸਾਰੇ ਨਤੀਜੇ।
- **ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ** : ਇੱਕ ਸਮ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜਿਆਂ ਵਾਲੇ ਸੀਮਿਤ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਲਈ ਘਟਨਾ A ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ

  $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $n(A)$ = ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ $n(S)$ = ਸਮੂਹ S ਵਿੱਚ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ।
- ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਕੋਈ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ

  P(A ਜਾਂ B) = P(A) + P(B) – P(A ਅਤੇ B)

  ਭਾਵ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਹਨ ਤਾਂ P(A ਜਾਂ B) = P(A) + P(B)
- ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ A ਲਈ

  P(A ਨਹੀਂ) = 1 – P(A)

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਦਾ ਵਿਕਾਸ ਗਣਿਤ ਦੀਆਂ ਹੋਰ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਵਹਾਰਿਕ ਕਾਰਣਾਂ ਤੋਂ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਉਤਪਤੀ 16ਵੀਂ ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਵਿੱਚ ਹੋਈ ਸੀ ਜਦੋਂ ਇਟਲੀ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਭੌਤਿਕ ਵਿਗਿਆਨੀ ਅਤੇ ਗਣਿਤਕਾਰ Jerome Cardan (1501–1576) ਨੇ ਇਸ ਵਿਸ਼ੇ ਤੇ ਪਹਿਲੀ ਪੁਸਤਕ 'ਸੰਯੋਗ ਦੇ ਖੇਲਾਂ ਤੇ' (Biber de Ludo Aleae) ਲਿਖੀ। ਇਹ ਪੁਸਤਕ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਮਰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਸੰਨ 1633 ਵਿਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਹੋਈ।

ਸੰਨ 1654 ਵਿੱਚ Chevalier de Metre ਨਾਂ ਦੇ ਜੁਆਰੀ ਨੇ ਪਾਸੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕੁਝ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਫਰਾਂਸੀਸੀ ਦਾਰਸ਼ਨਿਕ ਅਤੇ ਗਣਿਤਕਾਰ Blaise Pascal (1623–1662) ਨਾਲ ਸੰਪਰਕ ਕੀਤਾ। Pascal ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਰੁਚੀ ਲੈਣ ਲੱਗੇ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਇਸਦੀ ਚਰਚਾ ਵਿਖਿਆਤ ਫਰਾਂਸੀਸੀ ਗਣਿਤਕਾਰ Pierre de Fermat (1601–1665) ਨਾਲ ਕੀਤੀ। Pascal ਅਤੇ Fermat ਦੋਹਾਂ ਨੇ ਸੁਤੰਤਰ ਰੂਪ ਤੋਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕੀਤਾ। Pascal ਅਤੇ Fermat ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਇੱਕ ਡਚ ਨਿਵਾਸੀ Christian Huygenes (1629–1665) ਇੱਕ ਸੁਵਿਸ ਨਿਵਾਸੀ J. Bernoulli (1651–1705), ਇੱਕ ਫਰਾਂਸੀਸੀ A. De Moivre (1667–1754) ਇੱਕ ਹੋਰ ਫਰਾਂਸ ਨਿਵਾਸੀ Pierre Laplace (1749–1827) ਅਤੇ ਰੂਸੀ P.L Chebyshev (1821–1894), A. A Markov (1856–1922) ਅਤੇ A. N Kolmogorove ਨੇ ਵੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਸਿਧਾਂਤ ਵਿੱਚ ਖਾਸ ਯੋਗਦਾਨ ਦਿੱਤਾ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਸਿਧਾਂਤ ਦੇ ਸਵੈਸਿੱਧ ਹੋਣ ਦੀ ਪ੍ਰਸੰਸਾ Kolmogorov ਨੂੰ ਮਿਲੀ ਹੈ। 1933 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਉਹਨਾ ਦੀ ਪੁਸਤਕ 'ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਅਧਾਰ' (foundation of Probability) ਵਿੱਚ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਸਮੂਹ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਪੁਸਤਕ ਇੱਕ ਕਲਾਸਿਕ (Classic) ਮੰਨੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

— ❖ —

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਪਰਿਸ਼ਿਸ਼ਟ 1

ਅਨੰਤ ਲੜੀਆਂ
(Infinite Series)

A.1.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਲੜੀ ਦੇ ਅਧਿਆਇ 9 ਵਿੱਚ ਚਰਚਾ ਹੋ ਚੁੱਕੀ ਹੈ, ਇੱਕ ਅਨੰਤ ਪਦਾਂ ਵਾਲੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ ਨੂੰ ਅਨੰਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਦੱਸਿਆ ਹੋਇਆ ਜੋੜ ਭਾਵ $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$, ਜਿਹੜਾ ਅਨੰਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਨਾਲ ਹੋਵੇ, ਇੱਕ ਅਨੰਤ ਲੜੀ ਕਹਿਲਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਸਿਗਮਾ ਸੰਕੇਤਨ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਰਾਹੀਂ ਇਸ ਲੜੀ ਨੂੰ ਛੋਟੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੀ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਖਾਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਲੜੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੀ ਹਾਲਤਾਂ ਵਿੱਚ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਹੈ।

A.1.2 ਕਿਸੇ ਵੀ ਘਾਤ ਅੰਕ ਲਈ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ (Binomial Theorem for any Index)

ਅਧਿਆਇ 8 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਘਾਤ ਅੰਕ ਇੱਕ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਸੀ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਵੱਧ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੱਸਾਂਗੇ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਘਾਤ ਅੰਕ ਜ਼ਰੂਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਹ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਖਾਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਅਨੰਤ ਲੜੀ ਦਿੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਨੂੰ ਦੋ ਪਦੀ ਲੜੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਅਸੀ ਕੁਝ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ, ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਅਸੀਂ ਇਹ ਸੂਤਰ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ

$$(1 + x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1\, x + \ldots + {}^nC_n\, x^n$$

ਇੱਥੇ n ਅਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਜੇਕਰ, ਅਸੀਂ ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਜਾਂ ਇੱਕ ਭਿੰਨ ਨੂੰ ਘਾਤ ਅੰਕ n ਦੇ ਬਦਲੇ ਵਿੱਚ ਰੱਖਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਸੰਯੋਜਨ ${}^nC_r$ ਦਾ ਕੋਈ ਅਰਥ ਨਹੀਂ ਰਹਿ ਜਾਂਦਾ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ, ਬਿਨਾਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤੇ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਉਤਪਤੀ ਨਾਲ ਇੱਕ ਅਨੰਤ ਲੜੀ ਰਾਹੀਂ ਦੱਸਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਘਾਤ ਅੰਕ, ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨਾ ਹੋਕੇ, ਇੱਕ ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਜਾਂ ਇੱਕ ਭਿੰਨ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਸੂਤਰ

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

ਵੈਧ ਹੈ ਜਦੋਂ ਵੀ $|x| < 1$

> **ਟਿੱਪਣੀ** ਸਾਵਧਾਨੀ ਨਾਲ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $|x| < 1$ ਜਾਂ $-1 < x < 1$ ਦੀ ਸ਼ਰਤ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਜੇਕਰ m ਇੱਕ ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਜਾਂ ਭਿੰਨ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਜੇਕਰ ਅਸੀ $x = -2$ ਅਤੇ $m = -2$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

$$(1-2)^{-2} = 1+(-2)(-2)+\frac{(-2)(-3)}{1.2}(-2)^2+...$$

ਭਾਵ $1 = 1 + 4 + 12 + . . .$

ਇਹ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ।

2. ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $(1+x)^m$, ਜਿੱਥੇ m ਇੱਕ ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਜਾਂ ਇੱਕ ਭਿੰਨ ਹੈ, ਦੇ ਵਿਸਤਾਰ ਵਿੱਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਅਨੰਤ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ : $$(a+b)^m = \left[a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^m = a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$$

$$= a^m\left[1+m\frac{b}{a}+\frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{b}{a}\right)^2+...\right]$$

$$= a^m + ma^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2+...$$

ਇਹ ਵਿਸਤਾਰ ਵੈਧ ਹੈ ਜਦੋਂ $\left|\frac{b}{a}\right|<1$ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਤੁੱਲ, ਜਦੋਂ $|b| < |a|$

$(a + b)^m$ ਦੇ ਵਿਸਤਾਰ ਵਿਚ ਵਿਆਪਕ ਪਦ ਹੈ–

$$\frac{m(m-1)(m-2)...(m-r+1)a^{m-r}b^r}{1.2.3...r}$$

ਦੋ ਪਦ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਖਾਸ ਹਾਲਤਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ ਅਸੀਂ ਕਲਪਨਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $|x|<1$, ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਅਭਿਆਸ ਲਈ ਛੱਡ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ :

1. $(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + . . .$
2. $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + . . .$
3. $(1 + x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + . . .$
4. $(1- x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + . . .$

ਉਦਾਹਰਣ 1 : $\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, ਦਾ ਵਿਸਤਾਰ ਕਰੋ ਜਦੋਂ ਕਿ $|x| < 2$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{1}\left(\frac{-x}{2}\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1.2}\left(-\frac{x}{2}\right)^2+...$$

$$= 1+\frac{x}{4}+\frac{3x^2}{32}+...$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

A.1.3 ਅਨੰਤ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ (Infinite Geometric Series)

ਅਧਿਆਇ 9 ਦੇ ਭਾਗ 9.3 ਤੋਂ, ਇੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ $\frac{a_{k+1}}{a_k} = r$ (ਅਚੱਲ) ਜਦੋਂ $k = 1, 2, 3, ..., n–1$ ਹੈ। ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਤੌਰ ਤੇ, ਜੇਕਰ ਅਸੀ $a_1 = a$ ਮੰਨੀਏ ਤਾਂ ਨਤੀਜੇ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ $a, ar, ar^2, ..., ar^{n-1}$ ਨੂੰ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਦਾ ਮਾਨਕ ਰੂਪ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਪਹਿਲਾਂ, ਅਸੀਂ ਲੜੀ $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$ ਦਾ ਜੋੜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਸੂਤਰ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਸੀ ਜੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$S_n = \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r} \ . \ r \neq 1$$

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿਚ, ਅਸੀਂ ਅਨੰਤ ਗੁਣੋਤਰ ਲੜੀ $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} + ...$ ਦਾ ਜੋੜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦਾ ਸੂਤਰ ਦੱਸਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਸਮਝਾਂਗੇ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, ...$ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਹੈ।

ਇੱਥੇ $a = 1, r = \frac{2}{3}$ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ :

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] \qquad ... (1)$$

ਆਉ, ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ n ਦਾ ਮੁੱਲ ਵਧਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ਦੇ ਵਿਵਹਾਰ ਦਾ, ਅਧਿਐਨ ਕਰੀਏ।

n	1	5	10	20
$\left(\frac{2}{3}\right)^n$	0.6667	0.1316872428	0.01734152992	0.00030072866

ਅਸੀਂ ਧਿਆਨ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ n ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੱਧਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਉਵੇਂ-ਉਵੇਂ $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਕੋਲ ਹੁੰਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਗਣਿਤੀ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਿਵੇਂ n ਦਾ ਮੁੱਲ ਬਹੁਤ ਵੱਡਾ ਹੁੰਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਬਹੁਤ ਛੋਟਾ ਹੁੰਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਜਿਵੇਂ $n \to \infty, \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ ਨਤੀਜੇ ਵੱਜੋਂ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਨੰਤ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ S = 3 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਅਨੰਤ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ $a, ar, ar^2, ...,$ ਲਈ ਜੇਕਰ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ r ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁੱਲ 1 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ, ਤਾਂ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

$$S_n = \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿਚ, $r^n \to 0$ ਜਿਵੇਂ $n \to \infty$ ਕਿਉਂਕਿ $|r|<1$ ਅਤੇ ਤਾਂ $\frac{ar^n}{1-r} \to 0$

ਇਸ ਲਈ $S_n \to \frac{a}{1-r}$ ਜਦੋਂ/ਜਦਕਿ $n \to \infty$.

ਪ੍ਰਤੀਕ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਅਨੰਤ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਵਿੱਚ ਅਨੰਤ ਤੱਕ ਜੋੜ, S ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $S = \frac{a}{1-r}$

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ

(i) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

(ii) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\ldots = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਦੇ ਅਨੰਤ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਪਤਾ ਕਰੋ :

$$\frac{-5}{4}, \frac{5}{16}, \frac{-5}{64}, \ldots$$

ਹੱਲ : ਜਿੱਥੇ $a = \frac{-5}{4}$ ਅਤੇ $r = -\frac{1}{4}$. ਇਸਦੇ ਨਾਲ $|r|<1$

ਇਸ ਲਈ, ਅਨੰਤ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $S = \frac{\frac{-5}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{-5}{4}}{\frac{5}{4}} = -1$

A.1.4 ਚਲ ਘਾਤ ਅੰਕੀ ਲੜੀ (Exponential Series)

ਮਹਾਨ ਸੁਇਸ ਗਣਿਤਕਾਰ Leonhard Euler (1707 – 1783) ਨੇ 1748 ਵਿੱਚ ਆਪਣੀ ਕਲਨ (calculus) ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਸੰਖਿਆ e ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਜਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ π ਚੱਕਰ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗੀ ਹੈ ਉਸ ਪ੍ਰਕਾਰ e ਕਲਨ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗੀ ਹੈ।

ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਅਨੰਤ ਲੜੀ ਨੂੰ ਲਵੋ :

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots \qquad \ldots (1)$$

(1) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਲੜੀ ਦਾ ਜੋੜ, ਸੰਖਿਆ e ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਅਸੀ ਸੰਖਿਆ e ਦੇ ਮੁੱਲ ਦਾ ਅੰਦਾਜਾ ਲਗਾਇਏ।

ਕਿਉਂਕਿ ਲੜੀ (1) ਦਾ ਹਰੇਕ ਪਦ ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸਦਾ ਜੋੜ ਵੀ ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਦੋ ਜੋੜ ਲਵੋ :

$$\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots \qquad \ldots (2)$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਤੇ $$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+... \qquad ...(3)$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ,

$\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$ ਅਤੇ $\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$, ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, $\frac{1}{3!}<\frac{1}{2^2}$

$\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$ ਅਤੇ $\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$, ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, $\frac{1}{4!}<\frac{1}{2^3}$

$\frac{1}{5!}=\frac{1}{120}$ ਅਤੇ $\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$, ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, $\frac{1}{5!}<\frac{1}{2^4}$

ਇਸ ਲਈ, ਅੰਸ਼ਕ ਸਮਾਨਤਾ ਰਾਹੀਂ ਅਸੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ,

$\frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}}$, ਜਦੋਂ $n>2$

ਅਸੀ ਧਿਆਨ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ (2) ਦਾ ਹਰੇਕ ਪਦ (3) ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ,

ਇਸ ਲਈ $$\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+...+\frac{1}{n!}\right)<\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+...\right) \qquad ...(4)$$

(4) ਦੇ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸੇ $\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)$ ਜੋੜਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+...+\frac{1}{n!}+...\right)$$
$$<\left\{\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+...\right)\right\} \qquad ...(5)$$
$$=\left\{1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+...\right)\right\}$$
$$=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1+2=3$$

(5) ਦਾ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ, ਲੜੀ (1) ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $e<3$ ਅਤੇ ਨਾਲ ਹੀ $e>2$ ਇਸ ਕਰਕੇ $2<e<3$

ਟਿੱਪਣੀ x ਚਲ ਦੇ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੋਣ ਤੇ ਚਲ ਘਾਤ ਅੰਕੀ ਲੜੀ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : x ਦੀ ਘਾਤ ਵਾਲੀ ਲੜੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ e^{2x+3} ਦਾ ਵਿਸਤਾਰ ਕਰਨ 'ਤੇ x^2 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਚਲ ਘਾਤ ਅੰਕੀ ਲੜੀ ਵਿੱਚ

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

x ਦੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ $(2x + 3)$ ਰੱਖਣ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$e^{2x+3} = 1+\frac{(2x+3)}{1!}+\frac{(2x+3)^2}{2!}+...$$

ਇੱਥੇ $\frac{(2x+3)^n}{n!} = \frac{(3+2x)^n}{n!}$ ਵਿਆਪਕ ਪਦ ਹੈ।

ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਰਾਹੀਂ ਇਸ ਦਾ ਵਿਸਤਾਰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\frac{1}{n!}\left[3^n + {}^nC_1 3^{n-1}(2x) + {}^nC_2 3^{n-2}(2x)^2 + ... + (2x)^n\right]$$

ਇੱਥੇ x^2 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ $\frac{{}^nC_2 3^{n-2}2^2}{n!}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸੰਪੂਰਨ ਲੜੀ ਵਿਚ x^2 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ਹੈ :

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{{}^nC_2 3^{n-2}2^2}{n!} = 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)3^{n-2}}{n!}$$

$$= 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^{n-2}}{(n-2)!} \quad [n! = n\,(n-1)\,(n-2)! \text{ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਦੇ ਹੋਏ}]$$

$$= 2\left[1+\frac{3}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+...\right]$$

$$= 2e^3$$

ਇਸ ਲਈ e^{2x+3} ਦੇ ਵਿਸਤਾਰ ਵਿੱਚ x^2 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ $2e^3$ ਹੈ।

ਹੋਰ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੋਂ, $e^{2x+3} = e^3 \cdot e^{2x}$

$$= e^3\left[1+\frac{2x}{1!}+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+...\right]$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ e^{2x+3} ਦੇ ਵਿਸਤਾਰ ਵਿਚ x^2 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ $e^3.\frac{2^2}{2!}=2e^3$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : e^2 ਦਾ ਮੁੱਲ ਇੱਕ ਦਸ਼ਮਲਵ ਸਥਾਨ ਤੱਕ ਪੂਰਨ ਅੰਕਿਤ ਕਰਕੇ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : x ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਚਲ ਘਾਤ ਅੰਕੀ ਲੜੀ ਦਾ ਸੂਤਰ ਲਗਾਉਣ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$

$x = 2$ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$e^2 = 1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}+\frac{2^5}{5!}+\frac{2^6}{6!}+...$$

$$= 1+2+2+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{15}+\frac{4}{45}+...$$

$\geq$ ਪਹਿਲੇ ਸੱਤ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $\geq$ 7.355

ਹੋਰ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ, ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

$$e^2 < \left(1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}\right)+\frac{2^5}{5!}\left(1+\frac{2}{6}+\frac{2^2}{6^2}+\frac{2^3}{6^3}+\ldots\right)$$

$$= 7+\frac{4}{15}\left(1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\ldots\right) = 7+\frac{4}{15}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) = 7+\frac{2}{5}=7.4$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, e^2 ਦਾ ਮੁੱਲ 7.355 ਅਤੇ 7.4 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ e^2 ਦਾ ਮੁੱਲ ਇੱਕ ਦਸ਼ਮਲਵ ਸਥਾਨ ਤੱਕ ਪੂਰਨ ਅੰਕਿਤ ਕਰਕੇ 7.4 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

A.1.5 ਲਘੁਗਣਕੀ ਲੜੀ (Logarithmic Series)

ਇੱਕ ਹੋਰ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਲੜੀ ਲਘੁਗਣਕੀ ਲੜੀ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਅਨੰਤ ਲੜੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨਤੀਜੇ ਬਿਨਾਂ ਸਬੂਤ ਤੋਂ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਅਨੁਪ੍ਰਯੋਗ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਰਾਹੀਂ ਸਮਝਾਵਾਂਗੇ :

ਪ੍ਰਮੇਯ : ਜੇਕਰ $|x| < 1$, ਤਾਂ

$$\log_e(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots$$

ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਲੜੀ, ਲਘੁਗਣਕੀ ਲੜੀ ਕਹਿਲਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ $\log_e(1+x)$ ਦਾ ਵਿਸਤਾਰ $x = 1$ ਲਈ ਵੀ ਉਚਿਤ ਹੈ। $\log_e(1+x)$ ਦੇ ਵਿਸਤਾਰ ਵਿੱਚ $x = 1$ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\log_e 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਜੇਕਰ α, β ਸਮੀਕਰਣ $x^2-px+q=0$ ਦੇ ਮੂਲ ਹਨ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ :

$$\log_e\left(1+px+qx^2\right) = (\alpha+\beta)x-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}x^2+\frac{\alpha^3+\beta^3}{3}x^3-\ldots$$

ਹੱਲ : ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ $= \left[\alpha x-\frac{\alpha^2x^2}{2}+\frac{\alpha^3x^3}{3}-\ldots\right]+\left[\beta x-\frac{\beta^2x^2}{2}+\frac{\beta^3x^3}{3}-\ldots\right]$

$$= \log_e(1+\alpha x)+\log(1+\beta x)$$

$$= \log_e\left(1+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta x^2\right)$$

$$= \log_e\left(1+px+qx^2\right) \text{ = ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ}$$

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ $\alpha+\beta=p$ ਅਤੇ $\alpha\beta=q$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਅਸੀਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਮੂਲਾਂ ਰਾਹੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲਿਆ ਹੈ ਕਿ $|\alpha x| < 1$ ਅਤੇ $|\beta x| < 1$

— ❖ —

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (MATHEMATICAL MODELLING)

A.2.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਪਿਛਲੀਆਂ ਕੁਝ ਸ਼ਤਾਬਦੀਆਂ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਹੋਈ ਸਾਡੀ ਤਰੱਕੀ ਨੇ, ਸਾਨੂੰ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਖੇਤਰਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਚਾਹੇ ਵਿਗਿਆਨ ਹੋਵੇ, ਜਾਂ ਵਿੱਤ ਜਾਂ ਪ੍ਰਬੰਧਨ ਆਦਿ ਵਿੱਚ ਪੈਦਾ ਹੋਣ ਵਾਲੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਤੋਂ ਜੁੜੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ, ਗਣਿਤਕ ਵਿਧੀਆਂ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਨਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਸਾਰੀ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਖਾਸ ਤੌਰ 'ਤੇ ਕੰਪਿਊਟਰ ਦੀ ਅਭਿਕਲਨ ਤਾਕਤ ਅਤੇ ਅਭਿਕਲਨੀ ਵਿਧੀਆਂ ਬਹੁਤ ਨਾਮਵਰ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਲੰਬੀ ਅਤੇ ਜਟਿਲ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਨੂੰ ਅਸਾਨ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਦੀ ਕਿਸੇ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਗਣਿਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੁਵਾਦਿਤ ਕਰਨ ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਬਿਹਤਰ ਨਿਰੂਪਣ ਅਤੇ ਖਾਸ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦਾ ਹੱਲ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। ਰੂਪਾਂਤਰਣ ਦੀ ਇਹ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (ਪ੍ਰਤਿਰੂਪਣ) ਕਹਿਲਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਅਸੀ ਇਸ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਤੋਂ ਜੁੜੇ ਚਰਣਾਂ ਦੀ ਜਾਣ ਪਛਾਣ ਚਰਚਾ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਰਾਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ। ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਕੀ ਹੈ। ਉਸਦੇ ਬਾਅਦ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਤੋਂ ਜੁੜੇ ਚਰਣਾਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

A.2.2 ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਪ੍ਰਬੰਧ (Preliminaries)

ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ, ਵਿਸ਼ਵ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਲਈ ਇੱਕ ਜ਼ਰੂਰੀ ਔਜ਼ਾਰ ਹੈ। ਪੁਰਾਣੇ ਸਮੇ ਵਿੱਚ ਚੀਨ, ਮਿਸਰ, ਭਾਰਤ, ਬੇਬੀਲੋਨ ਅਤੇ ਗ੍ਰੀਸ ਦੇ ਲੋਕਾਂ ਨੇ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਘਟਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਅਤੇ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਕਰਨ ਲਈ ਆਪਣੇ ਗਣਿਤ ਦੇ ਗਿਆਨ ਰਾਹੀਂ ਸਲਾਹ ਦਿੱਤੀ। ਵਸਤੂ ਕਲਾ ਸ਼ਾਸਤਰੀਆਂ, ਸ਼ਿਲਪਕਾਰਾਂ ਅਤੇ ਕਾਰੀਗਰਾਂ ਨੇ ਆਪਣੀ ਬਹੁਤ ਸਾਰੀ ਕਲਾਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਜਿਮਾਇਤੀ ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਤੇ ਆਧਾਰਿਤ ਕੀਤਾ।

ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਸਰਵੇਖਣ ਕਰਤਾ, ਇੱਕ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਮਾਪਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਮਾਪ ਵਾਲੀ ਫ਼ੀਤੇ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਇਸ ਦੀ ਉਚਾਈ ਨੂੰ ਮਾਪਣਾ ਬਹੁਤ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦੂਜਾ ਵਿਕਲਪ ਹੋਵੇਗਾ ਜੋ ਇਹੋ-ਜਿਹੇ ਘਟਕਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਜੋ ਉਚਾਈ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਲਾਭਦਾਇਕ ਹਨ। ਆਪਣੇ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦੇ ਗਿਆਨ ਤੋਂ, ਉਹ ਜਾਣਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਉਸਨੂੰ ਉਚਾਣ ਕੋਣ ਅਤੇ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਪੈਰ ਤੋਂ, ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੱਕ ਦੀ ਦੂਰੀ ਜਿਥੇ ਉਹ ਖੜ੍ਹਿਆ ਹੈ, ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਦਾ ਪਰਿਕਲਨ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਉਸਦਾ ਕੰਮ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਚੋਟੀ ਦੇ ਉਚਾਣ ਕੋਣ ਨੂੰ ਅਤੇ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਪੈਰ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੱਕ ਦੀ, ਦੂਰੀ ਨੂੰ, ਜਿੱਥੇ ਉਹ ਖੜ੍ਹਿਆ ਹੈ, ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ, ਹੁਣ ਸਰਲ ਹੋ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੋਹਾਂ ਨੂੰ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਮਾਪਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਜੇਕਰ ਉਹ ਉਚਾਣ ਕੋਣ ਨੂੰ 40° ਅਤੇ ਦੂਰੀ ਨੂੰ 450 ਮੀ. ਮਾਪਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਉਦਾਹਰਣ 1 ਵਿੱਚ ਵਰਣਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਇੱਕ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਚੋਟੀ ਦਾ ਉਚਾਣ ਕੋਣ, ਭੂਮੀ ਤੇ ਬਿੰਦੂ O ਤੋਂ ਜਿਹੜਾ ਕੀ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਪੈਰ ਤੋਂ 450 ਮੀ. ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੈ 40° ਹੈ। ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀ, ਇਸ ਨੂੰ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਚਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਹੱਲ ਕਰਾਂਗੇ।

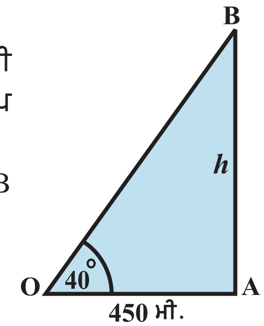
ਚਰਣ 1 : ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਮੀਨਾਰ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ, ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਉਚਾਈ ਮਾਪੀ ਜਾਣੀ ਹੈ। ਮੰਨਿਆ h ਉਚਾਈ ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ ਭੂਮੀ ਤੇ ਬਿੰਦੂ O ਤੋਂ ਮੀਨਾਰ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਦੇ ਪੈਰ ਦੀ ਦੂਰੀ 450 ਮੀ. ਹੈ। ਮੰਨਿਆ d ਇਸ ਦੂਰੀ ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਤਾਂ d = 450 ਮੀ. ਹੈ। ਅਸੀ ਇਹ ਵੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ θ ਰਾਹੀਂ ਦੱਸਿਆ ਉਚਾਣ ਕੋਣ 40° ਹੈ। ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਦੂਰੀ d ਅਤੇ ਉਚਾਣ ਕੋਣ θ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉਚਾਈ h ਕੱਢਣਾ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸਮੱਸਿਆ ਹੈ।

ਚਰਣ 2 : ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਦੱਸੀਆਂ ਤਿੰਨ ਰਾਸ਼ੀਆਂ, ਉਚਾਈ, ਦੂਰੀ ਅਤੇ ਉਚਾਣ ਕੋਣ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ, ਇਹਨਾਂ ਤਿੰਨੋਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਨੂੰ ਜੋੜਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਜਿਮਾਇਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਸਦੇ ਹੋਏ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 1)।



ਚਿੱਤਰ 1

AB ਮੀਨਾਰ ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। OA ਬਿੰਦੂ O ਤੋਂ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਪੈਰ ਤੱਕ ਦੀ ਦੂਰੀ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। $\angle AOB$ ਉਚਾਣ ਕੋਣ ਹੈ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\tan\theta = \frac{h}{d} \text{ ਜਾਂ } h = d\tan\theta \qquad \ldots (1)$$

ਇਹ θ, h ਅਤੇ d ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ ਸਥਾਪਿਣ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਚਰਣ 3 : ਅਸੀਂ h ਦਾ ਮਾਨ ਕੱਢਣ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। $\theta = 40°$ ਅਤੇ d = 450ਮੀ. ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ $h = \tan 40° \times 450 = 450 \times 0.839 = 377.6$ ਮੀ. ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਚਰਣ 4 : ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ ਕਿ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਲਗਭਗ 378 ਮੀ. ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀ ਇਸ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਿੱਤੇ ਗਏ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਚਰਣਾਂ ਤੇ ਧਿਆਨ ਦਈਏ, ਪਹਿਲੇ ਚਰਣ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਅਤੇ ਪਾਇਆ ਕਿ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਮਾਪਦੰਡ-ਉਚਾਈ, ਦੂਰੀ ਅਤੇ ਉਚਾਣ ਕੋਣ ਹਨ। ਇਸਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਪਦ ਵਿੱਚ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਤੋਂ ਜੁੜੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਮਾਪਦੰਡ-ਉਚਾਈ, ਦੂਰੀ ਅਤੇ ਉਚਾਣ ਕੋਣ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਨਣਾ ਹੈ।

ਚਰਣ 2 ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ, ਕੁਝ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਅਤੇ ਪਾਇਆ ਕਿ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਜਿਮਾਇਤੀ ਢੰਗ ਤੋਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਤਾਂ ਅਸੀਂ "ਟੇਂਜੈਂਟ" ਫਲਨ ਲਈ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਅਤੇ ਸੰਬੰਧ $h = d\tan\theta$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ।

ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਚਰਣ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਗਣਿਤਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਸੂਤਰਿਤ ਕੀਤਾ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਨਿਰੂਪਣ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ।

ਚਰਣ 3 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤਕ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਅਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਕਿ $h = 377.6$ ਮੀ. ਹੈ। ਭਾਵ ਸਾਨੂੰ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਹੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ।

ਅੰਤਿਮ ਚਰਣ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਹੱਲ ਦਾ ਨਿਰਵਚਨ ਅਤੇ ਦੱਸਿਆ ਹੈ ਕਿ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਲਗਭਗ 378 ਮੀ. ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ :

ਵਾਸਤਵਿਕ ਸਥਿਤੀ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤਕ ਹੱਲ ਦਾ ਨਿਰਵਚਨ ਕਰਨਾ।

ਵਾਸਤਵ ਵਿੱਚ ਇਹ ਉਹ ਪਦ ਹੈ, ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਗਣਿਤਕਾਰਾਂ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਲੋਕਾਂ ਨੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਤੋਂ ਜੁੜੀਆਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਲਈ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ। ਅਸੀ ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ "ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਗਣਿਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਿਉਂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ।"

ਇੱਥੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਹਲਾਤਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਲਈ ਗਣਿਤ ਦਾ ਸਹੀ ਰੂਪ ਤੋਂ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

1. ਮਨੁੱਖਾਂ ਅਤੇ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਪਸ਼ੂਆਂ ਦੇ ਸਰੀਰ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਆਕਸੀਜਨ ਅਤੇ ਬਲ ਵਰਧਕਾਂ ਨੂੰ ਪਹੁੰਚਾਉਣ ਲਈ ਸਹੀ ਖੂਨ ਦੇ ਬਹਾਵ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ, ਖੂਨ ਦੇ ਸੰਕੁਚਨ ਜਾਂ ਖੂਨ ਦੀ ਨਲੀਆਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਬਦਲਾਵ, ਖੂਨ ਦੇ ਬਹਾਵ ਨੂੰ ਬਦਲ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕੁਝ ਦਰਦ ਤੋਂ ਅਚਾਨਕ ਮੌਤ ਤੱਕ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਹਾਨੀ ਪਹੁੰਚਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਸਮੱਸਿਆ ਖੂਨ ਦੇ ਬਹਾਵ ਅਤੇ ਸ਼ਰੀਰ ਵਿਗਿਆਨ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਖੂਨ ਦੀ ਨਲੀਆਂ ਦੀ ਖ਼ਾਸੀਅਤਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ, ਸੰਬੰਧ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

2. ਕ੍ਰਿਕੇਟ ਵਿੱਚ ਤੀਜਾ ਅੰਪਾਇਰ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਦੇ ਪਰਖੇਪ ਪੱਥ ਦੇ ਨਿਰੂਪਣ ਨੂੰ ਵੇਖਕੇ ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਬੱਲੇਬਾਜ਼ ਉਥੇ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਪਗਬਾਧਾ ਦਾ ਨਿਰਣਾ ਲੈਂਦਾ ਹੈ। ਗੇਂਦ ਦੇ ਬੱਲੇਬਾਜ਼ ਦੇ ਪੈਰ ਤੇ ਲੱਗਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ, ਗੇਂਦ ਦੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਪੱਥਾਂ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੋਣ ਤੇ, ਗਣਿਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਪਗ-ਬਾਧਾ ਦਾ ਨਿਰਣਾ ਲੈਣ ਲਈ ਇਸ ਅਨੁਕਰਣ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਨਿਦਰਸ਼ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

3. ਬ੍ਰਹਿਮੰਡ ਵਿਧੀਆਂ ਵਿਭਾਗ ਗਣਿਤੀ ਨਿਰਦਸ਼ਾਂ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਮੌਸਮ ਦੀ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਕੁਝ ਮਾਪਦੰਡ ਜੋ ਮੌਸਮ ਦੀ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਵ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਉਹ ਤਾਪ, ਹਵਾ ਦਾ ਦਬਾਅ, ਨਮੀ, ਹਵਾ ਦੀ ਗਤੀ ਆਦਿ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਮਾਪਦੰਡਾਂ ਨੂੰ ਮਾਪਣ ਲਈ ਜਿਹਨਾਂ ਯੰਤਰਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਤਾਪਮਾਨ ਨੂੰ ਮਾਪਣ ਲਈ ਥਰਮਾਮੀਟਰ, ਹਵਾ ਦੇ ਦਬਾਅ ਨੂੰ ਮਾਪਣ ਲਈ ਬੈਰੋਮੀਟਰ, ਨਮੀ ਨੂੰ ਮਾਪਣ ਲਈ ਹਾਈਡ੍ਰੋਮੀਟਰ ਅਤੇ ਹਵਾ ਦੀ ਗਤੀ ਨੂੰ ਮਾਪਣ ਲਈ ਏਨੀਮੋਮੀਟਰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ। ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਜਿਵੇਂ ਹੀ ਦੇਸ਼ ਦੇ ਚਾਰਾ ਪਾਸਿਓ ਬਹੁਤ ਸਟੇਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ, ਲਏ ਅੰਕੜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਕੰਪਿਊਟਰਾਂ ਵਿੱਚ ਅੱਗੇ ਦੇ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣਾਂ ਅਤੇ ਅਰਥ ਨਿਰਵਚਨ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

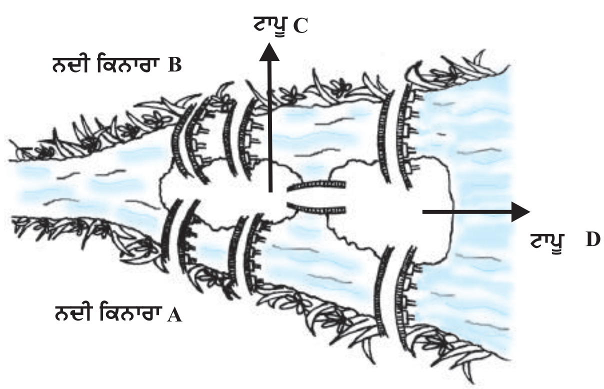
4. ਖੇਤੀਬਾੜੀ ਵਿਭਾਗ ਖੜ੍ਹੀ ਫ਼ਸਲਾਂ ਤੋਂ, ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਚਾਵਲ ਦੀ ਪੈਦਾਵਾਰ ਦਾ ਆਂਕਲਨ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਵਿਗਿਆਨੀ ਚਾਵਲ ਦੀ ਪੈਦਾਵਾਰ ਦੇ ਖੇਤਰਾਂ ਨੂੰ ਪਛਾਣਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਕੁਝ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਖੇਤਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਫਸਲਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟ ਕੇ ਅਤੇ ਤੋਲਕੇ ਪ੍ਰਤਿ ਏਕੜ ਔਸਤ ਉਤਪਾਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਕੁਝ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਯੰਤਰ ਕਲਾਵਾਂ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਚਾਵਲ ਦੀ ਔਸਤ ਪੈਦਾਵਾਰ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚਾ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।

ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤਕਾਰ ਕਿਵੇਂ ਮਦਦ ਕਰਦੇ ਹਨ? ਉਹ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਮਾਹਿਰਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਬੈਠਦੇ ਹਨ, ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, ਪਹਿਲੀ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਸਰੀਰ ਵਿਗਿਆਨ-ਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦੀ ਮਦਦ ਤੋਂ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਗਣਿਤੀ ਅਨੁਰੂਪ ਕੱਢਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਅਨੁਰੂਪ ਇੱਕ ਜਾਂ ਵੱਧ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਜਾ ਅਸਮੀਕਰਣਾਂ ਆਦਿ ਤੋਂ ਜਿਹੜੇ ਕਿ ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ ਕਹਿਲਾਉਂਦੇ ਹਨ, ਮਿਲਦੇ ਹਨ। ਤਾਂ ਨਿਦਰਸ਼ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਮੌਲਿਕ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਹੱਲ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਇੱਕ ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ ਕੀ ਹੈ?

ਇੱਕ ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ ਇੱਕ ਨਿਰੂਪਣ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਇੱਕ ਪਰਿਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਸਮਝਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਉਦਾਹਰਣ ਰਾਹੀਂ ਇੱਕ ਮਜ਼ੇਦਾਰ ਜਿਆਮਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ ਨੂੰ ਉਲੇਖਿਤ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : (ਪੁੱਲ ਸਮੱਸਿਆ) ਕੋਨਿਗਸਵਰਗ (Konigsberg) ਪ੍ਰੇਗੇਲ ਨਦੀ ਤੇ ਵਸਿਆ ਇੱਕ ਨਗਰ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਕਿ 18ਵੀਂ ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਵਿੱਚ ਜਰਮਨੀ ਦਾ ਇੱਕ ਨਗਰ ਸੀ, ਪਰੰਤੂ ਹੁਣ ਇਹ ਰੂਸ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਨਗਰ ਦੇ ਅੰਦਰ ਦੋ ਟਾਪੂ ਹਨ ਜਿਹਨਾ ਨੂੰ ਸੱਤ ਪੁਲਾਂ ਰਾਹੀਂ ਨਦੀ ਦੇ ਕਿਨਾਰਿਆਂ ਤੋਂ ਜੋੜਿਆ ਗਿਆ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 2)।



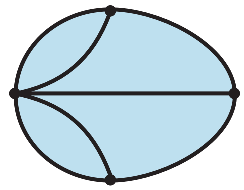
ਚਿੱਤਰ 2

ਹੱਲ : ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸੀ ਕਿ ਨਗਰ ਦੇ ਚਾਰੋਂ ਪਾਸੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਚੱਲਣਾ ਕਿ ਵਿਅਕਤੀ, ਹਰੇਕ ਪੁੱਲ ਤੋਂ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਗੁਜ਼ਰੇ। ਪਰੰਤੂ ਇਹ ਇੱਕ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਸਮੱਸਿਆ ਸਿੱਧ ਹੋਈ। Leonhard Euler ਇੱਕ ਸੁਵਿਸ ਗਣਿਤਗ ਨੇ ਜੋ ਰੂਸੀ ਸਾਮਰਾਜ 'ਕੇਥਰੀਨ ਦੀ ਗ੍ਰੇਟ' ਦੀ ਸੇਵਾ ਵਿੱਚ ਲੱਗੇ ਸੀ, ਇਸ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਬਾਰੇ ਸੁਣਿਆ। 1736 ਵਿੱਚ ਆਇਲਰ ਨੇ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਕਿ ਇੰਝ ਚੱਲਣਾ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਉਹਨਾਂ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਨੇ ਇੱਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਿੱਤਰ ਦਾ, ਨੇਟਵਰਕ (Network) ਕ੍ਰਮ ਕਹਿਲਾਉਂਦੇ ਹਨ, ਖੋਜ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਇਸਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ? ਇਸ ਜਾਲ ਕ੍ਰਮ ਸ਼ਿਖ਼ਰ (ਸੂਖਮ ਚਿੰਨ, ਜਿੱਥੇ ਰੇਖਾਵਾਂ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ) ਅਤੇ ਚਾਪਾਂ (ਰੇਖਾਵਾਂ) ਦਾ ਬਣਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 3)। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਨਦੀ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਕਿਨਾਰਿਆਂ ਲਈ ਅਤੇ ਦੋਨਾਂ ਟਾਪੂਆਂ ਲਈ ਚਾਰ ਸੂਖਮ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ (ਸ਼ਿਖਰਾਂ) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ। ਇਹਨਾ ਨੂੰ A, B, C ਅਤੇ D ਰਾਹੀਂ ਚਿਹਨਿਤ ਕੀਤਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸੱਤ ਚਾਪਾਂ ਰਾਹੀਂ ਸੱਤ ਪੁਲਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਇਆ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਵੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ 3 ਪੁਲ (ਚਾਪਾ) ਨਦੀ ਦੇ ਕਿਨਾਰੇ A ਨੂੰ ਜੋੜਦੇ ਹਨ ਅਤੇ 3 ਨਦੀ ਦੇ ਕਿਨਾਰੇ B ਨੂੰ ਜੋੜਦੇ ਹਨ, 5 ਪੁਲ (ਚਾਪਾ), ਟਾਪੂ C ਨੂੰ ਜੋੜਦੇ ਹਨ ਅਤੇ 3 ਟਾਪੂ D ਨੂੰ ਜੋੜਦੇ ਹਨ। ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੇ ਸਿਖਰਾਂ ਵਿੱਚ ਚਾਪਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਟਾਂਕ ਹੈ ਇਸਲਈ ਇਹ ਟਾਂਕ ਸਿਖਰ ਕਹਿਲਾਉਂਦੇ ਹਨ (ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸਿਖਰ ਵਿੱਚ ਇਸਨੂੰ ਜੋੜਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਵਾਲੇ ਚਾਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ) (ਚਿੱਤਰ 3)।



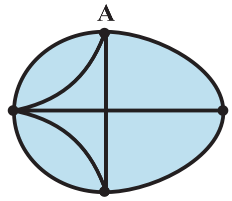
ਚਿੱਤਰ 3

ਯਾਦ ਰੱਖੋ ਕਿ ਇਹ ਸਮੱਸਿਆ ਨਗਰ ਦੇ ਇਰਦ-ਗਿਰਦ ਯਾਤਰਾ ਕਰਨ ਦੀ ਸੀ ਜਦੋਂ ਕਿ ਇੱਕ ਪੁਲ ਤੋਂ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਾਰ ਹੀ ਗੁਜ਼ਰਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। Euler ਦੇ ਜਾਲ ਕ੍ਰਮ ਤੋਂ ਇਸਦਾ ਅਭਿਪ੍ਰਾਇ ਇਹ ਹੋਇਆ ਕਿ ਸਾਰੇ ਸਿਖਰਾਂ ਤੇ ਚੱਲਦੇ ਹੋਏ ਹਰੇਕ ਚਾਪ ਤੇ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਾਰ ਹੀ ਪੈਰਾਂ ਦੇ ਚਿਨ੍ਹ ਹੋਣਗੇ। Euler ਨੇ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਕਿ ਇਹ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਕਿਉਂਕਿ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਪਤਾ ਲਗਾਇਆ ਕਿ ਟਾਂਕ ਸਿਖਰ ਹੋਣ ਤੇ ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਤਰਾ ਉਸ ਸਿਖਰ ਤੇ ਸ਼ੁਰੂ ਅਤੇ ਖਤਮ ਕਰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ (ਇਸਦੇ ਬਾਰੇ ਸੋਚੋ)। ਇਹੋ-ਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਜਿੱਥੇ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ ਸਥਿਤੀ ਇੱਕ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਪੈਰਾਂ ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਹਰ ਚਾਪ ਤੇ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਾਰੀ ਪੈਣ, ਤਾਂ ਉੱਥੇ ਕੇਵਲ ਦੋ ਟਾਂਕ ਸਿਖਰ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਪੁਲ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ 4 ਟਾਂਕ ਸਿਖਰ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਇਹੋ-ਜਿਹਾ ਕਰਨਾ ਸੰਭੰਵ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ।

ਆਇਲਰ ਰਾਹੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਸਮਾਂ ਬੀਤ ਗਿਆ। 1875 ਵਿੱਚ ਭੂਮੀ ਖੇਤਰ A ਅਤੇ D ਨੂੰ ਜੋੜਦੇ ਹੋਏ, ਇੱਕ ਹੋਰ ਪੁਲ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕੀਤਾ ਗਿਆ (ਚਿੱਤਰ 4)। ਕੀ ਹੁਣ ਕੋਨਿਗਸਬਰਗ ਦੇ ਲੋਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਪੁਲ ਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਾਰੀ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਨਗਰ ਦੇ ਚਾਰੋਂ ਪਾਸੇ ਵੱਲ ਜਾਣਾ ਸੰਭਵ ਹੈ ?

ਇੱਥੇ ਸਥਿਤੀ ਉਂਵ ਹੋਵੇਗੀ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 4 ਵਿੱਚ ਵਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇੱਕ ਨਵੇਂ ਪੁਲ ਦੇ ਜੁੜ ਜਾਣ ਦੇ ਬਾਅਦ A ਅਤੇ D ਦੋਨੋਂ ਸ਼ਿਖਰ, ਸਮਘਾਤ ਦੇ ਸ਼ਿਖਰ ਬਣ ਗਏ ਹਨ। ਪਰੰਤੂ B ਅਤੇ C ਹੁਣ ਵੀ ਟਾਂਕ ਵਿਖਮ ਘਾਤ ਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਕੋਨਿਗਸਬਰਗ ਵਾਸੀਆਂ ਲਈ ਇੱਕ ਪੁਲ ਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਾਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਨਗਰ ਦੇ ਚਾਰੋਂ ਪਾਸੇ ਵੱਲ ਜਾਣਾ ਸੰਭਵ ਹੈ।

ਪਰਿਪਥ ਦੀ ਖੋਜ ਤੋਂ ਇੱਕ ਨਵੇਂ ਸਿਧਾਂਤ ਦੀ ਸ਼ੁਰੂਆਤ ਹੋਈ, ਜੋ ਆਲੇਖ ਸਿਧਾਂਤ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਹੁਣ ਰੇਲਵੇ ਪਰਿਪਥ ਦੀ ਯੋਜਨਾ ਸਹਿਤ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਰੂਪਾਂ ਵਿੱਚ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 4)।



ਚਿੱਤਰ : 4

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

A.2.3 ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਕੀ ਹੈ ? (What is Mathematical Modelling?)

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਕੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਸ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਰਾਹੀਂ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰਾਂਗੇ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ : ਗਣਿਤੀ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਕੁਝ ਭਾਗ (ਜਾਂ ਰੂਪ) ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਦੇ ਲਈ ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਇੱਕ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਹੈ।

ਭੌਤਿਕ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਕੁਝ ਠੀਕ ਪਰਿਸਥਿਤੀਆਂ ਦੇ ਨਾਲ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਵ ਕਰਨਾ ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਇੱਕ ਤਕਨੀਕ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਸੂਖਮ ਕਲਾਵਾਂ ਤੋਂ ਲਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ ਨਾ ਕਿ ਮੂਲ ਵਿਗਿਆਨ ਤੋਂ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਤੋਂ ਜੁੜੀਆਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਵਿੱਚ ਚਾਰ ਪਦ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ। ਇੱਕ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ ਯੁਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸਰਲ ਇੱਕ ਸਰਲ ਡੋਲਣ ਦੀ ਗਤੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਲਈ ਕੀਤੇ ਹੋਏ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਸਮਝਣਾ :

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, ਇਸ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ, ਸਰਲ ਡੋਲਣ ਦੀ ਗਤੀ ਤੋਂ ਜੁੜੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਨੂੰ ਸਮਝਣਾ। ਅਸੀ ਸਾਰੇ, ਡੋਲਣ ਬਾਰੇ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ। ਇੱਕ ਡੋਲਣ ਸਧਾਰਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦ੍ਰਵਮਾਨ (mass) (ਜਿਹੜਾ ਬਾਬ (*bob*) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ) ਜੋ ਇੱਕ ਧਾਗੇ ਦੇ ਇੱਕ ਸਿਰੇ ਤੋਂ ਜੁੜਿਆ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਦੂਜਾ ਸਿਰਾ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਸਥਿਰ ਹੈ। ਅਸੀ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ ਕਿ ਸਰਲ ਡੋਲਣ ਦੀ ਗਤੀ ਸਾਮਯਿਕ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਨਾਲ ਧਾਗੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਗੁਰੁਤਵੀ ਪ੍ਰਵੇਗ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਸਮੇਂ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਦੋਲਨ ਕਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਥਨ ਅਸੀ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ:

ਕਥਨ : ਅਸੀਂ ਸਰਲ ਡੋਲਣ ਦਾ ਡੋਲਣ ਕਾਲ ਕਿਵੇਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ?

ਅਗਲਾ ਚਰਣ ਸੂਤਰਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸੂਤਰਣ : ਦੋ ਮੁੱਖ ਚਰਣਾਂ ਤੋ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

1. ਪ੍ਰਸੰਗਿਕ ਘਟਕਾਂ ਨੂੰ ਪਛਾਣਨਾ : ਇਸ ਵਿੱਚ ਅਸੀ ਉਨਾਂ ਪ੍ਰਾਚਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਡੋਲਣ ਦੇ ਮਾਮਲੇ ਵਿੱਚ ਇਹ ਘਟਕ ਹਨ, ਡੋਲਨ ਕਾਲ (T) ਬਾਬ ਦਾ ਦ੍ਰਵਮਾਨ (m) ਡੋਲਣ ਦੀ ਪ੍ਰਭਾਵਸ਼ਾਲੀ ਲੰਬਾਈ ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਸਥਿਰ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਬਾਬ ਦੇ ਦ੍ਰਵਮਾਨ ਤੋਂ ਕੇਂਦਰ ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ ਦੀ ਦੂਰੀ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਸੀ ਧਾਗੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਨੂੰ ਡੋਲਣ ਦੀ ਪ੍ਰਭਾਵਸ਼ਾਲੀ ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਗੁਰੁਤਵੀ ਪ੍ਰਵੇਗ (g) ਨੂੰ ਉਸ ਸਥਾਨ ਤੇ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਮਾਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਲਈ ਚਾਰ ਪ੍ਰਾਚਲਾਂ ਦੀ ਪਛਾਣ ਕੀਤੀ ਹੈ। ਹੁਣ ਸਾਡਾ ਉਦੇਸ਼ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਅਸੀ ਇਹ ਸਮਝਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਕਿਹੜੇ-ਕਿਹੜੇ ਪ੍ਰਾਚਲ ਹਨ, ਜਿਹੜੇ ਡੋਲਨ-ਕਾਲ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਜਿਸਨੂੰ ਇੱਕ ਸਧਾਰਨ ਪ੍ਰਯੋਗ ਰਾਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਦੋ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਦ੍ਰਵਮਾਨਾਂ ਦੀਆਂ ਦੋ ਧਾਤੂ ਦੀ ਗੇਂਦਾ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਉਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਨੂੰ ਸਮਾਨ ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੇ ਦੋ ਧਾਗਿਆਂ ਤੋਂ ਜੋੜਦੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਡੋਲਨ ਕਾਲ ਮਾਪਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀ ਨਿਰੀਖਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕੀ ਦ੍ਰਵਮਾਨ ਦੇ ਕਾਰਨ ਡੋਲਨ ਕਾਲ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਅਵਗਮ ਬਦਲਾਵ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ, ਅਸੀ, ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਸਮਾਨ ਦ੍ਰਵਮਾਨ ਦੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ, ਪਰੰਤੂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਧਾਗੇ ਲੈ ਕੇ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਨਿਰੀਖਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਡੋਲਨ ਕਾਲ ਡੋਲਣ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 'ਤੇ ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਇਹ ਸੂਚਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਡੋਲਨ ਕਾਲ ਦੇ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਦ੍ਰਵਮਾਨ m ਇੱਕ ਜ਼ਰੂਰੀ ਪ੍ਰਾਚਲ ਨਹੀਂ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ ਲੰਬਾਈ l ਇੱਕ ਜ਼ਰੂਰੀ ਪ੍ਰਾਚਲ ਹੈ। ਅਗਲੇ ਚਰਣ ਤੇ ਜਾਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਪ੍ਰਾਚਲਾਂ ਨੂੰ ਲੱਭਣ ਦੀ ਇਹ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ।

2. ਗਣਿਤਕ ਵਰਣਨ : ਇਸ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਪਛਾਣੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਾਚਲਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਅਸਮਿਕਾ ਜਾਂ ਜਿਆਮਿਤੀ ਚਿੱਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ।

ਸਰਲ ਡੋਲਣ ਦੇ ਮਾਮਲੇ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੇ ਗਏ ਸੀ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਡੋਲਨ ਕਾਲ T ਦੇ ਮਾਨ l ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਮਾਨਾਂ ਲਈ ਮਾਪੇ ਗਏ ਸੀ। ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ (Parabola) ਨੂੰ ਇੱਕ ਆਲੇਖ ਤੇ ਦਰਸ਼ਾਇਆ ਗਿਆ ਜਿਹੜੇ ਕਿ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਣਾਮਿਤ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਹੋਇਆ ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਤੋਂ ਮਿਲਦਾ ਜੁਲਦਾ ਸੀ। ਇਹ ਸੰਕੇਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ T ਅਤੇ l ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$\mathrm{T}^2 = kl \qquad \ldots (1)$$

ਇਹ ਪਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ $k = \frac{2\pi^2}{g}$ ਇਸ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \ldots (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਗਣਿਤਕ ਸੂਤਰਣ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ : ਗਣਿਤਕ ਸੂਤਰਣ ਸ਼ਾਇਦ ਹੀ, ਸਿੱਧਾ ਉੱਤਰ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਆਮ ਰੂਪ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਕ੍ਰਿਆ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ, ਗਣਨਾ ਜਾਂ ਇੱਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨਾ ਆਦਿ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਸਰਲ ਡੋਲਣਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸੂਤਰ ਦੇ ਅਨੁਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ ਹੱਲ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। ਵੱਖ-ਵੱਖ ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੇ, ਦੋ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਡੋਲਣਾਂ ਦੇ ਡੋਲਨ ਕਾਲ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 1

L	225 ਸੈ.ਮੀ.	275 ਸੈ.ਮੀ.
T	3.04 ਸੈ.	3.36 ਸੈ.

ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਵਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ $L = 225$ ਸੈ.ਮੀ., T = 3.04 ਸੈ. ਅਤੇ $l = 275$ ਸੈ.ਮੀ., T = 3.36 ਸੈ.

ਭਾਵ ਅਰਥ/ਯੋਗਤਾ

ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਜ਼ਰੂਰੀ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਦੀ ਇੱਕ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਹੈ। ਕਈ ਵਾਰੀ ਨਿਦਰਸ਼ ਸਮੀਕਰਣ ਇੱਕ ਆਦਰਸ਼ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤੀ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਨਿਦਰਸ਼ ਕੇਵਲ ਤਾਂ ਫਾਇਦੇਮੰਦ ਹੋਣਗੇ ਜੇਕਰ ਇਹ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਤੱਥਾ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਕਿ ਅਸੀਂ ਵਾਸਤਵ ਵਿੱਚ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਸੀ। ਵਰਨਾ, ਅਸੀ ਇਸਨੂੰ ਸਵੀਕਾਰ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ ਜਾਂ ਫ਼ੇਰ ਤੋਂ ਇਸ ਵਿੱਚ ਸੁਧਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਫ਼ੇਰ ਤੋਂ ਪਰਿਕਸ਼ਣ ਕਰਾਂਗੇ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀ ਨਿਦਰਸ਼ ਦੀ ਪ੍ਰਭਾਵਸ਼ੀਲਤਾ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਉਪਲਬਧ ਤੱਥਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਕੇ ਮਾਪਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਨਿਦਰਸ਼ ਦੀ ਯੋਗਤਾ ਕਹਿਲਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਸਰਲ ਡੋਲਣ ਦੇ ਮਾਮਲੇ ਵਿੱਚ ਅਸੀ ਡੋਲਣ ਤੇ ਕੁਝ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਦੋਲਨ ਕਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ ਸਾਰਣੀ 2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਨ।

ਸਾਰਣੀ 2

ਚਾਰ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਡੋਲਣਾਂ ਲਈ ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਿੱਤੇ ਗਏ ਦੋਲਨ ਕਾਲ

ਦ੍ਰਵਮਾਨ (ਕਿ.ਗ੍ਰਾ.)	ਲੰਬਾਈ ਸੈ.ਮੀ.	ਸਮਾਂ(ਸੈ.)
385	275	3.371
	225	3.056
230	275	3.352
	225	3.042

ਹੁਣ ਅਸੀ ਸਾਰਣੀ 2 ਵਿੱਚ ਮਾਪੇ ਗਏ ਮੁੱਲਾਂ ਦੀ ਸਾਰਣੀ 1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਗਣਨਾ ਦੀ ਕੀਤੇ ਗਏ ਮੁੱਲਾਂ ਤੋਂ ਤੁਲਨਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਨਿਰੀਖਣ ਮੁੱਲਾਂ ਅਤੇ ਗਣਨਾ ਕੀਤੇ ਗਏ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰ ਤੋਂ ਗਲਤੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ $l = 275$ ਸੈ.ਮੀ. ਅਤੇ ਦ੍ਰਵਮਾਨ = 385 ਗ੍ਰਾ. ਲਈ

ਗਲਤੀ = 3.371 – 3.36 = 0.011 ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਬਹੁਤ ਛੋਟਾ ਹੈ ਅਤੇ ਨਿਦਰਸ਼ ਸਵੀਕਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਜਦੋਂ ਅਸੀ ਨਿਦਰਸ਼ ਨੂੰ ਸਵੀਕਾਰ ਕਰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਨਿਦਰਸ਼ ਦਾ ਅਰਥ ਨਿਰਵਚਨ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਵਾਸਤਵਿਕ ਸਥਿਤੀ ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਹੱਲ ਵਰਣਨ ਕਰਨ ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਨਿਦਰਸ਼ ਦੀ ਯੋਗਤਾ ਕਹਿਲਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਮਾਮਲੇ ਵਿੱਚ ਅਸੀ ਹਲ ਦੀ ਯੋਗਤਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰੀਕੇ ਤੋਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

(a) ਦੋਲਨ-ਕਾਲ, ਡੋਲਣ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਦੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(b) ਇਹ, ਗੁਰੁਤਵੀ ਪ੍ਰਵੇਗ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਦੇ ਉਲਟ ਅਨੁਪਾਤੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਨਿਦਰਸ਼ ਤੇ ਸਾਡੀ ਵੈਧਤਾ ਅਤੇ ਅਰਥ ਨਿਰਵਚਨ ਵਿਖਦਾ ਹੈ ਕਿ ਨਿਦਰਸ਼ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਬਹੁਤ ਹੀ ਚੰਗਾ ਉੱਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਅਸੀ ਪਾਇਆ ਕਿ ਗਣਨਾ ਕੀਤੇ ਹੋਏ ਨਤੀਜੇ ਅਤੇ ਮਾਪੇ ਹੋਏ ਨਤੀਜੇ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਗਲਤੀ ਹੈ। ਇਹ ਇਸ ਲਈ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀ ਧਾਗੇ ਦਾ ਦ੍ਰਵਮਾਨ ਅਤੇ ਮਾਧਿਅਮ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਰੋਧ ਦੀ ਅਵਹੇਲਣਾ ਕੀਤੀ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਪਰਿਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਬੇਹਤਰ ਨਿਦਰਸ਼ ਨੂੰ ਲੱਭਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਹ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਜਾਰੀ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ।

ਇਹ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਿਰੀਖਣ ਦੀ ਵੱਲ ਰਸਤਾ ਦਸਦਾ ਹੈ। ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਨੂੰ ਸਮਝਣਾ ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਪੂਰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਰਣਨ ਕਰਨਾ ਬਹੁਤ ਜਟਿਲ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਇੱਕ ਜਾਂ ਦੋ ਪੂਰਨ ਰੂਪ ਤੋਂ ਠੀਕ ਘਟਕਾਂ ਨੂੰ ਚੁਣਦੇ ਹਾਂ ਜਿਹੜੇ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਕਰਦੇ ਹੋਣ। ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਸਰਲ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਨਿਦਰਸ਼ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਸਥਿਤੀ ਬਾਰੇ ਕੁਝ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀ ਇਸ ਨਿਦਰਸ਼ ਰਾਹੀਂ ਇਹ ਆਸ਼ਾ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸਰਲ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਇੱਕ ਵਧੀਆ ਨਿਦਰਸ਼ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕੀਏ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ, ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਤੋਂ ਜੁੜੀ-ਮੁੱਖ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਸੰਖੇਪ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

(a) ਸੂਤਰਣ (b) ਹਲ (c) ਯੋਗਤਾ/ਅਰਥ ਨਿਰਵਚਨ

ਅਗਲਾ ਉਦਾਹਰਣ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਸਮਿਕਾ ਦਾ ਆਲੇਖੀ ਹੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਤਕਨੀਕ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਕਿਵੇਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਇੱਕ ਫ਼ਾਰਮ ਹਾਊਸ ਵਿੱਚ ਹਰ ਰੋਜ਼ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ 800 ਕਿ. ਗ੍ਰਾ. ਖਾਸ ਅਹਾਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਖਾਸ ਅਹਾਰ ਮੱਕਾ ਅਤੇ ਸੋਇਆਬੀਨ ਦੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਬਣਿਆ ਹੋਇਆ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਨ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 3

ਪਦਾਰਥ	ਹਾਜ਼ਰ ਬਲਵਰਧਕ ਪ੍ਰਤਿ ਕਿ.ਗ੍ਰਾ. ਪ੍ਰੋਟੀਨ	ਹਾਜ਼ਰ ਬਲਵਰਧਕ ਪ੍ਰਤਿ ਕਿ.ਗ੍ਰਾ. ਰੇਸ਼ਾ	ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਤਿ ਕਿ.ਗ੍ਰਾ.
ਮੱਕਾ	.09	.02	10 ਰੁ.
ਸੋਇਆਬੀਨ	.60	.06	20 ਰੁ.

ਖ਼ਾਸ ਅਹਾਰ ਦੀ ਅਹਾਰ ਸੰਬੰਧੀ ਜ਼ਰੂਰਤਾਂ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ 30% ਪ੍ਰੋਟੀਨ ਅਤੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 5% ਰੇਸ਼ੇ ਦੀ ਮੰਗ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਹਰ ਰੋਜ਼ ਅਹਾਰ ਮਿਸ਼ਰਣ ਦਾ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਮੁੱਲ ਕੱਢੋ।

ਹੱਲ : ਚਰਣ 1 : ਇੱਥੇ ਸਾਡਾ ਉਦੇਸ਼ ਮੱਕਾ ਅਤੇ ਸੋਇਆਬੀਨ ਤੋਂ ਬਣੇ ਭੋਜਨ ਦੇ ਹਰ ਰੋਜ਼ ਦੇ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਉਹ ਚਾਲ (ਘਟਕ) ਜਿਹਨਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਹੈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

x = ਮੱਕਾ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ

y = ਸੋਇਆਬੀਨ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ

z = ਪੂਰਾ ਮੁੱਲ

ਚਰਣ 2 : ਸਾਰਣੀ 3 ਦੇ ਅੰਤਿਮ ਕਾਲਮ ਅੰਕਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ ਕਿ z, x, y ਸਮੀਕਰਣ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧ ਰੱਖਦੇ ਹਨ ਸਮੱਸਿਆ ਹੈ

ਕਿ z ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੇ ਨਾਲੋਂ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਬਣਾਉਣਾ :

$$z = 10x + 20y \qquad \ldots (1)$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

(a) ਫ਼ਾਰਮ ਵਿਚ, ਮੱਕਾ ਅਤੇ ਸੋਇਆਬੀਨ ਦਾ ਮਿਲਿਆ ਹੋਇਆ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ 800 ਕਿ.ਗ੍ਰਾ. ਅਹਾਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਗਿਆ।

ਭਾਵ, $x + y \geq 800$ ... (2)

(b) ਅਹਾਰ ਵਿੱਚ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ 30% ਪ੍ਰੋਟੀਨ ਅਹਾਰ ਸੰਬੰਧੀ ਜ਼ਰੂਰਤਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਸਾਰਣੀ 3 ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਕਾਲਮ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$0.09x + 0.6y \geq 0.3\,(x + y) \quad \text{... (3)}$$

(c) ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਰੇਸ਼ਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 5% ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਸਾਰਣੀ 3 ਦੇ ਦੂਜੇ ਕਾਲਮ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$0.02x + 0.06\,y \leq 0.05\,(x + y) \quad \text{... (4)}$$

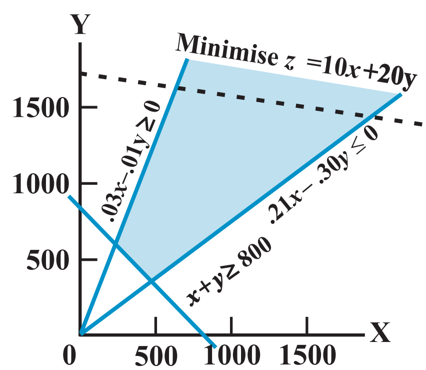
ਅਸੀਂ x, y ਦੇ ਸਾਰੇ ਗੁਣਾਕਾਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਕਰਦੇ ਹੋਏ (2), (3) ਅਤੇ (4) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਸਮੱਸਿਆ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਗਣਿਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੁਬਾਰਾ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਕਥਨ z ਨੂੰ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਬਣਾਉ, ਸ਼ਰਤਾਂ ਹਨ :

$$x + y \geq 800$$
$$0.21x - .30y \leq 0$$
$$0.03x - .01y \geq 0$$

ਇਹ ਨਿਦਰਸ਼ ਦਾ ਸੂਤਰਣ ਪ੍ਰਦਾਨ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਚਰਣ 3 : ਇਹ ਆਲੇਖੀ ਢੰਗ ਤੋਂ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 5 ਵਿੱਚ ਛਾਇਆਕ੍ਰਿਤ ਖੇਤਰ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਸੰਭਵ ਹੱਲ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਆਲੇਖ ਤੋਂ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਮਾਨ ਮਾਨ ਬਿੰਦੂ (470.6,329.4) ਤੇ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਭਾਵ $x = 470.6$ ਅਤੇ $y = 329.4$.



ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ x = 470.6 ਕਿ.ਗ੍ਰਾ.
y = 329.4 ਕਿ.ਗ੍ਰਾ.
z = 11294 ਰੁ.

ਚਿੱਤਰ 5

ਇਹ z ਦਾ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਮੁੱਲ ਦਿੰਦਾ ਹੈ

$$z = 10 \times 470.6 + 20 \times 329.4 = 11294$$

ਇਹ ਗਣਿਤਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਚਰਣ 4 : ਹੱਲ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਇਹ ਕਹਿੰਦੇ ਹੋਏ ਅਰਥ ਨਿਰਵਚਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ, "ਮੱਕਾ ਅਤੇ ਸੋਇਆਬੀਨ ਵਾਲੇ ਖਾਸ ਅਹਾਰ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਬਲ ਵਰਧਕ ਅੰਸ਼ ਪ੍ਰੋਟੀਨ ਅਤੇ ਰੇਸ਼ੇ ਦੇ ਲੋੜੀਂਦੇ ਜ਼ਰੂਰੀ ਭਾਗ ਹਨ, ਦਾ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਮੁੱਲ 11294 ਰੁ. ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ 470.6 ਕਿ.ਗ੍ਰਾ. ਮੱਕਾ ਅਤੇ 329.4 ਕਿ.ਗ੍ਰਾ. ਸੋਇਆਬੀਨ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।"

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਗਲੇ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ, ਕਿਸੇ ਦੇਸ਼ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਖਾਸ ਸਮੇਂ ਤੇ, ਅਬਾਦੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਲਈ, ਕਿਵੇਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਲਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਅਬਾਦੀ ਨਿਯੰਤਰਕ ਇਕਾਈ ਇਹ ਜਾਨਣਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਦੇਸ਼ ਵਿੱਚ ਦਸ ਸਾਲਾਂ ਬਾਅਦ ਅਬਾਦੀ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ ?

ਚਰਣ 1 - ਸੂਤਰਣ : ਅਸੀ ਨਿਰੀਖਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਬਾਦੀ ਸਮੇਂ ਦੇ ਨਾਲ ਬਦਲਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਜਨਮ ਦੇ ਨਾਲ ਵੱਧਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਮੌਤ ਦੇ ਨਾਲ ਘੱਟਦੀ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਖਾਸ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਅਬਾਦੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ। ਮੰਨ ਲਉ t ਸਮੇਂ ਨੂੰ ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਤਾਂ t ਦੇ ਮਾਨ $0, 1, 2, ..., t$ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। $t = 0$ ਵਰਤਮਾਨ ਸਮੇਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, $t = 1$ ਅਗਲੇ ਸਾਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਆਦਿ। ਕਿਸੇ ਸਮੇਂ t ਲਈ ਮੰਨ ਲਉ $P(t)$ ਉਸ ਖਾਸ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਅਬਾਦੀ ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਅਬਾਦੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ, ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ $t_0 = 2006$ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਿਵੇਂ ਕਰਾਂਗੇ ? ਅਸੀਂ 1 ਜਨਵਰੀ 2005 ਨੂੰ ਅਬਾਦੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਉਸ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਹੋਈ ਜਨਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਉਸ ਸਾਲ ਦੀ ਅਬਾਦੀ ਵਿੱਚ ਜੋੜ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਉਸ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਹੋਈ ਮੌਤਾ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਉਸ ਸਾਲ ਦੀ ਅਬਾਦੀ ਵਿਚੋਂ ਘਟਾ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $B(t)$, t ਅਤੇ $t + 1$ ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ ਇੱਕ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਜਨਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $D(t)$, t ਅਤੇ $t + 1$ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ ਮੌਤ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਸੰਬੰਧ

$$P(t + 1) = P(t) + B(t) - D(t)$$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਅਤੇ ਅਭਿਧਾਰਣਾਵਾਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

1. $\dfrac{B(t)}{P(t)}$ ਸਮਾਂ ਅੰਤਰਾਲ t ਤੋਂ $t + 1$ ਲਈ ਜਨਮ ਦਰ ਕਹਿਲਾਉਂਦੀ ਹੈ।

2. $\dfrac{D(t)}{P(t)}$ ਸਮਾਂ ਅੰਤਰਾਲ t ਤੋਂ $t + 1$ ਲਈ ਮੌਤ ਦਰ ਕਹਿਲਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਅਭਿਧਾਰਣਾਵਾਂ :

1. ਜਨਮ ਦਰ ਸਾਰੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਲਈ ਸਮਾਨ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਮੌਤ ਦਰ, ਸਾਰੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਲਈ ਸਮਾਨ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਅਚੱਲ b ਹੈ, ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਜਨਮ ਦਰ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਅਚਲ d ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਮੌਤ ਦਰ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਤੋਂ ਕਿ ਸਾਰੇ $t \geq 0$ ਲਈ

$$b = \frac{B(t)}{P(t)} \quad \text{ਅਤੇ} \quad d = \frac{D(t)}{P(t)} \quad \text{ਹਨ।} \qquad \ldots (1)$$

2. ਅਬਾਦੀ ਵਿੱਚ ਜਾਂ ਅਬਾਦੀ ਤੋਂ ਕੋਈ ਆਵਾਸ ਜਾਂ ਪ੍ਰਵਾਸ ਨਹੀਂ ਹੋਇਆ ਹੈ ਭਾਵ ਅਬਾਦੀ ਬਦਲਾਵ ਕੇਵਲ ਜਨਮ ਅਤੇ ਮੌਤ ਤੋਂ ਹੋਇਆ ਹੈ।

ਅਭਿਧਾਰਣਾਵਾਂ 1 ਅਤੇ 2 ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਵੱਜੋਂ ਅਸੀਂ ਤਰਕ ਰਾਹੀਂ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $t \geq 0$ ਲਈ

$$\begin{aligned} P(t + 1) &= P(t) + B(t) - D(t) \\ &= P(t) + bP(t) - dP(t) \\ &= (1 + b - d)\, P(t) \qquad \ldots (2) \end{aligned}$$

(2) ਵਿੱਚ $t = 0$ ਰੱਖਦੇ ਹੋਏ, ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$P(1) = (1 + b - d)P(0) \qquad \ldots (3)$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ $t = 1$ ਰੱਖਦੇ ਹੋਏ, ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$P(2) = (1 + b - d)\,P(1)$$

$$= (1 + b - d)(1 + b - d)\,P(0) \qquad \text{(ਸਮੀਕਰਣ (3) ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ)}$$

$$= (1 + b - d)^2\,P(0)$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$P(t) = (1 + b - d)^t\,P(0) \qquad \ldots (4)$$

$t = 0, 1, 2, \ldots$ ਲਈ ਅਚੱਲ $1 + b - d$ ਨੂੰ ਅਕਸਰ ਸੰਖੇਪ ਰੂਪ ਵਿੱਚ r ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਵਿਕਾਸ ਦਰ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਆਮ ਰੂਪ ਵਿੱਚ Robert Malthus ਦੀ ਇੱਜ਼ਤ ਅਫ਼ਜਾਈ ਵਿੱਚ ਜਿਸਨੇ ਇਸ ਨਿਦਰਸ਼ ਨੂੰ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਸਤੁਤ ਕੀਤਾ, ਇਹ Malthusian ਸਥਿਰ ਰਾਸ਼ੀ ਕਹਿਲਾਉਂਦੀ ਹੈ। r ਦੇ ਸੰਬੰਧ, ਸਮੀਕਰਣ (4) ਤੋਂ

$$P(t) = P(0)r^t \quad , \qquad t = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।} \quad \ldots (5)$$

ਇੱਥੇ $P(t)$ ਇੱਕ ਚਾਰ ਘਾਤ ਅੰਕੀ ਫਲਨ ਦਾ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਹੈ। cr^t ਰੂਪ ਦਾ ਕੋਈ ਫਲਨ ਜਿੱਥੇ c ਅਤੇ r ਅਚੱਲ ਹਨ। ਇੱਕ ਚਾਰ ਘਾਤ ਅੰਕੀ ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਮੀਕਰਣ (5), ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ, ਗਣਿਤੀ ਸੂਤਰ ਹੈ।

ਚਰਣ 2 – ਹੱਲ :

ਮਨ ਲਉ ਕਿ ਹੁਣ ਦੀ ਅਬਾਦੀ 250,000,000 ਹੈ ਅਤੇ ਜਨਮ ਦਰ ਅਤੇ ਮੌਤਦਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $b = 0.02$ ਅਤੇ $d = 0.01$ ਹੈ। ਦਸ ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਅਬਾਦੀ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ ? ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਅਸੀਂ $P(10)$ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$P(10) = (1.01)^{10}\,(250{,}000{,}000)$$

$$= (1.104622125)\,(250{,}000{,}000)$$

$$= 276{,}155{,}531.25$$

ਚਰਣ 3 ਯੋਗਤਾ ਅਤੇ ਅਰਥ ਨਿਰਵਚਨ :

ਸੁਭਾਵਿਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਨਿਰਾਰਥਕ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਦਾ 0.25 ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ।

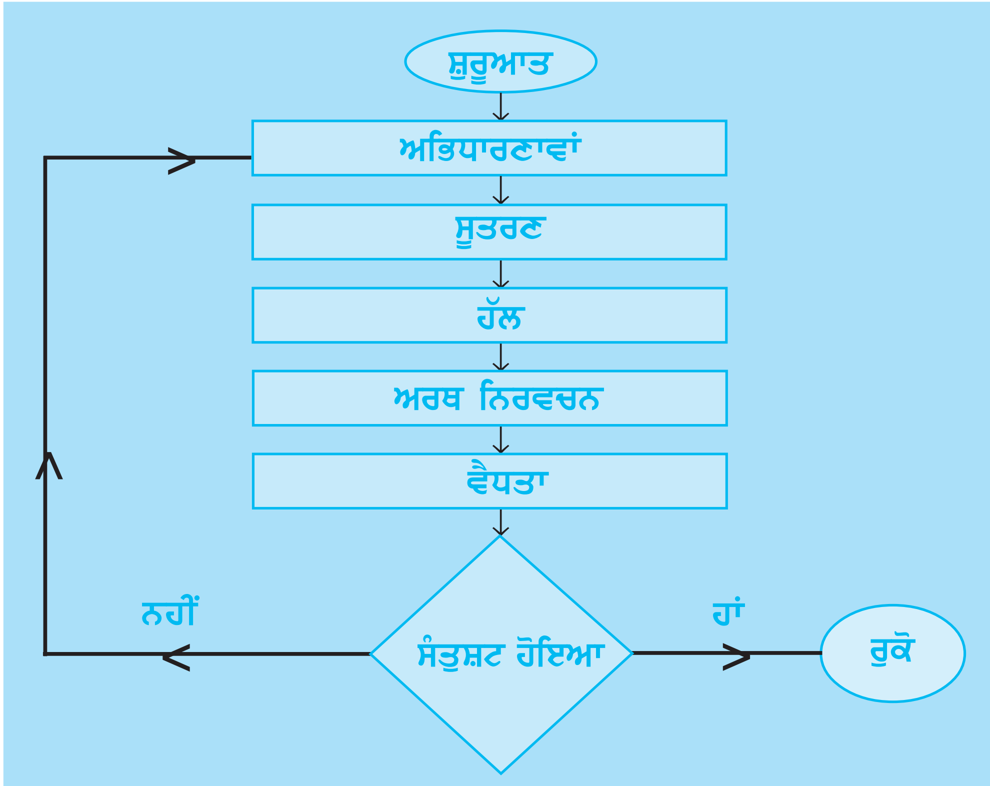
ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਲਗਭਗ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਨਤੀਜੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਬਾਦੀ 276,155,531 ਹੈ (ਲਗਭਗ)। ਇੱਥੇ ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ ਵਿੱਚ ਸਾਡੀ ਮੰਨੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਅਭਿਧਾਰਣਾਵਾਂ ਦੇ ਕਾਰਨ, ਸਾਨੂੰ ਅਸਲ ਉੱਤਰ ਨਹੀਂ ਮਿਲਦਾ।

ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਉਦਾਹਰਣ ਦਸਦੇ ਹਨ ਕਿ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਗਣਿਤਕ ਤਕਨੀਕਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਕਈ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਕਿਵੇਂ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਨਿਦਰਸ਼ ਕਿਸੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸਮਸਿਆ ਦਾ ਸਰਲ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਨਿਰੂਪਣ ਹੈ, ਇਸ ਦੇ ਖਾਸ ਗੁਣ ਦੇ ਕਾਰਨ ਇਸ ਵਿੱਚ ਬਣਾਈ ਹੋਈ ਅਭਿਧਾਰਣਾ ਅਤੇ ਲਗਭਗ ਹਨ। ਸਪੱਸ਼ਟ ਰੂਪ ਤੋਂ ਸਭ ਤੋਂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ, ਇਹ ਨਿਰਣਾ ਲੈਣ ਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਾਡਾ ਨਿਦਰਸ਼ ਢੰਗ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ, ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਜਦੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹੋਏ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਭੌਤਿਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਅਰਥ ਨਿਰਵਾਚਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ ਨਿਦਰਸ਼, ਤਰਕ ਕਰਨ ਯੋਗ ਉੱਤਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਨਿਦਰਸ਼ ਕਾਫ਼ੀ ਅਸਲੀਅਤ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਕਮੀਆਂ ਦੇ ਸ੍ਰੋਤਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਨਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਸੰਯੋਗ ਵੱਜੋਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਨਵੇਂ ਸੂਤਰ ਨਵੀਂ ਗਣਿਤੀ ਖਾਸੀਅਤ ਨੂੰ ਲੈਣਾ ਪਵੇ। ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਨਵੇਂ ਮੁਲਾਂਕਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ, ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਦਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕੀ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਪ੍ਰਵਾਹ-ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਵਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ :

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com



Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉੱਤਰਮਾਲਾ

ਅਭਿਆਸ 1.1

1. (i), (iv), (v), (vi), (vii) ਅਤੇ (viii) ਸਮੂਹ ਹਨ।

2. (i) $\in$ (ii) $\notin$ (iii) $\notin$ (iv) $\in$ (v) $\in$ (vi) $\notin$

3. (i) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (ii) $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(iii) $C = \{17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80\}$ (iv) $D = \{2, 3, 5\}$

(v) $E = \{T, R, I, G, O, N, M, E, Y\}$ (vi) $F = \{B, E, T, R\}$

4. (i) $\{ x : x = 3n, n \in N$ ਅਤੇ $1 \le n \le 4 \}$ (ii) $\{ x : x = 2^n, n \in N$ ਅਤੇ $1 \le n \le 5 \}$

(iii) $\{ x : x = 5^n, n \in N$ ਅਤੇ $1 \le n \le 4 \}$ (iv) $\{ x : x$ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।$\}$

(v) $\{ x : x = n^2, n \in N$ ਅਤੇ $1 \le n \le 10 \}$

5. (i) $A = \{1, 3, 5, \ldots\}$ (ii) $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

(iii) $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ (iv) $D = \{L, O, Y, A\}$

(v) E = { ਫ਼ਰਵਰੀ, ਅਪ੍ਰੈਲ, ਜੂਨ, ਸਤੰਬਰ, ਨਵੰਬਰ }

(vi) $F = \{b, c, d, f, g, h, j\}$

6. (i) $\leftrightarrow$ (c) (ii) $\leftrightarrow$ (a) (iii) $\leftrightarrow$ (d) (iv) $\leftrightarrow$ (b)

ਅਭਿਆਸ 1.2

1. (i), (ii), (iii)

2. (i) ਸੀਮਿਤ (ii) ਅਸੀਮਿਤ (iii) ਸੀਮਿਤ (iv) ਅਸੀਮਿਤ (v) ਸੀਮਿਤ

3. (i) ਅਸੀਮਿਤ (ii) ਸੀਮਿਤ (iii) ਅਸੀਮਿਤ (iv) ਸੀਮਿਤ (v) ਅਸੀਮਿਤ

4. (i) ਹਾਂ (ii) ਨਹੀਂ (iii) ਹਾਂ (iv) ਨਹੀਂ

5. (i) ਨਹੀਂ (ii) ਹਾਂ **6.** $B = D, E = G$

ਅਭਿਆਸ 1.3

1. (i) $\subset$ (ii) $\not\subset$ (iii) $\subset$ (iv) $\not\subset$ (v) $\not\subset$ (vi) $\subset$
(vii) $\subset$

2. (i) ਝੂਠ (ii) ਸੱਚ (iii) ਝੂਠ (iv) ਸੱਚ (v) ਝੂਠ (vi) ਸੱਚ

3. (i), (v), (vii), (viii), (ix), (xi)

4. (i) $\phi, \{a\}$ (ii) $\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$

(iii) $\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$ (iv) ϕ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

5. 1

6. (i) $(-4,\ 6]$ (ii) $(-12, -10)$ (iii) $[0, 7)$
(iv) $[3, 4]$

7. (i) $\{x : x \in R, -3 < x < 0\}$ (ii) $\{x : x \in R, 6 \le x \le 12\}$
(iii) $\{x : x \in R, 6 < x \le 12\}$ (iv) $\{x \in R, -23 \le x < 5\}$ **9.** (iii)

ਅਭਿਆਸ 1.4

1. (i) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 5\}$ (ii) $A \cup B = \{a, b, c, e, i, o, u\}$
(iii) $A \cup B = \{x : x = 1, 2, 4, 5$ ਜਾਂ ਸੰਖਿਆ 3 ਦਾ ਗੁਣਜ $\}$
(iv) $A \cup B = \{x : 1 < x < 10, x \in N\}$ (v) $A \cup B = \{1, 2, 3\}$

2. ਹਾਂ, $A \cup B = \{a, b, c\}$

3. B

4. (i) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (ii) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (iii) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
(iv) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (v) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
(vi) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (vii) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

5. (i) $X \cap Y = \{1, 3\}$ (ii) $A \cap B = \{a\}$ (iii) $\{3\}$ (iv) ϕ (v) ϕ

6. (i) $\{7, 9, 11\}$ (ii) $\{11, 13\}$ (iii) ϕ (iv) $\{11\}$
(v) ϕ (vi) $\{7, 9, 11\}$ (vii) ϕ
(viii) $\{7, 9, 11\}$ (ix) $\{7, 9, 11\}$ (x) $\{7, 9, 11, 15\}$

7. (i) B (ii) C (iii) D (iv) ϕ
(v) $\{2\}$ (vi) $\{x : x$ ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ $\}$ **8.** (iii)

9. (i) $\{3, 6, 9, 15, 18, 21\}$ (ii) $\{3, 9, 15, 18, 21\}$ (iii) $\{3, 6, 9, 12, 18, 21\}$
(iv) $\{4, 8, 16, 20)$ (v) $\{2, 4, 8, 10, 14, 16\}$ (vi) $\{5, 10, 20\}$
(vii) $\{20\}$ (viii) $\{4, 8, 12, 16\}$ (ix) $\{2, 6, 10, 14\}$
(x) $\{5, 10, 15\}$ (xi) $\{2, 4, 6, 8, 12, 14, 16\}$ (xii) $\{5, 15, 20\}$

10. (i) $\{a, c\}$ (ii) $\{f, g\}$ (iii) $\{b, d\}$

11. ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ

12. (i) ਗਲਤ (ii) ਗਲਤ (iii) ਸਹੀ (iv) ਸਹੀ

ਅਭਿਆਸ 1.5

1. (i) $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ (ii) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ (iii) $\{7, 8, 9\}$
(iv) $\{5, 7, 9\}$ (v) $\{1, 2, 3, 4\}$ (vi) $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

2. (i) $\{d, e, f, g, h\}$ (ii) $\{a, b, c, h\}$ (iii) $\{b, d, f, h\}$
(iv) $\{b, c, d, e\}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

3. (i) $\{ x : x$ ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ $\}$

(ii) $\{ x : x$ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ $\}$

(iii) $\{ x : x \in \mathbf{N}$ ਅਤੇ x ਸੰਖਿਆ 3 ਦਾ ਗੁਣਜ ਨਹੀਂ ਹੈ $\}$

(iv) $\{ x : x$ ਇੱਕ ਧਨ ਭਾਗਯੋਗ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $x = 1$ ਹੈ$\}$

(v) $\{ x : x \in \mathbf{N}$ ਅਤੇ x ਇੱਕ ਧਨ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਹੈ ਜਿਹੜਾ 3 ਤੋਂ ਭਾਗਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਾਂ ਜਿਹੜਾ 5 ਤੋਂ ਭਾਗਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੈ।$\}$

(vi) $\{ x : x \in \mathbf{N}$ ਅਤੇ x ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ $\}$

(vii) $\{ x : x \in \mathbf{N}$ ਅਤੇ x ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ $\}$

(viii) $\{ x : x \in \mathbf{N}$ ਅਤੇ $x = 3 \}$ (ix) $\{ x : x \in \mathbf{N}$ ਅਤੇ $x = 2 \}$

(x) $\{ x : x \in \mathbf{N}$ ਅਤੇ $x < 7 \}$ (xi) $\{ x : x \in \mathbf{N}$ ਅਤੇ $x \leq \frac{9}{2} \}$

6. A' ਸਾਰੇ ਸਮਬਾਹੂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ।

7. (i) U (ii) A (iii) ϕ (iv) ϕ

ਅਭਿਆਸ 1.6

1. 2 **2.** 5 **3.** 50 **4.** 42

5. 30 **6.** 19 **7.** 25, 35 **8.** 60

ਅਧਿਆਇ 1 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. $A \subset B$, $A \subset C$, $B \subset C$, $D \subset A$, $D \subset B$, $D \subset C$

2. (i) ਝੂਠ (ii) ਝੂਠ (iii) ਸੱਚ (iv) ਝੂਠ (v) ਝੂਠ

(vi) ਸੱਚ

7. ਝੂਠ **12.** ਅਸੀਂ ਮੰਨ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ, $A = \{ 1, 2 \}$, $B = \{ 1, 3 \}$, $C = \{ 2, 3 \}$ ਵੀ ਮੰਨ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

13. 325 **14.** 125 **15.** (i) 52 (ii) 30 **16.** 11

ਅਭਿਆਸ 2.1

1. $x = 2$ ਅਤੇ $y = 1$ **2.** $A \times B$ ਵਿੱਚ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 9 ਹੈ।

3. $G \times H = \{(7, 5), (7, 4), (7, 2), (8, 5), (8, 4), (8, 2)\}$

$H \times G = \{(5, 7), (5, 8), (4, 7), (4, 8), (2, 7), (2, 8)\}$

4. (i) ਝੂਠ $P \times Q = \{(m, n), (m, m), (n, n), (n, m)\}$

(ii) ਸੱਚ

(iii) ਸੱਚ

5. $A \times A = \{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)\}$

$A \times A \times A = \{(-1, -1, -1), (-1, -1, 1), (-1, 1, -1), (-1, 1, 1), (1, -1, -1), (1, -1, 1), (1, 1, -1), (1, 1, 1)\}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

6. A = $\{a, b\}$, B = $\{x, y\}$

8. $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$

$A \times B$ ਦੇ $2^4 = 16$ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹਨ।

9. A = $\{x, y, z\}$ ਅਤੇ B = $\{1,2\}$

10. A = $\{-1, 0, 1\}$, $A \times A$ ਦੇ ਬਾਕੀ ਅੰਸ਼

$(-1, -1), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (1, -1), (1, 0), (1, 1)$ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 2.2

1. R = $\{(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12)\}$

R ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ = $\{1, 2, 3, 4\}$

R ਦੀ ਸੀਮਾ = $\{3, 6, 9, 12\}$

R ਦਾ ਸਹਿ-ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ = $\{1, 2, 3, ..., 14\}$

2. R = $\{(1, 6), (2, 7), (3, 8)\}$

R ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ = $\{1, 2, 3\}$

R ਦੀ ਸੀਮਾ = $\{6, 7, 8\}$

3. R = $\{(1, 4), (1, 6), (2, 9), (3, 4), (3, 6), (5, 4), (5, 6)\}$

4. (i) R = $\{(x, y) : y = x - 2, x = 5, 6, 7$ ਲਈ$\}$

(ii) R = $\{(5,3), (6,4), (7,5)\}$, R ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ = $\{5, 6, 7\}$, R ਦੀ ਸੀਮਾ = $\{3, 4, 5\}$

5. (i) R = $\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,6), (2,4), (2,6), (2,2), (4,4), (6,6), (3, 3), (3, 6)\}$

(ii) R ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ = $\{1, 2, 3, 4, 6\}$

(iii) R ਦੀ ਸੀਮਾ = $\{1, 2, 3, 4, 6\}$

6. R ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ = $\{0, 1, 2, 3, 4, 5,\}$

R ਦੀ ਸੀਮਾ = $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

7. R = $\{(2, 8), (3, 27), (5, 125), (7, 343)\}$

8. A ਤੋਂ B ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 2^6 ਹੈ।

9. R ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ = **Z**

R ਦੀ ਸੀਮਾ = **Z**

ਅਭਿਆਸ 2.3

1. (i) ਹਾਂ,ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ = $\{2, 5, 8, 11, 14, 17\}$, ਸੀਮਾ = $\{1\}$

(ii) ਹਾਂ, ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ = $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$, ਸੀਮਾ = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

(iii) ਨਹੀਂ

2. (i) ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ = **R**, ਸੀਮਾ = $(-\infty, 0]$

(ii) ਫਲਨ ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ = $\{x : -3 \leq x \leq 3\}$

ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ = $\{x : 0 \leq x \leq 3\}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

3. (i) $f(0) = -5$ (ii) $f(7) = 9$ (iii) $f(-3) = -11$

4. (i) $t(0) = 32$ (ii) $t(28) = \frac{412}{5}$ (iii) $t(-10) = 14$ (iv) 100

5. (i) ਸੀਮਾ $= (-\infty, 2)$ (ii) ਸੀਮਾ $= [2, \infty)$ (iii) ਸੀਮਾ $= \mathbf{R}$

ਅਧਿਆਇ 2 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

2. 2.1

3. ਫਲਨ ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ, ਸੰਖਿਆਵਾਂ 6 ਅਤੇ 2 ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਬਾਕੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ।

4. ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ $= [1, \infty)$, ਸੀਮਾ $= [0, \infty)$

5. ਪ੍ਰਭਾਵ ਖੇਤਰ $= \mathbf{R}$, ਸੀਮਾ = ਰਿਣਾਤਮਕ ਤੋ ਇਲਾਵਾ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ

6. ਸੀਮਾ = ਕੋਈ ਵੀ ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਕਿ $0 \le x < 1$

7. $(f+g)\,x = 3x - 2$ **8.** $a = 2$, $b = -1$ **9.** (i) ਨਹੀਂ (ii) ਨਹੀਂ (iii) ਨਹੀਂ

$(f-g)\,x = -x + 4$

$\left(\frac{f}{g}\right)x = \frac{x+1}{2x-3},\ x \ne \frac{3}{2}$

10. (i) ਹਾਂ (ii) ਨਹੀਂ **11.** ਨਹੀਂ **12.** f ਦੀ ਸੀਮਾ $= \{3, 5, 11, 13\}$

ਅਭਿਆਸ 3.1

1. (i) $\frac{5\pi}{36}$ (ii) $-\frac{19\pi}{72}$ (iii) $\frac{4\pi}{3}$ (iv) $\frac{26\pi}{9}$

2. (i) $39^\circ\,22'\,30''$ (ii) $-229^\circ\,5'\,29''$ (iii) 300° (iv) 210°

3. 12π **4.** $12^\circ\,36'$ **5.** $\frac{20\pi}{3}$ **6.** $5:4$

7. (i) $\frac{2}{15}$ (ii) $\frac{1}{5}$ (iii) $\frac{7}{25}$

ਅਭਿਆਸ 3.2

1. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{cosec} x = -\frac{2}{\sqrt{3}}, \sec x = -2, \tan x = \sqrt{3}, \cot x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

2. $\operatorname{cosec} x = \frac{5}{3}, \cos x = -\frac{4}{5}, \sec x = -\frac{5}{4}, \tan x = -\frac{3}{4}, \cot x = -\frac{4}{3}$

3. $\sin x = -\frac{4}{5}, \operatorname{cosec} x = -\frac{5}{4}, \cos x = -\frac{3}{5}, \sec x = -\frac{5}{3}, \tan x = \frac{4}{3}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

4. $\sin x = -\frac{12}{13}, \operatorname{cosec} x = -\frac{13}{12}, \cos x = \frac{5}{13}, \tan x = -\frac{12}{5}, \cot x = -\frac{5}{12}$

5. $\sin x = \frac{5}{13}, \operatorname{cosec} x = \frac{13}{5}, \cos x = -\frac{12}{13}, \sec x = -\frac{13}{12}, \cot x = -\frac{12}{5}$

6. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **7.** 2 **8.** $\sqrt{3}$ **9.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **10.** 1

ਅਭਿਆਸ 3.3

5. (i) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (ii) $2 - \sqrt{3}$

ਅਭਿਆਸ 3.4

1. $\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, n\pi + \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$

2. $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$

3. $\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, n\pi + \frac{5\pi}{6}, n \in \mathbf{Z}$

4. $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}, n \in \mathbf{Z}$

5. $x = \frac{n\pi}{3}$ ਜਾਂ $x = n\pi, n \in \mathbf{Z}$

6. $x = (2n+1)\frac{\pi}{4}$, ਜਾਂ $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$

7. $x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}$ ਜਾਂ $(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$

8. $x = \frac{n\pi}{2}$, ਜਾਂ $\frac{n\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}, n \in \mathbf{Z}$

9. $x = \frac{n\pi}{3}$, ਜਾਂ $n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$

ਅਧਿਆਇ 3 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

8. $\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, 2$

9. $\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{2}$

10. $\frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{4}, \frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{4}, 4+\sqrt{15}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਭਿਆਸ 5.1

1. 3 **2.** 0 **3.** i **4.** $14 + 28i$

5. $2 - 7i$ **6.** $-\frac{19}{5} - \frac{21i}{10}$ **7.** $\frac{17}{3} + i\frac{5}{3}$ **8.** -4

9. $-\frac{242}{27} - 26i$ **10.** $\frac{-22}{3} - i\frac{107}{27}$ **11.** $\frac{4}{25} + i\frac{3}{25}$ **12.** $\frac{\sqrt{5}}{14} - i\frac{3}{14}$

13. i **14.** $\frac{-7\sqrt{2}}{2}i$

ਅਭਿਆਸ 5.2

1. $2, \frac{-2\pi}{3}$ **2.** $2, \frac{5\pi}{6}$ **3.** $\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$

4. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ **5.** $\sqrt{2}\left(\cos\frac{-3\pi}{4} + i\sin\frac{-3\pi}{4}\right)$

6. $3(\cos\pi + i\sin\pi)$ **7.** $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ **8.** $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

ਅਭਿਆਸ 5.3

1. $\pm\sqrt{3}\,i$ **2.** $\frac{-1 \pm \sqrt{7}\,i}{4}$ **3.** $\frac{-3 \pm 3\sqrt{3}\,i}{2}$ **4.** $\frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{-2}$

5. $\frac{-3 \pm \sqrt{11}\,i}{2}$ **6.** $\frac{1 \pm \sqrt{7}\,i}{2}$ **7.** $\frac{-1 \pm \sqrt{7}\,i}{2\sqrt{2}}$ **8.** $\frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{34}\,i}{2\sqrt{3}}$

9. $\frac{-1 \pm \sqrt{\left(2\sqrt{2} - 1\right)}i}{2}$ **10.** $\frac{-1 \pm \sqrt{7}\,i}{2\sqrt{2}}$

ਅਧਿਆਇ 5 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. $2 - 2i$ **3.** $\frac{307 + 599i}{442}$

5. (i) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ (ii) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

6. $\frac{2}{3} \pm \frac{4}{3}i$ **7.** $1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$ **8.** $\frac{5}{27} \pm \frac{\sqrt{2}}{27}i$ **9.** $\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{14}}{21}i$

10. $\sqrt{2}$ **12.** (i) $\frac{-2}{5}$ (ii) 0 **13.** $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{4}$ **14.** $x = 3, y = -3$ **15.** 2

17. 1 **18.** 0 **20.** 4

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਭਿਆਸ 6.1

1. (i) $\{1, 2, 3, 4\}$ (ii) $\{... -3, -2, -1, 0, 1,2,3,4,\}$

2. (i) ਕੋਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ (ii) $\{... -4, -3\}$

3. (i) $\{... -2, -1, 0, 1\}$ (ii) $(-\infty, 2)$

4. (i) $\{-1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ (ii) $(-2, \infty)$

5. $(-4, \infty)$ **6.** $(-\infty, -3)$ **7.** $(-\infty, -3]$ **8.** $(-\infty, 4]$

9. $(-\infty, 6)$ **10.** $(-\infty, -6)$ **11.** $(-\infty, 2]$ **12.** $(-\infty, 120]$

13. $(4, \infty)$ **14.** $(-\infty, 2]$ **15.** $(4, \infty)$ **16.** $(-\infty, 2]$

17. $x < 3$, 

18. $x \ge -1$, 

19. $x > -1$, 

20. $x \ge -\dfrac{2}{7}$, 

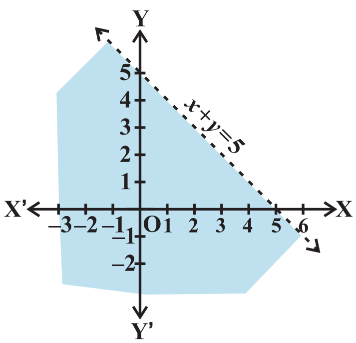
21. 35 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। **22.** 82 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

23. (5,7), (7,9) **24.** (6,8), (8,10), (10,12)

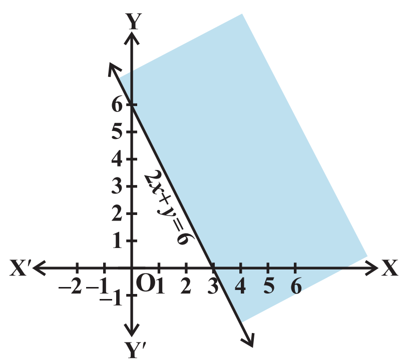
25. 9 ਸੈਂ.ਮੀ. **26.** 8 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ ਪਰੰਤੂ 22 ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ

ਅਭਿਆਸ 6.2

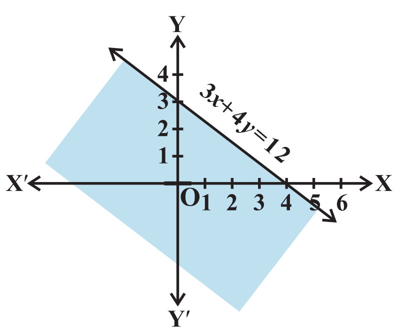
1.



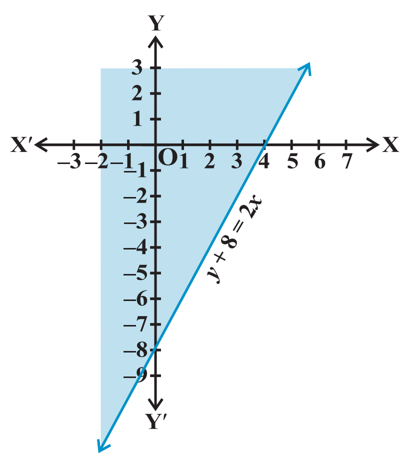
2.



3.



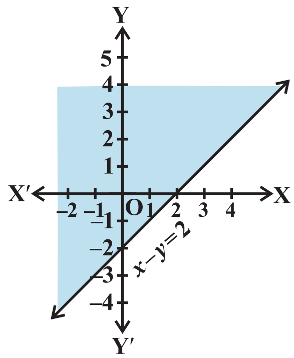
4.



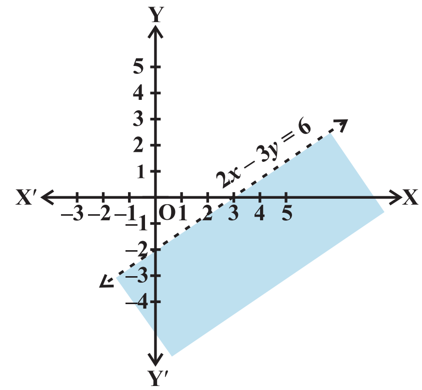
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

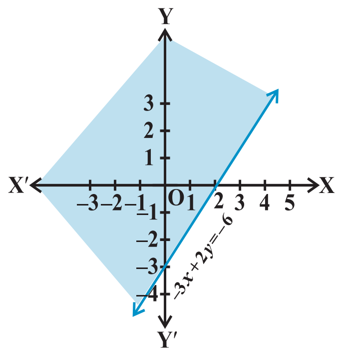
5.



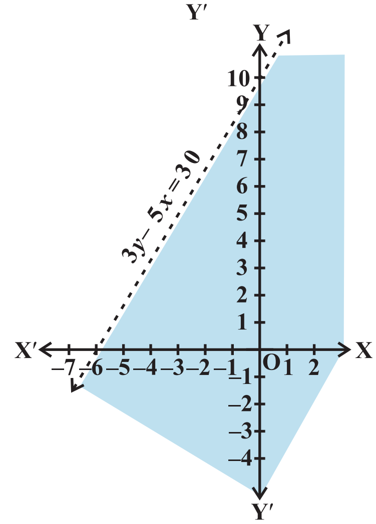
6.



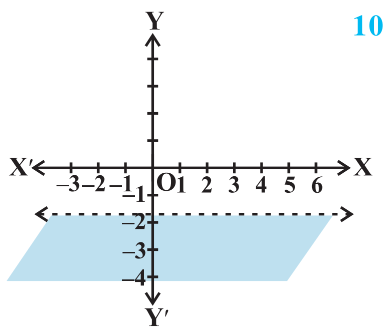
7.



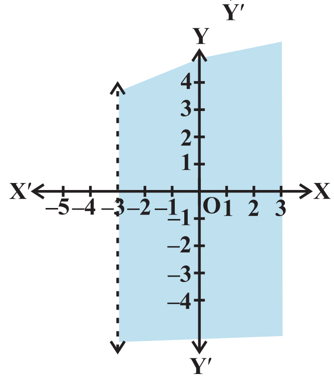
8.



9.

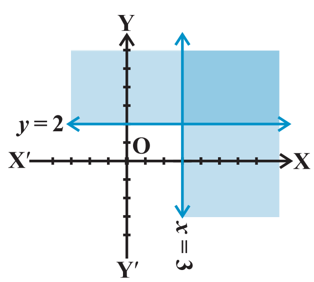


10.

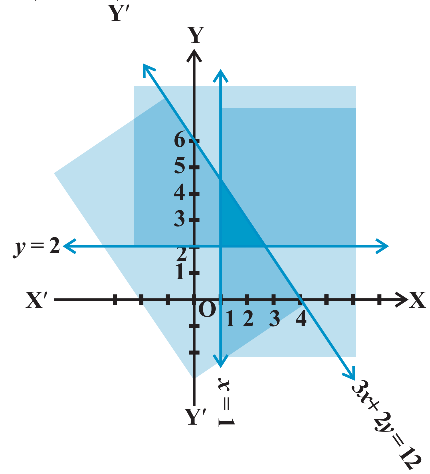


ਅਭਿਆਸ 6.3

1.



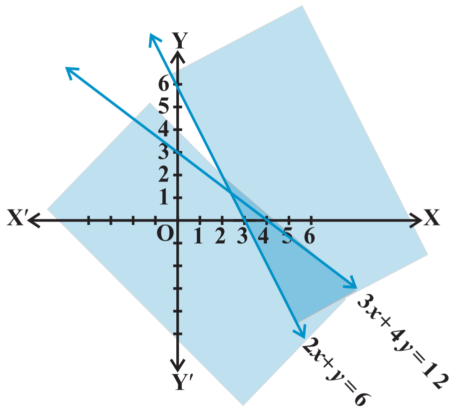
2.



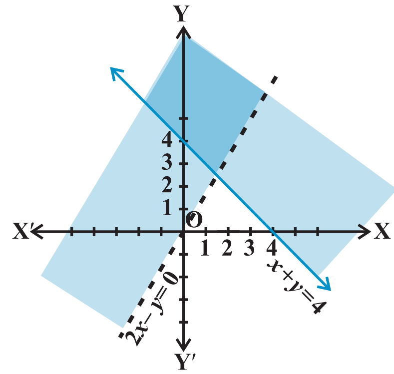
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

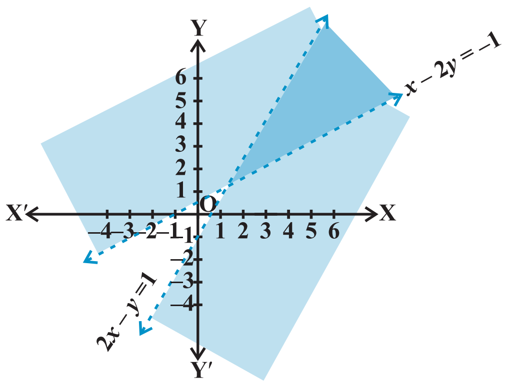
3.



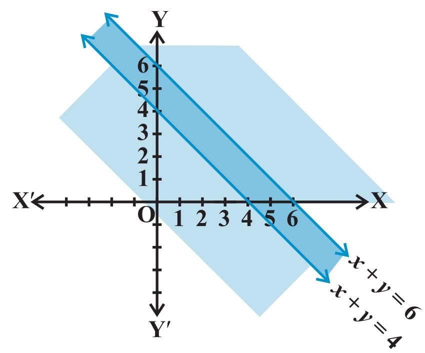
4.



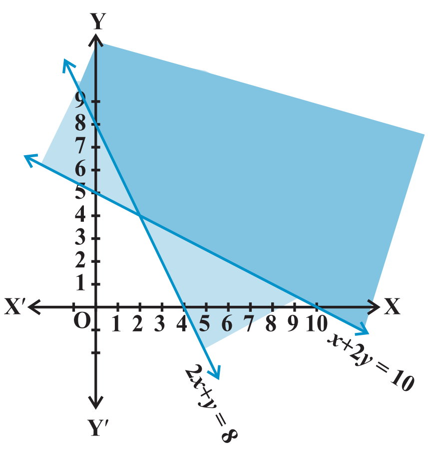
5.



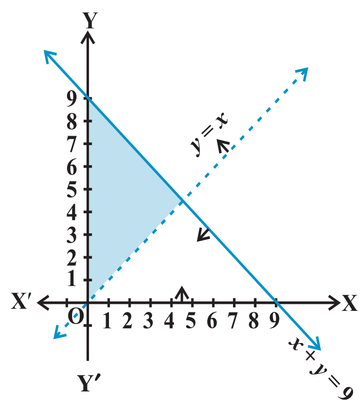
6.



7.



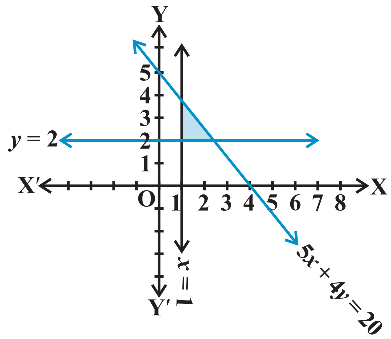
8.



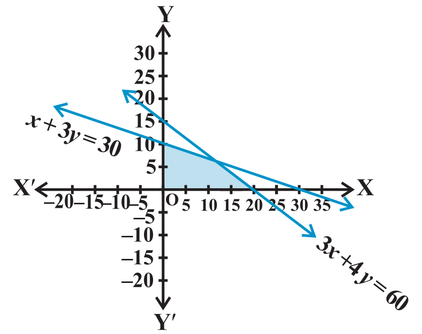
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

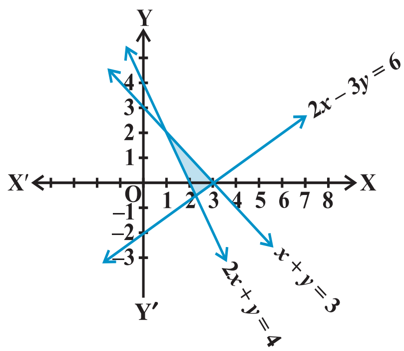
9.



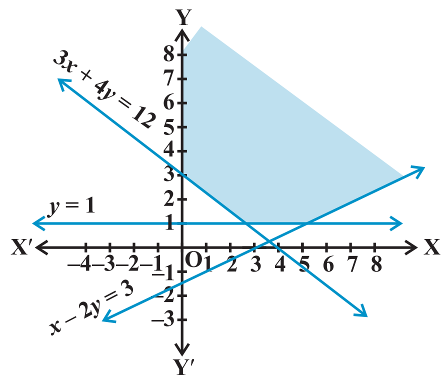
10.



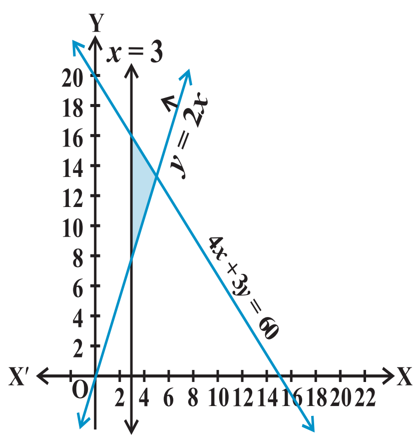
11.



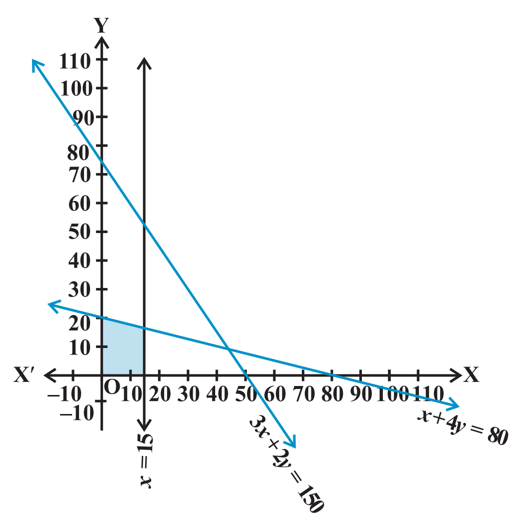
12.



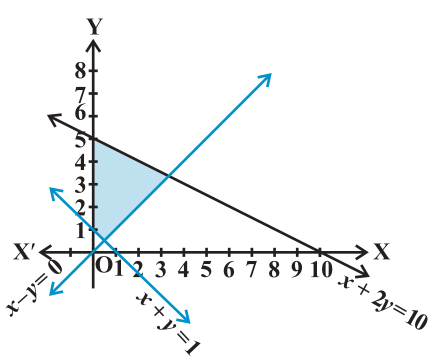
13.



14.



15.



Downloaded from https:// www.studiestoday.com

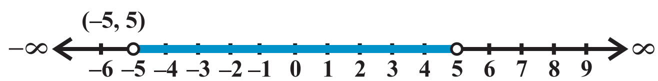
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਧਿਆਇ 6 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

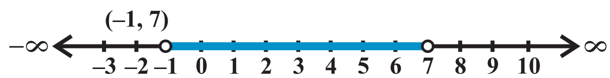
1. [2, 3] **2.** (0, 1] **3.** [– 4, 2]

4. (– 23, 2] **5.** $\left(\dfrac{-80}{3}, \dfrac{-10}{3}\right]$ **6.** $\left[1, \dfrac{11}{3}\right]$

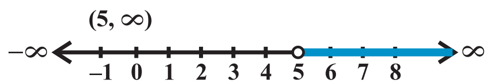
7. (–5, 5)



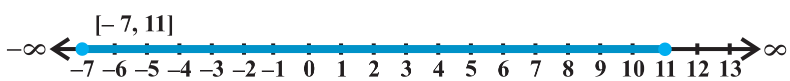
8. (–1, 7)



9. (5, ∞)



10. [– 7, 11]



11. 20°C ਅਤੇ 25°C ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ

12. 320 ਲੀ.ਤੋਂ ਵੱਧ ਪਰੰਤੂ 1280 ਲੀ. ਤੋਂ ਘੱਟ

13. 562.5 ਲੀ. ਤੋਂ ਵੱਧ ਪਰੰਤੂ 900 ਲੀ.ਤੋਂ ਘੱਟ

14. $9.6 \le MA \le 16.8$

ਅਭਿਆਸ 7.1

1. (i) 125, (ii) 60 **2.** 108 **3.** 5040 **4.** 336 **5.** 8 **6.** 20

ਅਭਿਆਸ 7.2

1. (i) 40320 (ii) 18 **2.** 30, No **3.** 28 **4.** 64 **5.** (i) 30 (ii) 15120

ਅਭਿਆਸ 7.3

1. 504 **2.** 4536 **3.** 60 **4.** 120, 48 **5.** 56 **6.** 9

7. (i) 3 (ii) 4 **8.** 40320 **9.** (i) 360 (ii) 720 (iii) 240 **10.** 33810

11. (i) 1814400 (ii) 2419200 (iii) 25401600

ਅਭਿਆਸ 7.4

1. 45 **2.** (i) 5, (ii) 6 **3.** 210 **4.** 40 **5.** 2000

6. 778320 **7.** 3960 **8.** 200 **9.** 35

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਧਿਆਇ 7 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. 3600 2. 1440 3. (i) 504 (ii) 588 (iii) 1632
4. 907200 5. 120 6. 50400 7. 420
8. ${}^{4}C_1 \times {}^{48}C_4$ 9. 2880 10. ${}^{22}C_7 + {}^{22}C_{10}$ 11. 151200

ਅਭਿਆਸ 8.1

1. $1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^4 - 32x^5$

2. $\dfrac{32}{x^5} - \dfrac{40}{x^3} + \dfrac{20}{x} - 5x + \dfrac{5}{8}x^3 - \dfrac{x^5}{32}$

3. $64x^6 - 576x^5 + 2160x^4 - 4320x^3 + 4860x^2 - 2916x + 729$

4. $\dfrac{x^5}{243} + \dfrac{5x^3}{81} + \dfrac{10}{27}x + \dfrac{10}{9x} + \dfrac{5}{3x^3} + \dfrac{1}{x^5}$

5. $x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20 + \dfrac{15}{x^2} + \dfrac{6}{x^4} + \dfrac{1}{x^6}$

6. 884736 7. 11040808032 8. 104060401
9. 9509900499 10. $(1.1)^{10000} > 1000$ 11. $8(a^3b + ab^3);\ 40\sqrt{6}$
12. $2(x^6 + 15x^4 + 15x^2 + 1)$, 198

ਅਭਿਆਸ 8.2

1. 1512 2. -101376 3. $(-1)^r\ {}^{6}C_r . x^{12-2r} . y^r$
4. $(-1)^r\ {}^{12}C_r . x^{24-r} . y^r$ 5. $-1760\ x^9y^3$ 6. 18564
7. $\dfrac{-105}{8}x^9;\ \dfrac{35}{48}x^{12}$ 8. $61236\ x^5y^5$ 10. $n = 7;\ r = 3$
12. $m = 4$

ਅਧਿਆਇ 8 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. $a = 3;\ b = 5;\ n = 6$ 2. $a = \dfrac{9}{7}$ 3. 171
5. $396\sqrt{6}$ 6. $2a^8 + 12a^6 - 10a^4 - 4a^2 + 2$
7. 0.9510 8. $n = 10$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

9. $\frac{16}{x}+\frac{8}{x^2}-\frac{32}{x^3}+\frac{16}{x^4}-4x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{16}-5$

10. $27x^6 - 54ax^5 + 117a^2x^4 - 116a^3x^3 + 117a^4x^2 - 54a^5x + 27a^6$

ਅਭਿਆਸ 9.1

1. 3, 8, 15, 24, 35 **2.** $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6}$ **3.** 2, 4, 8, 16 ਅਤੇ 32

4. $-\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{2},\frac{5}{6}$ ਅਤੇ $\frac{7}{6}$ **5.** 25, –125, 625, –3125, 15625

6. $\frac{3}{2},\frac{9}{2},\frac{21}{2}$, 21 ਅਤੇ $\frac{75}{2}$ **7.** 65, 93 **8.** $\frac{49}{128}$

9. 729 **10.** $\frac{360}{23}$

11. 3, 11, 35, 107, 323; 3 + 11 + 35 + 107 + 323 + ...

12. $-1,\frac{-1}{2},\frac{-1}{6},\frac{-1}{24},\frac{-1}{120};-1+\left(\frac{-1}{2}\right)+\left(\frac{-1}{6}\right)+\left(\frac{-1}{24}\right)+\left(\frac{-1}{120}\right)+\ldots$

13. 2, 2, 1, 0, –1; 2 + 2 + 1 + 0 + (–1) + ... **14.** 1, 2, $\frac{3}{2},\frac{5}{3}$ ਅਤੇ $\frac{8}{5}$

ਅਭਿਆਸ 9.2

1. 1002001 **2.** 98450 **4.** 5 ਜਾਂ 20 **6.** 4

7. $\frac{n}{2}(5n+7)$ **8.** $2q$ **9.** $\frac{179}{321}$ **10.** 0

13. 27 **14.** 11, 14, 17, 20 ਅਤੇ 23 **15.** 1

16. 14 **17.** ₹ 245 **18.** 9

ਅਭਿਆਸ 9.3

1. $\frac{5}{2^{20}},\frac{5}{2^n}$ **2.** 3072 **4.** – 2187

5. (a) 13ਵਾਂ, (b) 12ਵਾਂ, (c) 9ਵਾਂ **6.** ± 1 **7.** $\frac{1}{6}\left[1-(0.1)^{20}\right]$

8. $\frac{\sqrt{7}}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(3^{\frac{n}{2}}-1\right)$ **9.** $\frac{\left[1-(-a)^n\right]}{1+a}$ **10.** $\frac{x^3\left(1-x^{2n}\right)}{1-x^2}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

11. $22+\frac{3}{2}\left(3^{11}-1\right)$

12. $r=\frac{5}{2}$ ਜਾਂ $\frac{2}{5}$; ਪਦ $\frac{2}{5}, 1, \frac{5}{2}$ ਜਾਂ $\frac{5}{2}, 1, \frac{2}{5}$ ਹਨ।

13. 4 **14.** $\frac{16}{7}; 2; \frac{16}{7}\left(2^n-1\right)$ **15.** 2059

16. $\frac{-4}{3}, \frac{-8}{3}, \frac{-16}{3}, \ldots$ ਜਾਂ $4, -8, 16, -32, 64, \ldots$ **18.** $\frac{80}{81}\left(10^n-1\right)-\frac{8}{9}n$

19. 496 **20.** rR **21.** 3, –6, 12, –24 **26.** 9 ਅਤੇ 27

27. $n=\frac{-1}{2}$ **30.** 120, 480, 30 (2^n) **31.** ₹ 500 $(1.1)^{10}$ **32.** $x^2-16x+25=0$

ਅਭਿਆਸ 9.4

1. $\frac{n}{3}(n+1)(n+2)$ **2.** $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

3. $\frac{n}{6}(n+1)\left(3n^2+5n+1\right)$ **4.** $\frac{n}{n+1}$ **5.** 2840

6. $3n(n+1)(n+3)$ **7.** $\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$

8. $\frac{n(n+1)}{12}\left(3n^2+23n+34\right)$

9. $\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)+2\left(2^n-1\right)$ **10.** $\frac{n}{3}(2n+1)(2n-1)$

ਅਧਿਆਇ 9 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

2. 5, 8, 11 **4.** 8729 **5.** 3050 **6.** 1210

7. 4 **8.** 160; 6 **9.** ± 3 **10.** 8, 16, 32

11. 4 **12.** 11

21. (i) $\frac{50}{81}\left(10^n-1\right)-\frac{5n}{9}$ (ii) $\frac{2n}{3}-\frac{2}{27}\left(1-10^{-n}\right)$ **22.** 1680

23. $\frac{n}{3}\left(n^2+3n+5\right)$ **25.** $\frac{n}{24}\left(2n^2+9n+13\right)$

27. ₹ 16680 **28.** ₹ 39100 **29.** ₹ 43690 **30.** ₹17000, ; 20,000

31. ₹ 5120 **32.** 25 ਦਿਨ

ਅਭਿਆਸ 10.1

1. $\frac{121}{2}$ ਵਰਗ ਇਕਾਈ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

2. (0, *a*), (0, – *a*) ਅਤੇ $\left(-\sqrt{3}a, 0\right)$ ਜਾਂ (0, *a*), (0, – *a*), ਅਤੇ $\left(\sqrt{3}a, 0\right)$

3. (i) $|y_2 - y_1|$ (ii) $|x_2 - x_1|$ **4.** $\left(\frac{15}{2}, 0\right)$ **5.** $-\frac{1}{2}$

7. $-\sqrt{3}$ **8.** $x = 1$ **10.** 135°

11. 1 ਅਤੇ 2, ਜਾਂ $\frac{1}{2}$ ਅਤੇ 1, ਜਾਂ – 1 ਅਤੇ –2, ਜਾਂ $-\frac{1}{2}$ ਅਤੇ – 1 **14.** $\frac{1}{2}$, 104.5 ਕਰੋੜ

ਅਭਿਆਸ 10.2

1. $y = 0$ ਅਤੇ $x = 0$ **2.** $x - 2y + 10 = 0$ **3.** $y = mx$

4. $\left(\sqrt{3}+1\right)x - \left(\sqrt{3}-1\right)y = 4\left(\sqrt{3}-1\right)$ **5.** $2x + y + 6 = 0$

6. $x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} = 0$ **7.** $5x + 3y + 2 = 0$

8. $\sqrt{3}x + y = 10$ **9.** $3x - 4y + 8 = 0$ **10.** $5x - y + 20 = 0$

11. $(1 + n)x + 3(1 + n)y = n + 11$ **12.** $x + y = 5$

13. $x + 2y - 6 = 0$, $2x + y - 6 = 0$

14. $\sqrt{3}x + y - 2 = 0$ ਅਤੇ $\sqrt{3}x + y + 2 = 0$ **15.** $2x - 9y + 85 = 0$

16. $L = \frac{.192}{90}(C - 20) + 124.942$ **17.** 1340 ਲੀ. **19.** $2kx + hy = 3kh$

ਅਭਿਆਸ 10.3

1. (i) $y = -\frac{1}{7}x + 0, -\frac{1}{7}, 0$; (ii) $y = -2x + \frac{5}{3}, -2, \frac{5}{3}$; (iii) $y = 0x + 0, 0, 0$

2. (i) $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1, 4, 6$; (ii) $\frac{x}{\frac{3}{2}} + \frac{y}{-2} = 1, \frac{3}{2}, -2$;

(iii) $y = -\frac{2}{3}$, *y*-ਧੁਰੇ ਤੇ ਅੰਤਰ ਖੰਡ = $-\frac{2}{3}$ ਅਤੇ *x*-ਧੁਰੇ ਤੇ ਕੋਈ ਅੰਤਰ ਖੰਡ ਨਹੀਂ ਹੈ।

3. (i) $x \cos 120° + y \sin 120° = 4, 4, 120°$ (ii) $x \cos 90° + y \sin 90° = 2, 2, 90°$;

(iii) $x \cos 315° + y \sin 315° = 2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, 315° **4.** 5 ਇਕਾਈ

5. (– 2, 0) ਅਤੇ (8, 0) **6.** (i) $\frac{65}{17}$ ਇਕਾਈ (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{p+r}{l}\right|$ ਇਕਾਈ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

7. $3x - 4y + 18 = 0$ **8.** $y + 7x = 21$ **9.** $30°$ ਅਤੇ $150°$ **10.** $\frac{22}{9}$

12. $\left(\sqrt{3}+2\right)x+\left(2\sqrt{3}-1\right)y=8\sqrt{3}+1$ ਜਾਂ $\left(\sqrt{3}-2\right)x+\left(1+2\sqrt{3}\right)y=-1+8\sqrt{3}$

13. $2x + y = 5$ **14.** $\left(\frac{68}{25},-\frac{49}{25}\right)$ **15.** $m=\frac{1}{2}, c=\frac{5}{2}$ **17.** $y - x = 1, \sqrt{2}$

ਅਧਿਆਇ 10 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. (a) 3 (b) ± 2 (c) 6 ਜਾਂ 1 **2.** $\frac{7\pi}{6}, 1$

3. $2x-3y=6, -3x+2y=6$ **4.** $\left(0,-\frac{8}{3}\right), \left(0,\frac{32}{3}\right)$

5. $\frac{|\sin(\phi-\theta)|}{2\left|\sin\frac{\phi-\theta}{2}\right|}$ **6.** $x=-\frac{5}{22}$ **7.** $2x - 3y + 18 = 0$

8. R^2 ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ **9.** 5 **11.** $3x - y = 7, \quad x + 3y = 9$

12. $13x + 13y = 6$ **14.** $1 : 2$ **15.** $\frac{23\sqrt{5}}{18}$ ਇਕਾਈਆਂ

16. ਰੇਖਾ x - ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਜਾਂ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ।

17. $x = 1, \quad y = 1$ **18.** $(-1, -4)$ **19.** $\frac{1\pm 5\sqrt{2}}{7}$

21. $18x + 12y + 11 = 0$ **22.** $\left(\frac{13}{5},0\right)$ **24.** $119x + 102y = 125$

ਅਭਿਆਸ 11.1

1. $x^2 + y^2 - 4y = 0$ **2.** $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

3. $36x^2 + 36y^2 - 36x - 18y + 11 = 0$ **4.** $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

5. $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + 2b^2 = 0$ **6.** $c(-5, 3), r = 6$

7. $c(2, 4), r = \sqrt{65}$ **8.** $c(4, -5), r = \sqrt{53}$ **9.** $c\left(\frac{1}{4}, 0\right); r = \frac{1}{4}$

10. $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 15 = 0$ **11.** $x^2 + y^2 - 7x + 5y - 14 = 0$

12. $x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0$ ਅਤੇ $x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$

13. $x^2 + y^2 - ax - by = 0$ **14.** $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 5$

15. ਚੱਕਰ ਦੇ ਅੰਦਰ; ਕਿਉਂਕਿ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਦੂਰੀ ਅਰਧ-ਵਿਆਸ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਭਿਆਸ 11.2

1. F (3, 0), ਧੁਰਾ - x - ਧੁਰਾ, ਨਿਯਾਮਕ ਰੇਖਾ (Directrix) $x = -3$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ = 12

2. F $(0, \frac{3}{2})$, ਧੁਰਾ - y - ਧੁਰਾ, ਨਿਯਾਮਕ ਰੇਖਾ (Directrix) $y = -\frac{3}{2}$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ = 6

3. F (–2, 0), ਧੁਰਾ - x - ਧੁਰਾ, ਨਿਯਾਮਕ ਰੇਖਾ (Directrix) $x = 2$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ = 8

4. F (0, –4), ਧੁਰਾ - y - ਧੁਰਾ, ਨਿਯਾਮਕ ਰੇਖਾ (Directrix) $y = 4$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ = 16

5. F $(\frac{5}{2}, 0)$ ਧੁਰਾ - x - ਧੁਰਾ, ਨਿਯਾਮਕ ਰੇਖਾ (Directrix) $x = -\frac{5}{2}$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ = 10

6. F $(0, \frac{-9}{4})$, ਧੁਰਾ - y - ਧੁਰਾ, ਨਿਯਾਮਕ ਰੇਖਾ(Directrix) $y = \frac{9}{4}$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ ਦੀ ਲੰਬਾਈ = 9

7. $y^2 = 24x$ *8.* $x^2 = -12y$ *9.* $y^2 = 12x$

10. $y^2 = -8x$ *11.* $2y^2 = 9x$ *12.* $2x^2 = 25y$

ਅਭਿਆਸ 11.3

1. F $(\pm\sqrt{20}, 0)$, V (± 6, 0); ਦੀਰਘ ਧੁਰਾ = 12, ਲਘੂ ਧੁਰਾ = 8, $e = \frac{\sqrt{20}}{6}$; ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ = $\frac{16}{3}$

2. F $(0, \pm\sqrt{21})$, V (0, ± 5), ਦੀਰਘ ਧੁਰਾ = 10, ਲਘੂ ਧੁਰਾ = 4, $e = \frac{\sqrt{21}}{5}$; ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ = $\frac{8}{5}$

3. F $(\pm\sqrt{7}, 0)$, V (± 4, 0), ਦੀਰਘ ਧੁਰਾ = 8, ਲਘੂ ਧੁਰਾ = 6, $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ = $\frac{9}{2}$

4. F $(0, \pm\sqrt{75})$, V (0,± 10), ਦੀਰਘ ਧੁਰਾ = 20, ਲਘੂ ਧੁਰਾ = 10, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ = 5

5. F $(\pm\sqrt{13}, 0)$, V (± 7, 0), ਦੀਰਘ ਧੁਰਾ =14 , ਲਘੂ ਧੁਰਾ = 12, $e = \frac{\sqrt{13}}{7}$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ = $\frac{72}{7}$

6. F $(0, \pm 10\sqrt{3})$, V (0,± 20), ਦੀਰਘ ਧੁਰਾ =40 , ਲਘੂ ਧੁਰਾ = 20, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ = 10

7. F $(0, \pm 4\sqrt{2})$, V (0,± 6), ਦੀਰਘ ਧੁਰਾ =12 , ਲਘੂ ਧੁਰਾ = 4, $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ = $\frac{4}{3}$

8. F $\left(0, \pm\sqrt{15}\right)$, V (0,± 4), ਦੀਰਘ ਧੁਰਾ = 8 , ਲਘੂ ਧੁਰਾ = 2, $e = \frac{\sqrt{15}}{4}$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ = $\frac{1}{2}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

9. F $(\pm\sqrt{5},0)$, V $(\pm 3, 0)$, ਦੀਰਘ ਧੁਰਾ = 6 , ਲਘੂ ਧੁਰਾ = 4, $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ $= \frac{8}{3}$

10. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ **11.** $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{169}=1$ **12.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$

13. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ **14.** $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{5}=1$ **15.** $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$

16. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$ **17.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ **18.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

19. $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{40}=1$ **20.** $x^2 + 4y^2 = 52$ ਜਾਂ $\frac{x^2}{52}+\frac{y^2}{13}=1$

ਅਭਿਆਸ 11.4

1. ਫੋਕਸ $(\pm 5, 0)$, ਸਿਖਰਾਂ $(\pm 4, 0)$, $e = \frac{5}{4}$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ $= \frac{9}{2}$

2. ਫੋਕਸ (0 ± 6), ਸਿਖਰਾਂ $(0, \pm 3)$, $e = 2$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ = 18

3. ਫੋਕਸ $(0, \pm\sqrt{13})$, ਸਿਖਰਾਂ $(0, \pm 2)$, $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ $= 9$

4. ਫੋਕਸ $(\pm 10, 0)$, ਸਿਖਰਾਂ $(\pm 6, 0)$, $e = \frac{5}{3}$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ $= \frac{64}{3}$

5. ਫੋਕਸ $(0,\pm\frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{5}})$, ਸਿਖਰਾਂ $(0,\pm\frac{6}{\sqrt{5}})$, $e = \frac{\sqrt{14}}{3}$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ $= \frac{4\sqrt{5}}{3}$

6. ਫੋਕਸ $(0, \pm\sqrt{65})$, ਸਿਖਰਾਂ $(0, \pm 4)$, $e = \frac{\sqrt{65}}{4}$, ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ $= \frac{49}{2}$

7. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ **8.** $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{39}=1$ **9.** $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$

10. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ **11.** $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{144}=1$ **12.** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{20}=1$

13. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ **14.** $\frac{x^2}{49}-\frac{9y^2}{343}=1$ **15.** $\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{5}=1$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਧਿਆਇ 11 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਫੋਕਸ ਦਿੱਤੇ ਵਿਆਸ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਹੈ।

2. 2.23 ਮੀ. (ਲਗਭਗ) 3. 9.11 ਮੀ. (ਲਗਭਗ) 4. 1.56 ਮੀ. (ਲਗਭਗ) 5. $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{9}=1$

6. 18 ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ 7. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 8. $8\sqrt{3}a$

ਅਭਿਆਸ 12.1

1. y ਅਤੇ z ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹਨ। 2. y - ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ।

3. I, IV, VIII, V, VI, II, III, VII

4. (i) XY - ਤਲ (ii) $(x, y, 0)$ (iii) ਅੱਠ

ਅਭਿਆਸ 12.2

1. (i) $2\sqrt{5}$ (ii) $\sqrt{43}$ (iii) $2\sqrt{26}$ (iv) $2\sqrt{5}$

4. $x - 2z = 0$ 5. $9x^2 + 25y^2 + 25z^2 - 225 = 0$

ਅਭਿਆਸ 12.3

1. (i) $\left(\frac{-4}{5},\frac{1}{5},\frac{27}{5}\right)$ (ii) $(-8,17,3)$ 2. 1 : 2

3. 2 : 3 5. (6, – 4, – 2), (8, – 10, 2)

ਅਧਿਆਇ 12 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. (1, – 2, 8) 2. $7, \sqrt{34}, 7$ 3. $a = -2,\ b = -\frac{16}{3},\ c = 2$

4. (0, 2, 0) ਅਤੇ (0, – 6, 0) 5. (4, – 2, 6)

6. $x^2+y^2+z^2-2x-7y+2z=\frac{k^2-109}{2}$

ਅਭਿਆਸ 13.1

1. 6 2. $\left(\pi-\frac{22}{7}\right)$ 3. π 4. $\frac{19}{2}$

5. $-\frac{1}{2}$ 6. 5 7. $\frac{11}{4}$ 8. $\frac{108}{7}$

9. b 10. 2 11. 1 12. $-\frac{1}{4}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

13. $\frac{a}{b}$ **14.** $\frac{a}{b}$ **15.** $\frac{1}{\pi}$ **16.** $\frac{1}{\pi}$

17. 4 **18.** $\frac{a+1}{b}$ **19.** 0 **20.** 1

21. 0 **22.** 2 **23.** 3, 6

24. $x = 1$ ਤੇ ਸੀਮਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ।

25. $x = 0$ ਤੇ ਸੀਮਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ। **26.** $x = 0$ ਤੇ ਸੀਮਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ।

27. 0 **28.** $a=0, b=4$

29. $\lim_{x\to a_1} f(x)=0$ ਅਤੇ $\lim_{x\to a} f(x) = (a-a_1)(a-a_2)\ldots(a-a_n)$

30. ਸਾਰੇ $a \neq 0$ ਲਈ $\lim_{x\to a} f(x)$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ। **31.** 2

32. $\lim_{x\to 0} f(x)$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਲਈ $m = n$ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। m ਅਤੇ n ਦੀ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਮੁੱਲ ਲਈ $\lim_{x\to 1} f(x)$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 13.2

1. 20 **2.** 99 **3.** 1

4. (i) $3x^2$ (ii) $2x - 3$ (iii) $\frac{-2}{x^3}$ (iv) $\frac{-2}{(x-1)^2}$

6. $nx^{n-1} + a(n-1)x^{n-2} + a^2(n-2)x^{n-3} + \ldots + a^{n-1}$

7. (i) $2x-a-b$ (ii) $4ax\left(ax^2+b\right)$ (iii) $\frac{a-b}{(x-b)^2}$

8. $\frac{nx^n - anx^{n-1} - x^n + a^n}{(x-a)^2}$

9. (i) 2 (ii) $20x^3 - 15x^2 + 6x - 4$ (iii) $\frac{-3}{x^4}(5+2x)$ (iv) $15x^4 + \frac{24}{x^5}$

(v) $\frac{-12}{x^5} + \frac{36}{x^{10}}$ (vi) $\frac{-2}{(x+1)^2} - \frac{x(3x-2)}{(3x-1)^2}$

10. $-\sin x$

11. (i) $\cos 2x$ (ii) $\sec x \tan x$

(iii) $5\sec x \tan x - 4\sin x$ (iv) $-\operatorname{cosec} x \cot x$

(v) $-3\operatorname{cosec}^2 x - 5 \operatorname{cosec} x \cot x$ (vi) $5\cos x + 6\sin x$

(vii) $2\sec^2 x - 7\sec x \tan x$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਧਿਆਇ 13 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. (i) – 1 (ii) $\frac{1}{x^2}$ (iii) cos $(x + 1)$ (iv) $-\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$ **2.** 1

3. $\frac{-qr}{x^2}+ps$ **4.** $2c\,(ax + b)\,(cx + d) + a\,(cx + d)^2$

5. $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ **6.** $\frac{-2}{(x-1)^2},\ x\neq 0,1$ **7.** $\frac{-(2ax+b)}{\left(ax^2+bx+c\right)^2}$

8. $\frac{-apx^2-2bpx+ar-bq}{\left(px^2+qx+r\right)^2}$ **9.** $\frac{apx^2+2bpx+bq-ar}{(ax+b)^2}$ **10.** $\frac{-4a}{x^5}+\frac{2b}{x^3}-\sin x$

11. $\frac{2}{\sqrt{x}}$ **12.** $na(ax+b)^{n-1}$

13. $(ax+b)^{n-1}(cx+d)^{m-1}\left[mc(ax+b)+na(cx+d)\right]$ **14.** $\cos\,(x + a)$

15. $-\operatorname{cosec}^3 x - \operatorname{cosec} x \cot^2 x$ **16.** $\frac{-1}{1+\sin x}$

17. $\frac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$ **18.** $\frac{2\sec x\tan x}{(\sec x+1)^2}$ **19.** $n\sin^{n-1}x\cos x$

20. $\frac{bc\cos x+ad\sin x+bd}{(c+d\cos x)^2}$ **21.** $\frac{\cos a}{\cos^2 x}$

22. $x^3(5x\cos x+3x\sin x+20\sin x-12\cos x)$ **23.** $-x^2\sin x-\sin x+2x\cos x$

24. $-q\sin x\left(ax^2+\sin x\right)+(p+q\cos x)(2ax+\cos x)$

25. $-\tan^2 x(x+\cos x)+(x-\tan x)(1-\sin x)$

26. $\frac{35+15x\cos x+28\cos x+28x\sin x-15\sin x}{(3x+7\cos x)^2}$

27. $\frac{x\cos\frac{\pi}{4}(2\sin x-x\cos x)}{\sin^2 x}$ **28.** $\frac{1+\tan x-x\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$

29. $(x+\sec x)\left(1-\sec^2 x\right)+(x-\tan x).(1+\sec x\tan x)$ **30.** $\frac{\sin x-n\,x\cos x}{\sin^{n+1}x}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਭਿਆਸ 14.1

1. (i) ਇਹ ਵਾਕ ਹਮੇਸ਼ਾ ਝੂਠ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਕਿਸੇ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 31 ਦਿਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ।

(ii) ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਕੁਝ ਲੋਕਾਂ ਲਈ ਗਣਿਤ ਸਰਲ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕੁਝ ਹੋਰ ਲੋਕਾਂ ਲਈ ਔਖਾ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(iii) ਇਹ ਵਾਕ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਸੱਚ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਜੋੜਫਲ 12 ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ 10 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ।

(iv) ਇਹ ਵਾਕ ਕਦੇ ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਕਦੇ ਝੂਠ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ 2 ਦਾ ਵਰਗ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ 3 ਦਾ ਵਰਗ ਇਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(v) ਇਹ ਵਾਕ ਕਦੇ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕਦੇ ਝੂਠ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਵਰਗ ਅਤੇ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਭੁਜਾਵਾਂ ਸਮਾਨ ਲੰਬਾਈ ਦੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ ਆਇਤ ਅਤੇ ਸਮਲੰਬ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਸਮਾਨ ਲੰਬਾਈ ਦੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(vi) ਇਹ ਇੱਕ ਆਦੇਸ਼ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(vii) ਇਹ ਵਾਕ ਝੂਠ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਗੁਣਨਫਲ (-8) ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ।

(viii) ਇਹ ਵਾਕ ਹਮੇਸ਼ਾ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ।

(ix) ਦਿੱਤੇ ਸੰਬੰਧ ਤੋਂ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਦਿਨ ਦਾ ਉਲੇਖ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(x) ਇਹ ਇੱਕ ਸੱਚ ਕਥਨ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ $a + i \times 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

2. ਤਿੰਨ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ :

(i) ਇਸ ਕਮਰੇ ਵਿੱਚ ਹਾਜ਼ਰ ਵਿਅਕਤੀ ਦਲੇਰ ਹੈ। ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਸੰਬੰਧ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਇੱਥੇ ਕਿਸ ਕਮਰੇ ਬਾਰੇ ਕਿਹਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦਲੇਰ ਸ਼ਬਦ ਵੀ ਸਪੱਸ਼ਟ ਰੂਪ ਤੋਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) ਉਹ ਇੱਕ ਇੰਜੀਨੀਅਰਿੰਗ ਦੀ ਵਿਦਿਆਰਥਣ ਹੈ। ਇਹ ਵੀ ਇੱਕ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਕਿਹੜੀ ਹੈ।

(iii) "$\cos^2\theta$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹਮੇਸ਼ਾਂ $1/2$ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ"। ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਪਤਾ ਨਾ ਹੋਵੇ ਕਿ θ ਕੀ ਹੈ ਅਸੀਂ ਇਹ ਨਹੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਕਿ ਵਾਕ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾ ਨਹੀਂ।

ਅਭਿਆਸ 14.2

1. (i) ਚੇਨੱਈ ਤਮਿਲਨਾਡੂ ਦੀ ਰਾਜਧਾਨੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਸਮਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

(iii) ਸਾਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਬਾਹੂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹਨ।

(iv) ਸੰਖਿਆ 2 ਸੰਖਿਆ 7 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(v) ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।

2. (i) ਕਥਨ "ਸੰਖਿਆ x ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।" ਪਹਿਲਾ ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਖੇਪਨ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਦੂਜੇ ਕਥਨ ਦੇ ਸਮਤੁੱਲ ਹੈ। ਇਹ ਇਸ ਕਾਰਨ ਤੋਂ ਕਿ ਜਦੋਂ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ ਅਪਰਿਮੇਯ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਪਰਿਮੇਯ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਦੇ ਨਿਖੇਪਨ ਹਨ।

(ii) ਕਥਨ "x ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।" ਪਹਿਲੇ ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਖੇਪਨ ਹੈ, ਜਿਹੜਾ ਦੂਜੇ ਕਥਨ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦੋਵੇਂ ਕਥਨ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਦੇ ਨਿਖੇਪਨ ਹਨ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

3. (i) ਸੰਖਿਆ 3 ਅਭਾਜ ਹੈ; ਸੰਖਿਆ 3 ਟਾਂਕ ਹੈ (ਸੱਚ)।

(ii) ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅੰਕ ਧਨ ਹਨ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਰਿਣ ਹਨ (ਝੂਠ)।

(iii) ਸੰਖਿਆ 100 ਸੰਖਿਆ 3 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ, ਸੰਖਿਆ 100 ਸੰਖਿਆ 11 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ ਅਤੇ ਸੰਖਿਆ 100 ਸੰਖਿਆ 5 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੈ (ਝੂਠ)।

ਅਭਿਆਸ 14.3

1. (i) "ਅਤੇ"। ਘਟਕ ਕਥਨ :

ਸਾਰੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸਮਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(ii) "ਜਾਂ"। ਘਟਕ ਕਥਨ :

ਕਿਸੇ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ ਧਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਕਿਸੇ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ ਰਿਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iii) "ਅਤੇ"। ਘਟਕ ਕਥਨ :

ਰੇਤ ਧੁੱਪ ਵਿੱਚ ਜਲਦੀ ਗਰਮ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਰੇਤ ਰਾਤ ਵਿੱਚ ਜਲਦੀ ਠੰਡੀ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(iv) "ਅਤੇ"। ਘਟਕ ਕਥਨ :

$x = 2$ ਸਮੀਕਰਣ $3x^2 - x - 10 = 0$ ਦਾ ਮੂਲ ਹੈ।

$x = 3$ ਸਮੀਕਰਣ $3x^2 - x - 10 = 0$ ਦਾ ਮੂਲ ਹੈ।

2. (i) "ਇੱਕ ਇਹੋ-ਜਿਹੇ ਦਾ ਹੋਂਦ ਹੈ"। ਨਿਖੇਧਨ

ਇੱਕ ਇਹੋ-ਜਿਹੀ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਆਪਣੇ ਵਰਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

(ii) "ਹਰੇਕ ਲਈ"। ਨਿਖੇਧਨ

ਇੱਕ ਇਹੋ-ਜਿਹੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ ਕੀ x, $x + 1$ ਤੋਂ ਘੱਟ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iii) "ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਹੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।" ਨਿਖੇਧਨ

ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਰਾਜ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਰਾਜਧਾਨੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

3. ਨਿਖੇਧਨ ਨਹੀਂ ਹੈ। (i) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਖੇਧਨ : "x ਅਤੇ y ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ, ਕਿ $x + y \neq y + x$"। ਜਿਹੜਾ (ii) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਤੋਂ ਵੱਖ ਹੈ।

4. (i) ਨਿਵੇਕਲਾ (ii) ਸੰਮਿਲਿਤ (iii) ਨਿਵੇਕਲਾ

ਅਭਿਆਸ 14.4

1. (i) ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਟਾਂਕ ਹੈ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਉਸਦਾ ਵਰਗ ਵੀ ਟਾਂਕ ਹੈ।

(ii) ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਟਾਂਕ ਹੈ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ ਉਸਦਾ ਵਰਗ ਟਾਂਕ ਹੈ।

(iii) ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਟਾਂਕ ਹੋਣ ਲਈ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਉਸਦਾ ਵਰਗ ਟਾਂਕ ਹੋਵੇ।

(iv) ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਰਗ ਦੇ ਟਾਂਕ ਹੋਣ ਲਈ ਇਹ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ ਕਿ ਸੰਖਿਆ ਟਾਂਕ ਹੈ।

(v) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ ਟਾਂਕ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਟਾਂਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

2. (i) ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ : ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ x ਟਾਂਕ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਤਾਂ x ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਲਟ : ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਟਾਂਕ ਹੈ, ਤਾਂ x ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

(ii) ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ : ਜੇਕਰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਤੱਲ ਵਿੱਚ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਉਲਟ : ਜੇਕਰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਤੱਲ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।

(iii) ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ : ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਵਸਤੂ ਘੱਟ ਤਾਪਮਾਨ ਤੇ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਹ ਵਸਤੂ ਠੰਡੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਲਟ : ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਵਸਤੂ ਘੱਟ ਤਾਪਮਾਨ ਤੇ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਹ ਵਸਤੂ ਠੰਡੀ ਹੈ।

(iv) ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ : ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਨਿਗਮਨਾਤਮਕ ਵਿਵੇਚਨ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਜਿਆਮਿਤੀ ਵਿਸ਼ੇ ਨੂੰ ਸਮਝ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਉਲਟ : ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਪਤਾ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਨਿਗਮਨਾਤਮਕ ਵਿਵੇਚਨ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਜਿਆਮਿਤੀ ਵਿਸ਼ੇ ਨੂੰ ਸਮਝ ਨਹੀਂ ਸਕਦੇ ਹੋ।

(v) ਇਸ ਕਥਨ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ : "ਜੇਕਰ x ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ x ਸੰਖਿਆ 4 ਤੋਂ ਭਾਜ ਹੈ।".

ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ : "ਜੇਕਰ x ਸੰਖਿਆ 4 ਤੋਂ ਭਾਜ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਤਾਂ x ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।"

ਉਲਟ : "ਜੇਕਰ x ਸੰਖਿਆ 4 ਤੋਂ ਭਾਜ ਹੈ, ਤਾਂ x ਸੰਖਿਆ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।"

3. (i) ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਨੌਕਰੀ ਮਿਲ ਗਈ ਹੈ, ਤਾਂ ਤੁਹਾਡੀ ਯੋਗਤਾ ਚੰਗੀ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ ਕੇਲੇ ਦਾ ਰੁੱਖ ਇੱਕ ਮਹੀਨੇ ਤੱਕ ਗਰਮ ਬਣਿਆ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਕੇਲੇ ਦੇ ਰੁੱਖ ਵਿੱਚ ਫੁੱਲ ਲੱਗਣਗੇ।

(iii) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ-ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਸਮਦੋਭਾਜ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ।

(iv) ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿਚ A^+ ਗਰੇਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹੋ, ਤਾਂ ਤੁਸੀ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੱਲ ਕਰ ਲੈਂਦੇ ਹੋ।

4. **a** (i) ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ (ii) ਉਲਟ

b (i) ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ (ii) ਉਲਟ

ਅਭਿਆਸ 14.5

5. (i) ਝੂਠ। ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਜੀਵਾ ਚੱਕਰ ਨੂੰ ਦੋ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ।

(ii) ਝੂਠ। ਇਸਨੂੰ ਇੱਕ ਪ੍ਰਤਿਉਦਾਹਰਣ ਰਾਹੀਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਇਹੋ-ਜਿਹੀ ਜੀਵਾ ਜਿਹੜੀ ਵਿਆਸ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇੱਕ ਪ੍ਰਤਿਉਦਾਹਰਣ ਹੈ।

(iii) ਸੱਚ। ਜੇਕਰ ਇਲਿਪਸ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ $a = b$ ਰੱਖਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਹ ਚੱਕਰ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(iv) ਸੱਚ। ਅਸਮਿਕਾ ਦੇ ਨਿਯਮ ਰਾਹੀਂ।

(v) ਝੂਠ। ਕਿਉਂਕਿ 11 ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $\sqrt{11}$ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ 14 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. (i) ਇੱਕ ਇਹੋ-ਜਿਹੀ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ x ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ $x-1$ ਧਨਾਤਮਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) ਇੱਕ ਇਹੋ-ਜਿਹੀ ਬਿੱਲੀ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਖਰੋਂਚਦੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iii) ਇੱਕ ਇਹੋ-ਜਿਹੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ ਨਾ ਤਾਂ $x > 1$ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ $x < 1$ ਹੈ।

(iv) ਕਿਸੇ ਇਹੋ-ਜਿਹੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ $0 < x < 1$ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

2. (i) ਕਥਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, "ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਧਨ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਅਭਾਜ ਹੈ, ਤਾਂ 1 ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਇਸਦਾ ਕੋਈ ਹੋਰ ਭਾਜ ਨਹੀਂ ਹੈ।"

ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ : ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਧਨ ਪੂਰਨ ਅੰਕ 1 ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਹੋਰ ਭਾਜਕ ਵੀ ਹਨ, ਤਾਂ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, "ਜੇਕਰ ਦਿਨ ਵਿਚ ਧੁੱਪ ਹੈ ਤਾਂ ਮੈਂ ਸਮੁੰਦਰ ਤਟ ਤੇ ਜਾਂਦਾ ਹਾਂ।"

ਉਲਟ : ਜੇਕਰ ਮੈਂ ਸਮੁੰਦਰ ਤਟ ਤੇ ਨਹੀਂ ਜਾਂਦਾ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਦਿਨ ਵਿੱਚ ਧੁੱਪ ਹੈ।

ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ : ਜੇਕਰ ਮੈਂ ਸਮੁੰਦਰ ਤਟ ਤੇ ਜਾਂਦਾ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਦਿਨ ਵਿੱਚ ਧੁੱਪ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iii) ਉਲਟ : ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਪਿਆਸ ਲੱਗੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਬਾਹਰ ਗਰਮੀ ਹੈ।

ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ : ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਪਿਆਸ ਨਹੀਂ ਲੱਗੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਬਾਹਰ ਗਰਮੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

3. (i) ਜੇਕਰ ਸਰਵਰ ਤੇ ਲਾਗ ਆਨ ਹੈ, ਤਾਂ ਪਾਸਵਰਡ ਪਤਾ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ ਮੀਂਹ ਪੈਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਟ੍ਰੈਫ਼ਿਕ ਦੀ ਆਵਾਜਾਈ ਵਿਚ ਰੁਕਾਵਟ ਆਉਂਦੀ ਹੈ।

(iii) ਜੇਕਰ ਤੁਸੀ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਸ਼ੁਲਕ ਦਾ ਭੁਗਤਾਨ ਕਰਦੇ ਹੋ, ਤਾਂ ਤੁਸੀ ਵੈਬਸਾਈਟ ਵਿਚ ਦਾਖਲਾ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹੋ।

4. (i) ਤੁਸੀਂ ਟੈਲੀਵੀਜ਼ਨ ਵੇਖਦੇ ਹੋ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਡਾ ਮਨ ਮੁਕਤ ਹੈ।

(ii) ਤੁਸੀ A+ ਗਰੇਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹੋ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਸਾਰਾ ਘਰੇਲੂ ਕੰਮ ਠੀਕ ਢੰਗ ਨਾਲ ਕਰਦੇ ਹੋ।

(iii) ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਸਮਾਨ ਕੋਣੀ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ ਉਹ ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ।

5. "ਅਤੇ" ਤੋਂ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ : 25 ਸੰਖਿਆ 5 ਅਤੇ 8 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ।

ਇਹ ਝੂਠ ਹੈ।

"ਜਾਂ" ਤੋਂ ਦਿੱਤਾ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਕਥਨ : 25 ਸੰਖਿਆ 5 ਜਾਂ 8 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ।

ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ।

7. ਅਭਿਆਸ 14.4 ਦਾ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸੰਖਿਆ 1 ਵੇਖੋ।

ਅਭਿਆਸ 15.1

1. 3 **2.** 8.4 **3.** 2.33 **4.** 7 **5.** 6.32
6. 16 **7.** 3.23 **8.** 5.1 **9.** 157.92 **10.** 11.28
11. 10.34 **12.** 7.35

ਅਭਿਆਸ 15.2

1. 9, 9.25 **2.** $\frac{n+1}{2}, \frac{n^2-1}{12}$ **3.** 16.5, 74.25 **4.** 19, 43.4
5. 100, 29.09 **6.** 64, 1.69 **7.** 107, 2276 **8.** 27, 132
9. 93, 105.52, 10.27
10. 5.55, 43.5

ਅਭਿਆਸ 15.3

1. B **2.** Y **3.** (i) B (ii) B
4. A **5.** ਭਾਰ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਧਿਆਇ 15 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. 4, 8 **2.** 6, 8 **3.** 24, 12

5. (i) 10.1, 1.99 (ii) 10.2, 1.98

6. ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਰਸਾਇਣ ਸ਼ਾਸਤਰ ਅਤੇ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਗਣਿਤ **7.** 20, 3.036

ਅਭਿਆਸ 16.1

1. {HHH, HHT, HTH, THH, TTH, HTT, THT, TTT}

2. $\{(x, y) : x, y = 1,2,3,4,5,6\}$

ਜਾਂ {(1,1), (1,2), (1,3), ..., (1,6), (2,1), (2,2), ..., (2,6), ..., (6, 1), (6, 2), ..., (6,6)}

3. {HHHH, HHHT, HHTH, HTHH, THHH, HHTT, HTHT, HTTH, THHT, THTH, TTHH, HTTT, THTT, TTHT, TTTH, TTTT}

4. {H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6}

5. {H1, H2, H3, H4, H5, H6, T}

6. $\{XB_1, XB_2, XG_1, XG_2, YB_3, YG_3, YG_4, YG_5\}$

7. {R1, R2, R3, R4, R5, R6, W1, W2, W3, W4, W5, W6, B1, B2, B3, B4, B5, B6}

8. (i) {BB, BG, GB, GG} (ii) {0, 1, 2}

9. {RW, WR, WW}

10. {HH, HT, T1, T2, T3, T4, T5, T6}

11. {DDD, DDN, DND, NDD, DNN, NDN, NND, NNN}

12. {T, H1, H3, H5, H21, H22, H23, H24, H25, H26, H41, H42, H43, H44, H45, H46, H61, H62, H63, H64, H65, H66}

13. {(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3)}

14. {1HH, 1HT, 1TH, 1TT, 2H, 2T, 3HH, 3HT, 3TH, 3TT, 4H, 4T, 5HH, 5HT, 5TH, 5TT, 6H, 6T}

15. $\{TR_1, TR_2, TB_1, TB_2, TB_3, H1, H2, H3, H4, H5, H6\}$

16. {6, (1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (1,1,6), (1,2,6), ..., (1,5,6), (2,1,6), (2,2,6), ..., (2,5,6), ..., (5,1,6), (5,2,6), ... }

ਅਭਿਆਸ 16.2

1. ਨਹੀਂ

2. (i) {1, 2, 3, 4, 5, 6} (ii) ϕ (iii) {3, 6} (iv) {1, 2, 3} (v) {6}

(vi) {3, 4, 5, 6}, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \phi$, $B \cup C = \{3, 6\}$, $E \cap F = \{6\}$, $D \cap E = \phi$,

$A - C = \{1,2,4,5\}$, $D - E = \{1,2,3\}$, $E \cap F' = \phi$, $F' = \{1, 2\}$

3. A = {(3,6), (4,5), (5, 4), (6,3), (4,6), (5,5), (6,4), (5,6), (6,5), (6,6)}

B = {(1,2), (2,2), (3, 2), (4,2), (5,2), (6,2), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)}

C ={(3,6), (6,3), (5, 4), (4,5), (6,6)}

A ਅਤੇ B, B ਅਤੇ C ਪਰਸਪਰ ਨਿਵੇਕਲੇ ਹਨ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

4. (i) A ਅਤੇ B; A ਅਤੇ C; B ਅਤੇ C; C ਅਤੇ D (ii) A ਅਤੇ C (iii) B ਅਤੇ D

5. (i) "ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਦੋ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ", ਅਤੇ "ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਦੋ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ"

(ii) "ਕੋਈ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਾ ਹੋਣਾ", "ਠੀਕ ਇੱਕ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ" ਅਤੇ "ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਦੋ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ"

(iii) "ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ" ਅਤੇ "ਠੀਕ ਦੋ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ"

(iv) "ਠੀਕ ਇੱਕ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ" ਅਤੇ "ਠੀਕ ਦੋ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ"

(v) "ਠੀਕ ਇੱਕ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ" ਅਤੇ "ਠੀਕ ਦੋ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ" ਅਤੇ "ਠੀਕ ਤਿੰਨ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ"

ਟਿੱਪਣੀ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਉੱਤਰ ਵਿੱਚ ਘਟਨਾਵਾਂ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ।

6. A = {(2, 1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

B = {(1, 1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)}

C = {(1, 1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)}

(i) A' = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)} = B

(ii) B' = {(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)} = A

(iii) $A \cup B$ = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,5), (2,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)} = S

(iv) $A \cap B = \phi$

(v) $A - C$ = {(2,4), (2,5), (2,6), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

(vi) $B \cup C$ = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)}

(vii) $B \cap C$ = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (3,1), (3,2)}

(viii) $A \cap B' \cap C'$ = {(2,4), (2,5), (2,6), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

7. (i) ਸੱਚ (ii) ਸੱਚ (iii) ਸੱਚ (iv) ਝੂਠ (v) ਝੂਠ (vi) ਝੂਠ

ਅਭਿਆਸ 16.3

1. (a) ਹਾਂ (b) ਹਾਂ (c) ਨਹੀਂ (d) ਨਹੀਂ (e) ਨਹੀਂ **2.** $\frac{3}{4}$

3. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{1}{6}$ (iv) 0 (v) $\frac{5}{6}$ **4.** (a) 52 (b) $\frac{1}{52}$ (c) (i) $\frac{1}{13}$ (ii) $\frac{1}{2}$

5. (i) $\frac{1}{12}$ (ii) $\frac{1}{12}$ **6.** $\frac{3}{5}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

7. ₹ 4.00 ਲਾਭ, ₹ 1.50 ਲਾਭ, ₹ 1.00 ਹਾਨੀ, ₹ 3.50 ਹਾਨੀ, ₹ 6.00 ਹਾਨੀ

P (₹ 4.00 ਜਿੱਤਣਾ) $= \frac{1}{16}$, P(₹ 1.50 ਜਿੱਤਣਾ) $= \frac{1}{4}$, P (₹ 1.00 ਜਿੱਤਣਾ) $= \frac{3}{8}$

P (₹ 3.50 ਹਾਨੀ) $= \frac{1}{4}$, P (₹ 6.00 ਹਾਨੀ) $= \frac{1}{16}$

8. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{3}{8}$ (iii) $\frac{1}{2}$ (iv) $\frac{7}{8}$ (v) $\frac{1}{8}$ (vi) $\frac{1}{8}$ (vii) $\frac{3}{8}$ (viii) $\frac{1}{8}$ (ix) $\frac{7}{8}$

9. $\frac{9}{11}$ **10.** (i) $\frac{6}{13}$ (ii) $\frac{7}{13}$ **11.** $\frac{1}{38760}$

12. (i) ਨਹੀਂ, ਕਿਉਂਕਿ P(A∩B), P(A) ਅਤੇ P(B) ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਜਾਂ ਉਸਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। (ii) ਹਾਂ

13. (i) $\frac{7}{15}$ (ii) 0.5 (iii) 0.15 **14.** $\frac{4}{5}$

15. (i) $\frac{5}{8}$ (ii) $\frac{3}{8}$ **16.** ਨਹੀਂ **17.** (i) 0.58 (ii) 0.52 (iii) 0.74

18. 0.6 **19.** 0.55 **20.** 0.65

21. (i) $\frac{19}{30}$ (ii) $\frac{11}{30}$ (iii) $\frac{2}{15}$

ਅਧਿਆਇ 16 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. (i) $\frac{^{20}C_5}{^{60}C_5}$ (ii) $1-\frac{^{30}C_5}{^{60}C_5}$ **2.** $\frac{^{13}C_3 \cdot {}^{13}C_1}{^{52}C_4}$

3. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{5}{6}$ **4.** (a) $\frac{999}{1000}$ (b) $\frac{^{9990}C_2}{^{10000}C_2}$ (c) $\frac{^{9990}C_{10}}{^{10000}C_{10}}$

5. (a) $\frac{17}{33}$ (b) $\frac{16}{33}$ **6.** $\frac{2}{3}$

7. (i) 0.88 (ii) 0.12 (iii) 0.19 (iv) 0.34 **8.** $\frac{4}{5}$

9. (i) $\frac{33}{83}$ (ii) $\frac{3}{8}$ **10.** $\frac{1}{5040}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

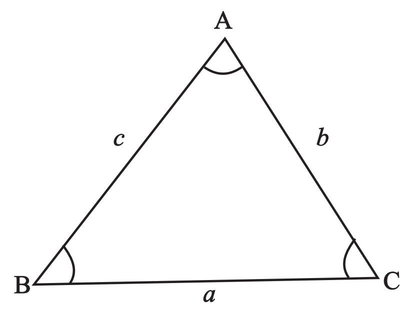
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਪੂਰਕ ਪਾਠ ਸਮੱਗਰੀ

ਅਧਿਆਇ 3

3.6 ਸਾਈਨ (sine) ਅਤੇ ਕੋਸਾਈਨ (cosine) ਸੂਤਰਾਂ ਦੇ ਸਬੂਤ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਸਰਲ ਵਰਤੋਂ

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ABC ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ। ਕੋਣ A ਤੋਂ ਸਾਡਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਭੁਜਾਵਾਂ AB ਅਤੇ AC ਤੋਂ ਬਣਿਆ ਕੋਣ, ਜੋ 0° ਅਤੇ 180° ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸਥਿਤ ਹੈ। ਕੋਣਾਂ B ਅਤੇ C ਨੂੰ ਵੀ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸਿਖਰ C, A ਅਤੇ B ਦੀਆਂ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ *c*, *a* ਅਤੇ *b* ਤੋਂ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ। (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 3.15)

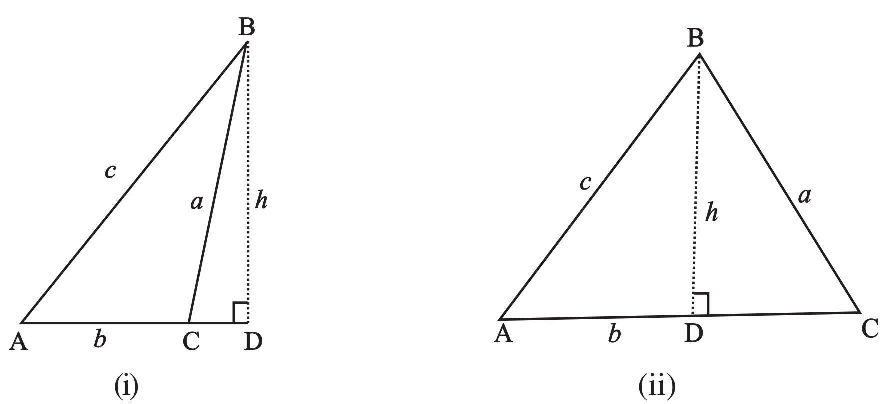


ਚਿੱਤਰ 3.15

ਪ੍ਰਮੇਯ 1 : (Sine ਸੂਤਰ) ਕਿਸੇ ਵੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਵਿੱਚ, ਭੁਜਾਵਾਂ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਸਾਈਨਾਂ ਦੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਭਾਵ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਵਿੱਚ

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 3.16(i) ਅਤੇ (ii) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਦੋਹਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ΔABC ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.16

ਸਿਖਰ B ਤੋਂ ਸਿਖਰ ਲੰਬ *h* ਖਿੱਚਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਜਿਹੜਾ ਭੁਜਾ AC ਦੇ ਬਿੰਦੂ D ਤੇ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। [(i) ਵਿੱਚ AC ਨੂੰ ਸਿਖਰ ਲੰਬ ਤੋਂ ਮਿਲਣ ਲਈ ਵਧਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।] ਚਿੱਤਰ 3.16(i) ਵਿੱਚ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABD ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$\sin A = \frac{h}{c}, \text{ ਭਾਵ } h = c \sin A \qquad (1)$$

ਅਤੇ $$\sin (180^\circ - C) = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \sin C \qquad (2)$$

(1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :–

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

$c \sin A = a \sin C$, ਭਾਵ $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin C}{c}$ (3)

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \qquad (4)$$

(3) ਅਤੇ (4) ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :—

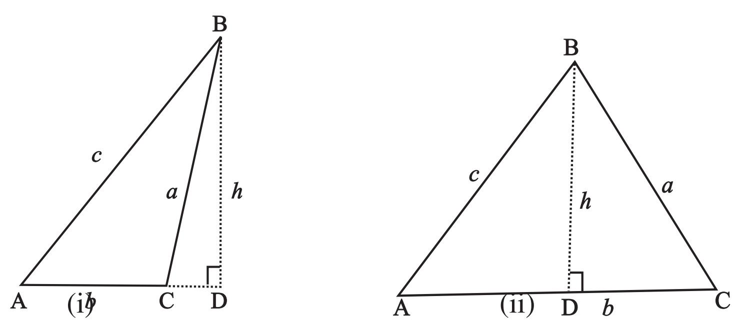
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

ਚਿੱਤਰ 3.16(ii) ਦੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਅਤੇ (4) ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 2 : (ਕੋਸਾਈਨ ਸੂਤਰ) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ A, B ਅਤੇ C ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਕੋਣ ਹਨ ਅਤੇ a, b ਅਤੇ c ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਕੋਣਾਂ A, B ਅਤੇ C ਦੀਆਂ ਸਾਹਮਣੇ ਵਾਲੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਹਨ ਤਾਂ

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ABC ਚਿੱਤਰ 3.17(i) ਅਤੇ (ii) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.17

ਚਿੱਤਰ 3.17 (ii) ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :—

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 = BD^2 + (AC - AD)^2$$
$$= BD^2 + AD^2 + AC^2 - 2AC.AD$$
$$= AB^2 + AC^2 - 2AC\ AB\cos A$$

ਜਾਂ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

ਅਤੇ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ, ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 3.17(i) ਲਈ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ C ਅਧਿਕ ਕੋਣ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਜਦੋਂ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕੋਸਾਈਨ ਸੂਤਰਾਂ ਦੇ ਸਰਲ ਸੂਤਰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਜਾ ਰਹੇ ਹਨ :

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

ਉਦਾਹਰਣ 25 : ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਵਿੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ :

$$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

$$\tan\frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$$

$$\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$

ਹੱਲ : ਸਾਈਨ ਸੂਤਰ ਤੋਂ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :—

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k \text{ (ਮੰਨ ਲਓ)}$$

ਇਸ ਲਈ,
$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{k(\sin B-\sin C)}{k(\sin B+\sin C)}$$

$$= \frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$= \cot\frac{(B+C)}{2}\tan\frac{(B-C)}{2}$$

$$= \cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

$$= \frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\cot\frac{A}{2}}$$

ਇਸ ਲਈ,
$$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਅਸੀਂ ਹੋਰ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਨੇਪੀਅਰ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ (Napier's Analogies) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਉਦਾਹਰਣ 26 : ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਵਿੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ,

$$a \sin (B - C) + b \sin (C - A) + c \sin (A - B) = 0 \text{ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।}$$

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$a \sin (B - C) = a [\sin B \cos C - \cos B \sin C] \qquad (1)$$

ਹੁਣ $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c} = k$ (ਮੰਨ ਲਉ)

ਇਸ ਲਈ $\sin A = ak$, $\sin B = bk$, $\sin C = ck$

(1) ਵਿੱਚ, sin B ਅਤੇ sin C ਦੇ ਮੁੱਲ ਰੱਖ ਕੇ ਕੋਸਾਈਨ ਸੂਤਰ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਰਾਹੀਂ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :—

$$a \sin (B - C) = a\left[bk\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) - ck\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}\right)\right]$$

$$= \frac{k}{2}\left(a^2+b^2-c^2-c^2-a^2+b^2\right)$$

$$= k(b^2-c^2)$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $b \sin (C - A) = k (c^2 - a^2)$

ਅਤੇ $c \sin (A - B) = k (a^2 - b^2)$

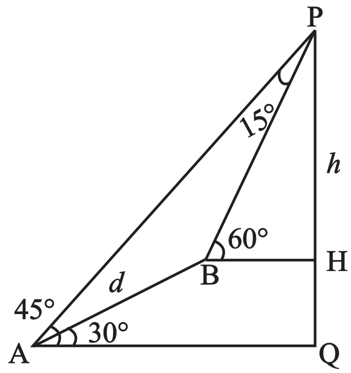
ਇਸ ਲਈ L.H.S. $= k (b^2 - c^2 + c^2 - a^2 + a^2 - b^2)$

$= 0 =$ R.H.S.

ਉਦਾਹਰਣ 27 : ਉਚਾਈ h ਵਾਲੀ ਕਿਸੇ ਖੜਵੀਂ ਮੀਨਾਰ PQ ਦੇ ਸਿਖਰ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ A ਤੋਂ ਉਚਾਣ ਕੋਣ 45° ਹੈ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ B, ਤੋਂ ਉਚਾਣ ਕੋਣ 60° ਹੈ, ਜਿੱਥੇ B ਬਿੰਦੂ A ਤੋਂ ਦੂਰੀ d 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਰੇਖਾ AB ਦੇ ਵੱਲ ਮਾਪਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਜਿਹੜਾ AQ ਦੇ ਨਾਲ 30° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ $d = h(\sqrt{3} - 1)$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 3.18 ਤੋਂ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ :—

$\angle PAQ = 45°$, $\angle BAQ = 30°$, $\angle PBH = 60°$



ਚਿੱਤਰ 3.18

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ $\angle APQ = 45°, \angle BPH = 30°$, ਜਿਸ ਤੋਂ $\angle APB = 15°$

ਦੁਬਾਰਾ $\angle PAB = 15° \Rightarrow \angle ABP = 150°$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਤ੍ਰਿਭੁਜ APQ, ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :—
$AP^2 = h^2 + h^2 = 2h^2$ (ਕਿਉਂ)

ਜਾਂ $AP = \sqrt{2}h$

Δ ABP, ਵਿੱਚ ਸਾਈਨ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :—

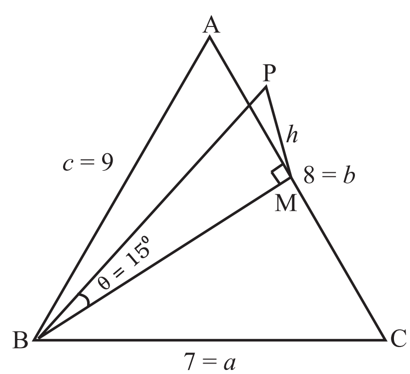
$$\frac{AB}{\sin 15^\circ} = \frac{AP}{\sin 150^\circ} \Rightarrow \frac{d}{\sin 15^\circ} = \frac{\sqrt{2}h}{\sin 150^\circ}$$

ਭਾਵ, $d = \dfrac{\sqrt{2}h \sin 15^\circ}{\sin 30^\circ}$

$= h(\sqrt{3} - 1)$ (ਕਿਉਂ)

ਉਦਾਹਰਣ 28 : ਇੱਕ ਬਿਜਲੀ ਦਾ ਖੰਬਾ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਅਕਾਰ ਦੀ ਭੂਮੀ ABC ਦੀ ਭੁਜਾ AC ਦੇ ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂ M ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ BC=7m, CA=8m ਅਤੇ AB =9m ਹੈ। ਇਹ ਬਿਜਲੀ ਦਾ ਖੰਬਾ ਬਿੰਦੂ B ਤੇ 15° ਦਾ ਕੋਣ ਅੰਤਰਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਬਿਜਲੀ ਦੇ ਖੰਬੇ ਦੀ ਉਚਾਈ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 3.19 ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ : $AB = 9 = c$, $BC = 7\text{ m} = a$ ਅਤੇ
$AC = 8\text{ m} = b$.



ਚਿੱਤਰ 3.19

M ਭੁਜਾ AC ਦਾ ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਜਿਸ 'ਤੇ ਉਚਾਈ h (ਮੰਨ ਲਉ) ਦਾ ਬਿਜਲੀ ਦਾ ਖੰਬਾ ਸਥਿਤ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ, ਇਹ ਵੀ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਬਿਜਲੀ ਦਾ ਖੰਬਾ ਬਿੰਦੂ B ਤੇ ਕੋਣ θ (ਮੰਨ ਲਉ) ਅੰਤਰਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ 15° ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ΔABC ਵਿੱਚ ਕੋਸਾਈਨ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{49 + 64 - 81}{2 \times 7 \times 8} = \frac{2}{7} \qquad (1)$$

ਇਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ, Δ BMC ਵਿੱਚ ਕੋਸਾਈਨ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :—

$$BM^2 = BC^2 + CM^2 - 2\, BC \times CM \cos C$$

ਇੱਥੇ $CM = \frac{1}{2} CA = 4$, ਕਿਉਂਕਿ M ਭੁਜਾ AC ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ (1) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :-

$$BM^2 = 49 + 16 - 2 \times 7 \times 4 \times \frac{2}{7}$$

$$= 49$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਜਾਂ BM = 7

ਇਸ ਲਈ, ΔBMP ਜਿਸ ਦਾ ਬਿੰਦੂ M 'ਤੇ ਕੋਣ ਸਮਕੋਣ ਹੈ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :-

$$\tan\theta = \frac{\text{PM}}{\text{BM}} = \frac{h}{7}$$

ਜਾਂ $\frac{h}{7} = \tan(15°) = 2 - \sqrt{3}$ (ਕਿਉਂ)

ਜਾਂ $h = 7(2-\sqrt{3})\,\text{m}$

ਅਭਿਆਸ 3.5

ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ $a = 18$, $b = 24$ ਅਤੇ $c = 30$ ਹੈ। ਤਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ :—

1. cos A, cos B, cos C (ਉੱਤਰ $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0$)

2. sin A, sin B, sin C (ਉੱਤਰ $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$)

ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਲਈ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ :-

3. $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{\cos\left(\dfrac{\text{A}-\text{B}}{2}\right)}{\sin\dfrac{\text{C}}{2}}$

4. $\dfrac{a-b}{c} = \dfrac{\sin\left(\dfrac{\text{A}-\text{B}}{2}\right)}{\cos\dfrac{\text{C}}{2}}$

5. $\sin\dfrac{\text{B}-\text{C}}{2} = \dfrac{b-c}{a}\cos\dfrac{\text{A}}{2}$

6. $a\,(b \cos \text{C} - c \cos \text{B}) = b^2 - c^2$

7. $a\,(\cos \text{C} - \cos \text{B}) = 2\,(b - c) \cos^2\dfrac{\text{A}}{2}$

8. $\dfrac{\sin(\text{B}-\text{C})}{\sin(\text{B}+\text{C})} = \dfrac{b^2-c^2}{a^2}$

9. $(b+c)\cos\dfrac{\text{B}+\text{C}}{2} = a\cos\dfrac{\text{B}-\text{C}}{2}$

10. $a\cos\text{A} + b\cos\text{B} + c\cos\text{C} = 2a\sin\text{B}\sin\text{C}$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

11. $\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{c}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

12. $(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B+(a^2-b^2)\cot C=0$

13. $\dfrac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\dfrac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\dfrac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=0$

14. ਇੱਕ ਪਹਾੜੀ ਲੇਟਵੀਂ ਰੇਖਾ ਤੋਂ 15° ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਪਹਾੜੀ ਤੇ ਇੱਕ ਦਰੱਖਤ ਖੜਵੀਂ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਿੱਧਾ ਖੜਾ ਹੈ। ਪਹਾੜੀ ਦੀ ਢਾਲ ਵੱਲ 35ਮੀ ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੇ ਭੂਮੀ ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ, ਦਰੱਖਤ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦਾ ਉਚਾਣ ਕੋਣ 60° ਹੈ। ਦਰੱਖਤ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ। (ਉੱਤਰ $35\sqrt{2}m$)

15. ਦੋ ਜਹਾਜ਼ ਇੱਕ ਹੀ ਸਮੇਂ ਤੇ ਕਿਸੇ ਬੰਦਰਗਾਹ ਤੋਂ ਚੱਲਦੇ ਹਨ। ਇੱਕ 24 km/h ਦੀ ਚਾਲ ਤੋਂ N45°E ਵਿੱਚ ਚੱਲਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਜਾ 32 km/h ਦੀ ਚਾਲ ਤੋਂ S75°E ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਚੱਲਦਾ ਹੈ। 3 ਘੰਟੇ ਦੇ ਬਾਅਦ ਦੋਨੋਂ ਜਹਾਜ਼ਾਂ ਦੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ। (ਉੱਤਰ 86.4 ਕਿ.ਮੀ. (ਲੱਗਭਗ))

16. ਦੋ ਦਰੱਖਤ A ਅਤੇ B ਇੱਕ ਨਦੀ ਦੇ ਇੱਕ ਹੀ ਪਾਸ ਖੜ੍ਹੇ ਹਨ। ਨਦੀ ਦੇ ਅੰਦਰ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ C ਤੋਂ ਦਰੱਖਤ A ਅਤੇ B ਦੀਆਂ ਦੂਰੀਆਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 250ਮੀ. ਅਤੇ 300 ਮੀ. ਹਨ। ਜੇਕਰ ਕੋਣ C, 45° ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਤਾਂ ਦਰੱਖਤਾਂ ਦੇ ਵਿਚਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ। ($\sqrt{2}=1.44$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ) (ਉੱਤਰ 215.5 ਮੀ.)

ਅਧਿਆਇ 5

5.7 ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ

ਅਸੀਂ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਪੰਨੇ 108-109 ਤੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਮੂਲਾਂ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਦੋ-ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕਿਸੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਖਾਸ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਰਾਹੀਂ ਇਸਨੂੰ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : $-7-24i$ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ, $x+iy=\sqrt{-7-24i}$ ਹੈ।

ਤਾਂ $(x+iy)^2=-7-24i$

ਜਾਂ $x^2-y^2+2xyi=-7-24i$

ਵਾਸਤਵਿਕ ਅਤੇ ਕਾਲਪਨਿਕ ਭਾਗਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਰੱਖਣ 'ਤੇ, ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :-

$$x^2-y^2=-7 \tag{1}$$

$$2xy=-24$$

ਫ਼ਾਰਮੂਲੇ

$(x^2+y^2)=(x^2-y^2)+(2xy)^2$ ਤੋਂ,

$=49+576$

$=625$

ਇਸ ਲਈ $$x^2+y^2=25 \tag{2}$$

(1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ $x^2=9$ ਅਤੇ $y^2=16$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਜਾਂ $\quad x = \pm 3$ ਅਤੇ $y = \pm 4$

ਕਿਉਂਕਿ ਗੁਣਨਫਲ xy ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ,

$x = 3, y = -4$ ਜਾਂ r, $x = -3, y = 4$

ਇਸ ਲਈ $-7 - 24i$ ਦੇ ਵਰਗਮੂਲ $3 - 4i$ ਅਤੇ $-3 + 4i$ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 5.4

ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਵਰਗਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. $-15 - 8i$ (ਉੱਤਰ $1 - 4i, -1 + 4i$)
2. $-8 - 6i$ (ਉੱਤਰ $1 - 3i, -1 + 3i$)
3. $1 - i$ (ਉੱਤਰ $\left(\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\, i\right)$)
4. $-i$ (ਉੱਤਰ $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\, i\right)$)
5. i (ਉੱਤਰ $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\, i\right)$)
6. $1 + i$ (ਉੱਤਰ $\left(\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\, i\right)$)

ਅਧਿਆਇ 9

9.7 ਅਸੀਮਿਤ G.P. ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਜੋੜ

$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$ ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ G.P. ਇੱਕ ਅਸੀਮਿਤ (infinite) G.P. ਕਹਿਲਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਹੁਣ, ਇੱਕ ਅਸੀਮਿਤ G.P. ਦੇ ਜੋੜ ਦਾ ਸੂਤਰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਆਉ ਹੇਠਾਂ G.P., 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

ਹੇਠਾਂ G.P. ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

$$1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \ldots$$

ਇੱਥੇ $\quad a = 1,\ r = \frac{2}{3}$ ਹੈ। ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ,

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ n ਵੱਡਾ ਹੁੰਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਆਉ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ਦਾ ਕੀ ਵਿਵਹਾਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।

n	1	5	10	20
$\left(\frac{2}{3}\right)^n$	0.6667	0.1316872428	0.01734152992	0.00030072866

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ n ਵੱਡਾ ਹੁੰਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਹੋਰ ਕੋਲ ਹੁੰਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਗਣਿਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਦੋਂ n ਕਾਫ਼ੀ ਵੱਡਾ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ਕਾਫ਼ੀ ਛੋਟਾ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਜਦੋਂ $n \to \infty, \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਨਤੀਜੇ ਵੱਜੋਂ ਅਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਨੰਤ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $S_\infty = 3$ ਹੈ।

ਹੁਣ, ਇੱਕ G.P. $a, ar, ar^2, ...$, ਲਈ ਜੇਕਰ ਸਰਵ ਅਨੁਪਾਤ r ਦਾ ਮੁੱਲ (ਸੰਖਿਆਤਮਕ) 1 ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਹੈ, ਤਾਂ

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਜਦੋਂ $n \to \infty$, $r^n \to 0$ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $|r| < 1$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $S_n \to \frac{a}{1-r}$

ਸੰਕੇਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਮਿਤ ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਨੂੰ S_∞ ਜਾਂ S ਤੋਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਸਾਨੂੰ $S = \frac{a}{1-r}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ,

(i) $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

(ii) $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + ... = \frac{1}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

ਅਭਿਆਸ 9.4

ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ G.P. ਲੜੀਆਂ ਦੇ ਅਸੀਮਿਤ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, ...$ (ਉੱਤਰ 1.5)
2. 6, 1.2, .24, ... (ਉੱਤਰ 7.5)
3. $5, \frac{20}{7}, \frac{80}{49}, ...$ (ਉੱਤਰ $\frac{35}{3}$)
4. $\frac{-3}{4}, \frac{3}{16}, \frac{-3}{64}, ...$ (ਉੱਤਰ $\frac{-3}{5}$)
5. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{8}} ... = 3$ ਹੈ।
6. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $x = 1 + a + a^2 + ...$ ਅਤੇ $y = 1 + b + b^2 + ...$, ਜਿੱਥੇ $|a| < 1$ ਅਤੇ $|b| < 1$ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$1 + ab + a^2b^2 + ... = \frac{xy}{x+y-1}$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਧਿਆਇ 10

10.6 ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਦੋ ਕੱਟਦੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ l_1 ਅਤੇ l_2 ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਹੈ :—

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad (1)$$

ਅਤੇ $$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \qquad (2)$$

ਸਮੀਕਰਣਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ, ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :-

$$A_1x + B_1y + C_1 + k\left(A_2x + B_2y + C_2\right) = 0 \qquad (3)$$

ਜਿੱਥੇ k ਇੱਕ ਅਚੱਲ ਹੈ, ਜਿਸਨੂੰ ਘਟਕ (parameter) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। k ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੁੱਲ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਚਲਾਂ x ਅਤੇ y ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਘਾਤ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਇਹ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ। k ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਇਸ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਇੱਕ ਖਾਸ ਮੈਂਬਰ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। k ਦੇ ਇਸ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਹੋਰ ਸ਼ਰਤਾਂ ਰਾਹੀਂ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 20 : ਉਸ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਹੜਾ y-ਧੁਰਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਅਤੇ $x - 7y + 5 = 0$ ਅਤੇ $3x + y - 7 = 0$ ਦੀ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੇਠ ਰੂਪ ਦੀ ਹੋਵੇਗੀ :-

$$x - 7y + 5 + k\ (3x + y - 7) = 0$$

ਭਾਵ, $$(1 + 3k)\ x + (k - 7)\ y + 5 - 7k = 0 \qquad (1)$$

ਜੇਕਰ ਇਹ ਰੇਖਾ y – ਧੁਰਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ, ਤਾਂ y ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇਗਾ।

ਭਾਵ, $k - 7 = 0$ ਹੈ, ਜਿਸ ਤੋਂ $k = 7$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

k ਦੇ ਇਸ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ ’ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :-

$22x - 44 = 0$, ਭਾਵ $x - 2 = 0$, ਜਿਹੜੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 10.4

1. ਉਸ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਹੜੀ ਰੇਖਾਵਾਂ $3x + 4y = 7$ ਅਤੇ $x - y + 2 = 0$ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਢਾਲ 5 ਹੈ। (ਉੱਤਰ $35x - 7y + 18 = 0$)
2. ਰੇਖਾਵਾਂ $x + 2y - 3 = 0$ ਅਤੇ $4x - y + 7 = 0$ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਉਸ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਹੜੀ ਰੇਖਾ $5x + 4y - 20 = 0$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ। (ਉੱਤਰ $15x + 12y - 7 = 0$)
3. ਰੇਖਾਵਾਂ $2x + 3y - 4 = 0$ ਅਤੇ $x - 5y = 7$ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਉਸ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ x ਅੰਤਰ ਖੰਡ – 4 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। (ਉੱਤਰ $10x + 93y + 40 = 0$)
4. ਰੇਖਾਵਾਂ $5x - 3y = 1$ ਅਤੇ $2x + 3y - 23 = 0$ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹੜੀ ਰੇਖਾ $5x - 3y - 1 = 0$ ’ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।

(ਉੱਤਰ $63x + 105y - 781 = 0$)

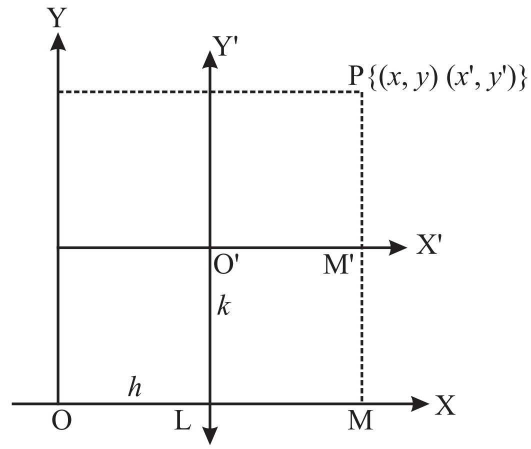
Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

10.7 ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਬਦਲੀ

ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ, ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਦੇ ਸੰਗਤ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ, ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਇੱਕ ਠੀਕ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪੱਧਤੀ ਵਿੱਚ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲੈ ਕੇ ਕਿ ਸਾਰੇ ਜਿਆਮਿਤੀ ਗੁਣ ਬਿਨਾਂ ਬਦਲੇ ਲਾਗੂ ਹੋਣ, ਸਰਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਇਹੋ-ਜਿਹਾ ਰੂਪਾਂਤਰਨ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਨਵੇਂ ਧੁਰਾਂ ਨੂੰ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਧੁਰਾਂ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਨਵੇਂ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਬਦਲੀ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਰੂਪਾਂਤਰਣ ਨੂੰ ਧੁਰਾਂ ਦੀ ਬਦਲੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਤੱਲ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਾਂ ਦੇ ਇਸ ਬਦਲੀ ਦੇ ਤਹਿਤ ਬਦਲ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਪੁਰਾਣੇ ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸੰਬੰਧ ਪਤਾ ਹੋਣ 'ਤੇ, ਅਸੀਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਾਂ ਦੀ ਨਵੀਂ ਪੱਧਤੀ ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਾਤਮਕ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 10.21

ਇਹ ਵੇਖਣ ਲਈ ਕਿ ਧੁਰਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਬਦਲੀ ਦੇ ਤਹਿਤ ਤੱਲ ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਦਲਦੇ ਹਨ, ਆਉ ਧੁਰੇ OX ਅਤੇ OY ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P (x, y) ਲਓ। ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ O′X′ ਅਤੇ O′Y′ ਕ੍ਰਮਵਾਰ OX ਅਤੇ OY ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਨਵੇਂ ਧੁਰੇ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ O′ ਨਵਾਂ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਪੁਰਾਣੇ ਧੁਰਾਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ O′ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (h, k) ਹਨ, ਭਾਵ $OL = h$ ਅਤੇ $LO' = k$ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ $OM = x$ ਅਤੇ $MP = y$ ਹੈ। (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.21)।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $O'M' = x'$ ਅਤੇ $M'P = y'$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ, ਨਵੇਂ ਧੁਰਾਂ O′X′ ਅਤੇ O′Y′ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਭੁਜ ਅਤੇ ਕੋਟਿ ਹਨ। ਚਿੱਤਰ 10.21 ਤੋਂ, ਇਹ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਵੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ,

$OM = OL + LM$, ਭਾਵ, $x = h + x'$

ਅਤੇ $MP = MM' + M'P$, ਭਾਵ, $y = k + y'$

ਇਸ ਲਈ $x = x' + h,\ y = y' + k$

ਇਹ ਹੀ ਸੂਤਰ ਪੁਰਾਣੇ ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 21 ਬਿੰਦੂ $(3, -4)$ ਦੇ ਨਵੇਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ $(1, 2)$ ਤੇ ਬਦਲੀ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਨਵੇਂ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $h = 1$ ਅਤੇ $k = 2$ ਹਨ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $x = 3$ ਅਤੇ $y = -4$ ਹਨ।

ਪੁਰਾਣੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ (x, y) ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ (x', y') ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਰੂਪਾਂਤਰਣ ਸੰਬੰਧ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

$x = x' + h$ ਭਾਵ $x' = x - h$

ਅਤੇ $y = y' + k$ ਭਾਵ $y' = y - k$

ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਬਦਲਣ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$x' = 3 - 1 = 2$ ਅਤੇ $y' = -4 - 2 = -6$

ਇਸ ਲਈ ਨਵੀਂ ਪਧੱਤੀ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ $(3, -4)$ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(2, -6)$ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 22 ਸਰਲ ਰੇਖਾ $2x - 3y + 5 = 0$, ਦੀ ਰੂਪਾਂਤਰਿਤ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਧੁਰਾਂ ਦੇ ਬਦਲਣ ਰਾਹੀਂ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ $(3, -1)$ ਤੇ ਬਦਲੀ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (x, y) ਨਵੇਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਾਂ ਵਿੱਚ (x', y') ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ $h = 3, k = -1$ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਰੂਪਾਂਤਰਨ ਸੂਤਰਾਂ ਨੂੰ $x = x' + 3$ ਅਤੇ $y = y' - 1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਸਰਲ ਰੇਖਾਂ ਦੀ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :-

$$2(x' + 3) - 3(y' - 1) + 5 = 0$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਜਾਂ $2x' - 3y' + 14 = 0$

ਇਸ ਲਈ, ਨਵੀਂ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿੱਚ, ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $2x - 3y + 14 = 0$ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 10.5

1. ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਵੇਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਧੁਰਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਬਦਲੀ ਰਾਹੀਂ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ $(-3, -2)$ ਤੇ ਬਦਲੀ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ—

   (i) $(1, 1)$ (ਉੱਤਰ $(4, 3)$) (ii) $(0, 1)$ (ਉੱਤਰ $(3, 3)$)

   (iii) $(5, 0)$ (ਉੱਤਰ $(8, 2)$) (iv) $(-1, -2)$ (ਉੱਤਰ $(2, 0)$)

   (v) $(3, -5)$ (ਉੱਤਰ $(6, -3)$)

2. ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ $(1, 1)$ 'ਤੇ ਬਦਲਣ 'ਤੇ ਹੇਠਲੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਕੀ ਹੋ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

   (i) $x^2 + xy - 3y^2 - y + 2 = 0$ (ਉੱਤਰ $x^2 - 3y^2 + xy + 3x - 6y + 1 = 0$)

   (ii) $xy - y^2 - x + y = 0$ (ਉੱਤਰ $xy - y^2 = 0$)

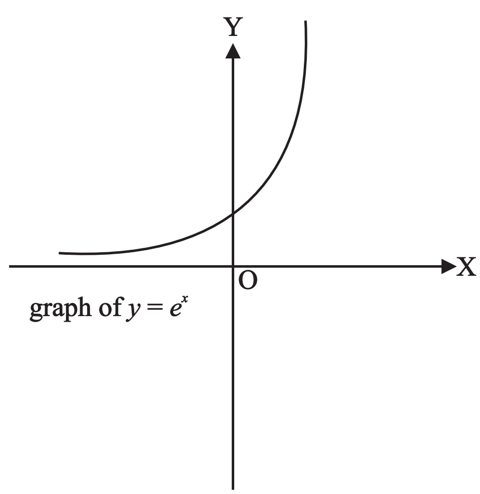
   (iii) $xy - x - y + 1 = 0$ (ਉੱਤਰ $xy = 0$)

ਅਧਿਆਇ 13

13.5 ਚਲ ਘਾਤ ਅੰਕੀ ਅਤੇ ਲਘੁਗਣਕੀ ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ

ਚਲ ਘਾਤ ਅੰਕੀ (exponential) ਅਤੇ ਲਘੁਗਣਕੀ (logarithmic) ਫਲਨਾਂ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਕੱਢਣ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਨ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ, ਅਸੀਂ ਦੋਵੇਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਦੱਸਦੇ ਹੋਏ, ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਜਾਣ-ਪਛਾਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਕੰਮ ਚਲਾਉ ਗਰਾਫ਼ ਬਣਾਦੇ ਹਾਂ।

ਇੱਕ ਮਹਾਨ ਸੁਵਿਸ ਗਣਿਤਕਾਰ ਲਿਉਨਾਡਜ ਆਇਲਰ (Leonhard Euler) (1707-1783) ਨੇ ਸੰਖਿਆ e ਦੀ ਜਾਣ ਪਛਾਣ ਦਿੱਤੀ ਜਿਸਦਾ ਮੁੱਲ 2 ਅਤੇ 3 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸਥਿਤ ਹੈ। ਇਹ ਸੰਖਿਆ ਐਕਸਪੋਨੇਸ਼ਲ ਫਲਨ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਉਪਯੋਗੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ $f(x) = e^x, x \in \mathbf{R}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ $\mathbf{R}$ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਚਲ ਘਾਤ ਅੰਕੀ ਫਲਨ, ਭਾਵ $y = e^x$ ਦਾ ਗਰਾਫ਼ ਚਿੱਤਰ 13.11 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

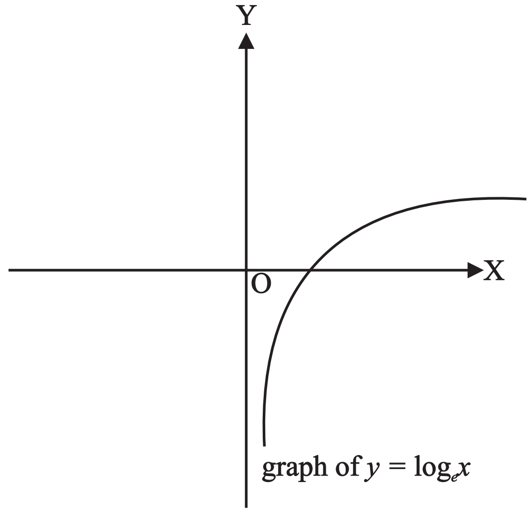


ਚਿੱਤਰ 13.11

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਲਘੂਗਣਕੀ ਫਲਨ ਜਿਸਨੂੰ $\log_e \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਨੂੰ $\log_e x = y$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $e^y = x$ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ $\mathbf{R}^+$ ਹੈ, ਜਿਹੜਾ ਸਾਰੇ ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ $\mathbf{R}$ ਹੈ। ਲਘੂਗਣਕੀ ਫਲਨ $y = \log_e x$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 13.12 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਹੋਇਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 13.12

ਨਤੀਜਾ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$, ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਵਿਅੰਜਕ $\dfrac{e^x-1}{x}$ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਇੱਕ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਹੜਾ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ,

$\dfrac{1}{1+|x|} \le \dfrac{e^x-1}{x} \le 1 + (e-2)\,|x|$ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ x ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ $[-1, 1] \sim \{0\}$

ਪ੍ਰਮੇਯ 6 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਅਸਮਾਨਤਾ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :—

$$\frac{1}{1+|x|} \le \frac{e^x-1}{x} \le 1 + |x|\,(e-2),\ \forall x \in [-1, 1] \sim \{0\},$$ $[-1, 1] - \{0\}$ ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ x ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ।

ਨਾਲ ਹੀ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+|x|} = \dfrac{1}{1+\lim\limits_{x\to 0}|x|} = \dfrac{1}{1+0} = 1$

ਅਤੇ $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+(e-2)|x|\right] = 1 + (e-2)\lim\limits_{x\to 0}|x| = 1 + (e-2)0 = 1$

ਇਸ ਲਈ ਸੈਂਡਵਿਚ ਪ੍ਰਮੇਯ ਰਾਹੀਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :—

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

ਪ੍ਰਮੇਯ 7 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_e(1+x)}{x}=1$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ, $\frac{\log_e(1+x)}{x} = y$ ਹੈ ਤਾਂ,

$$\log_e(1+x) = xy$$

$$\Rightarrow 1+x = e^{xy}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{xy}-1}{x} = 1$$

ਜਾਂ $$\frac{e^{xy}-1}{xy}.y = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{xy\to 0}\frac{e^{xy}-1}{xy}\lim_{x\to 0} y = 1$$ (ਕਿਉਂਕਿ $x \to 0$ ਤੋਂ $xy \to 0$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ)

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} y = 1\left(\text{ਕਿਉਂਕਿ } \lim_{xy\to 0}\frac{e^{xy}-1}{xy} = 1\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{x} = 1$$

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਮੁਲਾਂਕਣ ਕਰੋ $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}$

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{3x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot 3$$

$$= 3\left(\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}\right),$$ ਜਿੱਥੇ $y = 3x$

$$= 3.1 = 3$$

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਮੁਲਾਂਕਣ ਕਰੋ, $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-\sin x-1}{x}$

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ, $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-\sin x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x-1}{x} - \frac{\sin x}{x}\right]$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1-1 = 0$$

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਮੁਲਾਂਕਣ ਕਰੋ $\lim_{x\to 1}\frac{\log_e x}{x-1}$

ਹੱਲ : $x = 1 + h$, ਰੱਖੋ। ਤਾਂ $x \to 1 \Rightarrow h \to 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log_e x}{x-1} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_e(1+h)}{h} = 1\left(\text{ਕਿਉਂਕਿ } \lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{x} = 1 \text{ ਹੈ।}\right)$$

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਅਭਿਆਸ 13.2

ਹੇਠ ਲਿਖਤ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਕੱਢੋ, ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ :

1. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{4x} - 1}{x}$ (ਉੱਤਰ 4)

2. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2+x} - e^2}{x}$ (ਉੱਤਰ e^2)

3. $\lim_{x \to 5} \frac{e^x - e^5}{x - 5}$ (ਉੱਤਰ e^5)

4. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$ (ਉੱਤਰ 1)

5. $\lim_{x \to 3} \frac{e^x - e^3}{x - 3}$ (ਉੱਤਰ e^3)

6. $\lim_{x \to 0} \frac{x(e^x - 1)}{1 - \cos x}$ (ਉੱਤਰ 2)

7. $\lim_{x \to 0} \frac{\log_e(1 + 2x)}{x}$ (ਉੱਤਰ 2)

8. $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x^3)}{\sin^3 x}$ (ਉੱਤਰ 1)

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਨੋਟ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

BE A STUDENT OF STUDENTS

A teacher who establishes rapport with the taught, becomes one with them, learns more from them than he teaches them. He who learns nothing from his disciples is, in my opinion, worthless. Whenever I talk with someone I learn from him. I take from him more than I give him. In this way, a true teacher regards himself as a student of his students. If you will teach your pupils with this attitude, you will benefit much from them.

Talk to Khadi Vidyalaya Students, Sevagram
Harijan Seva, 15 February 1942 (CW 75, p. 269)

USE ALL RESOURCES TO BE CONSTRUCTIVE AND CREATIVE

What we need is educationists with originality, fired with true zeal, who will think out from day to day what they are going to teach their pupils. The teacher cannot get this knowledge through musty volumes. He has to use his own faculties of observation and thinking and impart his knowledge to the children through his lips, with the help of a craft. This means a revolution in the method of teaching, a revolution in the teachers' outlook. Up till now you have been guided by inspector's reports. You wanted to do what the inspector might like, so that you might get more money yet for your institutions or higher salaries for yourselves. But the new teacher will not care for all that. He will say, '1 have done my duty to my pupil if I have made him a better man and in doing so I have used all my resources. That is enough for me'.

Harijan, 18 February 1939 (CW 68, pp. 374-75)

Downloaded from https:// www.studiestoday.com