ਗਣਿਤ

(ਦਸਵੀਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਲਈ)

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ
ਸਾਹਿਬਜ਼ਾਦਾ ਅਜੀਤ ਸਿੰਘ ਨਗਰ

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਪਹਿਲਾ ਐਡੀਸ਼ਨ : 2014 .... 1,55,000 ਕਾਪੀਆਂ
Revised ਐਡੀਸ਼ਨ : 2017 .... 81,000 ਕਾਪੀਆਂ

[This book has been adopted with the kind permission of the National Council of Educational Research and Training, New Delhi]

ਅਨੁਵਾਦਕ — ਸ. ਪਰਵਿੰਦਰ ਸਿੰਘ ਲੈਕ.
ਸ. ਸੀ. ਸੈ. ਸਕੂਲ (ਲੜਕੇ) ਅਬੋਹਰ

ਸੰਯੋਜਕ — ਸ. ਪ੍ਰਿਤਪਾਲ ਸਿੰਘ ਕਥੂਰੀਆ
ਵਿਸ਼ਾ ਮਾਹਿਰ ਪ. ਸ. ਸ. ਬ.

ਚਿੱਤਰਕਾਰ — ਸ. ਮਨਜੀਤ ਸਿੰਘ ਢਿੱਲੋਂ
ਆਰਟ ਸੈਲ ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ (ਮੋਹਾਲੀ)

ਚੇਤਾਵਨੀ

1. ਕੋਈ ਵੀ ਏਜੰਸੀ-ਹੋਲਡਰ ਵਾਧੂ ਪੈਸੇ ਵਸੂਲਣ ਦੇ ਮੰਤਵ ਨਾਲ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ 'ਤੇ ਜਿਲਦ-ਸਾਜ਼ੀ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦਾ। (ਏਜੰਸੀ-ਹੋਲਡਰਾਂ ਨਾਲ ਹੋਏ ਸਮਝੌਤੇ ਦੀ ਧਾਰਾ ਨੰ. 7 ਅਨੁਸਾਰ)
2. ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਦੁਆਰਾ ਛਪਵਾਈਆਂ ਅਤੇ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੇ ਜਾਅਲੀ ਨਕਲੀ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਨਾਂ (ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ) ਦੀ ਛਪਾਈ, ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਨ, ਸਟਾਕ ਕਰਨਾ, ਜਮ੍ਹਾਂ-ਖੋਰੀ ਜਾਂ ਵਿਕਰੀ ਆਦਿ ਕਰਨਾ ਭਾਰਤੀ ਦੰਡ ਪ੍ਰਨਾਲੀ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਫ਼ੌਜਦਾਰੀ ਜੁਰਮ ਹੈ।

(ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਦੀਆਂ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਬੋਰਡ ਦੇ 'ਵਾਟਰ ਮਾਰਕ' ਵਾਲੇ ਕਾਗਜ਼ ਉੱਪਰ ਹੀ ਛਪਵਾਈਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।)

ਮੁੱਲ : ₹ 154/-

ਸਕੱਤਰ, ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ, ਵਿੱਦਿਆ ਭਵਨ, ਫੇਜ਼-8 ਸਾਹਿਬਜ਼ਾਦਾ ਅਜੀਤ ਸਿੰਘ ਨਗਰ 160062 ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਅਤੇ ਮੈਸ : ਨਾਰਦਨ ਸਟੇਸ਼ਨਰੀ ਮਾਰਟ, ਜਲੰਧਰ ਦੁਆਰਾ ਛਾਪੀ ਗਈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਦੋ ਸ਼ਬਦ

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਪਾਠ-ਕ੍ਰਮਾਂ ਅਤੇ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਨੂੰ ਸੋਧਣ ਅਤੇ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਦੇ ਕੰਮ ਵਿੱਚ ਜੁਟਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਅੱਜ ਜਿਸ ਦੌਰ ਵਿੱਚੋਂ ਅਸੀਂ ਲੰਘ ਰਹੇ ਹਾਂ ਉਸ ਵਿੱਚ ਬੱਚਿਆਂ ਨੂੰ ਸਹੀ ਵਿੱਦਿਆ ਦੇਣਾ ਮਾਪਿਆਂ ਅਤੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੋਹਾਂ ਦੀ ਸਾਂਝੀ ਜ਼ਿੰਮੇਵਾਰੀ ਬਣਦੀ ਹੈ। ਇਸੇ ਜ਼ਿੰਮੇਵਾਰੀ ਅਤੇ ਵਿੱਦਿਅਕ ਜ਼ਰੂਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਦਿਆਂ ਹੋਇਆਂ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਦੇ ਪਾਠ-ਕ੍ਰਮਾਂ ਅਤੇ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਵਿੱਚ ਨੈਸ਼ਨਲ ਕਰੀਕੁਲਮ ਫਰੇਮਵਰਕ-2005 ਅਨੁਸਾਰ ਕੁਝ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕੀਤੇ ਜਾ ਰਹੇ ਹਨ।

ਸਕੂਲ ਕਰੀਕੁਲਮ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਦਾ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਯੋਗਦਾਨ ਹੈ ਅਤੇ ਲੋੜੀਂਦੇ ਸਿੱਖਿਅਕ ਨਤੀਜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਚੰਗੀ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਦਾ ਹੋਣਾ ਪਹਿਲੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਵਿਸ਼ਾ ਸਾਮੱਗਰੀ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ਼ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਤਰਕ ਸ਼ਕਤੀ ਪ੍ਰਫੁਲਿਤ ਹੋਣ ਦੇ ਨਾਲ਼-ਨਾਲ਼ ਵਿਸ਼ੇ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੀ ਯੋਗਤਾ ਵਿੱਚ ਵੀ ਵਾਧਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਅਭਿਆਸਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਮਾਨਸਿਕ ਪੱਧਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਤਿਆਰ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਇਹ ਪੁਸਤਕ ਰਾਸ਼ਟਰੀ ਵਿੱਦਿਆ ਖੋਜ ਅਤੇ ਸਿਖਲਾਈ ਸੰਸਥਾ ਵੱਲੋਂ ਦਸਵੀਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਲਈ ਤਿਆਰ ਕੀਤੀ ਗਈ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਦੀ ਪੁਸਤਕ ਦੀ ਅਨੁਸਾਰਤਾ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਪੁਸਤਕ ਐਨ.ਸੀ.ਈ.ਆਰ.ਟੀ. ਤੋਂ ਪ੍ਰਵਾਨਗੀ ਲੈਣ ਉਪਰੰਤ ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ।

ਇਸ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਨੂੰ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਅਤੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਉਪਯੋਗੀ ਬਣਾਉਣ ਦਾ ਭਰਪੂਰ ਯਤਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਫਿਰ ਵੀ, ਪੁਸਤਕ ਨੂੰ ਹੋਰ ਚੰਗੇਰਾ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚੋਂ ਆਏ ਸੁਝਾਵਾਂ ਦਾ ਸਤਿਕਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ।

ਚੇਅਰਮੈਨ

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

NCERT ਦੀ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਕਮੇਟੀ

ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਗਣਿਤ ਦੇ ਸਲਾਹਕਾਰ ਸਮੂਹ ਦੇ ਚੇਅਰਮੈਨ

ਜਯੰਤ ਵਿਸ਼ਨੂੰ ਨਾਰਲੀਕਰ, ਇਮੀਰਿਟਸ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਚੇਅਰਮੈਨ, ਆਈ.ਯੂ.ਸੀ.ਏ.ਏ., ਗਣੇਸ਼ਖਿੰਡ, ਪੂਨਾ ਯੂਨਿਵਰਸਿਟੀ, ਪੂਨਾ

ਮੁੱਖ ਸਲਾਹਕਾਰ

ਪੀ.ਸਿੰਕਲੇਅਰ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਵਿਗਿਆਨ ਵਿਦਿਆਪੀਠ, ਇ.ਗਾ.ਰਾ.ਮੁ.ਵਿ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਮੁੱਖ ਕੋਆਰਡੀਨੇਟਰ

ਹੁਕੁਮ ਸਿੰਘ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ.ਈ.ਐਸ.ਐਮ., ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਮੈਂਬਰ

ਅੰਜਲੀ ਲਾਲ, ਪੀ.ਜੀ.ਟੀ. (ਗਣਿਤ), ਡੀ.ਏ.ਵੀ. ਪਬਲਿਕ ਸਕੂਲ, ਸੈਕਟਰ-14, ਗੁੜਗਾਵਾਂ

ਅੰਜੂ ਨਿਰੂਲਾ, ਪੀ.ਜੀ.ਟੀ. (ਗਣਿਤ) ਡੀ.ਏ.ਵੀ. ਪਬਲਿਕ ਸਕੂਲ, ਪੁਸ਼ਪਾਂਜਲੀ ਇੰਨਕਲੇਵ, ਪੀਤਮ ਪੁਰਾ, ਦਿੱਲੀ

ਉਦੇ ਸਿੰਘ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਡੀ.ਈ.ਐਸ.ਐਮ., ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਏ.ਕੇ.ਵਜਲਵਾਰ, ਰੀਡਰ, ਡੀ.ਈ.ਐਸ.ਐਮ., ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਐਸ.ਵੈਂਕਟਰਮਨ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਵਿਗਿਆਨ ਵਿਦਿਆਪੀਠ, ਇ.ਗਾ.ਰਾ.ਮੁ.ਵਿ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਜੀ.ਪੀ.ਦੀਕਸ਼ਿਤ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਖਗੋਲਿਕੀ ਵਿਭਾਗ, ਲਖਨਊ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ, ਲਖਨਊ

ਕੇ.ਏ.ਐਸ.ਐਸ.ਵੀ.ਕਾਮੇਸ਼ਵਰ ਰਾਵ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਖੇਤਰੀ ਸਿੱਖਿਆ ਸੰਸਥਾਨ, ਭੁਵਨੇਸ਼ਵਰ

ਮਹਿੰਦਰ ਆਰ.ਗਜਰੇ, ਪੀ.ਜੀ.ਟੀ., ਅਤੁਲ ਸਕੂਲ, ਅਤੁਲ, ਜ਼ਿਲ੍ਹਾ ਵਲਸਾਦ

ਮਹਿੰਦਰ ਸ਼ੰਕਰ, ਲੈਕਚਰਾਰ (ਐਸ.ਜੀ.) (ਰਿਟਾ.), ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਰਮਾ ਬਾਲਾਜੀ, ਟੀ.ਜੀ.ਟੀ. (ਗਣਿਤ), ਕੇ.ਵੀ.ਮੇਗ ਅਤੇ ਕੇਂਦਰ, ਸੈਂਟ ਜੋਹਨਜ਼ ਰੋਡ, ਬੰਗਲੂਰੂ

ਵੇਦ ਡੁਡੇਜਾ, ਉਪ-ਪ੍ਰਿੰਸੀਪਲ (ਰਿਟਾ.), ਗੌ.ਗ.ਮਿਡਲ ਸਕੂਲ, ਸੈਨਿਕ ਵਿਹਾਰ, ਦਿੱਲੀ

ਸੰਜੇ ਮੁਦਗੱਲ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਸੀ.ਆਈ.ਈ.ਟੀ., ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਸ਼ਸ਼ੀਧਰ ਜਗਦੀਸ਼ਨ, ਅਧਿਆਪਕ ਅਤੇ ਮੈਂਬਰ, ਗਵਰਨਿੰਗ ਕਾਊਂਸਿਲ, ਸੈਂਟਰ ਫ਼ਾਰ ਲਰਨਿੰਗ, ਬੰਗਲੂਰੂ

ਹਿੰਦੀ ਅਨੁਵਾਦਕ :

ਜੀ.ਪੀ. ਦੀਕਸ਼ਿਤ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਖਗੋਲਿਕੀ ਵਿਭਾਗ, ਲਖਨਊ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ, ਲਖਨਊ

ਮਹਿੰਦਰ ਸ਼ੰਕਰ, ਲੈਕਚਰਾਰ (ਐਸ.ਜੀ.) (ਰਿਟਾ.), ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਹਰੀਸ਼ਵਰ ਪ੍ਰਸਾਦ ਸਿਨਹਾ, ਸੀ-210, ਰਾਜਾਜੀ ਪੁਰਮ, ਲਖਨਊ

ਮੈਂਬਰ ਕੋਆਰਡੀਨੇਟਰ

ਰਾਮ ਅਵਤਾਰ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ.ਈ.ਐਸ.ਐਮ., ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ (ਦਿਸੰਬਰ 2005 ਤੱਕ)

ਆਰ.ਪੀ.ਮੌਰੀਆ, ਰੀਡਰ, ਡੀ.ਈ.ਐਸ.ਐਮ., ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ (ਜਨਵਰੀ 2006 ਤੋਂ)

ਵਿਸ਼ਾ-ਸੂਚੀ

ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ REAL NUMBERS 1

1.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਨੌਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਖੋਜ ਸ਼ੁਰੂ ਕੀਤੀ ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਅ ਦੌਰਾਨ ਤੁਹਾਨੂੰ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਮਿਲੀ। ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਵਾਸਤਵਿ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਾਰੇ ਆਪਣੀ ਚਰਚਾ ਜਾਰੀ ਰੱਖਾਂਗੇ। ਇਹ ਚਰਚਾ ਅਸੀਂ ਭਾਗ 1.2 ਅਤੇ 1.3 ਵਿੱਚ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ (integers) ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਦੋ ਬਹੁਤ ਹੀ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਗੁਣਾਂ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਾਂਗੇ ਇਹ ਗੁਣ ਹਨ : ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ (ਕਲਨ ਵਿਧੀ) (Euclid's division algorithm ਅਤੇ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) (Fundamental Theorem Arithmetic)।

ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਨਾਮ ਤੋਂ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ, ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵ (integers) ਦੀ ਵੰਡ ਨਾਲ ਕਿਸੇ ਨਾ ਕਿਸੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ। ਸਧਾਰਨ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਕਿਹਾ ਜਾਵੇ ਤਾ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ, ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ a ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਦੂਸਰੀ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ b ਨਾਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੰਡਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਬਾਕੀ r ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ, ਜੋ b ਤੋਂ ਛੋਟਾ (ਘੱਟ ਹੋਵੇ। ਤੁਹਾਡੇ ਵਿੱਚੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾਤਰ ਲੋਕ ਸ਼ਾਇਦ ਇਸਨੂੰ ਸਧਾਰਨ ਲੰਬੀ ਵੰਡ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ (long divisio process) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਾਣਦੇ ਹਨ। ਭਾਵੇਂ ਕਿ ਇਹ ਪਰਿਣਾਮ (ਸਿੱਟਾ) ਕਹਿਣ ਅਤੇ (ਸਮਝਣ) ਵਿੱ ਬਹੁਤ ਸਰਲ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਵੰਡ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਇਸ ਦੀਆਂ ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕੁਝ 'ਤੇ ਰੌਸ਼ਨੀ ਪਾਵਾਂਗੇ ਅਤੇ ਮੁੱਖ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਦ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਮਹੱਤਮ ਸਮਾਪਵਰਤਕ (HCF) ਕੱਢਣ ਦੇ ਬਾਰੇ ਕਰਾਂਗੇ।

ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਤੋਂ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ (composite number) ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (prime numbers) ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਤੱਥ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਥਿਊਰਮ ਹੈ। ਫਿਰ ਤੋਂ ਇਹ ਪਰਿਣਾਮ (ਸਿੱਟਾ) ਕਹਿਣ ਅਤੇ ਸਮਝਣ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਸਰਲ ਹੈ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਗਣਿਤ ਦੇ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਇਸ ਦੀਆਂ ਬਹੁਤ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਹਨ ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਥਿਊਰਮ ਦੀਆਂ ਦੋ ਮੁੱਖ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦੇਖਾਂਗੇ। ਇੱਕ ਤਾਂ ਅਸੀ

ਇਸਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਪੜੀਆਂ ਗਈਆਂ ਕੁਝ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ ਅਤੇ $\sqrt{5}$ ਆਦਿ ਦੀ ਅਪਰਿਮੇਯਤਾ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਕਰਾਂਗੇ। ਦੂਸਰਾ, ਅਸੀਂ ਇਸਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਇਹ ਲੱਭਣ ਵਿੱਚ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਕਿਸੇ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ, ਮੰਨ ਲਓ $\frac{p}{q} (q \neq 0)$ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਕਦੋਂ ਸ਼ਾਂਤ (terminating) ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕਦੋਂ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ (non-terminating repeating) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਅਸੀਂ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਹਰ, q ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਨੂੰ ਦੇਖ ਕੇ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ q ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਤੋਂ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਰੂਪ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਤੀ ਦਾ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਲੱਗ ਜਾਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ, ਆਓ ਆਪਣੀ ਖੋਜ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰੀਏ।

1.2 ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰੇਮਿਕਾ (Euclid's division Lemma)

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਲੋਕ ਬੁਝਾਰਤ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ:*

ਇੱਕ ਵਿਕਰੇਤਾ ਸੜਕ 'ਤੇ ਜਾਂਦਾ ਹੋਇਆ ਆਂਡੇ ਵੇਚ ਰਿਹਾ ਸੀ। ਇੱਕ ਆਲਸੀ ਆਦਮੀ ਜਿਸਦੇ ਕੋਲ ਕੋਈ ਕੰਮ ਨਹੀਂ ਸੀ, ਨੇ ਉਸ ਵਿਕਰੇਤਾ ਨਾਲ ਸ਼ਬਦੀ ਜੰਗ (ਝਗੜਾ) ਚਾਲੂ ਕਰ ਦਿੱਤਾ। ਇਸ ਨਾਲ ਗੱਲ ਅੱਗੇ ਵੱਧ ਗਈ ਅਤੇ ਉਸਨੇ ਆਂਡਿਆਂ ਦੀ ਟੋਕਰੀ ਖੋਹ ਕੇ ਸੜਕ 'ਤੇ ਸੁੱਟ ਦਿੱਤੀ। ਆਂਡੇ ਟੁੱਟ ਗਏ। ਵਿਕਰੇਤਾ ਨੇ ਪੰਚਾਇਤ ਨੂੰ ਕਿਹਾ ਕਿ ਉਸ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ ਟੁੱਟੇ ਹੋਏ ਆਂਡਿਆਂ ਦੇ ਪੈਸੇ ਦੇਣ ਨੂੰ ਕਹੇ। ਪੰਚਾਇਤ ਨੇ ਵਿਕਰੇਤਾ ਨੂੰ ਪੁੱਛਿਆ ਕਿ ਕਿੰਨੇ ਆਂਡੇ ਟੁੱਟੇ ਸਨ। ਉਸਨੇ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਉੱਤਰ ਦਿੱਤਾ:

ਦੋ-ਦੋ ਗਿਨਣ ਨਾਲ ਇੱਕ ਬਚੇਗਾ;
ਤਿੰਨ-ਤਿੰਨ ਗਿਨਣ ਨਾਲ ਦੋ ਬਚਣਗੇ;
ਚਾਰ-ਚਾਰ ਗਿਨਣ ਨਾਲ ਤਿੰਨ ਬਚਣਗੇ;
ਪੰਜ-ਪੰਜ ਗਿਨਣ ਨਾਲ ਚਾਰ ਬਚਣਗੇ;
ਛੇ-ਛੇ ਗਿਨਣ ਨਾਲ ਪੰਜ ਬਚਣਗੇ;
ਸੱਤ-ਸੱਤ ਗਿਨਣ ਨਾਲ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਬਚੇਗਾ;
ਮੇਰੀ ਟੋਕਰੀ ਵਿੱਚ 150 ਤੋਂ ਵੱਧ ਆਂਡੇ ਨਹੀਂ ਆ ਸਕਦੇ।

ਇਸ ਲਈ ਕਿੰਨੇ ਆਂਡੇ ਸਨ? ਆਓ ਇਸ ਬੁਝਾਰਤ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੀਏ। ਮੰਨ ਲਓ ਆਂਡਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ a ਹੈ। ਹੁਣ ਉਲਟੇ ਕ੍ਰਮ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ a ਸੰਖਿਆ 150 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਹੈ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

* ਇਹ ਲੇਖਕ ਦੇ, ਗਾਮਪਾਲ ਅਤੇ ਹੋਰ ਦੁਆਰਾ ਲਿਖੀ ਕਿਤਾਬ ਨਿਊਮੇਰੇਸੀ ਕਾਊਂਟਸ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀ ਬੁਝਾਰਤ ਦਾ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ (ਬਦਲਵਾਂ) ਰੂਪ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਸੱਤ-ਸੱਤ ਗਿਣੀਏ ਤਾਂ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਬਚੇਗਾ। ਇਹ $a = 7p + 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ p ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਛੇ-ਛੇ ਗਿਣੀਏ ਤਾਂ 5 ਬਚਣਗੇ। ਇਹ $a = 6q + 5$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ q ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਪੰਜ-ਪੰਜ ਗਿਣਨ ਨਾਲ, 4 ਬਚਦਾ ਹੈ। ਇਹ $a = 5s + 4$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ s ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਚਾਰ-ਚਾਰ ਗਿਣਨ ਨਾਲ, 3 ਬਚਦਾ ਹੈ। ਇਹ $a = 4t + 3$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ... ਜਿੱਥੇ t ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਤਿੰਨ-ਤਿੰਨ ਗਿਣਨ ਨਾਲ, 2 ਬਚਦਾ ਹੈ। ਇਹ $a = 3u + 2$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ u ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਦੋ-ਦੋ ਗਿਣਨ ਨਾਲ, 1 ਬਚੇਗਾ। ਇਹ $a = 2v + 1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ ... ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਭਾਵ, ਉਪਰੋਕਤ ਹਰ ਇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਹਨ (ਲਏ ਗਏ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ b ਦੇ ਮੁੱਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 7, 6, 5, 4, 3 ਅਤੇ 2 ਹਨ)। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ a ਨੂੰ b ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣ 'ਤੇ r ਬਾਕੀ ਬਚਦਾ ਹੈ (ਉਪਰੋਕਤ ਵਿੱਚ r ਦੇ ਮੁੱਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 0, 5, 4, 3, 2 ਅਤੇ 1 ਹਨ) ਭਾਵ r ਭਾਜਕ b ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ ਹੀ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ (Euclid's division lemma) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ, ਇਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ।

ਹੁਣ, ਅਸੀਂ ਬੁਝਾਰਤ 'ਤੇ ਵਾਪਿਸ ਆਉਂਦੇ ਹੋਏ, ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਸੋਚ ਕੇ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਸ ਬੁਝਾਰਤ ਨੂੰ ਕਿਵੇਂ ਹੱਲ ਕਰਾਂਗੇ? ਹਾਂ, ਤੁਸੀਂ 7 ਦੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਗੁਣਜਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹੋਣ। ਜਾਂਚ ਅਤੇ ਭੁੱਲ ਵਿਧੀ ਨਾਲ LCM ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਤੁਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ,ਹੋ ਕਿ ਆਂਡਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 119 ਸੀ।

ਇਸ ਗੱਲ ਦਾ ਅਨੁਭਵ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਿਕਾ ਕੀ ਹੈ, ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਜੋੜਿਆਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ:

(i) 17, 6 (ii) 5, 12 (iii) 20, 4

ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਬੁਝਾਰਤ ਵਾਲੀ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਸੀ, ਇੱਥੇ ਵੀ ਅਸੀਂ ਹਰ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਲਈ ਸੰਬੰਧ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ।

(i) $17 = 6 \times 2 + 5$ (17 ਵਿੱਚੋਂ 6 ਦੋ ਵਾਰ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ 5 ਬਾਕੀ ਬੱਚਦਾ ਹੈ)

(ii) $5 = 12 \times 0 + 5$ (ਇਹ ਸੰਬੰਧ ਇਸ ਲਈ ਸਹੀ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ 12, 5 ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ)

(iii) $20 = 4 \times 5 + 0$ (20 ਵਿੱਚੋਂ 4 ਪੰਜ ਵਾਰ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਬੱਚਦਾ)

ਭਾਵ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ q ਅਤੇ r ਪਤਾ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$a = bq + r, 0 \le r < b \text{ ਹੈ।}$$

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ q ਅਤੇ r ਸਿਫ਼ਰ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਲਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ q ਅਤੇ r ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੋ:

(i) 10, 3 (ii) 4, 19 (iii) 81, 3

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ ਕਿ q ਅਤੇ r ਵਿਲੱਖਣ ਹਨ? ਇਹ ਹੀ ਕੇਵਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜੋ ਸੰਬੰਧ $a = bq + r, 0 \le r < b$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖ ਲਿਆ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਇਹ ਲੰਬੀ ਵੰਡ ਵਿਧੀ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਕੁਝ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਕਾਫੀ ਸਾਲਾਂ ਤੋਂ ਕਰਦੇ ਆ ਰਹੇ ਹੋ ਅਤੇ q ਅਤੇ r ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਭਾਗਫਲ *(quotient)* ਅਤੇ ਬਾਕੀ *(remainder)* ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਉਪਚਾਰਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ *(formal)* ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ:

ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) 1.1 ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਿਕਾ *(Euclid's division lemma)* ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਲਈ ਦੋ ਵਿਲੱਖਣ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ q ਅਤੇ r ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਕਿ $a = bq + r,\ 0 \le r < b$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਬਹੁਤ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਸੀ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਲਿਖਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਉਲੇਖ ਯੂਕਲਿਡ ਐਲੀਮੈਂਟਸ (Euclid's Elements) ਦੀ ਪੁਸਤਕ VII ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ (ਕਲਨ ਵਿਧੀ) ਇਸੇ ਹੀ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ (Lemma) 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ।

ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਪਗਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਲੜੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜੋ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਇੱਕ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਜਾਂ ਵਿਧੀ ਦਸਦੀ ਹੈ।

ਸ਼ਬਦ ''ਐਲਗੋਰਿਥਮ'' 9ਵੀਂ ਸਦੀ ਦੇ ਇੱਕ ਫ਼ਾਰਸੀ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ ਅਲ-ਖੁਆਰਿਜ਼ਮੀ ਦੇ ਨਾਮ ਤੋਂ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਸ਼ਬਦ 'ਅਲਜਬਰਾ' (Algebra) ਵੀ ਇਹਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਲਿਖੀ ਪੁਸਤਕ 'ਹਿਸਾਬ ਅਲ ਜ਼ਬਰ ਵੀ ਅਲ ਮੁਕਾਬਲਾ' ਤੋਂ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਇੱਕ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਕਥਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਕਥਨ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਵਰਤਦੇ ਹਨ।

ਮੁਹੰਮਦ ਇਬਨ ਮੂਸਾ ਅਲ ਖੁਆਰਿਜ਼ਮੀ
(780 – 850 ਈ.)

ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਗਣਨਾ ਕਰਨ ਦਾ ਇੱਕ ਤਰੀਕਾ ਹੈ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਉਹ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ d ਹੈ, ਜੋ a ਅਤੇ b ਦੋਵਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਭਾਗ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਆਓ ਸਾਰਿਆਂ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈ ਕੇ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਇਹ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੰਮ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਅਸੀਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 455 ਅਤੇ 42 ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (*H.C.F*) ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਵੱਡੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ 455 ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਯੂਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$455 = 42 \times 10 + 35$$

ਹੁਣ ਭਾਜਕ 42 ਅਤੇ ਬਾਕੀ 35 ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ, ਯੂਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$42 = 35 \times 1 + 7$$

ਹੁਣ ਭਾਜਕ 35 ਅਤੇ ਬਾਕੀ 7 ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ, ਯੂਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੋਂ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$35 = 7 \times 5 + 0$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇੱਥੇ ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ (ਜ਼ੀਰੋ) ਆ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਅੱਗੇ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ। ਅਸੀਂ ਆਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਾਲਾ ਭਾਜਕ ਭਾਵ 7 ਹੀ 455 ਅਤੇ 42 ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (*H.C.F*) ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਦੀ ਜਾਂਚ 455 ਅਤੇ 42 ਦੇ ਸਾਰੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖ ਕੇ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਇਹ ਵਿਧੀ ਕਿਸ ਕਾਰਣ ਕੰਮ ਕਰ ਜਾਂਦੀ ਹੈ?

ਇਸ ਦਾ ਕਾਰਣ **ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ** ਹੈ, ਇਸਦੇ ਪਗਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ:

ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਮੰਨ ਲਉ c ਅਤੇ d $(c>d)$ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (*H.C.F*) ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪਗਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਕੰਮ ਕਰੋ:

ਪਗ 1: c ਅਤੇ d ਦੇ ਲਈ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ। ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ q ਅਤੇ r ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $c = dq + r$, $0 \le r < d$ ਹੋਵੇ।

ਪਗ 2: ਜੇਕਰ $r = 0$ ਹੈ, ਤਾਂ d ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ c ਅਤੇ d ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (*H.C.F*) ਹੈ। ਜੇਕਰ $r \neq 0$ ਹੈ, ਤਾਂ d ਅਤੇ r ਦੇ ਲਈ, ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ।

ਪਗ 3: ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਉਦੋਂ ਤਕ ਜਾਰੀ ਰੱਖੋ, ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ (ਜ਼ੀਰੋ) ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਾ ਹੋ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਭਾਜਕ ਹੀ ਲੋੜੀਂਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (*H.C.F*) ਹੈ।

ਇਹ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਭਾਵਸ਼ਾਲੀ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ HCF (c, d) = HCF (d, r) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਸੰਕੇਤ HCF (c, d) ਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ c ਅਤੇ d ਦਾ HCF।

ਉਦਾਹਰਣ: 4052 ਅਤੇ 12576 ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (*H.C.F*) ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ:

ਪਗ 1: ਇੱਥੇ $12576 > 4052$ ਹੈ। 12576 ਅਤੇ 4052 ਉੱਪਰ ਯੂਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$12576 = 4052 \times 3 + 420$$

ਪਗ 2: ਕਿਉਂਕਿ ਬਾਕੀ $420 \neq 0$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ 4052 ਅਤੇ 420 ਦੇ ਲਈ ਯੂਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$4052 = 420 \times 9 + 272$$

ਪਗ 3: ਅਸੀਂ ਨਵੇਂ ਭਾਜਕ 420 ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਬਾਕੀ 272 ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਯੂਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$420 = 272 \times 1 + 148$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਨਵੇਂ ਭਾਜਕ 272 ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਬਾਕੀ 148 'ਤੇ ਯੂਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$272 = 148 \times 1 + 124$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਨਵੇਂ ਭਾਜਕ 148 ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਬਾਕੀ 124 'ਤੇ ਯੂਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$148 = 124 \times 1 + 24$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਨਵੇਂ ਭਾਜਕ 124 ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਬਾਕੀ 24 'ਤੇ ਯੂਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$124 = 24 \times 5 + 4$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਨਵੇਂ ਭਾਜਕ 24 ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਬਾਕੀ 4 'ਤੇ ਯੂਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$24 = 4 \times 6 + 0$$

ਇੱਥੇ ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ (0) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਇੱਥੇ ਖਤਮ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਭਾਜਕ 4 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 12576 ਅਤੇ 4052 ਦਾ *H.C.F* 4 ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ HCF (24, 4) = HCF (124, 24) = HCF (148, 124) = HCF (272, 148) = HCF (420, 272) = HCF (4052, 420) = HCF (12576, 4052) ਹੈ।

ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਨਾ ਸਿਰਫ ਵੱਡੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗੀ ਹੈ, ਬਲਕਿ ਇਹ ਇਸ ਲਈ ਵੀ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਉਹਨਾਂ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਕੰਪਿਊਟਰ ਦੇ ਇੱਕ ਪ੍ਰੋਗ੍ਰਾਮ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਗਿਆ।

ਟਿੱਪਣੀ:

1. ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਅਤੇ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੁੜੇ ਹੋਏ ਹਨ ਕਿ ਲੋਕ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਨੂੰ ਹੀ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
2. ਭਾਵੇਂ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ/ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਨੂੰ ਸਿਰਫ਼ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਹੀ ਲਿਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (ਸਿਫ਼ਰ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਭਾਵ $b \neq 0$)

ਦੇ ਲਈ ਲਾਗੂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਭਾਵੇਂ, ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤੱਥ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ।

ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ/ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ ਹੇਠਾਂ ਦੇ ਰਹੇ ਹਾਂ:

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $2q$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ $2q + 1$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ q ਕੋਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ a ਕੋਈ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $b = 2$ ਹੈ। ਹੁਣ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਤੋਂ, ਕਿਸੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $q \geq 0$ ਦੇ ਲਈ $a = 2q + r$ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $r = 0$ ਹੈ ਜਾਂ $r = 1$ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $0 \leq r < 2$ ਇਸ ਲਈ $a = 2q$ ਜਾਂ $a = 2q + 1$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $a = 2q$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਜਾਂ ਤਾਂ ਜਿਸਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਟਾਂਕ। ਇਸ ਲਈ ਕੋਈ ਵੀ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $2q + 1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇਗੀ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $4q + 1$ ਜਾਂ $4q + 3$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ q ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ: ਆਉ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ a ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਸਵਾਲ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰੀਏ। ਅਸੀਂ a ਅਤੇ $b = 4$ 'ਤੇ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਕਿਉਂਕਿ $0 \leq r < 4$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸੰਭਾਵਿਤ ਬਾਕੀ 0, 1, 2 ਅਤੇ 3 ਹਨ।

ਭਾਵ a ਸੰਖਿਆਵਾਂ $4q$, $4q + 1$, $4q + 2$ ਜਾਂ $4q + 3$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ q ਭਾਗਫਲ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ a ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ $4q$ ਅਤੇ $4q + 2$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ (ਕਿਉਂਕਿ ਦੋਵੇਂ 2 'ਤੇ ਵੰਡੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ)।

ਇਸ ਲਈ, ਕੋਈ ਵੀ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $4q + 1$ ਜਾਂ $4q + 3$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੋਵੇਗੀ।

ਉਦਾਹਰਣ 4: ਇੱਕ ਮਠਿਆਈ ਵਿਕ੍ਰੇਤਾ ਕੋਲ 420 ਕਾਜੂ ਦੀਆਂ ਬਰਫੀਆਂ ਅਤੇ 130 ਬਦਾਮ ਦੀਆਂ ਬਰਫੀਆਂ ਹਨ। ਉਹ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਢੇਰੀਆਂ ਬਣਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਢੇਰੀ ਵਿੱਚ ਬਰਫੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਬਰਾਬਰ ਰਹੇ ਅਤੇ ਇਹ ਢੇਰੀਆਂ ਬਰਫੀ ਦੀ ਪਰਾਤ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਸਥਾਨ ਘੇਰਨ। ਇਸ ਕੰਮ ਲਈ ਹਰ ਇੱਕ ਢੇਰੀ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀਆਂ ਬਰਫੀਆਂ ਰੱਖੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ?

ਹੱਲ: ਇਹ ਕੰਮ ਜਾਂਚ ਅਤੇ ਭੁੱਲ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਸ ਨੂੰ ਲੜੀਬੱਧ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ HCF (420, 130) ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਫਿਰ, ਇਸ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਤੋਂ ਹਰ ਇੱਕ ਢੇਰੀ ਵਿੱਚ ਰੱਖੀਆਂ ਜਾ ਸਕਣ ਵਾਲੀਆਂ ਬਰਫੀਆਂ ਦੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਗਿਣਤੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗੀ। ਜਿਸ ਨਾਲ ਢੇਰੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਵੇਗੀ ਅਤੇ ਪਰਾਤ ਵਿੱਚ ਇਹ ਬਰਫੀਆਂ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਸਥਾਨ ਘੇਰਨਗੀਆਂ।

ਆਉ ਹੁਣ ਯੂਕਲਿਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ 420 ਅਤੇ 130 ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਪਤਾ ਕਰੀਏ।

$$420 = 130 \times 3 + 30$$
$$130 = 30 \times 4 + 10$$
$$30 = 10 \times 3 + 0$$

ਇਸ ਲਈ, 420 ਅਤੇ 130 ਦਾ HCF 10 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਹਰ ਇੱਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਬਰਫੀ ਦੇ ਲਈ ਮਠਿਆਈ ਵਿਕ੍ਰੇਤਾ ਦਸ-ਦਸ ਦੀਆਂ ਢੇਰੀਆਂ ਬਣਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 1.1

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ:

   (i) 135 ਅਤੇ 225 (ii) 196 ਅਤੇ 38220 (iii) 867 ਅਤੇ 255
2. ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਕੋਈ ਵੀ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $6q+1$ ਜਾਂ $6q+3$ ਜਾਂ $6q+5$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ q ਕੋਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
3. ਕਿਸੇ ਪਰੇਡ ਵਿੱਚ 616 ਆਦਮੀਆਂ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਸੈਨਾ (ਆਰਮੀ) ਦੀ ਟੁੱਕੜੀ ਨੇ 32 ਆਦਮੀਆਂ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਸੈਨਾ ਬੈਂਡ ਦੇ ਪਿੱਛੇ ਮਾਰਚ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਦੋਹਾਂ ਸਮੂਹਾਂ ਨੇ ਬਰਾਬਰ ਗਿਣਤੀ ਵਾਲੇ ਸਤੰਭਾਂ (Columns) ਵਿੱਚ ਮਾਰਚ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਸਤੰਭਾਂ (Columns) ਦੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਗਿਣਤੀ ਕਿੰਨੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇਹ ਮਾਰਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ?
4. ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਕਿਸੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ, ਕਿਸੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ m ਦੇ ਲਈ $3m$ ਜਾਂ $3m+1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

   [ਸੰਕੇਤ : ਮੰਨ ਲਉ x ਕੋਈ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਹੁਣ ਇਹ $3q$, $3q+1$ ਜਾਂ $3q+2$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰ ਇੱਕ ਦਾ ਵਰਗ ਕਰੋ ਅਤੇ ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਵਰਗਾਂ ਨੂੰ $3m$ ਜਾਂ $3m+1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।]
5. ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਕਿਸੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਘਣ $9m$, $9m+1$ ਜਾਂ $9m+8$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

1.3 ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ (Fundamental Theorem of Arithmetic)

ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਉਸਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $2 = 2$, $4 = 2 \times 2$, $253 = 11 \times 23$ ਆਦਿ। ਆਉ ਹੁਣ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਉੱਤੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਭਾਵ ਇਹ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਕੀ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ? ਆਉ ਇਸ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੀਏ।

ਕੁਝ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਮੰਨ ਲਉ 2, 3, 7, 11 ਅਤੇ 23 ਦਾ ਇੱਕ ਸੰਗ੍ਰਿਹ ਲਉ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਜਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗੁਣਾ ਕਰੀਏ (ਅਸੀਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਿੰਨੀ ਵਾਰ ਚਾਹੀਏ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ) ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਵੱਡਾ ਸਾਰਾ ਸੰਗ੍ਰਿਹ ਬਣਾ ਸਕਦੇ

ਹਾਂ (ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਮਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ)। ਆਉ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਦੀ ਸੂਚੀ ਬਣਾਈਏ :

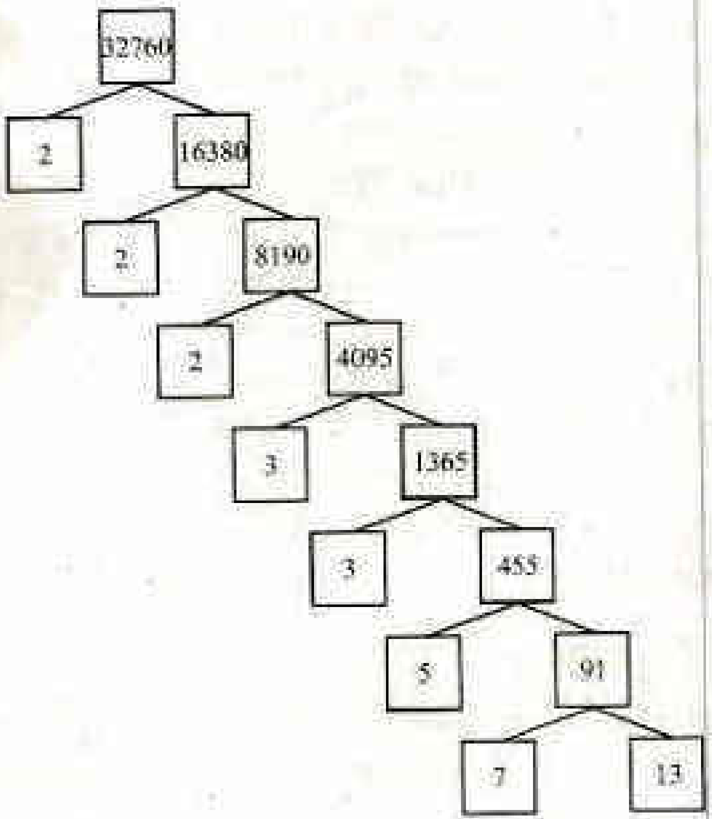
$7 \times 11 \times 23 = 1771$, $\quad 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$,

$2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$, $\quad 2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$,

$2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$ ਆਦਿ।

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਤੁਹਾਡੇ ਸੰਗ੍ਰਿਹ ਵਿੱਚ, ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਭਵ ਅਭਾਜ (prime) ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ। ਇਸ ਸੰਗ੍ਰਿਹ ਦੇ ਮਾਪ (size) ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਅੰਦਾਜਾ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਕੀ ਇਸ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ (finites) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜਾਂ ਅਸੀਮਿਤ (Infinite)? ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਣਗਿਣਤ (Infinites) ਹਨ। ਸੋ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਇਕੱਠਾ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਅਣਗਿਣਤ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦਾ ਅਣਗਿਣਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸੰਗ੍ਰਿਹ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ। ਹੁਣ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਕੀ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਭਾਜ (composite) ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ? ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਸੋਚਦੇ ਹੋ? ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਸੋਚਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕੋਈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜੋ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ (powers) ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਨਾ ਹੋਵੇ ? ਇਸਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਆਉ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡਨ ਕਰੀਏ, ਭਾਵ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਤੱਕ ਜੋ ਕੀਤਾ ਹੈ ਉਸਦਾ ਉਲਟਾ ਕਰੀਏ।

ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਰੁੱਖ (factor tree) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸ ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਜਾਣੂੰ ਹੋ। ਆਉ ਇੱਕ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਮੰਨ ਲਉ 32760 ਲਈਏ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੇਠਾਂ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਕਰੀਏ :



ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਅਸੀਂ 32760 ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਕਰ ਲਿਆ ਹੈ ਜੋ $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ ਹੈ। ਭਾਵ $32760 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$ ਹੈ, ਜੋ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਆਓ ਇੱਕ ਹੋਰ ਸੰਖਿਆ ਮੰਨ ਲਓ 123456789 ਲੈ ਕੇ ਇਸ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਲਿਖੀਏ। ਇਸ ਨੂੰ $3^2 \times 3803 \times 3607$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਬੇਸ਼ਕ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਸਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ ਕਿ 3803 ਅਤੇ 3607 ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ (ਕੁਝ ਹੋਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲੈ ਕੇ ਤੁਸੀਂ ਆਪ ਵੀ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ) ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਅਨੁਮਾਨ (conjecture) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਵਿੱਚ ਇਹ ਮੂਲਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਸਥਾਨ ਰੱਖਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਕਾਰਣ ਇਹ ਕਥਨ **ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ (Fundamental Theorem of Arithmetic)** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਆਓ ਇਸ ਪਰਿਮੇਯ ਨੂੰ ਉਪਚਾਰਿਕ (formal) ਤੌਰ 'ਤੇ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਕਰੀਏ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 1.12 (ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ) ਹਰ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ (composite number) ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (prime numbers) ਦੇ ਇੱਕ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ (ਦਰਸਾਇਆ) ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਗੁਣਨਖੰਡਨ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਤਰਤੀਬ (ਕ੍ਰਮ) (order) ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲ ਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਹੋਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.2 ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਵਰਨਣ ਯੂਕਲਿਡ ਦੇ ਐਲੀਮੈਂਟਸ ਦੀ ਪੁਸਤਕ IX ਵਿੱਚ ਸਾਧਯ (proposition) 14 ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ ਸੀ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਸਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਸਬੂਤ ਕਾਰਲ ਫ੍ਰੈਡਰਿਕ ਗਾੱਸ *(Carl Friedrich Guass)* ਦੀ ਆਪਣੀ ਲਿਖਤ ਡਿਸਕਿਊਸ਼ਸ ਅਰਥਮੇਟਿਕੀ *(Disquisitions Arithmeticae)* ਵਿੱਚ ਸੀ।

ਕਾਰਲ ਫ੍ਰੈਡਰਿਕ ਗਾੱਸ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ 'ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀਆਂ ਦੇ ਰਾਜ ਕੁਮਾਰ' ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਨਾਮ ਹਰ ਸਮੇਂ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਰਹੇ ਤਿੰਨ ਮਹਾਨਤਮ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀਆਂ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਆਰਕੀਮੀਡਿਜ਼ (Archimedes) ਅਤੇ ਨਿਊਟਨ (Newton) ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਵਿਗਿਆਨ ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚ ਹੀ ਮੌਲਿਕ ਯੋਗਦਾਨ ਹੈ।

ਕਾਰਲ ਫ੍ਰੈਡਰਿਕ ਗਾੱਸ
(1777 – 1855)

ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਕਹਿੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਹੋਰ ਵੀ ਕੁਝ ਕਹਿੰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਕਹਿੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਬਿਨਾਂ ਇਹ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਿਆਂ ਕਿ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਕਿਸ ਤਰਤੀਬ (ਕ੍ਰਮ)

(order) ਵਿੱਚ ਹਨ, ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਤਰੀਕੇ (unique way) ਨਾਲ ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ ਦਾ ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਹੀ ਤਰੀਕਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ 'ਤੇ ਕੋਈ ਵਿਚਾਰ ਨਹੀਂ ਕਰਦੇ। ਇਸ ਲਈ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਸੀਂ $2 \times 3 \times 5 \times 7$ ਨੂੰ ਉਹ ਹੀ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ ਜੋ $3 \times 5 \times 7 \times 2$, ਨੂੰ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਇਹਨਾਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਕ੍ਰਮ ਨੂੰ ਵੀ ਅਸੀਂ $2 \times 3 \times 5 \times 7$ ਵਰਗਾ ਹੀ ਮੰਨਾਂਗੇ। ਇਸ ਤੱਥ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਨ, ਉਸਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੀ ਤਰਤੀਬ (ਕ੍ਰਮ) ਨੂੰ ਛੱਡਦੇ ਹੋਏ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜਦੋਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ x ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਉਸਨੂੰ $x = p_1p_2 \ldots p_n$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ਆਦਿ ਵੱਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਭਾਵ $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n$ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀਆਂ (ਬਰਾਬਰ) ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਕਰ ਲਈਏ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ (powers) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ, $32760 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$

ਇੱਕ ਵਾਰ ਇਹ ਨਿਰਣਾ ਲੈਣ ਤੋਂ ਬਾਦ ਕਿ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੀ ਇਹ ਤਰਤੀਬ ਵਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇਗੀ ਤਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਹੋਣਗੇ।

ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਹੋਰ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਹੀ ਅਨੇਕਾਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਹਨ। ਆਓ ਇਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਸੰਖਿਆਵਾਂ 4^n 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ n ਦਾ ਕੋਈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ 4^n ਅੰਕ ਸਿਫ਼ਰ (0) 'ਤੇ ਸਮਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ n ਦੇ ਲਈ ਸੰਖਿਆ 4^n ਸਿਫ਼ਰ 'ਤੇ ਸਮਾਪਤ ਹੋਵੇਗੀ ਤਾਂ ਇਹ 5 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੋਵੇਗੀ। ਭਾਵ 4^n ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿੱਚ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ 5 ਆਉਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $4^n = (2)^{2n}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 4^n ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ 2 ਹੀ ਆ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਿੱਲਖਣਤਾ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਯਕੀਨ ਦਿਵਾਉਂਦੀ ਹੈ ਕਿ 4^n ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿੱਚ 2 ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਹੋਰ ਕੋਈ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ n ਨਹੀਂ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਲਈ 4^n ਅੰਕ ਸਿਫ਼ਰ 0 'ਤੇ ਸਮਾਪਤ ਹੋਵੇਗੀ।

ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ, ਇਹ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਅਤੇ ਲ.ਸ.ਵ (L.C.M) ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ, ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਨਾਮ ਦਾ ਜ਼ਿਕਰ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ

ਗਿਆ ਸੀ। ਇਸ ਤਰੀਕੇ ਨੂੰ *ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਨ ਵਿਧੀ (prime factorisation method)* ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਆਉ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਇਸ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਫਿਰ ਤੋਂ ਯਾਦ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਸੰਖਿਆਵਾਂ 6 ਅਤੇ 20 ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਅਤੇ ਲ.ਸ.ਵ (L.C.M) ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $6 = 2^1 \times 3^1$ ਅਤੇ $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$ ਹੈ।

ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਤੁਸੀਂ ਮ.ਸ.ਵ. (H.C.F) $(6, 20) = 2$ ਅਤੇ ਲ.ਸ.ਵ. (L.C.M.) $(6, 20) = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ HCF $(6, 20) = 2^1$ = **ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਸਾਂਝੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਘਾਤ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਅਤੇ**

LCM $(6, 20) = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$ = **ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਆਏ ਹਰ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ**

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚੋਂ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖ ਲਿਆ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ HCF $(6, 20) \times$ LCM $(6, 20) = 6 \times 20$ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਇਸਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਲਈ **HCF $(a, b) \times$ LCM $(a, b) = a \times b$** ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਿੱਟੇ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ *LCM* ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਪਤਾ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ 96 ਅਤੇ 404 ਦਾ HCF ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇਸ ਦਾ LCM ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: 96 ਅਤੇ 404 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$96 = 2^5 \times 3,\ 404 = 2^2 \times 101$$

ਇਸ ਲਈ, ਇਹਨਾਂ ਦੋਹਾਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ ਭਾਵ HCF $(96,404) = 2^2 = 4$

ਨਾਲ ਹੀ
$$\text{LCM}(96, 404) = \frac{96 \times 404}{\text{HCF}(96, 404)} = \frac{96 \times 404}{4} = 9696$$

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਸੰਖਿਆਵਾਂ 6, 72 ਅਤੇ 120 ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਅਤੇ ਲ.ਸ.ਵ (L.C.M) ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ :

$$6 = 2 \times 3,\ 72 = 2^3 \times 3^2 \text{ ਅਤੇ } 120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

2^1 ਅਤੇ 3^1 ਹਰ ਇੱਕ ਸਾਂਝੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੀਆਂ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, HCF $(6, 72, 120) = 2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$

2^3, 3^2 ਅਤੇ 5^1 ਹਰ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਘਾਤ ਹੈ, ਜੋ ਤਿੰਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, LCM $(6, 72, 120) = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$

ਟਿੱਪਣੀ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $6 \times 72 \times 120 \neq$ HCF $(6, 72, 120) \times$ LCM $(6, 72, 120)$, ਭਾਵ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਉਹਨਾਂ ਦੇ HCF ਅਤੇ LCM ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 1.2

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ:

   (i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

2. ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਜੋੜਿਆਂ ਦਾ HCF ਅਤੇ LCM ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ = HCF$\times$LCM ਹੈ।

   (i) 26 ਅਤੇ 91 (ii) 510 ਅਤੇ 92 (iii) 336 ਅਤੇ 54

3. ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ HCF ਅਤੇ LCM ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) 12, 15 ਅਤੇ 21 (ii) 17, 23 ਅਤੇ 29 (iii) 8, 9 ਅਤੇ 25

4. HCF $(306, 657) = 9$ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। LCM $(306, 657)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ n ਦੇ ਲਈ ਸੰਖਿਆ 6^n ਅੰਕ ਜ਼ਿਫ਼ਰ (0) 'ਤੇ ਸਮਾਪਤ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।

6. ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ ਕਿ $7 \times 11 \times 13 + 13$ ਅਤੇ $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਕਿਉਂ ਹਨ।

7. ਕਿਸੇ ਖੇਡ ਦੇ ਮੈਦਾਨ ਦੇ ਚਾਰੇ ਪਾਸੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਰਸਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਮੈਦਾਨ ਦਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਲਗਾਉਣ ਲਈ ਸੋਨੀ ਨੂੰ 18 ਮਿੰਟ ਲਗਦੇ ਹਨ, ਜਦ ਕਿ ਇਸ ਮੈਦਾਨ ਦਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਲਗਾਉਣ ਲਈ ਰਵੀ ਨੂੰ 12 ਮਿੰਟ ਲੱਗਦੇ ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਉਹ ਦੋਨੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਸਥਾਨ ਅਤੇ ਇੱਕੋ ਹੀ ਸਮੇਂ 'ਤੇ ਚਲਣਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇੱਕ ਹੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਕਿੰਨੇ ਸਮੇਂ ਬਾਅਦ ਉਹ ਦੋਵੇਂ ਸ਼ੁਰੂ ਵਾਲੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਦੁਬਾਰਾ ਮਿਲਣਗੇ।

1.4 ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਦੁਹਰਾਈ

IX ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਤੁਹਾਨੂੰ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਗੁਣਾਂ ਤੋਂ ਜਾਣੂ ਕਰਵਾਇਆ ਗਿਆ ਸੀ। ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਸੀ ਅਤੇ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਅਤੇ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਮਿਲਕੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (real numbers) ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਸਿੱਖਿਆ ਸੀ ਕਿ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਥਾਨ ਨਿਰਧਾਰਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਫਿਰ ਵੀ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਨਹੀਂ ਸੀ ਕੀਤਾ ਕੀ ਇਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹਨ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ਅਤੇ ਆਮ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, $\sqrt{p}$

ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ p ਇਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਆਪਣੇ ਸਬੂਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ, ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੈ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ।

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ ਸੰਖਿਆ 's' ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਉਸ ਨੂੰ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਾ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੋਵੇ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $q \neq 0$ ਹੈ। ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣੂ ਹੋ, ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਹਨ:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0.10110111011110\ldots, \text{ ਆਦਿ ।}$$

ਇਸ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ $\sqrt{2}$ ਨੂੰ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਸਿੱਧ ਕਰੀਏ, ਸਾਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਪਵੇਗੀ, ਇਸਦਾ ਸਬੂਤ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪਰਿਮੇਯ 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 1.3 : ਮੰਨ ਲਉ p ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ p, a^2 ਨੂੰ ਭਾਗ (ਵੰਡਦੀ) ਕਰਦੀ ਹੈ, ਤਾਂ p, a ਨੂੰ ਵੀ ਭਾਗ ਕਰੇਗੀ। ਇੱਥੇ a ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

***ਸਬੂਤ :** ਮੰਨ ਲਉ a ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਦੇ ਹਨ: $a = p_1 p_2 \ldots p_n$ ਜਿੱਥੇ $p_1, p_2, \ldots p_n$ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਪਰੰਤੂ ਜਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ ਇਹ ਅੱਲਗ-ਅੱਲਗ ਹੋਣ।

ਇਸ ਲਈ $a^2 = (p_1 p_2 \ldots p_n)(p_1 p_2 \ldots p_n) = p_1^2 p_2^2 \ldots p_n^2$

ਹੁਣ, ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ p, a^2 ਨੂੰ ਭਾਗ (ਵੰਡਦੀ) ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ p, a^2 ਦਾ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਿਲੱਖਣਤਾ ਦੇ ਗੁਣ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ a^2 ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਕੇਵਲ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ਹੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ p ਨੂੰ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੋਣਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਹੁਣ, ਕਿਉਂਕਿ $a = p_1 p_2 \ldots p_n$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ p, a ਨੂੰ ਜ਼ਰੂਰ ਭਾਗ ਕਰੇਗਾ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸਦਾ ਸਬੂਤ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਹ ਸਬੂਤ ਉਸ ਤਕਨੀਕ 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ 'ਸਵੈਵਿਰੋਧ ਰਾਹੀਂ ਸਬੂਤ' (proof by contradiction) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। (ਇਸ ਤਕਨੀਕ ਦੀ ਵਿਸਥਾਰਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਚਰਚਾ ਅੰਤਿਕਾ – 1 ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ)।

ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) 1.4 : $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਅਸੀਂ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਇਹ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ , ਅਸੀਂ ਦੋ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ r ਅਤੇ s ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

* ਇਹ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

$\sqrt{2} = \frac{r}{s}$ ਹੋਵੇ ਅਤੇ $s (\neq 0)$ ਹੋਵੇ। ਮੰਨ ਲਓ r ਅਤੇ s ਵਿੱਚ, 1 ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਕੋਈ ਹੋਰ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨੂੰ r ਅਤੇ s ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਕੇ $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ a ਅਤੇ b ਸਹਿ ਅਭਾਜ (co-prime) ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ : $b\sqrt{2} = a$ ਹੋਇਆ।

ਦੋਹਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਵਰਗ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$2b^2 = a^2$$

ਇਸ ਲਈ : 2, a^2 ਨੂੰ ਵੰਡਦਾ (ਭਾਗ ਕਰਦਾ) ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.3 ਦੁਆਰਾ 2, a ਨੂੰ ਵੀ ਵੰਡੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ $a = 2c$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ c ਕੋਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

a ਦਾ ਮੁੱਲ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $2b^2 = 4c^2$,ਭਾਵ $b^2 = 2c^2$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ 2, b^2 ਨੂੰ ਵੰਡਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ 2, b ਨੂੰ ਵੀ ਵੰਡੇਗਾ (ਪ੍ਰਮੇਯ ੧.੩ ਵਿੱਚ $p = 2$ ਲੈਣ 'ਤੇ)।

ਇਸ ਲਈ a ਅਤੇ b ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ 2 ਹੈ।

ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਹੈ ਕਿ a ਅਤੇ b ਵਿੱਚ 1 ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਹ ਉਲਟ ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਤਰੁੱਟੀ ਵਾਲੀ ਗੱਲ ਮੰਨੀ ਸੀ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ: ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਇਹ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਦੋ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ $b (\neq 0)$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ a ਅਤੇ b ਵਿੱਚ, 1 ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਉਸ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇ ਕੇ a ਅਤੇ b ਨੂੰ ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਲਈ $b\sqrt{3} = a$ ਹੈ।

ਦੋਵੇਂ ਪਾਸੇ ਵਰਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $3b^2 = a^2$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ a^2, 3 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.3 ਦੁਆਰਾ 3, a ਨੂੰ ਵੀ ਭਾਗ ਕਰੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ $a = 3c$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ c ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

a ਦੇ ਇਸ ਮੁੱਲ ਨੂੰ $3b^2 = a^2$ ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ

$3b^2 = 9c^2$ ਭਾਵ $b^2 = 3c^2$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ b^2, 3 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.3 ਦੁਆਰਾ b ਵੀ 3 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ a ਅਤੇ b ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਸਾਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ 3 ਹੈ।

ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਹੈ ਕਿ a ਅਤੇ b ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਹਨ। ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਉਲਟ ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਤਰੁੱਟੀ ਵਾਲੀ ਗੱਲ ਮੰਨੀ ਸੀ ਕਿ $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੱਸਿਆ ਸੀ ਕਿ:

- ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ ਘਟਾਉ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ
- ਇੱਕ ਸਿਫਰ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਜਾਂ ਭਾਗਫਲ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ, ਉਪਰੋਕਤ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ $5-\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ: ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ $5-\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਭਾਵ ਅਸੀਂ ਦੋ ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b $(b \neq 0)$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $5-\sqrt{3}=\frac{a}{b}$ ਹੋਵੇ।

ਇਸ ਲਈ $\quad 5-\frac{a}{b}=\sqrt{3}$ ਹੈ।

ਜਾਂ $\quad \sqrt{3}=5-\frac{a}{b}$ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ a ਅਤੇ b ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ $5-\frac{a}{b}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਭਾਵ $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਹੈ ਕਿ $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਹ ਉਲਟ ਸਾਨੂੰ ਸਾਡੇ ਗਲਤ ਮੰਨਣ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $5-\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $5-\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ $3\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਆਉ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ $3\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਭਾਵ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b $(b \neq 0)$ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ਹੋਵੇ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sqrt{2} = \frac{a}{3b}$ ਹੋਵੇ।

ਕਿਉਂਕਿ 3, a ਅਤੇ b ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ $\frac{a}{3b}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸ ਲਈ $\sqrt{2}$ ਵੀ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਹੈ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $3\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 1.3

1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\sqrt{5}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
2. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $3 + 2\sqrt{5}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
3. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹਨ :

   (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6 + \sqrt{2}$

1.5 ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਰੂਪ ਦੀ ਦੁਹਰਾਈ

IX ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ ਕਿ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸ਼ਾਂਤ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ (terminating decimal expansions) ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਫਿਰ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ (non-terminating repeating) ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਮੰਨ ਲਉ $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖੋਜ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ $\frac{p}{q}$ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ (ਰੂਪ) ਕਦੋਂ ਸ਼ਾਂਤ ਅਤੇ ਕਦੋਂ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਹੋਵੇਗੀ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੁਆਰਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਆਉ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ

(i) 0.375 (ii) 0.104 (iii) 0.0875 (iv) 23.3408

ਹੁਣ (i) $0.375 = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3}$ (ii) $0.104 = \frac{104}{1000} = \frac{104}{10^3}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10000} = \frac{875}{10^4}$ (iv) $23.3408 = \frac{233408}{10000} = \frac{233408}{10^4}$

ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਕੋਈ ਉਮੀਦ ਕਰੇਗਾ, ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ (ਲਿਖਿਆ) ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੰਨਾਂ ਦਾ ਹਰ 10 ਦੀ ਕੋਈ ਘਾਤ ਹੋਵੇਗਾ। ਆਉ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟ ਕੇ, ਇਹ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਕੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(i) $0.375 = \frac{375}{10^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{3}{2^3}$ (ii) $0.104 = \frac{104}{10^3} = \frac{13 \times 2^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{13}{5^3}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10^4} = \frac{7}{2^4 \times 5}$ (iv) $23.3408 = \frac{233408}{10^4} = \frac{2^2 \times 7 \times 521}{5^4}$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇੱਥੇ ਕੋਈ ਨਮੂਨਾ (Pattern) ਦੇਖ ਰਹੇ ਹੋ? ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਉਸ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਜਿਸਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਇੱਕ ਸ਼ਾਂਤ ਦਸ਼ਮਲਵ ਹੈ, ਇੱਕ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਲਿਆ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਹਨ ਅਤੇ ਹਰ (ਭਾਵ q) ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ 2 ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਜਾਂ 5 ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਜਾਂ ਦੋਹਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਹਨ। ਸਾਨੂੰ ਹਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਹੀ ਦਿਸਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ 10 ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ 2 ਅਤੇ 5 ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਹੀ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੋਣਗੀਆਂ।

ਭਾਵੇਂ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਘੱਟ ਹੀ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹੱਲ ਕਰਕੇ ਦੇਖੀਆਂ ਹਨ, ਫਿਰ ਵੀ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕੋਈ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੈ, ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਹਰ 10 ਦੀ ਕੋਈ ਘਾਤ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ 10 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਕੇਵਲ 2 ਅਤੇ 5 ਹੀ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟਕੇ ਅਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ ਅਤੇ n ਅਤੇ m ਕੋਈ ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਣ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਆਉ ਆਪਣੇ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਉਪਚਾਰਕ ਤੌਰ 'ਤੇ ਲਿਖੀਏ :

ਪ੍ਰਮੇਯ 1.5 ਮੰਨ ਲਉ x ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ (ਰੂਪ) ਸ਼ਾਂਤ ਹੈ। ਹੁਣ x ਨੂੰ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਹਨ ਅਤੇ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜਿੱਥੇ n, m ਕੋਈ ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਸੰਭਵ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਹੈਰਾਨ ਹੋ ਰਹੇ ਹੋਵੋਗੇ ਕਿ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.5 ਦਾ ਉਲਟ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ? ਭਾਵ

ਜੇਕਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਕੋਈ ਪ੍ਰਮੇਯ ਸੰਖਿਆ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ ਅਤੇ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ n ਅਤੇ m ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਕੀ $\frac{p}{q}$ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੋਵੇਗਾ?

ਆਉ ਹੁਣ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਕੀ ਉਪਰੋਕਤ ਕਥਨ ਦੇ ਸੱਚ ਹੋਣ ਦੇ ਕੋਈ ਸਪਸ਼ਟ ਕਾਰਣ ਹਨ। ਤੁਸੀਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੀ ਇਸ ਗੱਲ ਨਾਲ ਸਹਿਮਤ ਹੋਵੋਗੇ ਕਿ $\frac{a}{b}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਵੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ, ਜਿੱਥੇ b, 10 ਦੀ ਕੋਈ ਘਾਤ ਹੈ, ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ, ਇਹ ਅਰਥਪੂਰਣ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ, ਜਿੱਥੇ q, 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ, ਨੂੰ $\frac{a}{b}$ ਦੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਤੁਲ (equivalent) ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਵੇ, ਜਿੱਥੇ b, 10 ਦੀ ਕੋਈ ਘਾਤ ਹੋਵੇ। ਆਉ ਆਪਣੇ ਉੱਪਰ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਾਪਸ ਆਈਏ ਅਤੇ ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਕਰਨਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰੀਏ।

(i) $\frac{3}{8}=\frac{3}{2^3}=\frac{3\times5^3}{2^3\times5^3}=\frac{375}{10^3}=0.375$

(ii) $\frac{13}{125}=\frac{13}{5^3}=\frac{13\times2^3}{5^3\times2^3}=\frac{104}{10^3}=0.104$

(iii) $\frac{7}{80}=\frac{7}{2^4\times5}=\frac{7\times5^3}{2^4\times5^4}=\frac{875}{10^4}=0.0875$

(iv) $\frac{14588}{625}=\frac{2^2\times7\times521}{5^4}=\frac{2^6\times7\times521}{2^4\times5^4}=\frac{233408}{10^4}=23.3408$

ਇਸ ਲਈ, ਇਹ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਜਿੱਥੇ q, 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਨੂੰ $\frac{a}{b}$ ਦੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਤੁੱਲ (equivalent) ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਬਦਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ b, 10 ਦੀ ਕੋਈ ਘਾਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਇੱਕ ਸ਼ਾਂਤ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਹੋਵੇਗਾ। ਆਉ ਇਸ ਪਰਿਣਾਮ ਨੂੰ ਉਪਚਾਰਕ ਤੌਰ 'ਤੇ ਲਿਖੀਏ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 1.6 : ਮੰਨ ਲਉ $x=\frac{p}{q}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਹੈ ਕਿ q, 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ n ਅਤੇ m ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ x ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵੱਲ ਵੱਧਣ ਲੱਗੇ ਹਾਂ ਜਿੰਨਾਂ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ (non terminating) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਾਰ ਫਿਰ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈ ਕੇ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕੀ ਹੋ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਮਾਤ IX ਦੀ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਪਾਠ 1 ਦੀ ਉਦਾਹਰਣ 5 ਨੂੰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ $\frac{1}{7}$ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸੀ।

$$
\begin{array}{r|l}
 & 0.1428571 \\
7 & 10 \\
 & \underline{7} \\
 & 30 \\
 & \underline{28} \\
 & 20 \\
 & \underline{14} \\
 & 60 \\
 & \underline{56} \\
 & 40 \\
 & \underline{35} \\
 & 50 \\
 & \underline{49} \\
 & 10 \\
 & \underline{7} \\
 & 30
\end{array}
$$

ਇੱਥੇ ਬਾਕੀ 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, . . . ਹਨ ਅਤੇ ਭਾਜਕ 7 ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿਚ ਹਰ 7, 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.5 ਅਤੇ 1.6 ਤੋਂ, $\frac{1}{7}$ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਇੱਥੇ 0 ਬਾਕੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਆਵੇਗਾ (ਕਿਉਂ?) ਅਤੇ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਬਾਕੀ ਬਚਣ ਵਾਲੇ ਅੰਕ ਫਿਰ ਤੋਂ ਆਉਣੇ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋ ਜਾਣਗੇ। ਇਸ ਲਈ $\frac{1}{7}$ ਦੇ ਭਾਗਫਲ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਬਲਾਕ ਭਾਵ 142857 ਫਿਰ ਤੋਂ ਆਵੇਗਾ।

ਅਸੀਂ $\frac{1}{7}$ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਵਿੱਚ ਜੋ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਉਹ ਉਹਨਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ ਜੋ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ 1.5 ਅਤੇ 1.6 ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਨਹੀਂ ਆਉਂਦੀ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਪ੍ਰਮੇਯ 1.7 ਮੰਨ ਲਉ $x = \frac{p}{q}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਹੈ ਕਿ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ n ਅਤੇ m ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਤਾਂ x ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਤੋਂ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸ਼ਾਂਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਾਂ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 1.4

1. ਬਿਨਾਂ ਲੰਬੀ ਵੰਡ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਕਰਦਿਆਂ ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹਨ ਜਾਂ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਹਨ :

(i) $\frac{13}{3125}$ (ii) $\frac{17}{8}$ (iii) $\frac{64}{455}$

(iv) $\frac{15}{1600}$ (v) $\frac{29}{343}$ (vi) $\frac{23}{2^3 5^2}$

(vii) $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$ (viii) $\frac{6}{15}$ (ix) $\frac{35}{50}$ (x) $\frac{77}{210}$

2. ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਲਿਖੋ ਜੋ ਸ਼ਾਂਤ ਹਨ।

3. ਕੁਝ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਹਨ। ਹਰ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਲਈ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ ਸੰਖਿਆ ਪਰਿਮੇਯ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੈ ਤਾਂ q ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ?

(i) 43.123456789 (ii) 0.120120012000120000. . . (iii) $43.\overline{123456789}$

1.6 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ:

1. ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ :

   ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਲਈ ਅਸੀਂ $a = bq + r, 0 \le r < b$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲੀਆਂ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ q ਅਤੇ r ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਭਾਵ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।

2. ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ : ਇਹ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ $b, (a > b)$ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

   ਪਗ 1 : q ਅਤੇ r ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਯੂਕਲਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ $a = bq + r, 0 \le r < b$ ਹੈ।

   ਪਗ 2 : ਜੇਕਰ $r = 0$ ਹੈ ਤਾਂ HCF = b ਹੈ। ਜੇਕਰ $r \ne 0$ ਹੈ ਤਾਂ b ਅਤੇ r ਉੱਪਰ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ।

   ਪਗ 3 : ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਉਦੋਂ ਤੱਕ ਜਾਰੀ ਰੱਖੋ ਜਦ ਤੱਕ ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਾ ਹੋ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਾਲਾ ਭਾਜਕ ਹੀ HCF (a, b) ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ HCF (a, b) = HCF (b, r)

3. ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ :

   ਹਰ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ

(ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਕੀਤਾ) ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਉੱਪਰ ਕੋਈ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤੇ ਬਿਨਾਂ ਕਿ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਕਿਸ ਤਰਤੀਬ ਵਿੱਚ ਆ ਰਹੇ ਹਨ।

4. ਜੇਕਰ p ਕੋਈ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ p, a^2 ਨੂੰ ਵੰਡਦਾ (ਭਾਗ) ਹੈ ਤਾਂ p, a ਨੂੰ ਵੀ ਵੰਡੇਗਾ। ਇੱਥੇ a ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

5. ਸਬੂਤ ਕਿ $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ ਆਦਿ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

6. ਮੰਨ ਲਓ x ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ x ਨੂੰ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਹਨ ਅਤੇ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ। ਜਿੱਥੇ n, m ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

7. ਮੰਨ ਲਓ $x = \frac{p}{q}$ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਕਿ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ। ਜਿੱਥੇ n, m ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ x ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੋਵੇਗਾ।

8. ਮੰਨ ਲਓ $x = \frac{p}{q}$ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਕਿ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ n, m ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ x ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਹੋਵੇਗਾ।

ਪਾਠਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼

ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਹੈ:

HCF $(p, q, r) \times$ LCM $(p, q, r) \neq p \times q \times r$, ਜਿਥੇ p, q, r ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ (ਉਦਾਹਰਣ 8 ਦੇਖੋ)। ਜਦੋਂ ਕਿ ਤਿੰਨ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ p, q ਅਤੇ r ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਦਿਤੇ ਪਰਿਣਾਮ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ:

$$\text{LCM}(p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot \text{HCF}(p, q, r)}{\text{HCF}(p, q) \cdot \text{HCF}(q, r) \cdot \text{HCF}(p, r)}$$

$$\text{HCF}(p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot \text{LCM}(p, q, r)}{\text{LCM}(p, q) \cdot \text{LCM}(q, r) \cdot \text{LCM}(p, r)}$$

ਬਹੁਪਦ (Polynomials) 2

2.1 ਭੂਮਿਕਾ

IX ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੇ ਬਹੁਪਦਾਂ (polynomials) ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ (degree) ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਚਲ x ਦੇ ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਵਿੱਚ x ਦੀ ਵੱਡੀ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਘਾਤ (power) ਨੂੰ ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਘਾਤ (degree) ਆਖਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, $4x+2$ ਦੇ x ਵਿੱਚ ਚਲ 1 ਦਾ ਬਹੁਪਦ ਹੈ, $2y^2-3y+4$ ਚਲ y ਵਿੱਚ ਘਾਤ 2 ਦਾ ਬਹੁਪਦ ਹੈ, $5x^3-4x^2+x-\sqrt{2}$ ਚਲ x ਵਿੱਚ ਘਾਤ 3 ਦਾ ਬਹੁਪਦ ਹੈ ਅਤੇ $7u^6-\frac{3}{2}u^4+4u^2+u-8$ ਚਲ u ਵਿੱਚ ਘਾਤ 6 ਦਾ ਬਹੁਪਦ ਹੈ। ਵਿਅੰਜਕ $\frac{1}{x-1}$, $\sqrt{x}+2$, $\frac{1}{x^2+2x+3}$ ਆਦਿ ਬਹੁਪਦ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਘਾਤ 1 ਦੇ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ **ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ (Linear polynomial)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, $2x-3$, $\sqrt{3}x+5$, $y+\sqrt{2}$, $x-\frac{2}{11}$, $3z+4$, $\frac{2}{3}u+1$ ਆਦਿ ਸਾਰੇ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਕਿ $2x+5-x^2$, x^3+1 ਆਦਿ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਬਹੁਪਦ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਘਾਤ 2 ਦੇ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ **ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ (quadratic polynomial)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਦੋ ਘਾਤ (quadratic) ਸ਼ਬਦ ਕਵਾਡਰੇਟ (quadrate) ਸ਼ਬਦ ਤੋਂ ਬਣਿਆ ਹੈ, ਜਿਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਵਰਗ। $2x^2+3x-\frac{2}{5}$, y^2-2, $2-x^2+\sqrt{3}x$, $\frac{u}{3}-2u^2+5$, $\sqrt{5}v^2-\frac{2}{3}v$, $4z^2+\frac{1}{7}$, ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹਨ (ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ)। ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, x ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ax^2+bx+c, ਜਿੱਥੇ a,b,c ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $a \neq 0$ ਹੈ, ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਘਾਤ 3 ਦਾ ਬਹੁਪਦ **ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ (cubic polynomial)** ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ ਹਨ :

$$2-x^2, x^3, \sqrt{2}x^3, 3-x^2+x^3, 3x^3-2x^2+x-1$$

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਹੈ :

$$ax^3+bx^2+cx+d,$$

ਜਿੱਥੇ a, b, c, d ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $a \neq 0$ ਹੈ।

ਹੁਣ ਬਹੁਪਦ $p(x)=x^2-3x-4$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇਸ ਬਹੁਪਦ ਵਿੱਚ $x=2$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $p(2)=2^2-3\times 2-4=-6$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। x^2-3x-4 ਵਿੱਚ, x ਨੂੰ 2 ਰੱਖਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਮੁੱਲ -6; x^2-3x-4 ਦਾ $x=2$ ਤੇ ਮੁੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $p(0)$, $p(x)$ ਦਾ $x=0$ 'ਤੇ ਮੁੱਲ ਹੈ, ਜੋ -4 ਹੈ।

ਜੇਕਰ $p(x)$, x ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਹੁਪਦ ਹੈ ਅਤੇ k ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ $p(x)$ ਵਿੱਚ x ਨੂੰ k ਰੱਖਣ ਤੇ ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ **$p(x)$ ਦਾ $x=k$ 'ਤੇ ਮੁੱਲ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ** ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ $p(k)$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

$p(x)=x^2-3x-4$ ਦਾ $x=-1$ 'ਤੇ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹੈ? ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$p(-1)=(-1)^2-\{3\times(-1)\}-4=0$

ਨਾਲ ਹੀ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $p(4)=4^2-(3\times 4)-4=0$ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ $p(-1)=0$ ਅਤੇ $p(4)=0$, ਇਸ ਲਈ -1 ਅਤੇ 4 ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ x^2-3x-4 ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ (zeroes) ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ k ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਜੇਕਰ $p(k)=0$ ਹੋਵੇ।

ਤੁਸੀਂ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ ਕਿਵੇਂ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਜੇਕਰ $p(x)=2x+3$ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ k ਹੈ, ਤਾਂ $p(k)=0$ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ $2k+3=0$ ਭਾਵ $k=-\frac{3}{2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ $p(x)=ax+b$ ਦਾ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ k ਹੈ ਤਾਂ $p(k)=ak+b=0$ ਭਾਵ $k=\frac{-b}{a}$ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ, ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ $ax+b$ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ $\frac{-b}{a}$, $\frac{-(\text{ਅਚਲ ਪਦ})}{x \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ ਉਸਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ। ਕੀ ਇਹ ਹੋਰ ਬਹੁਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਵੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ? ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਕੀ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਵੀ ਉਸਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ?

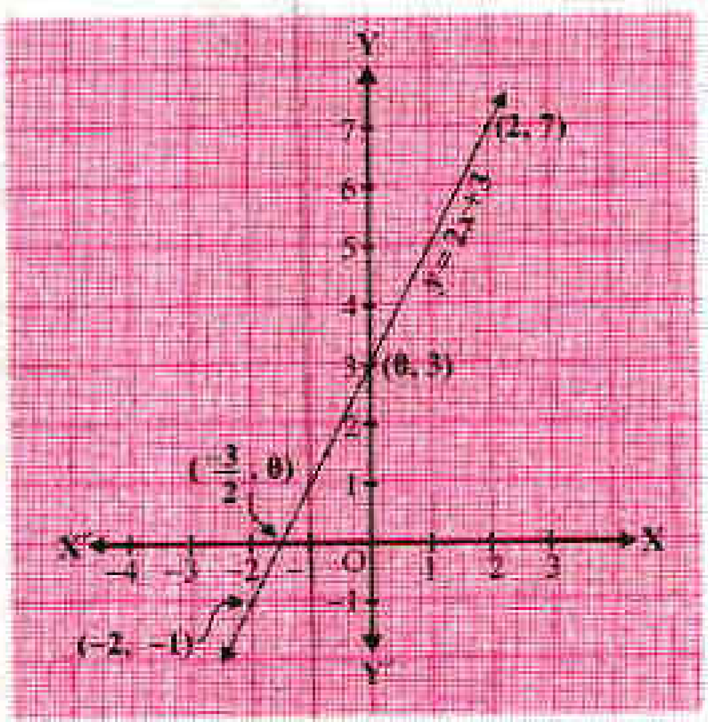
ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਦਾ ਜਤਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੰਡ ਵਿਧੀ (division algorithm) ਦਾ ਵੀ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

2.2 ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਰਥ (Geometrical Meaning of the Zeroes of a Polynomial)

ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ k ਬਹੁਪਦਾਂ $p(x)$ ਦਾ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, ਜੇਕਰ $p(k) = 0$ ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਇੰਨੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਕਿਉਂ ਹਨ? ਇਸਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਲਈ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਰੇਖੀ ਅਤੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਆਲੇਖੀ **(graphical)** ਨਿਰੂਪਣ ਦੇਖਾਂਗੇ ਅਤੇ ਫਿਰ ਉਸਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਰਥ ਦੇਖਾਂਗੇ।

ਪਹਿਲਾਂ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ $ax + b, \neq 0$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਤੁਸੀਂ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ ਕਿ $y = ax + b$ ਦਾ ਆਲੇਖ (graph) ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $y = 2x + 3$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ ਬਿੰਦੂਆਂ $(-2, -1)$ ਅਤੇ $(2, 7)$ ਤੋਂ ਨਿਕਲਣ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੈ।

x	-2	2
$y = 2x + 3$	-1	7



ਚਿੱਤਰ 2.1

ਚਿੱਤਰ 2.1 ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ $y = 2x + 3$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ x-ਧੁਰੇ *(axis)* ਨੂੰ $x = -1$ ਅਤੇ $x = -2$ ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ ਭਾਵ $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ $2x + 3$ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ $-\frac{3}{2}$ ਹੈ। ਭਾਵ ਬਹੁਪਦ $2x + 3$ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦਾ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $y = 2x + 3$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ $ax + b, a \neq 0$ ਦੇ ਲਈ $y = ax + b$ ਦਾ ਗਰਾਫ਼ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੈ ਜੋ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਠੀਕ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ $ax + b, a \neq 0$ ਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, ਜੋ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦਾ x–ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $y = ax + b$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ਼ x–ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਆਉ ਅਸੀਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਕਿਸੇ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਰਥ ਨੂੰ ਸਮਝੀਏ। ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $x^2 - 3x - 4$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਆਉ ਦੇਖੀਏ ਕਿ $y = x^2 - 3x - 4$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ ਕਿਸ *ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਦਿਖਾਈ

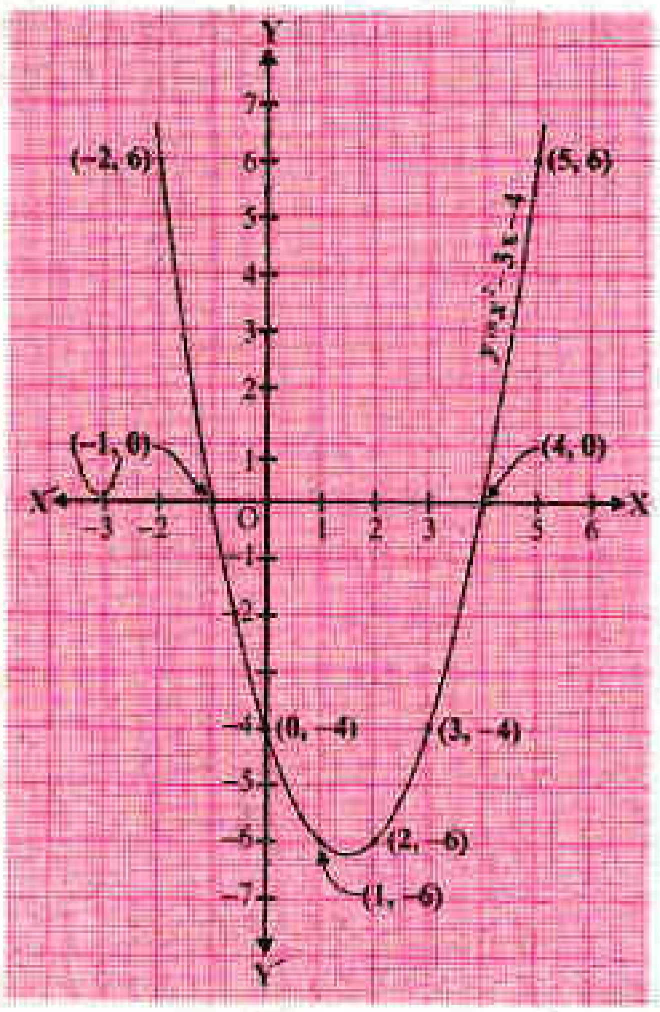
* ਦੋ ਘਾਤੀ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ ਖਿੱਚਣਾ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਇਸਦਾ ਮੁਲਾਂਕਣ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ x ਦੇ ਕੁਝ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ $y = x^2 - 3x - 4$ ਦੇ ਕੁਝ ਮੁੱਲ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਰਣੀ 2.1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 2.1

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 3x - 4$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਉਪਰੋਕਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਅੰਕਿਤ ਕਰੀਏ ਅਤੇ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਖਿੱਚੀਏ ਤਾਂ ਇਹ ਚਿੱਤਰ 2.2 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਗਏ ਵਰਗਾ ਹੋਵੇਗਾ।



ਚਿੱਤਰ 2.2

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ ਦੇ ਲਈ ਸੰਗਤ ਸਮੀਕਰਣ $y = ax^2 + bx + c$ ਦੇ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਦਾ ਅਕਾਰ ਜਾਂ ਤਾਂ ਉੱਪਰ ਵੱਲ ਖੁੱਲ੍ਹਾ $\cup$ ਵਰਗਾ ਜਾਂ ਹੇਠਲੇ ਪਾਸੇ ਖੁੱਲ੍ਹਾ $\cap$ ਵਰਗਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਜੋ ਇਸ 'ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰੇਗਾ ਕਿ $a > 0$ ਹੈ ਜਾਂ $a < 0$ ਹੈ (ਇਹਨਾਂ ਵਕਰਾਂ ਨੂੰ **ਪੈਰਾਬੋਲਾ (parabola)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ)।

ਸਾਰਣੀ 2.1 ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ –1 ਅਤੇ 4 ਹਨ। ਇਸ ਉੱਪਰ ਵੀ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ –1 ਅਤੇ 4 ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ ਜਿੱਥੇ $y = x^2 - 3x - 4$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ਼ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $x^2 - 3x - 4$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $y = x^2 - 3x - 4$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ਼ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

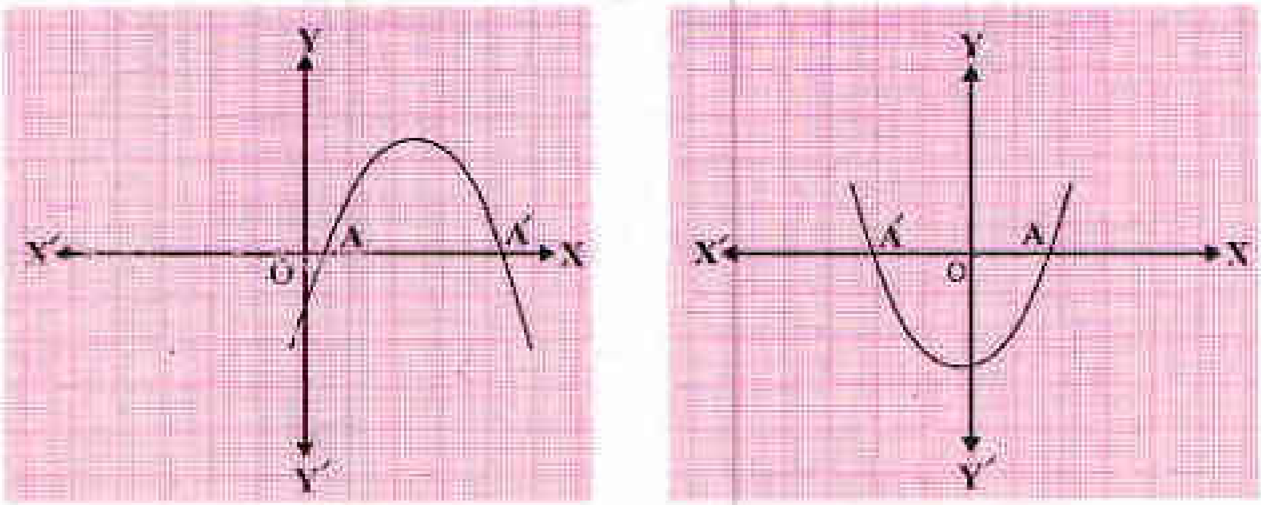
ਇਹ ਤੱਥ ਸਾਰੀਆਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ, ਭਾਵ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x– ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $y = ax^2 + bx + c$ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਪੈਰਾਬੋਲਾ (parabola) x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

$y = ax^2 + bx + c$ ਦੇ ਆਲੇਖ ਦੇ ਅਕਾਰ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ 'ਤੇ ਤਿੰਨ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ

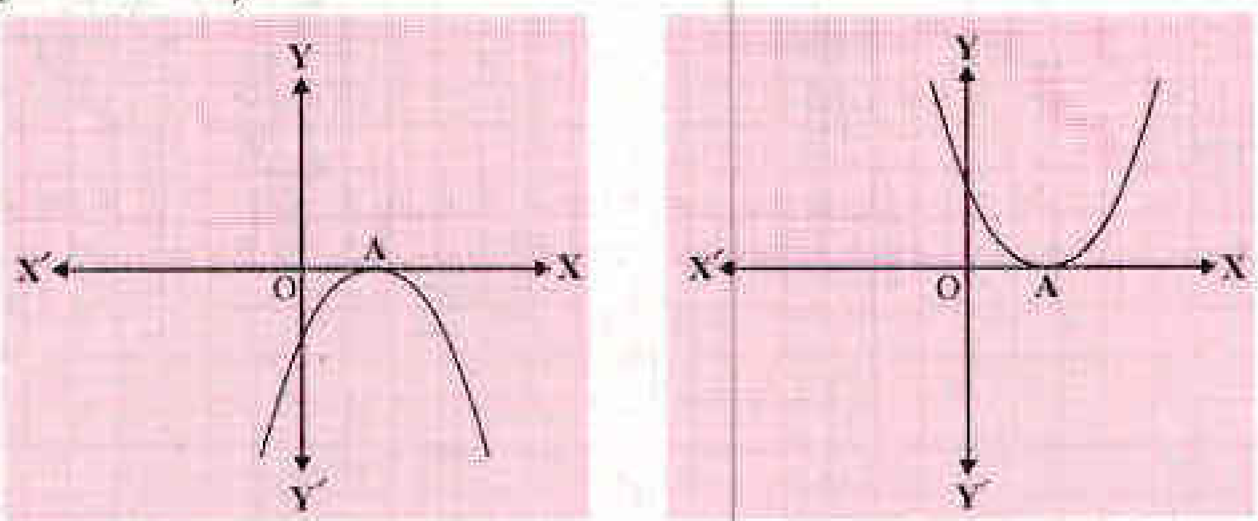
(i) : ਜਿੱਥੇ ਆਲੇਖ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਅੱਲਗ-ਅੱਲਗ ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ A′ ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ A ਅਤੇ A′ ਦੇ x–ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$ ਦੇ ਦੋ ਸਿਫ਼ਰ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 2.3)।



ਚਿੱਤਰ 2.3

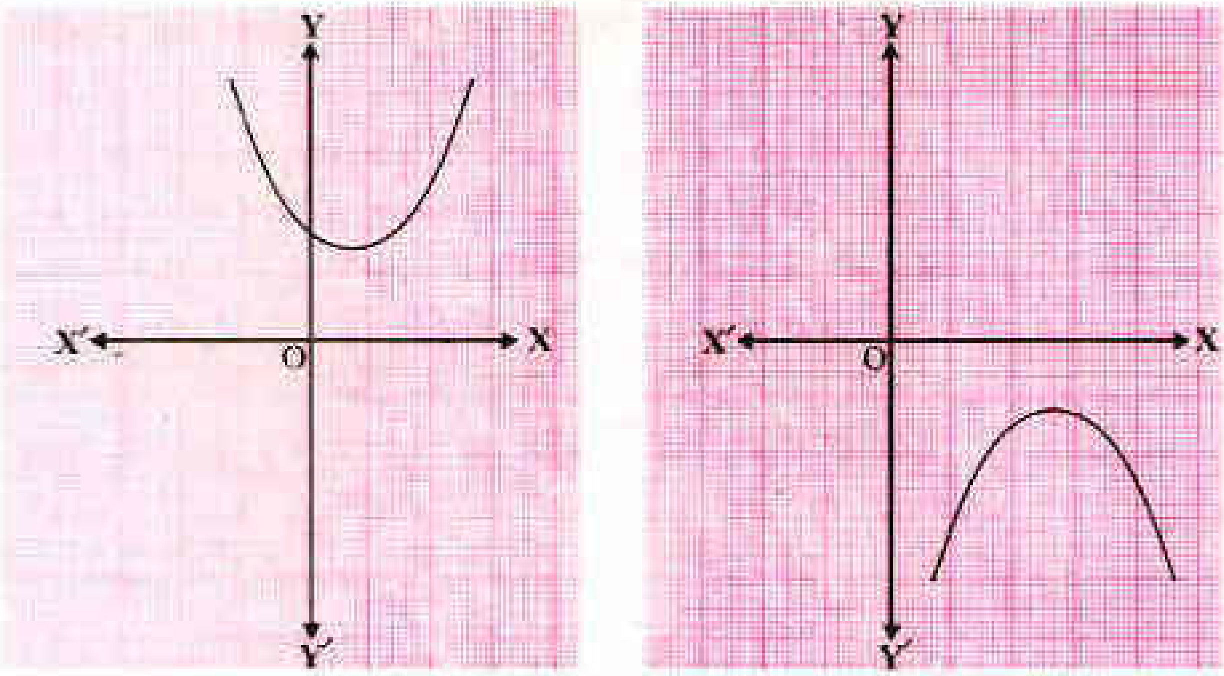
ਸਥਿਤੀ (ii) : ਇੱਥੇ ਆਲੇਖ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਭਾਵ ਦੋ ਸੰਪਾਤੀ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਥਿਤੀ (i) ਦੇ ਦੋ ਬਿੰਦੂ A ਅਤੇ A′ ਇੱਥੇ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋ ਕੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ A ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 2.4)।



ਚਿੱਤਰ 2.4

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, A ਦਾ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$ ਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ (iii) ਇੱਥੇ ਆਲੇਖ ਜਾਂ ਤਾਂ ਪੂਰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ x–ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਉੱਪਰ ਜਾਂ ਤਾਂ ਪੂਰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ x–ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਹੇਠਾਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਇਹ x–ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕਿਤੇ ਵੀ ਨਹੀਂ ਕੱਟਦਾ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 2.5)।



ਚਿੱਤਰ 2.5

ਇਸ ਲਈ, ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$ ਦਾ ਕੋਈ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਸੀਂ ਜਿਮਾਇਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਦੋ ਅੱਲਗ-ਅੱਲਗ ਸਿਫ਼ਰ ਜਾਂ ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਸਿਫ਼ਰ (ਭਾਵ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ) ਜਾਂ ਕੋਈ ਵੀ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਇਹ ਵੀ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਘਾਤ 2 ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਰਥ ਬਾਰੇ ਕੀ ਉਮੀਦ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਆਉ ਇਸਦਾ ਪਤਾ ਕਰੀਏ। ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $x^3 - 4x$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਇਹ ਦੇਖਣ ਦੇ ਲਈ ਕਿ $y = x^3 - 4x$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੱਗਦਾ ਹੈ, ਆਉ x ਦੇ ਕੁਝ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ y ਦੇ ਕੁਝ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ 2.2 ਵਿੱਚ ਸੂਚੀ ਬੱਧ ਕਰੀਏ।

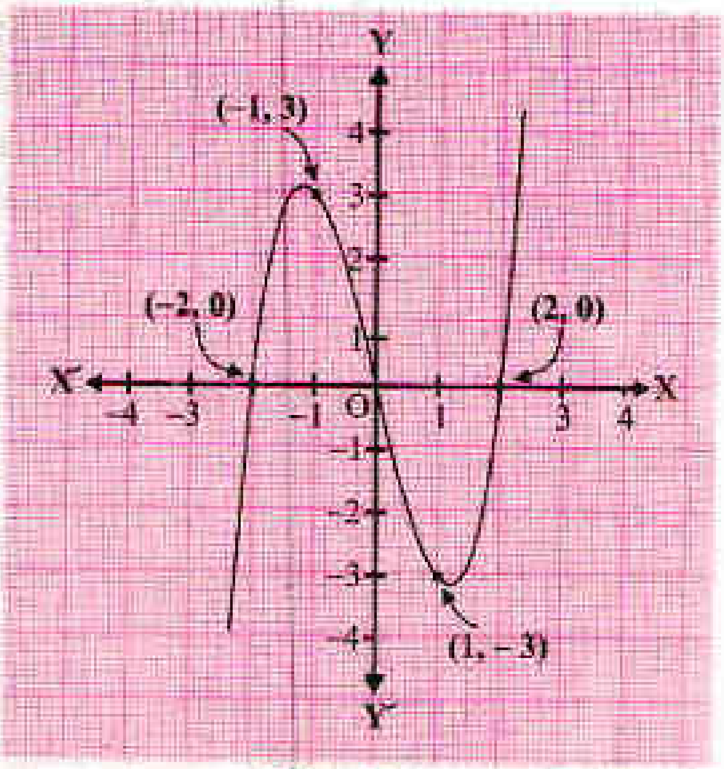
ਸਾਰਣੀ 2.2

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	-3	0

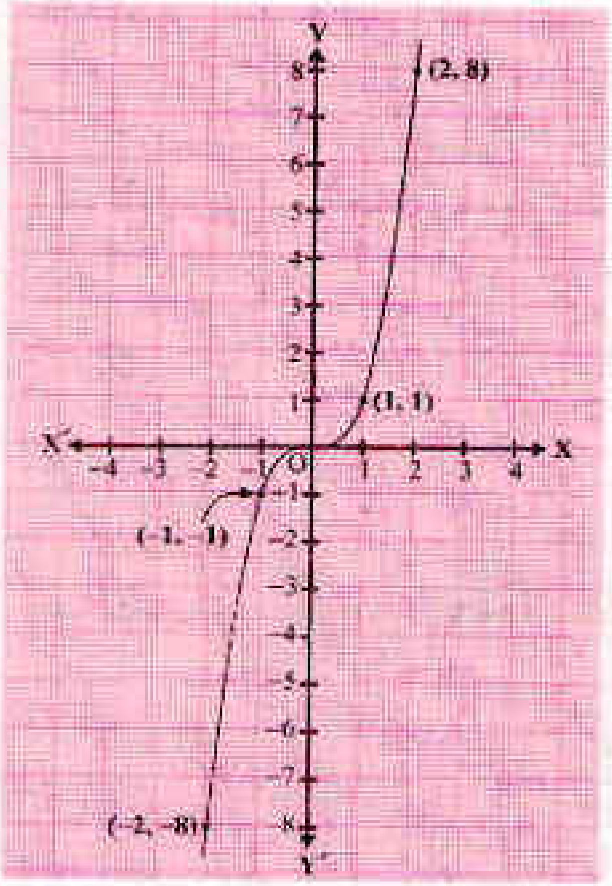
ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਅੰਕਿਤ ਕਰਨ ਅਤੇ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚਣ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $y = x^3 - 4x$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤਰ 2.6 ਵਰਗਾ ਦਿਖਦਾ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $x^3 - 4x$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ $-2, 0$ ਅਤੇ 2 ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $-2, 0$ ਅਤੇ 2 ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x– ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $y = x^3 - 4x$ ਦਾ ਆਲੇਖ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਵਕਰ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਇਹਨਾਂ ਹੀ ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਕਟਦਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਕੇਵਲ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ।

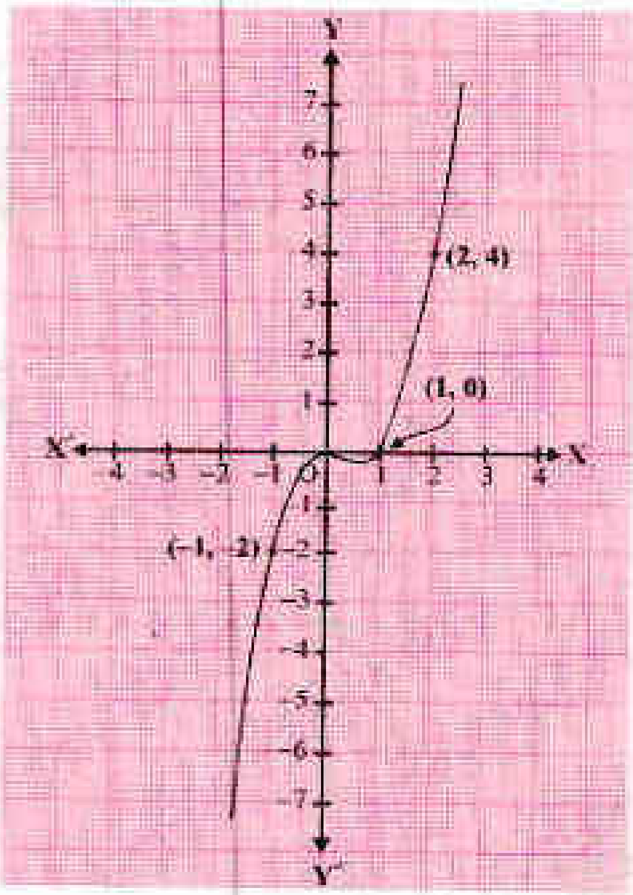
ਆਉ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ x^3 ਅਤੇ $x^3 - x^2$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਅਸੀਂ $y = x^3$ ਅਤੇ $y = x^3 - x^2$ ਦੇ ਆਲੇਖ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਚਿੱਤਰ 2.7 ਅਤੇ 2.8 ਵਿੱਚ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 2.6



ਚਿੱਤਰ 2.7



ਚਿੱਤਰ 2.8

ਗਣਿਤ

(ਦਸਵੀਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਲਈ)

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ
ਸਾਹਿਬਜ਼ਾਦਾ ਅਜੀਤ ਸਿੰਘ ਨਗਰ

ਪਹਿਲਾ ਐਡੀਸ਼ਨ : 2014 .... 1,55,000 ਕਾਪੀਆਂ
Revised ਐਡੀਸ਼ਨ : 2017 .... 81,000 ਕਾਪੀਆਂ

[This book has been adopted with the kind permission of the National Council of Educational Research and Training, New Delhi]

ਅਨੁਵਾਦਕ — ਸ. ਪਰਵਿੰਦਰ ਸਿੰਘ ਲੈਕ.
ਸ. ਸੀ. ਸੈ. ਸਕੂਲ (ਲੜਕੇ) ਅਬੋਹਰ

ਸੰਯੋਜਕ — ਸ. ਪ੍ਰਿਤਪਾਲ ਸਿੰਘ ਕਥੂਰੀਆ
ਵਿਸ਼ਾ ਮਾਹਿਰ ਪ. ਸ. ਸ. ਬ.

ਚਿੱਤਰਕਾਰ — ਸ. ਮਨਜੀਤ ਸਿੰਘ ਢਿੱਲੋਂ
ਆਰਟ ਸੈਲ ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ (ਮੋਹਾਲੀ)

ਚੇਤਾਵਨੀ

1. ਕੋਈ ਵੀ ਏਜੰਸੀ-ਹੋਲਡਰ ਵਾਧੂ ਪੈਸੇ ਵਸੂਲਣ ਦੇ ਮੰਤਵ ਨਾਲ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ 'ਤੇ ਜਿਲਦ-ਸਾਜ਼ੀ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦਾ। (ਏਜੰਸੀ-ਹੋਲਡਰਾਂ ਨਾਲ ਹੋਏ ਸਮਝੌਤੇ ਦੀ ਧਾਰਾ ਨੰ. 7 ਅਨੁਸਾਰ)
2. ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਦੁਆਰਾ ਛਪਵਾਈਆਂ ਅਤੇ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੇ ਜਾਅਲੀ ਨਕਲੀ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਨਾਂ (ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ) ਦੀ ਛਪਾਈ, ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਨ, ਸਟਾਕ ਕਰਨਾ, ਜਮ੍ਹਾਂ-ਖੋਰੀ ਜਾਂ ਵਿਕਰੀ ਆਦਿ ਕਰਨਾ ਭਾਰਤੀ ਦੰਡ ਪ੍ਰਨਾਲੀ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਫ਼ੌਜਦਾਰੀ ਜੁਰਮ ਹੈ।

(ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਦੀਆਂ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਬੋਰਡ ਦੇ 'ਵਾਟਰ ਮਾਰਕ' ਵਾਲੇ ਕਾਗਜ਼ ਉੱਪਰ ਹੀ ਛਪਵਾਈਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।)

ਮੁੱਲ : ₹ 154/-

ਸਕੱਤਰ, ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ, ਵਿੱਦਿਆ ਭਵਨ, ਫੇਜ਼-8 ਸਾਹਿਬਜ਼ਾਦਾ ਅਜੀਤ ਸਿੰਘ ਨਗਰ 160062 ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਅਤੇ ਮੈਸ : ਨਾਰਦਨ ਸਟੇਸ਼ਨਰੀ ਮਾਰਟ, ਜਲੰਧਰ ਦੁਆਰਾ ਛਾਪੀ ਗਈ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

ਦੋ ਸ਼ਬਦ

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਪਾਠ-ਕ੍ਰਮਾਂ ਅਤੇ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਨੂੰ ਸੋਧਣ ਅਤੇ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਦੇ ਕੰਮ ਵਿੱਚ ਜੁਟਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਅੱਜ ਜਿਸ ਦੌਰ ਵਿੱਚੋਂ ਅਸੀਂ ਲੰਘ ਰਹੇ ਹਾਂ ਉਸ ਵਿੱਚ ਬੱਚਿਆਂ ਨੂੰ ਸਹੀ ਵਿੱਦਿਆ ਦੇਣਾ ਮਾਪਿਆਂ ਅਤੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੋਹਾਂ ਦੀ ਸਾਂਝੀ ਜ਼ਿੰਮੇਵਾਰੀ ਬਣਦੀ ਹੈ। ਇਸੇ ਜ਼ਿੰਮੇਵਾਰੀ ਅਤੇ ਵਿੱਦਿਅਕ ਜ਼ਰੂਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਦਿਆਂ ਹੋਇਆਂ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਦੇ ਪਾਠ-ਕ੍ਰਮਾਂ ਅਤੇ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਵਿੱਚ ਨੈਸ਼ਨਲ ਕਰੀਕੁਲਮ ਫਰੇਮਵਰਕ-2005 ਅਨੁਸਾਰ ਕੁਝ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕੀਤੇ ਜਾ ਰਹੇ ਹਨ।

ਸਕੂਲ ਕਰੀਕੁਲਮ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਦਾ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਯੋਗਦਾਨ ਹੈ ਅਤੇ ਲੋੜੀਂਦੇ ਸਿੱਖਿਅਕ ਨਤੀਜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਚੰਗੀ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਦਾ ਹੋਣਾ ਪਹਿਲੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਵਿਸ਼ਾ ਸਾਮੱਗਰੀ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ਼ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਤਰਕ ਸ਼ਕਤੀ ਪ੍ਰਫੁਲਿਤ ਹੋਣ ਦੇ ਨਾਲ਼-ਨਾਲ਼ ਵਿਸ਼ੇ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੀ ਯੋਗਤਾ ਵਿੱਚ ਵੀ ਵਾਧਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਅਭਿਆਸਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਮਾਨਸਿਕ ਪੱਧਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਤਿਆਰ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਇਹ ਪੁਸਤਕ ਰਾਸ਼ਟਰੀ ਵਿੱਦਿਆ ਖੋਜ ਅਤੇ ਸਿਖਲਾਈ ਸੰਸਥਾ ਵੱਲੋਂ ਦਸਵੀਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਲਈ ਤਿਆਰ ਕੀਤੀ ਗਈ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਦੀ ਪੁਸਤਕ ਦੀ ਅਨੁਸਾਰਤਾ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਪੁਸਤਕ ਐਨ.ਸੀ.ਈ.ਆਰ.ਟੀ. ਤੋਂ ਪ੍ਰਵਾਨਗੀ ਲੈਣ ਉਪਰੰਤ ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ।

ਇਸ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਨੂੰ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਅਤੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਉਪਯੋਗੀ ਬਣਾਉਣ ਦਾ ਭਰਪੂਰ ਯਤਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਫਿਰ ਵੀ, ਪੁਸਤਕ ਨੂੰ ਹੋਰ ਚੰਗੇਰਾ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚੋਂ ਆਏ ਸੁਝਾਵਾਂ ਦਾ ਸਤਿਕਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ।

ਚੇਅਰਮੈਨ

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

NCERT ਦੀ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਕਮੇਟੀ

ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਗਣਿਤ ਦੇ ਸਲਾਹਕਾਰ ਸਮੂਹ ਦੇ ਚੇਅਰਮੈਨ

ਜਯੰਤ ਵਿਸ਼ਨੂੰ ਨਾਰਲੀਕਰ, ਇਮੀਰਿਟਸ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਚੇਅਰਮੈਨ, ਆਈ.ਯੂ.ਸੀ.ਏ.ਏ., ਗਣੇਸ਼ਖਿੰਡ, ਪੂਨਾ ਯੂਨਿਵਰਸਿਟੀ, ਪੂਨਾ

ਮੁੱਖ ਸਲਾਹਕਾਰ

ਪੀ.ਸਿੰਕਲੇਅਰ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਵਿਗਿਆਨ ਵਿਦਿਆਪੀਠ, ਇ.ਗਾ.ਰਾ.ਮੁ.ਵਿ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਮੁੱਖ ਕੋਆਰਡੀਨੇਟਰ

ਹੁਕੁਮ ਸਿੰਘ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ.ਈ.ਐਸ.ਐਮ., ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਮੈਂਬਰ

ਅੰਜਲੀ ਲਾਲ, ਪੀ.ਜੀ.ਟੀ. (ਗਣਿਤ), ਡੀ.ਏ.ਵੀ. ਪਬਲਿਕ ਸਕੂਲ, ਸੈਕਟਰ-14, ਗੁੜਗਾਵਾਂ
ਅੰਜੂ ਨਿਰੂਲਾ, ਪੀ.ਜੀ.ਟੀ. (ਗਣਿਤ) ਡੀ.ਏ.ਵੀ. ਪਬਲਿਕ ਸਕੂਲ, ਪੁਸ਼ਪਾਂਜਲੀ ਇਨਕਲੇਵ, ਪੀਤਮ ਪੁਰਾ, ਦਿੱਲੀ
ਉਦੇ ਸਿੰਘ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਡੀ.ਈ.ਐਸ.ਐਮ., ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ
ਏ.ਕੇ.ਵਜਲਵਾਰ, ਰੀਡਰ, ਡੀ.ਈ.ਐਸ.ਐਮ., ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ
ਐਸ.ਵੈਂਕਟਰਮਨ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਵਿਗਿਆਨ ਵਿਦਿਆਪੀਠ, ਇ.ਗਾ.ਰਾ.ਮੁ.ਵਿ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ
ਜੀ.ਪੀ.ਦੀਕਸ਼ਿਤ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਖਗੋਲਿਕੀ ਵਿਭਾਗ, ਲਖਨਊ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ, ਲਖਨਊ
ਕੇ.ਏ.ਐਸ.ਐਸ.ਵੀ.ਕਾਮੇਸ਼ਵਰ ਰਾਵ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਖੇਤਰੀ ਸਿੱਖਿਆ ਸੰਸਥਾਨ, ਭੁਵਨੇਸ਼ਵਰ
ਮਹਿੰਦਰ ਆਰ.ਗਜਰੇ, ਪੀ.ਜੀ.ਟੀ., ਅਤੁਲ ਸਕੂਲ, ਅਤੁਲ, ਜ਼ਿਲ੍ਹਾ ਵਲਸਾਦ
ਮਹਿੰਦਰ ਸ਼ੰਕਰ, ਲੈਕਚਰਾਰ (ਐਸ.ਜੀ.) (ਰਿਟਾ.), ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ
ਰਾਮਾ ਬਾਲਾਜੀ, ਟੀ.ਜੀ.ਟੀ. (ਗਣਿਤ), ਕੇ.ਵੀ.ਮੇਗ ਅਤੇ ਕੇਂਦਰ, ਸੈਂਟ ਜੋਹਨਜ਼ ਰੋਡ, ਬੰਗਲੂਰੂ
ਵੇਦ ਡੂਡੇਜਾ, ਉਪ-ਪ੍ਰਿੰਸੀਪਲ (ਰਿਟਾ.), ਗੌ.ਗ.ਮਿਡਲ ਸਕੂਲ, ਸੈਨਿਕ ਵਿਹਾਰ, ਦਿੱਲੀ
ਸੰਜੇ ਮੁਦਗੱਲ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਸੀ.ਆਈ.ਈ.ਟੀ., ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ
ਸ਼ਸ਼ੀਧਰ ਜਗਦੀਸ਼ਨ, ਅਧਿਆਪਕ ਅਤੇ ਮੈਂਬਰ, ਗਵਰਨਿੰਗ ਕਾਉਂਸਿਲ, ਸੈਂਟਰ ਫ਼ਾਰ ਲਰਨਿੰਗ, ਬੰਗਲੂਰੂ

ਹਿੰਦੀ ਅਨੁਵਾਦਕ :

ਜੀ.ਪੀ. ਦੀਕਸ਼ਿਤ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਖਗੋਲਿਕੀ ਵਿਭਾਗ, ਲਖਨਊ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ, ਲਖਨਊ
ਮਹਿੰਦਰ ਸ਼ੰਕਰ, ਲੈਕਚਰਾਰ (ਐਸ.ਜੀ.) (ਰਿਟਾ.), ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ
ਹਰੀਸ਼ਵਰ ਪ੍ਰਸਾਦ ਸਿਨਹਾ, ਸੀ-210, ਰਾਜਾਜੀ ਪੁਰਮ, ਲਖਨਊ

ਮੈਂਬਰ ਕੋਆਰਡੀਨੇਟਰ

ਰਾਮ ਅਵਤਾਰ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ.ਈ.ਐਸ.ਐਮ., ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ (ਦਿਸੰਬਰ 2005 ਤੱਕ)
ਆਰ.ਪੀ.ਮੌਰੀਆ, ਰੀਡਰ, ਡੀ.ਈ.ਐਸ.ਐਮ., ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ (ਜਨਵਰੀ 2006 ਤੋਂ)

ਵਿਸ਼ਾ-ਸੂਚੀ

ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ REAL NUMBERS

1

1.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਨੌਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਖੋਜ ਸ਼ੁਰੂ ਕੀਤੀ ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਦੌਰਾਨ ਤੁਹਾਨੂੰ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਮਿਲੀ। ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਾਰੇ ਆਪਣੀ ਚਰਚਾ ਜਾਰੀ ਰੱਖਾਂਗੇ। ਇਹ ਚਰਚਾ ਅਸੀਂ ਭਾਗ 1.2 ਅਤੇ 1.3 ਵਿੱਚ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ (integers) ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਦੋ ਬਹੁਤ ਹੀ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਗੁਣਾਂ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਾਂਗੇ ਇਹ ਗੁਣ ਹਨ : ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ (ਕਲਨ ਵਿਧੀ) (Euclid's division algorithm ਅਤੇ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) (Fundamental Theorem Arithmetic)।

ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਨਾਮ ਤੋਂ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ, ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵ (integers) ਦੀ ਵੰਡ ਨਾਲ ਕਿਸੇ ਨਾ ਕਿਸੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ। ਸਧਾਰਨ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਕਿਹਾ ਜਾਵੇ ਤਾ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ, ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ a ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਦੂਸਰੀ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ b ਨਾਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੰਡਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਬਾਕੀ r ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ, ਜੋ b ਤੋਂ ਛੋਟਾ (ਘੱਟ ਹੋਵੇ। ਤੁਹਾਡੇ ਵਿੱਚੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾਤਰ ਲੋਕ ਸ਼ਾਇਦ ਇਸਨੂੰ ਸਧਾਰਨ ਲੰਬੀ ਵੰਡ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ (long divisio process) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਾਣਦੇ ਹਨ। ਭਾਵੇਂ ਕਿ ਇਹ ਪਰਿਣਾਮ (ਸਿੱਟਾ) ਕਹਿਣ ਅਤੇ (ਸਮਝਣ) ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਸਰਲ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਵੰਡ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਇਸ ਦੀਆਂ ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕੁਝ 'ਤੇ ਰੌਸ਼ਨੀ ਪਾਵਾਂਗੇ ਅਤੇ ਮੁੱਖ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਮਹੱਤਮ ਸਮਾਪਵਰਤਕ (HCF) ਕੱਢਣ ਦੇ ਬਾਰੇ ਕਰਾਂਗੇ।

ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਤੋਂ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ (composite number) ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (prime numbers) ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਤੱਥ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਥਿਊਰਮ ਹੈ। ਫਿਰ ਤੋਂ ਇਹ ਪਰਿਣਾਮ (ਸਿੱਟਾ) ਕਹਿਣ ਅਤੇ ਸਮਝਣ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਸਰਲ ਹੈ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਗਣਿਤ ਦੇ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਇਸ ਦੀਆਂ ਬਹੁਤ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਹਨ ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਥਿਊਰਮ ਦੀਆਂ ਦੋ ਮੁੱਖ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦੇਖਾਂਗੇ। ਇੱਕ ਤਾਂ ਅਸੀ

ਇਸਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਪੜੀਆਂ ਗਈਆਂ ਕੁਝ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ ਅਤੇ $\sqrt{5}$ ਆਦਿ ਦੀ ਅਪਰਿਮੇਯਤਾ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਕਰਾਂਗੇ। ਦੂਸਰਾ, ਅਸੀਂ ਇਸਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਇਹ ਲੱਭਣ ਵਿੱਚ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਕਿਸੇ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ, ਮੰਨ ਲਓ $\frac{p}{q} (q \neq 0)$ ਦਾ ਦਸਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਕਦੋਂ ਸ਼ਾਂਤ (terminating) ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕਦੋਂ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ (non-terminating repeating) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਅਸੀਂ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਹਰ, q ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਨੂੰ ਦੇਖ ਕੇ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ q ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਤੋਂ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਦਸਮਲਵ ਰੂਪ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਤੀ ਦਾ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਲੱਗ ਜਾਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ, ਆਓ ਆਪਣੀ ਖੋਜ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰੀਏ।

1.2 ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਿਕਾ (Euclid's division Lemma)

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਲੋਕ ਬੁਝਾਰਤ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ:*

ਇੱਕ ਵਿਕਰੇਤਾ ਸੜਕ 'ਤੇ ਜਾਂਦਾ ਹੋਇਆ ਆਂਡੇ ਵੇਚ ਰਿਹਾ ਸੀ। ਇੱਕ ਆਲਸੀ ਆਦਮੀ ਜਿਸਦੇ ਕੋਲ ਕੋਈ ਕੰਮ ਨਹੀਂ ਸੀ, ਨੇ ਉਸ ਵਿਕਰੇਤਾ ਨਾਲ ਸ਼ਬਦੀ ਜੰਗ (ਝਗੜਾ) ਚਾਲੂ ਕਰ ਦਿੱਤਾ। ਇਸ ਨਾਲ ਗੱਲ ਅੱਗੇ ਵੱਧ ਗਈ ਅਤੇ ਉਸਨੇ ਆਂਡਿਆਂ ਦੀ ਟੋਕਰੀ ਖੋਹ ਕੇ ਸੜਕ 'ਤੇ ਸੁੱਟ ਦਿੱਤੀ। ਆਂਡੇ ਟੁੱਟ ਗਏ। ਵਿਕਰੇਤਾ ਨੇ ਪੰਚਾਇਤ ਨੂੰ ਕਿਹਾ ਕਿ ਉਸ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ ਟੁੱਟੇ ਹੋਏ ਆਂਡਿਆਂ ਦੇ ਪੈਸੇ ਦੇਣ ਨੂੰ ਕਹੇ। ਪੰਚਾਇਤ ਨੇ ਵਿਕਰੇਤਾ ਨੂੰ ਪੁੱਛਿਆ ਕਿ ਕਿੰਨੇ ਆਂਡੇ ਟੁੱਟੇ ਸਨ। ਉਸਨੇ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਉੱਤਰ ਦਿੱਤਾ:

ਦੋ-ਦੋ ਗਿਨਣ ਨਾਲ ਇੱਕ ਬਚੇਗਾ;
ਤਿੰਨ-ਤਿੰਨ ਗਿਨਣ ਨਾਲ ਦੋ ਬਚਣਗੇ;
ਚਾਰ-ਚਾਰ ਗਿਨਣ ਨਾਲ ਤਿੰਨ ਬਚਣਗੇ;
ਪੰਜ-ਪੰਜ ਗਿਨਣ ਨਾਲ ਚਾਰ ਬਚਣਗੇ;
ਛੇ-ਛੇ ਗਿਨਣ ਨਾਲ ਪੰਜ ਬਚਣਗੇ;
ਸੱਤ-ਸੱਤ ਗਿਨਣ ਨਾਲ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਬਚੇਗਾ;
ਮੇਰੀ ਟੋਕਰੀ ਵਿੱਚ 150 ਤੋਂ ਵੱਧ ਆਂਡੇ ਨਹੀਂ ਆ ਸਕਦੇ।

ਇਸ ਲਈ ਕਿੰਨੇ ਆਂਡੇ ਸਨ? ਆਓ ਇਸ ਬੁਝਾਰਤ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੀਏ। ਮੰਨ ਲਓ ਆਂਡਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ a ਹੈ। ਹੁਣ ਉਲਟੇ ਕ੍ਰਮ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ a ਸੰਖਿਆ 150 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਹੈ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

* ਇਹ ਲੇਖਕ ਏ. ਰਾਮਪਾਲ ਅਤੇ ਹੋਰ ਦੁਆਰਾ ਲਿਖੀ ਕਿਤਾਬ ਨਿਊਮੇਰੇਸੀ ਕਾਊਂਟਸ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀ ਬੁਝਾਰਤ ਦਾ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ (ਬਦਲਵਾਂ) ਰੂਪ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਸੱਤ-ਸੱਤ ਗਿਣੀਏ ਤਾਂ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਬਚੇਗਾ। ਇਹ $a = 7p + 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ p ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਛੇ-ਛੇ ਗਿਣੀਏ ਤਾਂ 5 ਬਚਣਗੇ। ਇਹ $a = 6q + 5$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ q ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਪੰਜ-ਪੰਜ ਗਿਣਨ ਨਾਲ, 4 ਬਚਦਾ ਹੈ। ਇਹ $a = 5s + 4$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ s ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਚਾਰ-ਚਾਰ ਗਿਣਨ ਨਾਲ, 3 ਬਚਦਾ ਹੈ। ਇਹ $a = 4t + 3$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ..., ...ਥੇ t ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਤਿੰਨ-ਤਿੰਨ ਗਿਣਨ ਨਾਲ, 2 ਬਚਦਾ ਹੈ। ਇਹ $a = 3u + 2$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ u ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਦੋ-ਦੋ ਗਿਣਨ ਨਾਲ, 1 ਬਚੇਗਾ। ਇਹ $a = 2v + 1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ ... ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਭਾਵ, ਉਪਰੋਕਤ ਹਰ ਇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਹਨ (ਲਏ ਗਏ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ b ਦੇ ਮੁੱਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 7, 6, 5, 4, 3 ਅਤੇ 2 ਹਨ)। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ a ਨੂੰ b ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣ 'ਤੇ r ਬਾਕੀ ਬਚਦਾ ਹੈ (ਉਪਰੋਕਤ ਵਿੱਚ r ਦੇ ਮੁੱਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 0, 5, 4, 3, 2 ਅਤੇ 1 ਹਨ) ਭਾਵ r ਭਾਜਕ b ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ ਹੀ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ (Euclid's division lemma) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ, ਇਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ।

ਹੁਣ, ਅਸੀਂ ਬੁਝਾਰਤ 'ਤੇ ਵਾਪਿਸ ਆਉਂਦੇ ਹੋਏ, ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਸੋਚ ਕੇ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਸ ਬੁਝਾਰਤ ਨੂੰ ਕਿਵੇਂ ਹੱਲ ਕਰਾਂਗੇ? ਹਾਂ, ਤੁਸੀਂ 7 ਦੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਗੁਣਜਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹੋਣ। ਜਾਂਚ ਅਤੇ ਭੁੱਲ ਵਿਧੀ ਨਾਲ LCM ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਤੁਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਆਂਡਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 119 ਸੀ।

ਇਸ ਗੱਲ ਦਾ ਅਨੁਭਵ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਿਕਾ ਕੀ ਹੈ, ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਜੋੜਿਆਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ:

(i) 17, 6 (ii) 5, 12 (iii) 20, 4

ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਬੁਝਾਰਤ ਵਾਲੀ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਸੀ, ਇੱਥੇ ਵੀ ਅਸੀਂ ਹਰ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਲਈ ਸੰਬੰਧ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ।

(i) $17 = 6 \times 2 + 5$ (17 ਵਿੱਚੋਂ 6 ਦੋ ਵਾਰ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ 5 ਬਾਕੀ ਬੱਚਦਾ ਹੈ)

(ii) $5 = 12 \times 0 + 5$ (ਇਹ ਸੰਬੰਧ ਇਸ ਲਈ ਸਹੀ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ 12, 5 ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ)

(iii) $20 = 4 \times 5 + 0$ (20 ਵਿੱਚੋਂ 4 ਪੰਜ ਵਾਰ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਬੱਚਦਾ)

ਭਾਵ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ q ਅਤੇ r ਪਤਾ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ

$a = bq + r,\ 0 \le r < b$ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ q ਅਤੇ r ਸਿਫ਼ਰ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਲਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ q ਅਤੇ r ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੋ:

(i) 10, 3 (ii) 4, 19 (iii) 81, 3

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ ਕਿ q ਅਤੇ r ਵਿਲੱਖਣ ਹਨ? ਇਹ ਹੀ ਕੇਵਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜੋ ਸੰਬੰਧ $a = bq + r, 0 \le r < b$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖ ਲਿਆ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਇਹ ਲੰਬੀ ਵੰਡ ਵਿਧੀ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਕੁਝ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਕਾਫੀ ਸਾਲਾਂ ਤੋਂ ਕਰਦੇ ਆ ਰਹੇ ਹੋ ਅਤੇ q ਅਤੇ r ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਭਾਗਫਲ *(quotient)* ਅਤੇ ਬਾਕੀ *(remainder)* ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਉਪਚਾਰਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ *(formal)* ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ:

ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) 1.1 ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਿਕਾ *(Euclid's division lemma)* ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਲਈ ਦੋ ਵਿਲੱਖਣ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ q ਅਤੇ r ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਕਿ $a = bq + r$, $0 \le r < b$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਬਹੁਤ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਸੀ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਲਿਖਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਉਲੇਖ ਯੂਕਲਿਡ ਐਲੀਮੈਂਟਸ (Euclid's Elements) ਦੀ ਪੁਸਤਕ VII ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ (ਕਲਨ ਵਿਧੀ) ਇਸੇ ਹੀ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ (Lemma) 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ।

ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਪਗਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਲੜੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜੋ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਇੱਕ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਜਾਂ ਵਿਧੀ ਦਸਦੀ ਹੈ।

ਸ਼ਬਦ "ਐਲਗੋਰਿਥਮ" 9ਵੀਂ ਸਦੀ ਦੇ ਇੱਕ ਫਾਰਸੀ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ ਅਲ-ਖੁਆਰਿਜ਼ਮੀ ਦੇ ਨਾਮ ਤੋਂ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਸ਼ਬਦ 'ਅਲਜਬਰਾ' (Algebra) ਵੀ ਇਹਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਲਿਖੀ ਪੁਸਤਕ 'ਹਿਸਾਬ ਅਲ ਜ਼ਬਰ ਵੀ ਅਲ ਮੁਕਾਬਲਾ' ਤੋਂ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਇੱਕ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਕਥਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਕਥਨ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਵਰਤਦੇ ਹਨ।

ਮੁਹੰਮਦ ਇਬਨ ਮੂਸਾ ਅਲ ਖੁਆਰਿਜ਼ਮੀ
(780 – 850 ਈ.)

ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਗਣਨਾ ਕਰਨ ਦਾ ਇੱਕ ਤਰੀਕਾ ਹੈ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਉਹ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ d ਹੈ, ਜੋ a ਅਤੇ b ਦੋਵਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਭਾਗ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਆਓ ਸਾਰਿਆਂ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈ ਕੇ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਇਹ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੰਮ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਅਸੀਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 455 ਅਤੇ 42 ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (*H.C.F*) ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਵੱਡੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ 455 ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਯੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$455 = 42 \times 10 + 35$$

ਹੁਣ ਭਾਜਕ 42 ਅਤੇ ਬਾਕੀ 35 ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ, ਯੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$42 = 35 \times 1 + 7$$

ਹੁਣ ਭਾਜਕ 35 ਅਤੇ ਬਾਕੀ 7 ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ, ਯੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੋਂ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$35 = 7 \times 5 + 0$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇੱਥੇ ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ (ਜ਼ੀਰੋ) ਆ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਅੱਗੇ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ। ਅਸੀਂ ਆਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਾਲਾ ਭਾਜਕ ਭਾਵ 7 ਹੀ 455 ਅਤੇ 42 ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (*H.C.F*) ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਦੀ ਜਾਂਚ 455 ਅਤੇ 42 ਦੇ ਸਾਰੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖ ਕੇ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਇਹ ਵਿਧੀ ਕਿਸ ਕਾਰਣ ਕੰਮ ਕਰ ਜਾਂਦੀ ਹੈ?

ਇਸ ਦਾ ਕਾਰਣ **ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ** ਹੈ, ਇਸਦੇ ਪਗਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ:

ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਮੰਨ ਲਉ c ਅਤੇ d $(c>d)$ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (*H.C.F*) ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪਗਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਕੰਮ ਕਰੋ:

ਪਗ 1: c ਅਤੇ d ਦੇ ਲਈ ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ। ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ q ਅਤੇ r ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $c = dq + r$, $0 \le r < d$ ਹੋਵੇ।

ਪਗ 2: ਜੇਕਰ $r = 0$ ਹੈ, ਤਾਂ d ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ c ਅਤੇ d ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (*H.C.F*) ਹੈ। ਜੇਕਰ $r \neq 0$ ਹੈ, ਤਾਂ d ਅਤੇ r ਦੇ ਲਈ, ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ।

ਪਗ 3: ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਉਦੋਂ ਤਕ ਜਾਰੀ ਰੱਖੋ, ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ (ਜ਼ੀਰੋ) ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਾ ਹੋ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਭਾਜਕ ਹੀ ਲੋੜੀਂਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (*H.C.F*) ਹੈ।

ਇਹ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਭਾਵਸ਼ਾਲੀ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ HCF (c, d) = HCF (d, r) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਸੰਕੇਤ HCF (c, d) ਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ c ਅਤੇ d ਦਾ HCF।

ਉਦਾਹਰਣ: 4052 ਅਤੇ 12576 ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (*H.C.F*) ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ:

ਪਗ 1: ਇੱਥੇ $12576 > 4052$ ਹੈ। 12576 ਅਤੇ 4052 ਉੱਪਰ ਯੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$12576 = 4052 \times 3 + 420$$

ਪਗ 2: ਕਿਉਂਕਿ ਬਾਕੀ $420 \neq 0$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ 4052 ਅਤੇ 420 ਦੇ ਲਈ ਯੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$4052 = 420 \times 9 + 272$$

ਪਗ 3: ਅਸੀਂ ਨਵੇਂ ਭਾਜਕ 420 ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਬਾਕੀ 272 ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਯੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$420 = 272 \times 1 + 148$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਨਵੇਂ ਭਾਜਕ 272 ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਬਾਕੀ 148 'ਤੇ ਯੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$272 = 148 \times 1 + 124$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਨਵੇਂ ਭਾਜਕ 148 ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਬਾਕੀ 124 'ਤੇ ਯੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$148 = 124 \times 1 + 24$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਨਵੇਂ ਭਾਜਕ 124 ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਬਾਕੀ 24 'ਤੇ ਯੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$124 = 24 \times 5 + 4$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਨਵੇਂ ਭਾਜਕ 24 ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਬਾਕੀ 4 'ਤੇ ਯੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$24 = 4 \times 6 + 0$$

ਇੱਥੇ ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ (0) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਇੱਥੇ ਖਤਮ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਭਾਜਕ 4 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 12576 ਅਤੇ 4052 ਦਾ *H.C.F* 4 ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ HCF (24, 4) = HCF (124, 24) = HCF (148, 124) = HCF (272, 148) = HCF (420, 272) = HCF (4052, 420) = HCF (12576, 4052) ਹੈ।

ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਨਾ ਸਿਰਫ ਵੱਡੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗੀ ਹੈ, ਬਲਕਿ ਇਹ ਇਸ ਲਈ ਵੀ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਉਹਨਾਂ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਕੰਪਿਊਟਰ ਦੇ ਇੱਕ ਪ੍ਰੋਗ੍ਰਾਮ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਗਿਆ।

ਟਿੱਪਣੀ:

1. ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਅਤੇ ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੁੜੇ ਹੋਏ ਹਨ ਕਿ ਲੋਕ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਨੂੰ ਹੀ ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

2. ਭਾਵੇਂ ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ/ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਨੂੰ ਸਿਰਫ਼ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਹੀ ਲਿਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (ਸਿਫ਼ਰ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਭਾਵ $b \neq 0$)

ਦੇ ਲਈ ਲਾਗੂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਭਾਵੇਂ, ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤੱਥ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ।

ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ/ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ ਹੇਠਾਂ ਦੇ ਰਹੇ ਹਾਂ:

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $2q$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ $2q+1$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ q ਕੋਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ a ਕੋਈ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $b = 2$ ਹੈ। ਹੁਣ ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਤੋਂ, ਕਿਸੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $q \geq 0$ ਦੇ ਲਈ $a = 2q + r$ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $r = 0$ ਹੈ ਜਾਂ $r = 1$ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $0 \leq r < 2$ ਇਸ ਲਈ $a = 2q$ ਜਾਂ $a = 2q + 1$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $a = 2q$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਜਾਂ ਤਾਂ ਜਿਸਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਟਾਂਕ। ਇਸ ਲਈ ਕੋਈ ਵੀ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $2q + 1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇਗੀ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $4q + 1$ ਜਾਂ $4q + 3$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ q ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ: ਆਉ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ a ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਸਵਾਲ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰੀਏ। ਅਸੀਂ a ਅਤੇ $b = 4$ 'ਤੇ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਕਿਉਂਕਿ $0 \leq r < 4$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸੰਭਾਵਿਤ ਬਾਕੀ 0, 1, 2 ਅਤੇ 3 ਹਨ।

ਭਾਵ a ਸੰਖਿਆਵਾਂ $4q$, $4q + 1$, $4q + 2$ ਜਾਂ $4q + 3$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ q ਭਾਗਫਲ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ a ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ $4q$ ਅਤੇ $4q + 2$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ (ਕਿਉਂਕਿ ਦੋਵੇਂ 2 'ਤੇ ਵੰਡੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ)।

ਇਸ ਲਈ, ਕੋਈ ਵੀ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $4q + 1$ ਜਾਂ $4q + 3$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੋਵੇਗੀ।

ਉਦਾਹਰਣ 4: ਇੱਕ ਮਠਿਆਈ ਵਿਕ੍ਰੇਤਾ ਕੋਲ 420 ਕਾਜੂ ਦੀਆਂ ਬਰਫੀਆਂ ਅਤੇ 130 ਬਦਾਮ ਦੀਆਂ ਬਰਫੀਆਂ ਹਨ। ਉਹ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਢੇਰੀਆਂ ਬਣਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਢੇਰੀ ਵਿੱਚ ਬਰਫੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਬਰਾਬਰ ਰਹੇ ਅਤੇ ਇਹ ਢੇਰੀਆਂ ਬਰਫੀ ਦੀ ਪਰਾਤ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਸਥਾਨ ਘੇਰਨ। ਇਸ ਕੰਮ ਲਈ ਹਰ ਇੱਕ ਢੇਰੀ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀਆਂ ਬਰਫੀਆਂ ਰੱਖੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ?

ਹੱਲ: ਇਹ ਕੰਮ ਜਾਂਚ ਅਤੇ ਭੁੱਲ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਸ ਨੂੰ ਲੜੀਬੱਧ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ HCF (420, 130) ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਫਿਰ, ਇਸ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਤੋਂ ਹਰ ਇੱਕ ਢੇਰੀ ਵਿੱਚ ਰੱਖੀਆਂ ਜਾ ਸਕਣ ਵਾਲੀਆਂ ਬਰਫੀਆਂ ਦੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਗਿਣਤੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗੀ। ਜਿਸ ਨਾਲ ਢੇਰੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਵੇਗੀ ਅਤੇ ਪਰਾਤ ਵਿੱਚ ਇਹ ਬਰਫੀਆਂ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਸਥਾਨ ਘੇਰਣਗੀਆਂ।

ਆਉ ਹੁਣ ਯੁਕਲਿਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ 420 ਅਤੇ 130 ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਪਤਾ ਕਰੀਏ।

$$420 = 130 \times 3 + 30$$
$$130 = 30 \times 4 + 10$$
$$30 = 10 \times 3 + 0$$

ਇਸ ਲਈ, 420 ਅਤੇ 130 ਦਾ HCF 10 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਹਰ ਇੱਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਬਰਫੀ ਦੇ ਲਈ ਮਠਿਆਈ ਵਿਕ੍ਰੇਤਾ ਦਸ-ਦਸ ਦੀਆਂ ਢੇਰੀਆਂ ਬਣਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 1.1

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ:

   (i) 135 ਅਤੇ 225 (ii) 196 ਅਤੇ 38220 (iii) 867 ਅਤੇ 255

2. ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਕੋਈ ਵੀ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $6q + 1$ ਜਾਂ $6q + 3$ ਜਾਂ $6q + 5$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ q ਕੋਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

3. ਕਿਸੇ ਪਰੇਡ ਵਿੱਚ 616 ਆਦਮੀਆਂ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਸੈਨਾ (ਆਰਮੀ) ਦੀ ਟੁੱਕੜੀ ਨੇ 32 ਆਦਮੀਆਂ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਸੈਨਾ ਬੈਂਡ ਦੇ ਪਿੱਛੇ ਮਾਰਚ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਦੋਹਾਂ ਸਮੂਹਾਂ ਨੇ ਬਰਾਬਰ ਗਿਣਤੀ ਵਾਲੇ ਸਤੰਭਾਂ (Columns) ਵਿੱਚ ਮਾਰਚ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਸਤੰਭਾਂ (Columns) ਦੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਗਿਣਤੀ ਕਿੰਨੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇਹ ਮਾਰਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ?

4. ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਕਿਸੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ, ਕਿਸੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ m ਦੇ ਲਈ $3m$ ਜਾਂ $3m + 1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

   [ਸੰਕੇਤ : ਮੰਨ ਲਉ x ਕੋਈ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਹੁਣ ਇਹ $3q$, $3q + 1$ ਜਾਂ $3q + 2$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰ ਇੱਕ ਦਾ ਵਰਗ ਕਰੋ ਅਤੇ ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਵਰਗਾਂ ਨੂੰ $3m$ ਜਾਂ $3m + 1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।]

5. ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਕਿਸੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਘਣ $9m$, $9m + 1$ ਜਾਂ $9m + 8$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

1.3 ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ (Fundamental Theorem of Arithmetic)

ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਉਸਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $2 = 2$, $4 = 2 \times 2$, $253 = 11 \times 23$ ਆਦਿ। ਆਉ ਹੁਣ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਉੱਤੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਭਾਵ ਇਹ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਕੀ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ? ਆਉ ਇਸ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੀਏ।

ਕੁਝ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਮੰਨ ਲਉ 2, 3, 7, 11 ਅਤੇ 23 ਦਾ ਇੱਕ ਸੰਗ੍ਰਿਹ ਲਉ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਜਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗੁਣਾ ਕਰੀਏ (ਅਸੀਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਿੰਨੀ ਵਾਰ ਚਾਹੀਏ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ) ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਵੱਡਾ ਸਾਰਾ ਸੰਗ੍ਰਿਹ ਬਣਾ ਸਕਦੇ

ਹਾਂ (ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਮਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ)। ਆਉ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਦੀ ਸੂਚੀ ਬਣਾਈਏ :

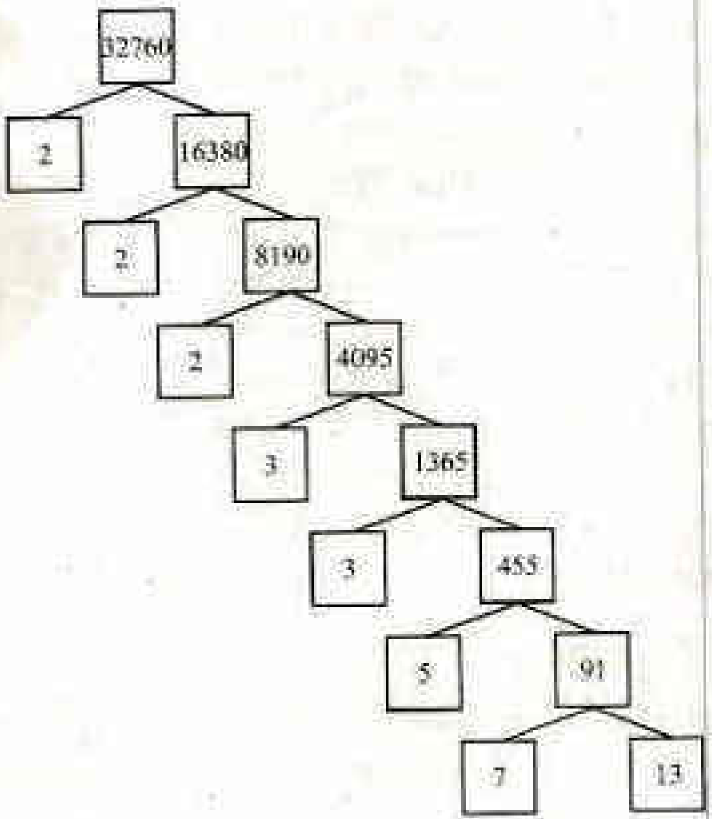
$7 \times 11 \times 23 = 1771$, $3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$,

$2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$, $2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$,

$2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$ ਆਦਿ।

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਤੁਹਾਡੇ ਸੰਗ੍ਰਿਹ ਵਿੱਚ, ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਭਵ ਅਭਾਜ (prime) ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ। ਇਸ ਸੰਗ੍ਰਿਹ ਦੇ ਮਾਪ (size) ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਕੀ ਇਸ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ (finites) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜਾਂ ਅਸੀਮਿਤ (Infinite)? ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਣਗਿਣਤ (Infinites) ਹਨ। ਸੋ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਇਕੱਠਾ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਅਣਗਿਣਤ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦਾ ਅਣਗਿਣਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸੰਗ੍ਰਿਹ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ। ਹੁਣ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਕੀ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਭਾਜ (composite) ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ? ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਸੋਚਦੇ ਹੋ? ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਸੋਚਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕੋਈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜੋ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ (powers) ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਨਾ ਹੋਵੇ ? ਇਸਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਆਉ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡਨ ਕਰੀਏ, ਭਾਵ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਤੱਕ ਜੋ ਕੀਤਾ ਹੈ ਉਸਦਾ ਉਲਟਾ ਕਰੀਏ।

ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਰੁੱਖ (factor tree) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸ ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਜਾਣੂ ਹੋ। ਆਉ ਇੱਕ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਮੰਨ ਲਉ 32760 ਲਈਏ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੇਠਾਂ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਕਰੀਏ :



ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਅਸੀਂ 32760 ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਕਰ ਲਿਆ ਹੈ ਜੋ $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ ਹੈ। ਭਾਵ $32760 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$ ਹੈ, ਜੋ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਆਓ ਇੱਕ ਹੋਰ ਸੰਖਿਆ ਮੰਨ ਲਓ 123456789 ਲੈ ਕੇ ਇਸ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਲਿਖੀਏ। ਇਸ ਨੂੰ $3^2 \times 3803 \times 3607$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਬੇਸ਼ਕ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਸਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ ਕਿ 3803 ਅਤੇ 3607 ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ (ਕੁਝ ਹੋਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲੈ ਕੇ ਤੁਸੀਂ ਆਪ ਵੀ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ) ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਅਨੁਮਾਨ (conjecture) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਵਿੱਚ ਇਹ ਮੂਲਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਸਥਾਨ ਰੱਖਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਕਾਰਣ ਇਹ ਕਥਨ **ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ (Fundamental Theorem of Arithmetic)** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਆਓ ਇਸ ਪਰਿਮੇਯ ਨੂੰ ਉਪਚਾਰਿਕ (formal) ਤੌਰ 'ਤੇ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਕਰੀਏ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 1.12 (ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ) ਹਰ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ (composite number) ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (prime numbers) ਦੇ ਇੱਕ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ (ਦਰਸਾਇਆ) ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਗੁਣਨਖੰਡਨ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਤਰਤੀਬ (ਕ੍ਰਮ) (order) ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲ ਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਹੋਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.2 ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਵਰਨਣ ਯੂਕਲਿਡ ਦੇ ਐਲੀਮੈਂਟਸ ਦੀ ਪੁਸਤਕ IX ਵਿੱਚ ਸਾਧਯ (proposition) 14 ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ ਸੀ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਸਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਸਬੂਤ ਕਾਰਲ ਫ੍ਰੈਡਰਿਕ ਗਾੱਸ *(Carl Friedrich Guass)* ਦੀ ਆਪਣੀ ਲਿਖਤ ਡਿਸਕਿਊਸ਼ਸ ਅਰਥਮੇਟਿਕੀ *(Disquisitions Arithmeticae)* ਵਿੱਚ ਸੀ।

ਕਾਰਲ ਫ੍ਰੈਡਰਿਕ ਗਾੱਸ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ 'ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀਆਂ ਦੇ ਰਾਜ ਕੁਮਾਰ' ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਨਾਮ ਹਰ ਸਮੇਂ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਰਹੇ ਤਿੰਨ ਮਹਾਨਤਮ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀਆਂ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਆਰਕੀਮੀਡਿਜ (Archimedes) ਅਤੇ ਨਿਊਟਨ (Newton) ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਵਿਗਿਆਨ ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚ ਹੀ ਮੌਲਿਕ ਯੋਗਦਾਨ ਹੈ।

ਕਾਰਲ ਫ੍ਰੈਡਰਿਕ ਗਾੱਸ
(1777 – 1855)

ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਕਹਿੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਹੋਰ ਵੀ ਕੁਝ ਕਹਿੰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਕਹਿੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਬਿਨਾਂ ਇਹ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਿਆਂ ਕਿ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਕਿਸ ਤਰਤੀਬ (ਕ੍ਰਮ)

(order) ਵਿੱਚ ਹਨ, ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਤਰੀਕੇ (unique way) ਨਾਲ ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ ਦਾ ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਹੀ ਤਰੀਕਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ 'ਤੇ ਕੋਈ ਵਿਚਾਰ ਨਹੀਂ ਕਰਦੇ। ਇਸ ਲਈ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਸੀਂ $2 \times 3 \times 5 \times 7$ ਨੂੰ ਉਹ ਹੀ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ ਜੋ $3 \times 5 \times 7 \times 2$, ਨੂੰ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਇਹਨਾਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਕ੍ਰਮ ਨੂੰ ਵੀ ਅਸੀਂ $2 \times 3 \times 5 \times 7$ ਵਰਗਾ ਹੀ ਮੰਨਾਂਗੇ। ਇਸ ਤੱਥ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਨ, ਉਸਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੀ ਤਰਤੀਬ (ਕ੍ਰਮ) ਨੂੰ ਛੱਡਦੇ ਹੋਏ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜਦੋਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ x ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਉਸਨੂੰ $x = p_1p_2 \ldots p_n$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ਆਦਿ ਵੱਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਭਾਵ $p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_n$ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀਆਂ (ਬਰਾਬਰ) ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਕਰ ਲਈਏ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ (powers) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ, $32760 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$

ਇੱਕ ਵਾਰ ਇਹ ਨਿਰਣਾ ਲੈਣ ਤੋਂ ਬਾਦ ਕਿ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੀ ਇਹ ਤਰਤੀਬ ਵਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇਗੀ ਤਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਹੋਣਗੇ।

ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਹੋਰ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਹੀ ਅਨੇਕਾਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਹਨ। ਆਉ ਇਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਸੰਖਿਆਵਾਂ 4^n 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ n ਦਾ ਕੋਈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ 4^n ਅੰਕ ਸਿਫ਼ਰ (0) 'ਤੇ ਸਮਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ n ਦੇ ਲਈ ਸੰਖਿਆ 4^n ਸਿਫ਼ਰ 'ਤੇ ਸਮਾਪਤ ਹੋਵੇਗੀ ਤਾਂ ਇਹ 5 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੋਵੇਗੀ। ਭਾਵ 4^n ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿੱਚ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ 5 ਆਉਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $4^n = (2)^{2n}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 4^n ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ 2 ਹੀ ਆ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਿਲੱਖਣਤਾ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਯਕੀਨ ਦਿਵਾਉਂਦੀ ਹੈ ਕਿ 4^n ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿੱਚ 2 ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਹੋਰ ਕੋਈ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ n ਨਹੀਂ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਲਈ 4^n ਅੰਕ ਸਿਫ਼ਰ 0 'ਤੇ ਸਮਾਪਤ ਹੋਵੇਗੀ।

ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ, ਇਹ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਅਤੇ ਲ.ਸ.ਵ (L.C.M) ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ, ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਨਾਮ ਦਾ ਜ਼ਿਕਰ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ

ਗਿਆ ਸੀ। ਇਸ ਤਰੀਕੇ ਨੂੰ *ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਨ ਵਿਧੀ (prime factorisation method)* ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਆਉ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਇਸ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਫਿਰ ਤੋਂ ਯਾਦ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਸੰਖਿਆਵਾਂ 6 ਅਤੇ 20 ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਅਤੇ ਲ.ਸ.ਵ (L.C.M) ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $6 = 2^1 \times 3^1$ ਅਤੇ $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$ ਹੈ।

ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਤੁਸੀਂ ਮ.ਸ.ਵ. (H.C.F) (6, 20) = 2 ਅਤੇ ਲ.ਸ.ਵ. (L.C.M.) (6, 20) = $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ HCF (6, 20) = 2^1 = **ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਸਾਂਝੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਘਾਤ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਅਤੇ**

LCM (6, 20) = $2^2 \times 3^1 \times 5^1$ = **ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਆਏ ਹਰ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ**

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚੋਂ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖ ਲਿਆ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ HCF (6, 20) × LCM (6, 20) = 6 × 20 ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਇਸਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਲਈ **HCF (a, b) × LCM $(a, b) = a \times b$** ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਿੱਟੇ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ *LCM* ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਪਤਾ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ 96 ਅਤੇ 404 ਦਾ HCF ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇਸ ਦਾ LCM ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: 96 ਅਤੇ 404 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$96 = 2^5 \times 3,\ 404 = 2^2 \times 101$$

ਇਸ ਲਈ, ਇਹਨਾਂ ਦੋਹਾਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ ਭਾਵ HCF (96,404) $= 2^2 = 4$

ਨਾਲ ਹੀ
$$\text{LCM } (96, 404) = \frac{96 \times 404}{\text{HCF}(96, 404)} = \frac{96 \times 404}{4} = 9696$$

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਸੰਖਿਆਵਾਂ 6, 72 ਅਤੇ 120 ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਅਤੇ ਲ.ਸ.ਵ (L.C.M) ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ :

$$6 = 2 \times 3,\ 72 = 2^3 \times 3^2 \text{ ਅਤੇ } 120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

2^1 ਅਤੇ 3^1 ਹਰ ਇੱਕ ਸਾਂਝੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੀਆਂ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, HCF (6, 72, 120) = $2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$

2^3, 3^2 ਅਤੇ 5^1 ਹਰ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਘਾਤ ਹੈ, ਜੋ ਤਿੰਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $\text{LCM}(6, 72, 120) = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$

ਟਿੱਪਣੀ : ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $6 \times 72 \times 120 \neq \text{HCF}(6, 72, 120) \times \text{LCM}(6, 72, 120)$, ਭਾਵ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਉਹਨਾਂ ਦੇ HCF ਅਤੇ LCM ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 1.2

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ:

   (i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

2. ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਜੋੜਿਆਂ ਦਾ HCF ਅਤੇ LCM ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ = HCF$\times$LCM ਹੈ।

   (i) 26 ਅਤੇ 91 (ii) 510 ਅਤੇ 92 (iii) 336 ਅਤੇ 54

3. ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ HCF ਅਤੇ LCM ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) 12, 15 ਅਤੇ 21 (ii) 17, 23 ਅਤੇ 29 (iii) 8, 9 ਅਤੇ 25

4. HCF (306, 657) = 9 ਦਿੱਤਾ ਹੈ। LCM (306, 657) ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ n ਦੇ ਲਈ ਸੰਖਿਆ 6^n ਅੰਕ ਜ਼ਿਫ਼ਰ (0) 'ਤੇ ਸਮਾਪਤ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।

6. ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ ਕਿ $7 \times 11 \times 13 + 13$ ਅਤੇ $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਕਿਉਂ ਹਨ।

7. ਕਿਸੇ ਖੇਡ ਦੇ ਮੈਦਾਨ ਦੇ ਚਾਰੇ ਪਾਸੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਰਸਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਮੈਦਾਨ ਦਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਲਗਾਉਣ ਲਈ ਸੋਨੀ ਨੂੰ 18 ਮਿੰਟ ਲਗਦੇ ਹਨ, ਜਦ ਕਿ ਇਸ ਮੈਦਾਨ ਦਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਲਗਾਉਣ ਲਈ ਰਵੀ ਨੂੰ 12 ਮਿੰਟ ਲੱਗਦੇ ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਉਹ ਦੋਨੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਸਥਾਨ ਅਤੇ ਇੱਕੋ ਹੀ ਸਮੇਂ 'ਤੇ ਚਲਣਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇੱਕ ਹੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਕਿੰਨੇ ਸਮੇਂ ਬਾਅਦ ਉਹ ਦੋਵੇਂ ਸ਼ੁਰੂ ਵਾਲੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਦੁਬਾਰਾ ਮਿਲਣਗੇ।

1.4 ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਦੁਹਰਾਈ

IX ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਤੁਹਾਨੂੰ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਗੁਣਾਂ ਤੋਂ ਜਾਣੂ ਕਰਵਾਇਆ ਗਿਆ ਸੀ। ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਸੀ ਅਤੇ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਅਤੇ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਮਿਲਕੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (real numbers) ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਸਿੱਖਿਆ ਸੀ ਕਿ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਥਾਨ ਨਿਰਧਾਰਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਫਿਰ ਵੀ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਨਹੀਂ ਸੀ ਕੀਤਾ ਕੀ ਇਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹਨ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ਅਤੇ ਆਮ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, $\sqrt{p}$

ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ p ਇਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਆਪਣੇ ਸਬੂਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ, ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੈ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ।

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ ਸੰਖਿਆ 's' ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਉਸ ਨੂੰ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਾ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੋਵੇ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $q \neq 0$ ਹੈ। ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣੂੰ ਹੋ, ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਹਨ:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0.10110111011110\ldots, \text{ ਆਦਿ ।}$$

ਇਸ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ $\sqrt{2}$ ਨੂੰ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਸਿੱਧ ਕਰੀਏ, ਸਾਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਪਵੇਗੀ, ਇਸਦਾ ਸਬੂਤ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪਰਿਮੇਯ 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 1.3 : ਮੰਨ ਲਉ p ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ p, a^2 ਨੂੰ ਭਾਗ (ਵੰਡਦੀ) ਕਰਦੀ ਹੈ, ਤਾਂ p, a ਨੂੰ ਵੀ ਭਾਗ ਕਰੇਗੀ। ਇੱਥੇ a ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

***ਸਬੂਤ :** ਮੰਨ ਲਉ a ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਦੇ ਹਨ: $a = p_1 p_2 \ldots p_n$ ਜਿੱਥੇ $p_1, p_2, \ldots p_n$ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਪਰੰਤੂ ਜਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ ਇਹ ਅੱਲਗ-ਅੱਲਗ ਹੋਣ।

ਇਸ ਲਈ $a^2 = (p_1 p_2 \ldots p_n)(p_1 p_2 \ldots p_n) = p_1^2 p_2^2 \ldots p_n^2$

ਹੁਣ, ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ p, a^2 ਨੂੰ ਭਾਗ (ਵੰਡਦੀ) ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ p, a^2 ਦਾ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਿਲੱਖਣਤਾ ਦੇ ਗੁਣ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ a^2 ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਕੇਵਲ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ਹੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ p ਨੂੰ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੋਣਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਹੁਣ, ਕਿਉਂਕਿ $a = p_1 p_2 \ldots p_n$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ p, a ਨੂੰ ਜ਼ਰੂਰ ਭਾਗ ਕਰੇਗਾ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸਦਾ ਸਬੂਤ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਹ ਸਬੂਤ ਉਸ ਤਕਨੀਕ 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ 'ਸਵੈਵਿਰੋਧ ਰਾਹੀਂ ਸਬੂਤ' (proof by contradiction) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। (ਇਸ ਤਕਨੀਕ ਦੀ ਵਿਸਥਾਰਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਚਰਚਾ ਅੰਤਿਕਾ – 1 ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ)।

ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) 1.4 : $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਅਸੀਂ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਇਹ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ , ਅਸੀਂ ਦੋ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ r ਅਤੇ s ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

* ਇਹ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

$\sqrt{2} = \frac{r}{s}$ ਹੋਵੇ ਅਤੇ $s\ (\neq 0)$ ਹੋਵੇ। ਮੰਨ ਲਓ r ਅਤੇ s ਵਿੱਚ, 1 ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਕੋਈ ਹੋਰ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨੂੰ r ਅਤੇ s ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਕੇ $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ a ਅਤੇ b ਸਹਿ ਅਭਾਜ (co-prime) ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ : $b\sqrt{2} = a$ ਹੋਇਆ।

ਦੋਹਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਵਰਗ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$2b^2 = a^2$$

ਇਸ ਲਈ : $2, a^2$ ਨੂੰ ਵੰਡਦਾ (ਭਾਗ ਕਰਦਾ) ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.3 ਦੁਆਰਾ $2, a$ ਨੂੰ ਵੀ ਵੰਡੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ $a = 2c$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ c ਕੋਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

a ਦਾ ਮੁੱਲ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $2b^2 = 4c^2$,ਭਾਵ $b^2 = 2c^2$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ $2, b^2$ ਨੂੰ ਵੰਡਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $2, b$ ਨੂੰ ਵੀ ਵੰਡੇਗਾ (ਪ੍ਰਮੇਯ ੧.੩ ਵਿੱਚ $p = 2$ ਲੈਣ 'ਤੇ)।

ਇਸ ਲਈ a ਅਤੇ b ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ 2 ਹੈ।

ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਹੈ ਕਿ a ਅਤੇ b ਵਿੱਚ 1 ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਹ ਉਲਟ ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਤਰੁੱਟੀ ਵਾਲੀ ਗੱਲ ਮੰਨੀ ਸੀ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ: ਆਓ ਅਸੀਂ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਇਹ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਦੋ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ $b\ (\neq 0)$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ a ਅਤੇ b ਵਿੱਚ, 1 ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਉਸ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇ ਕੇ a ਅਤੇ b ਨੂੰ ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਲਈ $b\sqrt{3} = a$ ਹੈ।

ਦੋਵੇਂ ਪਾਸੇ ਵਰਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $3b^2 = a^2$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ a^2, 3 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.3 ਦੁਆਰਾ $3, a$ ਨੂੰ ਵੀ ਭਾਗ ਕਰੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ $a = 3c$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ c ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

a ਦੇ ਇਸ ਮੁੱਲ ਨੂੰ $3b^2 = a^2$ ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ

$3b^2 = 9c^2$ ਭਾਵ $b^2 = 3c^2$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ b^2, 3 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.3 ਦੁਆਰਾ b ਵੀ 3 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ a ਅਤੇ b ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ 3 ਹੈ।

ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਹੈ ਕਿ a ਅਤੇ b ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਹਨ। ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਉਲਟ ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਤਰੁੱਟੀ ਵਾਲੀ ਗੱਲ ਮੰਨੀ ਸੀ ਕਿ $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੱਸਿਆ ਸੀ ਕਿ:

- ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ ਘਟਾਉ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ
- ਇੱਕ ਸਿਫਰ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਜਾਂ ਭਾਗਫਲ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ, ਉਪਰੋਕਤ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ $5-\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ: ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ $5-\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਭਾਵ ਅਸੀਂ ਦੋ ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b $(b \neq 0)$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $5-\sqrt{3}=\frac{a}{b}$ ਹੋਵੇ।

ਇਸ ਲਈ $\qquad 5-\frac{a}{b}=\sqrt{3}$ ਹੈ।

ਜਾਂ $\qquad \sqrt{3}=5-\frac{a}{b}$ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ a ਅਤੇ b ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ $5-\frac{a}{b}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਭਾਵ $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਹੈ ਕਿ $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਹ ਉਲਟ ਸਾਨੂੰ ਸਾਡੇ ਗਲਤ ਮੰਨਣ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $5-\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $5-\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ $3\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਆਉ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ $3\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਭਾਵ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b $(b \neq 0)$ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ਹੋਵੇ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sqrt{2} = \frac{a}{3b}$ ਹੋਵੇ।

ਕਿਉਂਕਿ 3, a ਅਤੇ b ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ $\frac{a}{3b}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸ ਲਈ $\sqrt{2}$ ਵੀ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਹੈ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $3\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 1.3

1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\sqrt{5}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
2. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $3 + 2\sqrt{5}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
3. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹਨ :

   (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6 + \sqrt{2}$

1.5 ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਰੂਪ ਦੀ ਦੁਹਰਾਈ

IX ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ ਕਿ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸ਼ਾਂਤ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ (terminating decimal expansions) ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਫਿਰ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ (non-terminating repeating) ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਮੰਨ ਲਉ $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖੋਜ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ $\frac{p}{q}$ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ (ਰੂਪ) ਕਦੋਂ ਸ਼ਾਂਤ ਅਤੇ ਕਦੋਂ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਹੋਵੇਗੀ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੁਆਰਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਆਉ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ

(i) 0.375 (ii) 0.104 (iii) 0.0875 (iv) 23.3408

ਹੁਣ (i) $0.375 = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3}$ (ii) $0.104 = \frac{104}{1000} = \frac{104}{10^3}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10000} = \frac{875}{10^4}$ (iv) $23.3408 = \frac{233408}{10000} = \frac{233408}{10^4}$

ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਕੋਈ ਉਮੀਦ ਕਰੇਗਾ, ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ (ਲਿਖਿਆ) ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੰਨਾਂ ਦਾ ਹਰ 10 ਦੀ ਕੋਈ ਘਾਤ ਹੋਵੇਗਾ। ਆਉ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟ ਕੇ, ਇਹ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਕੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(i) $0.375 = \frac{375}{10^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{3}{2^3}$ (ii) $0.104 = \frac{104}{10^3} = \frac{13 \times 2^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{13}{5^3}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10^4} = \frac{7}{2^4 \times 5}$ (iv) $23.3408 = \frac{233408}{10^4} = \frac{2^2 \times 7 \times 521}{5^4}$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇੱਥੇ ਕੋਈ ਨਮੂਨਾ (Pattern) ਦੇਖ ਰਹੇ ਹੋ? ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਉਸ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਜਿਸਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਇੱਕ ਸ਼ਾਂਤ ਦਸ਼ਮਲਵ ਹੈ, ਇੱਕ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਲਿਆ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਹਨ ਅਤੇ ਹਰ (ਭਾਵ q) ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ 2 ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਜਾਂ 5 ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਜਾਂ ਦੋਹਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਹਨ। ਸਾਨੂੰ ਹਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਹੀ ਦਿਸਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ 10 ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ 2 ਅਤੇ 5 ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਹੀ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੋਣਗੀਆਂ।

ਭਾਵੇਂ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਘੱਟ ਹੀ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹੱਲ ਕਰਕੇ ਦੇਖੀਆਂ ਹਨ, ਫਿਰ ਵੀ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕੋਈ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੈ, ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਹਰ 10 ਦੀ ਕੋਈ ਘਾਤ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ 10 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਕੇਵਲ 2 ਅਤੇ 5 ਹੀ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟਕੇ ਅਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ ਅਤੇ n ਅਤੇ m ਕੋਈ ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਣ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਆਉ ਆਪਣੇ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਉਪਚਾਰਕ ਤੌਰ 'ਤੇ ਲਿਖੀਏ :

ਪ੍ਰਮੇਯ 1.5 ਮੰਨ ਲਉ x ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ (ਰੂਪ) ਸ਼ਾਂਤ ਹੈ। ਹੁਣ x ਨੂੰ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਹਨ ਅਤੇ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜਿੱਥੇ n, m ਕੋਈ ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਣ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਸੰਭਵ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਹੈਰਾਨ ਹੋ ਰਹੇ ਹੋਵੋਗੇ ਕਿ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.5 ਦਾ ਉਲਟ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ? ਭਾਵ

ਜੇਕਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਕੋਈ ਪ੍ਰਮੇਯ ਸੰਖਿਆ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ ਅਤੇ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ n ਅਤੇ m ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਕੀ $\frac{p}{q}$ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੋਵੇਗਾ?

ਆਉ ਹੁਣ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਕੀ ਉਪਰੋਕਤ ਕਥਨ ਦੇ ਸੱਚ ਹੋਣ ਦੇ ਕੋਈ ਸਪਸ਼ਟ ਕਾਰਣ ਹਨ। ਤੁਸੀਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੀ ਇਸ ਗੱਲ ਨਾਲ ਸਹਿਮਤ ਹੋਵੋਗੇ ਕਿ $\frac{a}{b}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਵੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ, ਜਿੱਥੇ b, 10 ਦੀ ਕੋਈ ਘਾਤ ਹੈ, ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ, ਇਹ ਅਰਥਪੂਰਣ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ, ਜਿੱਥੇ q, 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ, ਨੂੰ $\frac{a}{b}$ ਦੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਤੁਲ (equivalent) ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਵੇ, ਜਿੱਥੇ b, 10 ਦੀ ਕੋਈ ਘਾਤ ਹੋਵੇ। ਆਉ ਆਪਣੇ ਉੱਪਰ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਾਪਸ ਆਈਏ ਅਤੇ ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਕਰਨਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰੀਏ।

(i) $\frac{3}{8}=\frac{3}{2^3}=\frac{3\times5^3}{2^3\times5^3}=\frac{375}{10^3}=0.375$

(ii) $\frac{13}{125}=\frac{13}{5^3}=\frac{13\times2^3}{5^3\times2^3}=\frac{104}{10^3}=0.104$

(iii) $\frac{7}{80}=\frac{7}{2^4\times5}=\frac{7\times5^3}{2^4\times5^4}=\frac{875}{10^4}=0.0875$

(iv) $\frac{14588}{625}=\frac{2^2\times7\times521}{5^4}=\frac{2^6\times7\times521}{2^4\times5^4}=\frac{233408}{10^4}=23.3408$

ਇਸ ਲਈ, ਇਹ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਜਿੱਥੇ q, 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਨੂੰ $\frac{a}{b}$ ਦੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਤੁੱਲ (equivalent) ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਬਦਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ b, 10 ਦੀ ਕੋਈ ਘਾਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਇੱਕ ਸ਼ਾਂਤ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਹੋਵੇਗਾ। ਆਉ ਇਸ ਪਰਿਣਾਮ ਨੂੰ ਉਪਚਾਰਕ ਤੌਰ 'ਤੇ ਲਿਖੀਏ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 1.6 : ਮੰਨ ਲਉ $x=\frac{p}{q}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਹੈ ਕਿ q, 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ n ਅਤੇ m ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ x ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵੱਲ ਵੱਧਣ ਲੱਗੇ ਹਾਂ ਜਿੰਨਾਂ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ (non terminating) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਾਰ ਫਿਰ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈ ਕੇ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕੀ ਹੋ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਮਾਤ IX ਦੀ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਪਾਠ 1 ਦੀ ਉਦਾਹਰਣ 5 ਨੂੰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ $\frac{1}{7}$ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸੀ।

$$
\begin{array}{r}
0.1428571 \\
7\,\overline{)\,10} \\
\underline{7} \\
30 \\
\underline{28} \\
20 \\
\underline{14} \\
60 \\
\underline{56} \\
40 \\
\underline{35} \\
50 \\
\underline{49} \\
10 \\
\underline{7} \\
30
\end{array}
$$

ਇੱਥੇ ਬਾਕੀ 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, . . . ਹਨ ਅਤੇ ਭਾਜਕ 7 ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿਚ ਹਰ 7, 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.5 ਅਤੇ 1.6 ਤੋਂ, $\frac{1}{7}$ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਇੱਥੇ 0 ਬਾਕੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਆਵੇਗਾ (ਕਿਉਂ?) ਅਤੇ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਬਾਕੀ ਬਚਣ ਵਾਲੇ ਅੰਕ ਫਿਰ ਤੋਂ ਆਉਣੇ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋ ਜਾਣਗੇ। ਇਸ ਲਈ $\frac{1}{7}$ ਦੇ ਭਾਗਫਲ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਬਲਾਕ ਭਾਵ 142857 ਫਿਰ ਤੋਂ ਆਵੇਗਾ।

ਅਸੀਂ $\frac{1}{7}$ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਵਿੱਚ ਜੋ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਉਹ ਉਹਨਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ ਜੋ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ 1.5 ਅਤੇ 1.6 ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਨਹੀਂ ਆਉਂਦੀ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਪ੍ਰਮੇਯ 1.7 ਮੰਨ ਲਉ $x = \frac{p}{q}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਹੈ ਕਿ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ n ਅਤੇ m ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਤਾਂ x ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਤੋਂ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸ਼ਾਂਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਾਂ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 1.4

1. ਬਿਨਾਂ ਲੰਬੀ ਵੰਡ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਕਰਦਿਆਂ ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹਨ ਜਾਂ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਹਨ :

(i) $\frac{13}{3125}$ (ii) $\frac{17}{8}$ (iii) $\frac{64}{455}$

(iv) $\frac{15}{1600}$ (v) $\frac{29}{343}$ (vi) $\frac{23}{2^3 5^2}$

(vii) $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$ (viii) $\frac{6}{15}$ (ix) $\frac{35}{50}$ (x) $\frac{77}{210}$

2. ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਉਹਨਾ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਲਿਖੋ ਜੋ ਸ਼ਾਂਤ ਹਨ।

3. ਕੁਝ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਹਨ। ਹਰ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਲਈ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ ਸੰਖਿਆ ਪਰਿਮੇਯ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੈ ਤਾਂ q ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ?

(i) 43.123456789 (ii) 0.120120012000120000. . . (iii) $43.\overline{123456789}$

1.6 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ:

1. ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ :

   ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਲਈ ਅਸੀਂ $a = bq + r, 0 \le r < b$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲੀਆਂ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ q ਅਤੇ r ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਭਾਵ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।

2. ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ : ਇਹ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ $b, (a > b)$ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

   ਪਗ 1 : q ਅਤੇ r ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਯੂਕਲਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ $a = bq + r, 0 \le r < b$ ਹੈ।

   ਪਗ 2 : ਜੇਕਰ $r = 0$ ਹੈ ਤਾਂ HCF $= b$ ਹੈ। ਜੇਕਰ $r \neq 0$ ਹੈ ਤਾਂ b ਅਤੇ r ਉੱਪਰ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ।

   ਪਗ 3 : ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਉਦੋਂ ਤੱਕ ਜਾਰੀ ਰੱਖੋ ਜਦ ਤੱਕ ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਾ ਹੋ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਾਲਾ ਭਾਜਕ ਹੀ HCF (a, b) ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ HCF $(a, b) =$ HCF (b, r)

3. ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ :

   ਹਰ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ

(ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਕੀਤਾ) ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਉੱਪਰ ਕੋਈ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤੇ ਬਿਨਾਂ ਕਿ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਕਿਸ ਤਰਤੀਬ ਵਿੱਚ ਆ ਰਹੇ ਹਨ।

4. ਜੇਕਰ p ਕੋਈ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ p, a^2 ਨੂੰ ਵੰਡਦਾ (ਭਾਗ) ਹੈ ਤਾਂ p, a ਨੂੰ ਵੀ ਵੰਡੇਗਾ। ਇੱਥੇ a ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

5. ਸਬੂਤ ਕਿ $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ ਆਦਿ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

6. ਮੰਨ ਲਉ x ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ x ਨੂੰ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਹਨ ਅਤੇ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ। ਜਿੱਥੇ n, m ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

7. ਮੰਨ ਲਉ $x = \frac{p}{q}$ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਕਿ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ। ਜਿੱਥੇ n, m ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ x ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੋਵੇਗਾ।

8. ਮੰਨ ਲਉ $x = \frac{p}{q}$ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਕਿ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ n, m ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ x ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਹੋਵੇਗਾ।

ਪਾਠਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼

ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਹੈ:

$\text{HCF}(p, q, r) \times \text{LCM}(p, q, r) \neq p \times q \times r$, ਜਿਥੇ p, q, r ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ (ਉਦਾਹਰਣ 8 ਦੇਖੋ)। ਜਦੋਂ ਕਿ ਤਿੰਨ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ p, q ਅਤੇ r ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਦਿਤੇ ਪਰਿਣਾਮ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ:

$$\text{LCM}(p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot \text{HCF}(p, q, r)}{\text{HCF}(p, q) \cdot \text{HCF}(q, r) \cdot \text{HCF}(p, r)}$$

$$\text{HCF}(p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot \text{LCM}(p, q, r)}{\text{LCM}(p, q) \cdot \text{LCM}(q, r) \cdot \text{LCM}(p, r)}$$

ਬਹੁਪਦ (Polynomials) 2

2.1 ਭੂਮਿਕਾ

IX ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੇ ਬਹੁਪਦਾਂ (polynomials) ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ (degree) ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਚਲ x ਦੇ ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਵਿੱਚ x ਦੀ ਵੱਡੀ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਘਾਤ (power) ਨੂੰ ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਘਾਤ (degree) ਆਖਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, $4x + 2$ ਦੇ x ਵਿੱਚ ਚਲ 1 ਦਾ ਬਹੁਪਦ ਹੈ, $2y^2 - 3y + 4$ ਚਲ y ਵਿੱਚ ਘਾਤ 2 ਦਾ ਬਹੁਪਦ ਹੈ, $5x^3 - 4x^2 + x - \sqrt{2}$ ਚਲ x ਵਿੱਚ ਘਾਤ 3 ਦਾ ਬਹੁਪਦ ਹੈ ਅਤੇ $7u^6 - \frac{3}{2}u^4 + 4u^2 + u - 8$ ਚਲ u ਵਿੱਚ ਘਾਤ 6 ਦਾ ਬਹੁਪਦ ਹੈ। ਵਿਅੰਜਕ $\frac{1}{x-1}$, $\sqrt{x} + 2$, $\frac{1}{x^2 + 2x + 3}$ ਆਦਿ ਬਹੁਪਦ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਘਾਤ 1 ਦੇ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ **ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ (Linear polynomial)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, $2x - 3$, $\sqrt{3}x + 5$, $y + \sqrt{2}$, $x - \frac{2}{11}$, $3z + 4$, $\frac{2}{3}u + 1$ ਆਦਿ ਸਾਰੇ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਕਿ $2x + 5 - x^2$, $x^3 + 1$ ਆਦਿ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਬਹੁਪਦ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਘਾਤ 2 ਦੇ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ **ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ (quadratic polynomial)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਦੋ ਘਾਤ (quadratic) ਸ਼ਬਦ ਕਵਾਡਰੇਟ (quadrate) ਸ਼ਬਦ ਤੋਂ ਬਣਿਆ ਹੈ, ਜਿਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਵਰਗ। $2x^2 + 3x - \frac{2}{5}$, $y^2 - 2$, $2 - x^2 + \sqrt{3}x$, $\frac{u}{3} - 2u^2 + 5$, $\sqrt{5}v^2 - \frac{2}{3}v$, $4z^2 + \frac{1}{7}$, ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹਨ (ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ)। ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, x ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$, ਜਿੱਥੇ a,b,c ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $a \neq 0$ ਹੈ, ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਘਾਤ 3 ਦਾ ਬਹੁਪਦ **ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ (cubic polynomial)** ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ ਹਨ :

$$2-x^3, x^3, \sqrt{2}x^3, 3-x^2+x^3, 3x^3-2x^2+x-1$$

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਹੈ :

$$ax^3+bx^2+cx+d,$$

ਜਿੱਥੇ a, b, c, d ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $a \neq 0$ ਹੈ।

ਹੁਣ ਬਹੁਪਦ $p(x)=x^2-3x-4$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇਸ ਬਹੁਪਦ ਵਿੱਚ $x=2$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $p(2)=2^2-3\times 2-4=-6$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। x^2-3x-4 ਵਿੱਚ, x ਨੂੰ 2 ਰੱਖਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਮੁੱਲ -6; x^2-3x-4 ਦਾ $x=2$ ਤੇ ਮੁੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $p(0)$, $p(x)$ ਦਾ $x=0$ 'ਤੇ ਮੁੱਲ ਹੈ, ਜੋ -4 ਹੈ।

ਜੇਕਰ $p(x)$, x ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਹੁਪਦ ਹੈ ਅਤੇ k ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ $p(x)$ ਵਿੱਚ x ਨੂੰ k ਰੱਖਣ ਤੇ ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ **$p(x)$ ਦਾ $x=k$ 'ਤੇ ਮੁੱਲ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ** ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ $p(k)$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

$p(x)=x^2-3x-4$ ਦਾ $x=-1$ 'ਤੇ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹੈ? ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$p(-1)=(-1)^2-\{3\times(-1)\}-4=0$

ਨਾਲ ਹੀ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $p(4)=4^2-(3\times 4)-4=0$ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ $p(-1)=0$ ਅਤੇ $p(4)=0$, ਇਸ ਲਈ -1 ਅਤੇ 4 ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ x^2-3x-4 ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ (zeroes) ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ k ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਜੇਕਰ $p(k)=0$ ਹੋਵੇ।

ਤੁਸੀਂ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ ਕਿਵੇਂ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਜੇਕਰ $p(x)=2x+3$ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ k ਹੈ, ਤਾਂ $p(k)=0$ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ $2k+3=0$ ਭਾਵ $k=-\frac{3}{2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ $p(x)=ax+b$ ਦਾ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ k ਹੈ ਤਾਂ $p(k)=ak+b=0$ ਭਾਵ $k=\frac{-b}{a}$ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ, ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ $ax+b$ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ $\frac{-b}{a}$, $\frac{-(\text{ਅਚਲ ਪਦ})}{x \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ ਉਸਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ। ਕੀ ਇਹ ਹੋਰ ਬਹੁਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਵੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ? ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਕੀ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਵੀ ਉਸਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ?

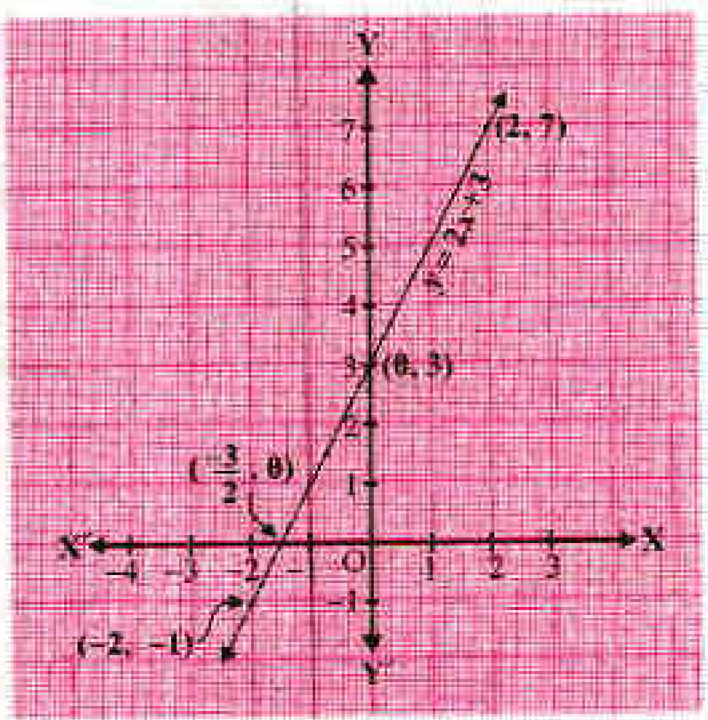
ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੰਡ ਵਿਧੀ (division algorithm) ਦਾ ਵੀ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

2.2 ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਸਿਫਰਾਂ ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਰਥ (Geometrical Meaning of the Zeroes of a Polynomial)

ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ k ਬਹੁਪਦਾਂ $p(x)$ ਦਾ ਇੱਕ ਸਿਫਰ ਹੈ, ਜੇਕਰ $p(k) = 0$ ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਿਫਰ ਇੰਨੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਕਿਉਂ ਹਨ? ਇਸਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਲਈ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਰੇਖੀ ਅਤੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਆਲੇਖੀ **(graphical)** ਨਿਰੂਪਣ ਦੇਖਾਂਗੇ ਅਤੇ ਫਿਰ ਉਸਦੀਆਂ ਸਿਫਰਾਂ ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਰਥ ਦੇਖਾਂਗੇ।

ਪਹਿਲਾਂ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ $ax + b, \neq 0$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਤੁਸੀਂ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ ਕਿ $y = ax + b$ ਦਾ ਆਲੇਖ (graph) ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $y = 2x + 3$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ ਬਿੰਦੂਆਂ $(-2, -1)$ ਅਤੇ $(2, 7)$ ਤੋਂ ਨਿਕਲਣ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੈ।

x	-2	2
$y = 2x + 3$	-1	7



ਚਿੱਤਰ 2.1

ਚਿੱਤਰ 2.1 ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ $y = 2x + 3$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ x-ਧੁਰੇ *(axis)* ਨੂੰ $x = -1$ ਅਤੇ $x = -2$ ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ ਭਾਵ $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ $2x + 3$ ਦਾ ਸਿਫਰ $-\frac{3}{2}$ ਹੈ। ਭਾਵ ਬਹੁਪਦ $2x + 3$ ਦਾ ਸਿਫਰ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦਾ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $y = 2x + 3$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

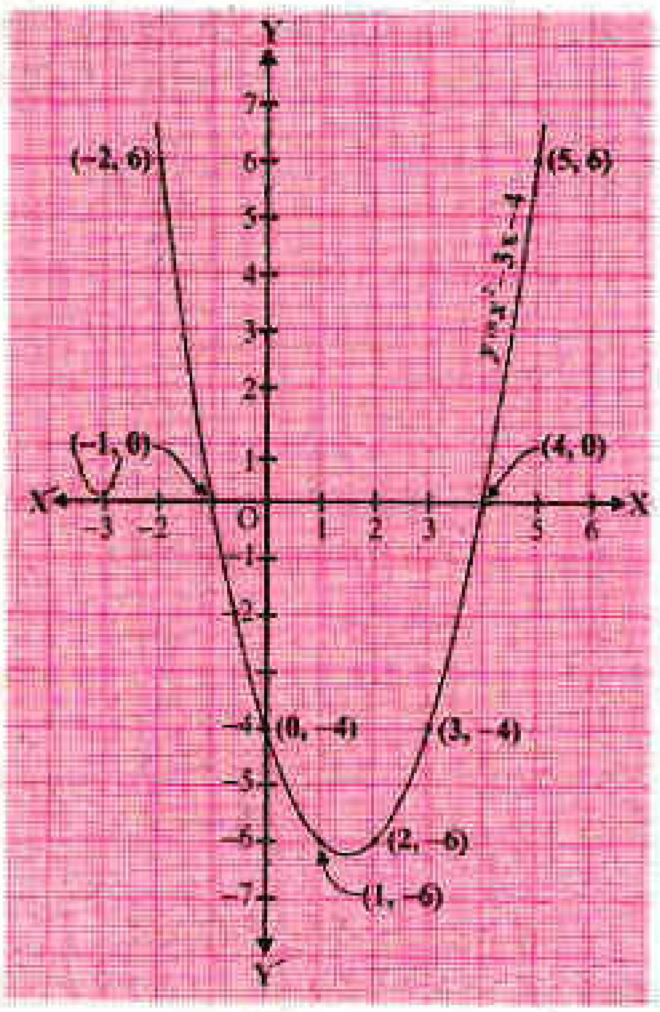
ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ $ax + b, a \neq 0$ ਦੇ ਲਈ $y = ax + b$ ਦਾ ਗਰਾਫ਼ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੈ ਜੋ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਠੀਕ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ $ax + b, a \neq 0$ ਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਿਫਰ ਹੈ, ਜੋ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦਾ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $y = ax + b$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਆਉ ਅਸੀਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਕਿਸੇ ਸਿਫਰ ਦੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਰਥ ਨੂੰ ਸਮਝੀਏ। ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $x^2 - 3x - 4$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਆਉ ਦੇਖੀਏ ਕਿ $y = x^2 - 3x - 4$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ ਕਿਸ *ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਦਿਖਾਈ

* ਦੋ ਘਾਤੀ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ ਖਿੱਚਣਾ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਇਸਦਾ ਮੁਲਾਂਕਣ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ x ਦੇ ਕੁਝ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ $y = x^2 - 3x - 4$ ਦੇ ਕੁਝ ਮੁੱਲ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਰਣੀ 2.1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 2.1

x	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 3x - 4$	6	0	–4	–6	–6	–4	0	6



ਚਿੱਤਰ 2.2

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਉਪਰੋਕਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਅੰਕਿਤ ਕਰੀਏ ਅਤੇ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਖਿੱਚੀਏ ਤਾਂ ਇਹ ਚਿੱਤਰ 2.2 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਗਏ ਵਰਗਾ ਹੋਵੇਗਾ।

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ ਦੇ ਲਈ ਸੰਗਤ ਸਮੀਕਰਣ $y = ax^2 + bx + c$ ਦੇ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਦਾ ਅਕਾਰ ਜਾਂ ਤਾਂ ਉੱਪਰ ਵੱਲ ਖੁੱਲਾ $\bigcup$ ਵਰਗਾ ਜਾਂ ਹੇਠਲੇ ਪਾਸੇ ਖੁੱਲਾ $\bigcap$ ਵਰਗਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਜੋ ਇਸ 'ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰੇਗਾ ਕਿ $a > 0$ ਹੈ ਜਾਂ $a < 0$ ਹੈ (ਇਹਨਾਂ ਵਕਰਾਂ ਨੂੰ **ਪੈਰਾਬੋਲਾ (parabola)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ)।

ਸਾਰਣੀ 2.1 ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ –1 ਅਤੇ 4 ਹਨ। ਇਸ ਉੱਪਰ ਵੀ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ –1 ਅਤੇ 4 ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ ਜਿੱਥੇ $y = x^2 - 3x - 4$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ਼ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $x^2 - 3x - 4$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $y = x^2 - 3x - 4$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ਼ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

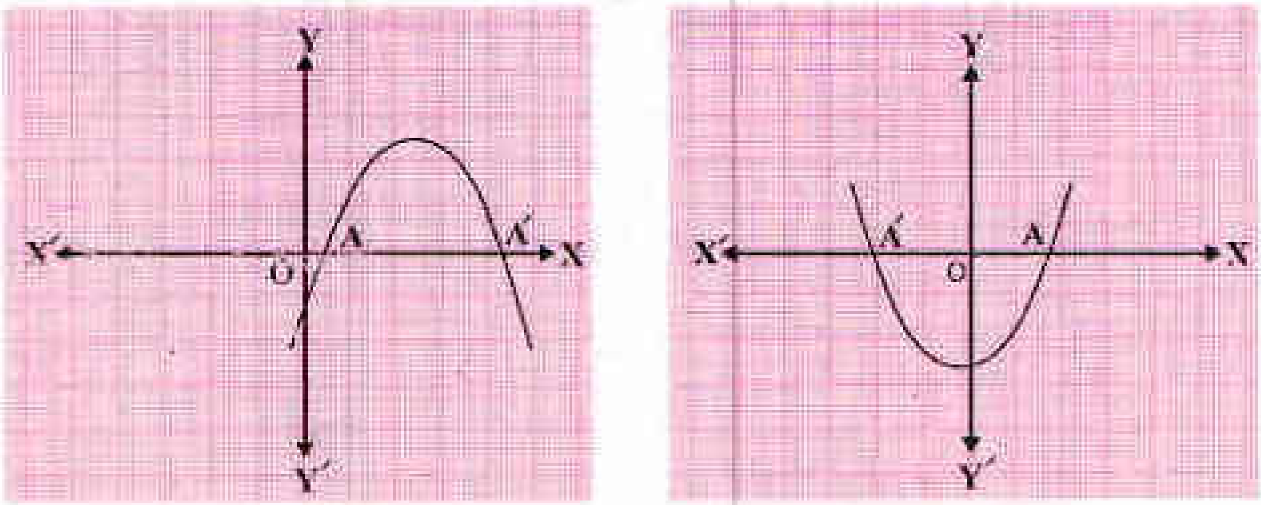
ਇਹ ਤੱਥ ਸਾਰੀਆਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ, ਭਾਵ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x– ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $y = ax^2 + bx + c$ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਪੈਰਾਬੋਲਾ (parabola) x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

$y = ax^2 + bx + c$ ਦੇ ਆਲੇਖ ਦੇ ਅਕਾਰ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ 'ਤੇ ਤਿੰਨ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ

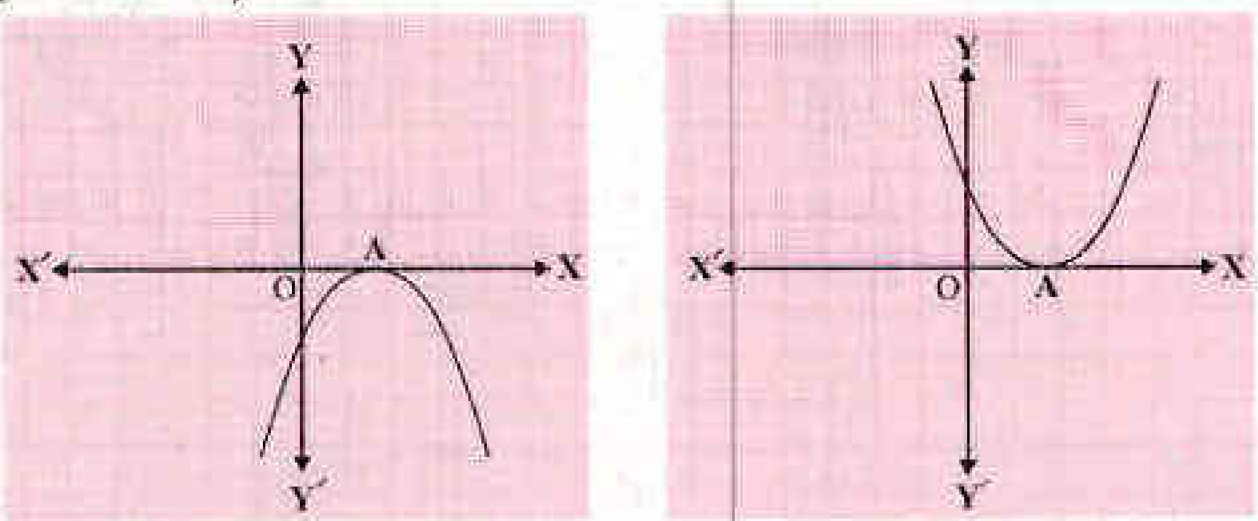
(i) : ਜਿੱਥੇ ਆਲੇਖ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਅੱਲਗ-ਅੱਲਗ ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ A' ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ A ਅਤੇ A' ਦੇ x–ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$ ਦੇ ਦੋ ਸਿਫ਼ਰ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 2.3)।



ਚਿੱਤਰ 2.3

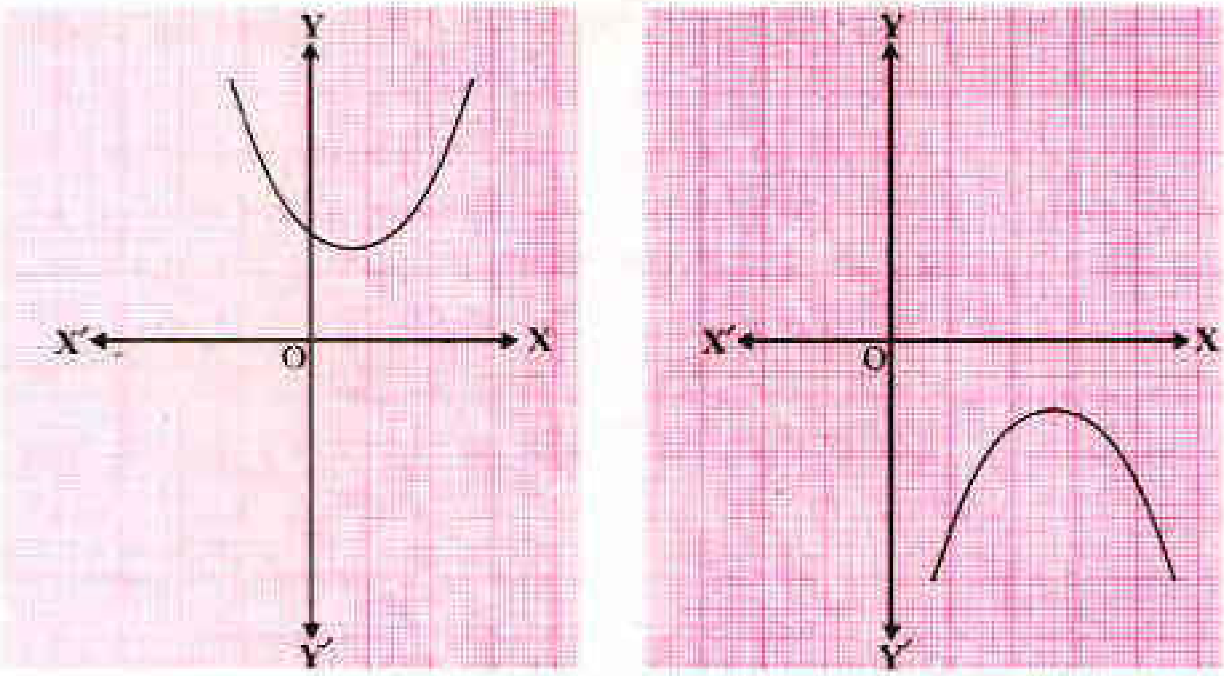
ਸਥਿਤੀ (ii) : ਇੱਥੇ ਆਲੇਖ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਭਾਵ ਦੋ ਸੰਪਾਤੀ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਥਿਤੀ (i) ਦੇ ਦੋ ਬਿੰਦੂ A ਅਤੇ A' ਇੱਥੇ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋ ਕੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ A ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 2.4)।



ਚਿੱਤਰ 2.4

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, A ਦਾ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$ ਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ (iii) : ਇਥੇ ਆਲੇਖ ਜਾਂ ਤਾਂ ਪੂਰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ x-ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਉੱਪਰ ਜਾਂ ਤਾਂ ਪੂਰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ x-ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਹੇਠਾਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਇਹ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕਿਤੇ ਵੀ ਨਹੀਂ ਕੱਟਦਾ (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 2.5)।



ਚਿੱਤਰ 2.5

ਇਸ ਲਈ, ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$ ਦਾ ਕੋਈ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਸੀਂ ਜਿਮਾਇਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਦੋ ਅੱਲਗ-ਅੱਲਗ ਸਿਫ਼ਰ ਜਾਂ ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਸਿਫ਼ਰ (ਭਾਵ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ) ਜਾਂ ਕੋਈ ਵੀ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਇਹ ਵੀ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਘਾਤ 2 ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਰਥ ਬਾਰੇ ਕੀ ਉਮੀਦ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਆਉ ਇਸਦਾ ਪਤਾ ਕਰੀਏ। ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $x^3 - 4x$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਇਹ ਦੇਖਣ ਦੇ ਲਈ ਕਿ $y = x^3 - 4x$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੱਗਦਾ ਹੈ, ਆਉ x ਦੇ ਕੁਝ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ y ਦੇ ਕੁਝ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ 2.2 ਵਿੱਚ ਸੂਚੀ ਬੱਧ ਕਰੀਏ।

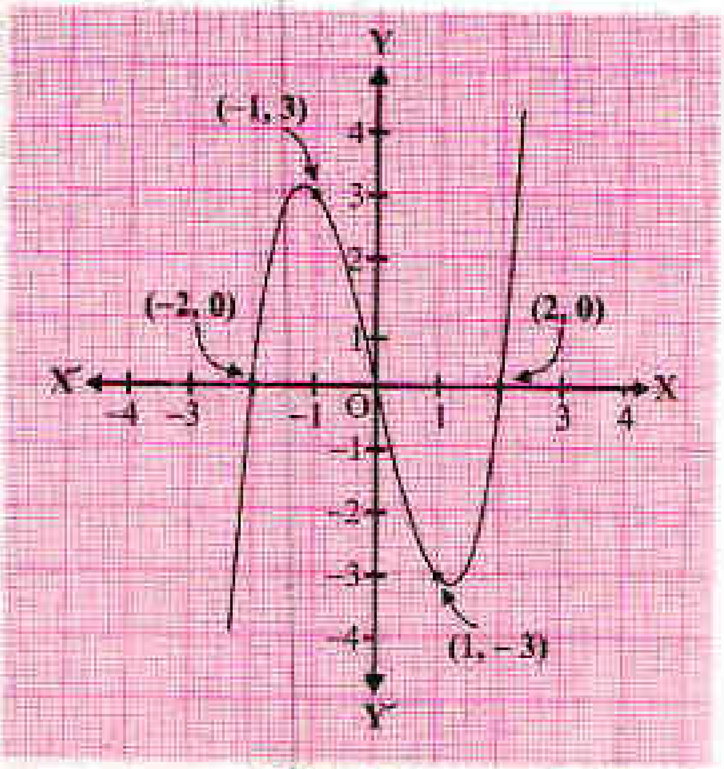
ਸਾਰਣੀ 2.2

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	-3	0

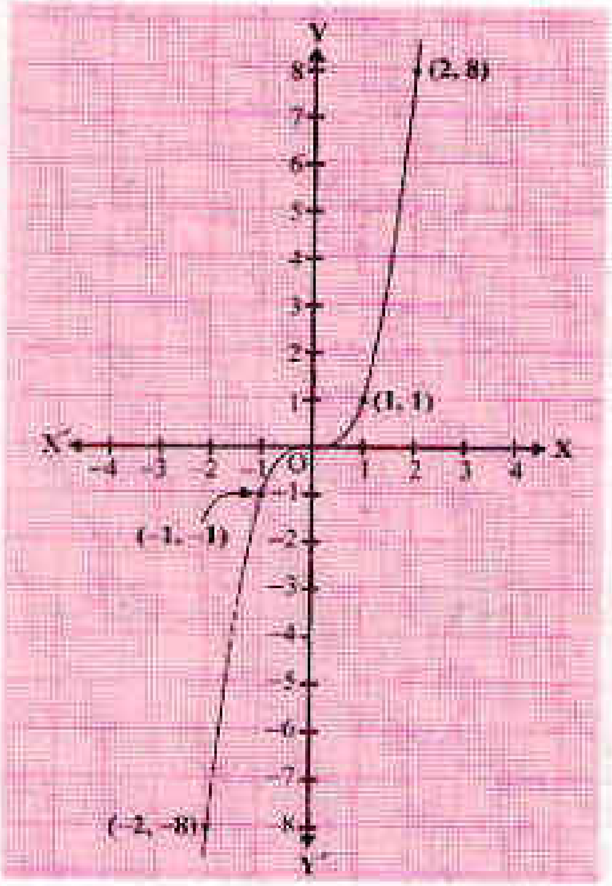
ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਅੰਕਿਤ ਕਰਨ ਅਤੇ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚਣ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $y = x^3 - 4x$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤਰ 2.6 ਵਰਗਾ ਦਿਖਦਾ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $x^3 - 4x$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ $-2, 0$ ਅਤੇ 2 ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $-2, 0$ ਅਤੇ 2 ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x– ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $y = x^3 - 4x$ ਦਾ ਆਲੇਖ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਵਕਰ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਇਹਨਾਂ ਹੀ ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਕਟਦਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਕੇਵਲ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ।

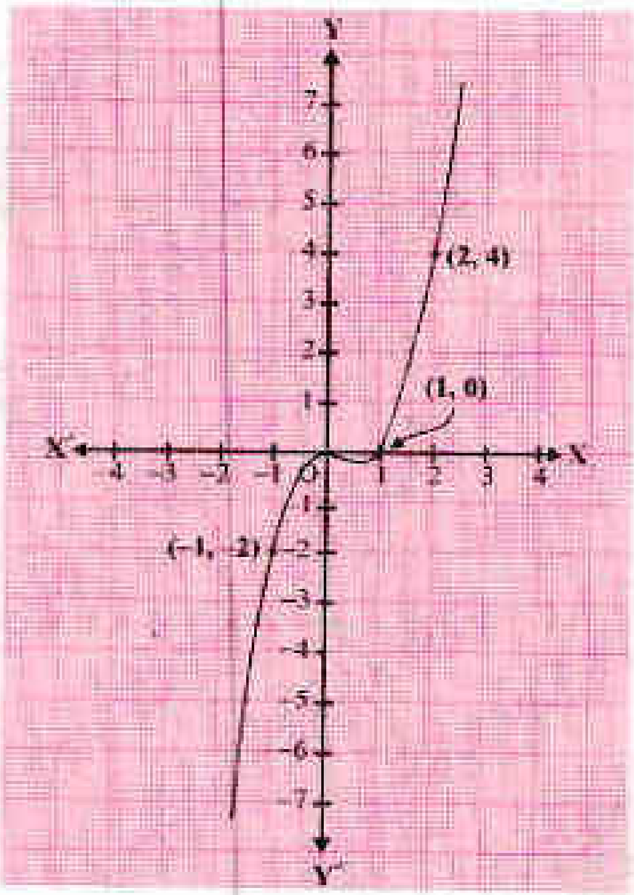
ਆਉ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ x^3 ਅਤੇ $x^3 - x^2$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਅਸੀਂ $y = x^3$ ਅਤੇ $y = x^3 - x^2$ ਦੇ ਆਲੇਖ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਚਿੱਤਰ 2.7 ਅਤੇ 2.8 ਵਿੱਚ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 2.6



ਚਿੱਤਰ 2.7



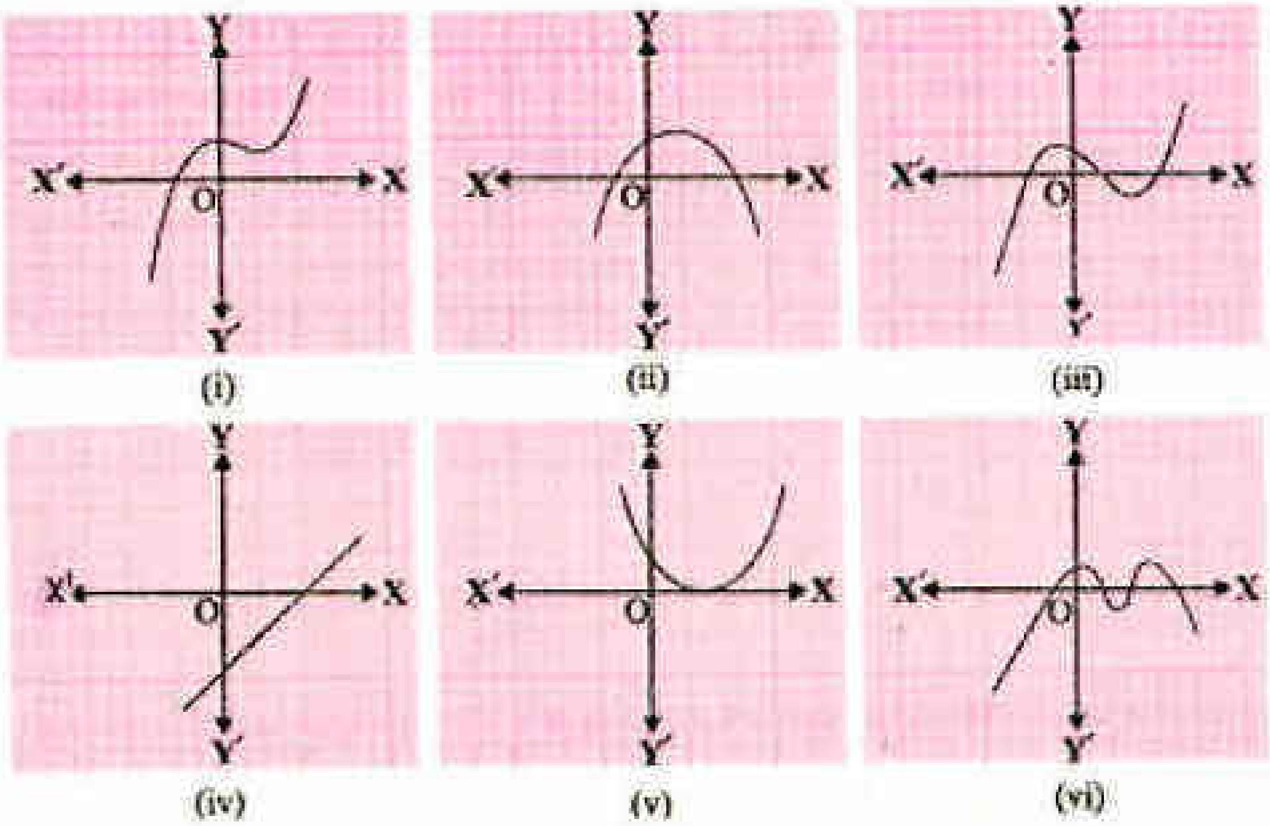
ਚਿੱਤਰ 2.8

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਬਹੁਪਦ x^3 ਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ 0 ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 2.7 ਤੋਂ ਵੀ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ 0 ਕੇਵਲ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦਾ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $y = x^3$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ਼ x–ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿਉਂਕਿ $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਬਹੁਪਦ $x^3 - x^2$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਕੇਵਲ 0 ਅਤੇ 1 ਹਨ। ਚਿੱਤਰ 2.8 ਵਿੱਚ ਵੀ ਇਹ ਮੁੱਲ ਕੇਵਲ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $y = x^3 - x^2$ ਦਾ ਆਲੇਖ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਤਿੰਨ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਘਾਤ 3 ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਤਿੰਨ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ: ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਘਾਤ n ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਦੇ ਲਈ $y = p(x)$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ਼ x–ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ n ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਘਾਤ n ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ n ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 1: ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਚਿੱਤਰ 2.9 ਦੇ ਆਲੇਖਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖੋ। ਹਰੇਕ ਚਿੱਤਰ $y = p(x)$ ਜਿੱਥੇ $p(x)$ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਹੈ, ਦਾ ਆਲੇਖ ਹੈ। ਆਲੇਖਾਂ ਤੋਂ ਹਰ ਇੱਕ ਦੇ ਲਈ, $p(x)$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 2.9

ਹੱਲ : (i) ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 1 ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਗ੍ਰਾਫ਼ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

(ii) ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 2 ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਗ੍ਰਾਫ਼ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

(iii) ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 3 ਹੈ। (ਕਿਉਂ?)

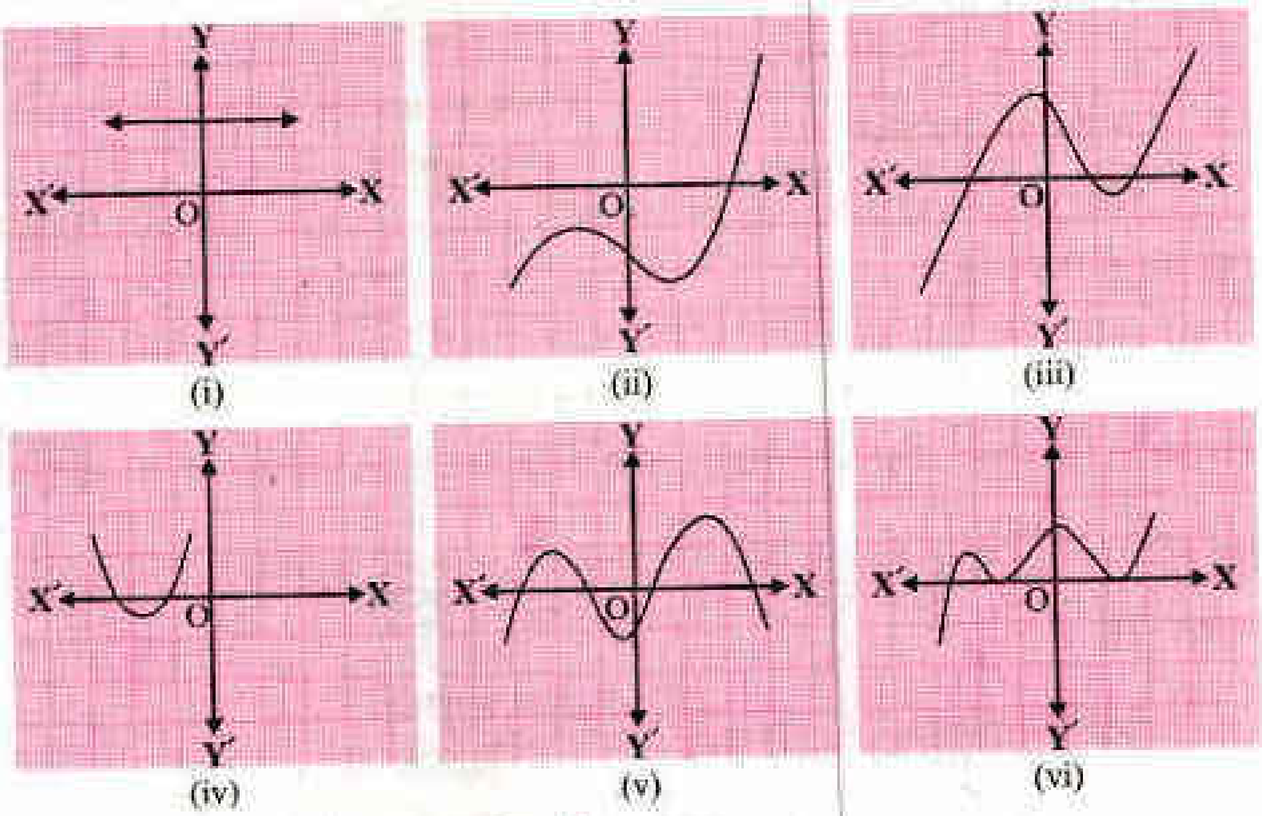
(iv) ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 1 ਹੈ। (ਕਿਉਂ?)

(v) ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 1 ਹੈ। (ਕਿਉਂ?)

(vi) ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 4 ਹੈ। (ਕਿਉਂ?)

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 2.1

1. ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਦੇ ਲਈ $y = p(x)$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰ 2.10 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਹਰ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $p(x)$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 2.10

2.3 ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ

ਤੁਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ $ax + b$ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ $-\frac{b}{a}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਭਾਗ 2.1 ਵਿੱਚ ਪੁੱਛੇ ਗਏ

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਮੰਨ ਲਓ $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ ਲਓ। IX ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਪਦ ਨੂੰ ਤੋੜ ਕੇ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿਸੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਪਦ '$-8x$' ਨੂੰ ਦੋ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣਾ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ $6 \times 2x^2 = 12x^2$ ਹੋਵੇ।

ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :

$$2x^2 - 8x + 6 = 2x^2 - 6x - 2x + 6 = 2x(x-3) - 2(x-3)$$
$$= (2x-2)(x-3) = 2(x-1)(x-3)$$

ਇਸ ਲਈ, $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, ਜਦੋਂ $x - 1 = 0$ ਜਾਂ $x - 3 = 0$ ਹੋਵੇ, ਭਾਵ $x = 1$ ਜਾਂ $x = 3$ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਲਈ $2x^2 - 8x + 6$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ 1 ਅਤੇ 3 ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ :

$$\text{ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ} = 1 + 3 = 4 = \frac{-(-8)}{2} = \frac{-(x \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ})}{x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$$

$$\text{ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ} = 1 \times 3 = 3 = \frac{6}{2} = \frac{\text{ਅਚਲ ਪਦ}}{x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$$

ਆਉ ਇੱਕ ਹੋਰ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ, ਮੰਨ ਲਉ $p(x) = 3x^2 + 5x - 2$ ਲਉ। ਵਿਚਕਾਰ ਵਾਲੇ ਪਦ ਨੂੰ ਤੋੜਣ 'ਤੇ,

$$3x^2 + 5x - 2 = 3x^2 + 6x - x - 2 = 3x(x+2) - 1(x+2)$$
$$= (3x-1)(x+2)$$

ਇਸ ਲਈ, $3x^2 + 5x - 2$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ $3x - 1 = 0$ ਹੋਵੇ ਜਾਂ $x + 2 = 0$ ਹੋਵੇ, ਭਾਵ ਜਦੋਂ $x = \frac{1}{3}$ ਹੋਵੇ ਜਾਂ $x = -2$ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਲਈ $3x^2 + 5x - 2$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ $\frac{1}{3}$ ਅਤੇ -2 ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ :

$$\text{ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ} = \frac{1}{3} + (-2) = \frac{-5}{3} = \frac{-(x \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ})}{x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$$

$$\text{ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ} = \frac{1}{3} \times -2 = \frac{-2}{3} = \frac{\text{ਅਚਲ ਪਦ}}{x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$$

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ * α, β ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ $x - \alpha$ ਅਤੇ $x - \beta$, $p(x)$ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

* α, β ਯੂਨਾਨੀ ਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਅੱਖਰ ਹਨ, ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਅਲਫਾ, ਬੀਟਾ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਅੱਖਰ γ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਗਾਮਾ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ,

$$ax^2 + bx + c = k(x - \alpha)(x - \beta), \text{ ਜਿੱਥੇ } k \text{ ਇੱਕ ਅਚਲ ਹੈ।}$$
$$= k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$$
$$= kx^2 - k(\alpha + \beta)x + k\alpha\beta$$

ਦੋਹਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ x^2, x ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲ ਪਦਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾਂ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$a = k,\ b = -k(\alpha + \beta) \text{ ਅਤੇ } c = k\alpha\beta$$

ਇਸ ਤੋਂ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $\quad \alpha + \beta = \dfrac{-b}{a}$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

ਭਾਵ $\quad$ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $= \alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(x \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ})}{x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$

ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ $= \alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{ਅਚਲ ਪਦ}}{x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$

ਆਉ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $x^2 + 7x + 10$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ : $x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$

ਇਸ ਲਈ $x^2 + 7x + 10$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇਗਾ, ਜਦ $x + 2 = 0$ ਹੋਵੇਗਾ ਜਾਂ $x + 5 = 0$ ਹੋਵੇਗਾ ਭਾਵ $x = -2$ ਜਾਂ $x = -5$ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ $x^2 + 7x + 10$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ -2 ਅਤੇ -5 ਹਨ। ਹੁਣ

ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $= -2 + (-5) = -7 = \dfrac{-(7)}{1} = \dfrac{-(x \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ})}{x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$

ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ $= -2 \times -5 = 10 = \dfrac{10}{1} = \dfrac{\text{ਅਚਲ ਪਦ}}{x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਬਹੁਪਦ $x^2 - 3$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਰਬਸਮਤਾ $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੋ। ਇਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

$$x^2-3=(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$$

ਇਸ ਲਈ, x^2-3 ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇਗਾ, ਜਦ $x=\sqrt{3}$ ਹੋਵੇ ਜਾਂ $x=-\sqrt{3}$

ਇਸ ਲਈ, x^2-3 ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ $\sqrt{3}$ ਅਤੇ $-\sqrt{3}$ ਹਨ। ਹੁਣ

$$\text{ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ} = \sqrt{3}-\sqrt{3}=0=\frac{-(x \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ})}{x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$$

$$\text{ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ} = (\sqrt{3})(-\sqrt{3})=-3=\frac{-3}{1}=\frac{\text{ਅਚਲ ਪਦ}}{x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$$

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸਦੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ ਗੁਣਨਫਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ -3 ਅਤੇ 2 ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ax^2+bx+c ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਸਿਫ਼ਰ α ਅਤੇ β ਹਨ।

$$\therefore \quad \alpha+\beta=-3=\frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta = 2 = \frac{c}{a}$$

ਜੇਕਰ $a=1$ ਹੈ ਤਾਂ $b=3$ ਅਤੇ $c=2$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ, ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, x^2+3x+2 ਹੈ।

ਤੁਸੀਂ ਜਾਂਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਹੋਰ ਕੋਈ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਜੋ ਇਨ੍ਹਾਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ, $k(x^2+3x+2)$ ਵਰਗੀ ਹੋਵੇਗੀ, ਜਿੱਥੇ k ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਸੋਚਦੇ ਹੋ ਕਿ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ?

ਆਉ $p(x)=2x^3-5x^2-14x+8$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਤੁਸੀਂ ਇਸਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ $x=4, -2$ ਅਤੇ $\frac{1}{2}$ ਦੇ ਲਈ $p(x)=0$ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $p(x)$ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਤਿੰਨ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ $2x^3-5x^2-14x+8$ ਦੇ ਇਹ ਹੀ ਤਿੰਨ ਸਿਫ਼ਰ ਹਨ। ਹੁਣ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $=4+(-2)+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}=\frac{-(-5)}{2}=\frac{-(x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ})}{x^3 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$

$$\text{ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ} = 4\times-2\times\frac{1}{2}=-4=\frac{-8}{2}=\frac{-\text{ ਅਚਲ ਪਦ}}{x^3 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$$

ਪ੍ਰੰਤੂ ਇੱਥੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਸੰਬੰਧ ਵੀ ਹੈ। ਦੋ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕਠਾ ਲੈ ਕੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦੇ ਜੋੜ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ : $\{4\times(-2)\}+\left\{(-2)\times\frac{1}{2}\right\}+\left\{\frac{1}{2}\times 4\right\}$

$$= -8-1+2=-7=\frac{-14}{2}=\frac{x \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}{x^3 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$$

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਇਹ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ α, β, γ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ax^3+bx^2+cx+d ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਹੋਣ, ਤਾਂ

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma=\frac{-d}{a}$$

ਆਓ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 5* : ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $p(x)=3x^3-5x^2-11x-3$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ $3, -1$ ਅਤੇ $-\frac{1}{3}$ ਹਨ। ਇਸ ਤੋਂ ਉਪਰੰਤ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ax^3+bx^2+cx+d ਨਾਲ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ, ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$a=3, b=-5, c=-11, d=-3$ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ,

$$p(3)=3\times 3^3-(5\times 3^2)-(11\times 3)-3=81-45-33-3=0$$

$$p(-1)=3\times(-1)^3-5\times(-1)^2-11\times(-1)-3=-3-5+11-3=0$$

$$p\left(-\frac{1}{3}\right)=3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^3-5\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2-11\times\left(-\frac{1}{3}\right)-3$$

$$=-\frac{1}{9}-\frac{5}{9}+\frac{11}{3}-3=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=0$$

* ਇਹ ਉਦਾਹਰਣ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ ਦੇ ਜ਼ਿਫ਼ਰ $3, -1$ ਅਤੇ $-\frac{1}{3}$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ $\alpha = 3, \beta = -1$ ਅਤੇ $\gamma = -\frac{1}{3}$ ਲਈ ਹਨ। ਹੁਣ

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = \frac{-(-5)}{3} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \times (-1) + (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) \times 3 = -3 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{-11}{3} = \frac{c}{a}$$

ਅਤੇ $\alpha\beta\gamma = 3 \times (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 = \frac{-(-3)}{3} = \frac{-d}{a}$ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 2.2

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਜ਼ਿਫ਼ਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਜ਼ਿਫ਼ਰਾਂ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ :

   (i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4s^2 - 4s + 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$

   (iv) $4u^2 + 8u$ (v) $t^2 - 15$ (vi) $3x^2 - x - 4$

2. ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸਦੇ ਜ਼ਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ ਗੁਣਨਫਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ :

   (i) $\frac{1}{4}, -1$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $0, \sqrt{5}$

   (iv) $1, 1$ (v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (vi) $4, 1$

2.4 ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ

ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇੱਕ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੀਆਂ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਤਿੰਨ ਜ਼ਿਫ਼ਰਾਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਜ਼ਿਫ਼ਰ ਦਿੱਤੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਦੂਸਰੀਆਂ (ਦੋ) ਜ਼ਿਫ਼ਰਾਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਇਸਦੇ ਲਈ, ਆਓ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $x^3 - 3x^2 - x + 3$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਦੱਸੀਏ ਕਿ ਇਸਦੀ ਇੱਕ ਜ਼ਿਫ਼ਰ 1 ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ $x^3 - 3x^2 - x + 3$ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ $x-1$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $x^3 - 3x^2 - x + 3$ ਨੂੰ $x - 1$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣ 'ਤੇ $x^2 - 2x - 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਪਦ ਨੂੰ ਤੋੜ ਕੇ $x^2 - 2x - 3$ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ $(x + 1)(x - 3)$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਭਾਵ

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x - 1)(x^2 - 2x - 3)$$

$$= (x-1)(x+1)(x-3)$$

ਇਸ ਲਈ, ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸਿਫ਼ਰ 1, – 1 ਅਤੇ 3 ਹਨ।

ਆਓ ਹੁਣ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਦੂਸਰੇ ਬਹੁਪਦ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣ (ਕਲਨ ਵਿਧੀ) ਦੀ ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਿਸਥਾਰ ਨਾਲ ਚਰਚਾ ਕਰੀਏ। ਵਿਧੀ ਪੂਰਵਕ ਪਗਾਂ 'ਤੇ ਧਿਆਨ ਦੇਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ, ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : $2x^2 + 3x + 1$ ਨੂੰ $x + 2$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦਿਉ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਜਦੋਂ ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਵੇ ਜਾਂ ਇਸਦੀ ਘਾਤ ਭਾਜਕ ਦੀ ਘਾਤ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਹੋ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਭਾਗ ਕਰਨੀ ਬੰਦ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ, ਇੱਥੇ ਭਾਗਫਲ $2x - 1$ ਅਤੇ ਬਾਕੀ 3 ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ,

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x - 1 \\
\hline
x+2 & 2x^2 + 3x + 1 \\
 & \underline{\overset{-}{2x^2} \overset{-}{+ 4x}} \\
 & -x + 1 \\
 & \underline{\overset{+}{-x} \overset{+}{- 2}} \\
 & 3
\end{array}$$

$(2x - 1)(x + 2) + 3 = 2x^2 + 3x - 2 + 3 = 2x^2 + 3x + 1$

ਭਾਵ $\quad 2x^2 + 3x + 1 = (x + 2)(2x - 1) + 3$

ਇਸ ਲਈ : ਭਾਜ = ਭਾਜਕ × ਭਾਗਫਲ + ਬਾਕੀ

ਆਉ ਹੁਣ ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣ ਲਈ ਅੱਗੇ ਵਧਾਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : $3x^3 + x^2 + 2x + 5$ ਨੂੰ $1 + 2x + x^2$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਭਾਜਕ ਅਤੇ ਭਾਜ ਨੂੰ ਪਦਾਂ ਦੀਆਂ ਘਟਦੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਘਾਤਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਤਰਤੀਬ-ਬੱਧ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਣ ਨੂੰ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਮਿਆਰੀ (standard) ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ, ਭਾਜਕ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਭਾਜਕ $x^2 + 2x + 1$ ਹੈ।

$$\begin{array}{r|l}
 & 3x - 5 \\
\hline
x^2 + 2x + 1 & 3x^3 + x^2 + 2x + 5 \\
 & \underline{\overset{-}{3x^3} \overset{-}{+ 6x^2} \overset{-}{+ 3x}} \\
 & -5x^2 - x + 5 \\
 & \underline{\overset{+}{-5x^2} \overset{+}{- 10x} \overset{+}{- 5}} \\
 & 9x + 10
\end{array}$$

ਪਗ 1 : ਭਾਗਫਲ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ (ਵੱਡੇ ਤੋਂ ਵੱਡੇ) ਘਾਤ ਵਾਲੇ ਪਦ (ਭਾਵ $3x^3$) ਨੂੰ ਭਾਜਕ ਦੇ ਵੱਡੇ ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਘਾਤ ਵਾਲੇ ਪਦ (ਭਾਵ x^2) ਨਾਲ ਭਾਗ ਦਿਉ। ਇਹ $3x$ ਹੈ। ਹੁਣ ਭਾਗ ਦੇਣ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਕਰੋ। ਜੋ ਬਾਕੀ ਬਚਦਾ ਹੈ ਉਹ $-5x^2 - x + 5$ ਹੈ।

ਪਗ 2 : ਹੁਣ ਭਾਗਫਲ ਦਾ ਦੂਸਰਾ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਨਵੀਂ ਭਾਜ ਦੇ ਵੱਡੇ ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਘਾਤ ਵਾਲੇ ਪਦ (ਭਾਵ $-5x^2$) ਨੂੰ ਭਾਜਕ ਦੇ ਵੱਡੇ ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਘਾਤ ਵਾਲੇ ਪਦ (ਭਾਵ x^2) ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰੋ। ਇਸ ਨਾਲ -5 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਫਿਰ ਤੋਂ $-5x^2 - x + 5$ ਨੂੰ ਭਾਗ ਦੇਣ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਕਰੋ।

ਪਗ 3 : ਹੁਣ ਬਾਕੀ ਬਚੇ $9x + 10$ ਦੀ ਘਾਤ ਭਾਜਕ $x^2 + 2x + 1$ ਦੀ ਘਾਤ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਭਾਗ ਦੇਣ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਹੋਰ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ।
ਇਸ ਲਈ, ਭਾਗਫਲ $3x - 5$ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ $9x + 10$ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਇਲਾਵਾ,

$$(x^2 + 2x + 1) \times (3x - 5) + (9x + 10) = 3x^3 + 6x^2 + 3x - 5x^2 - 10x - 5 + 9x + 10$$
$$= 3x^3 + x^2 + 2x + 5$$

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਫਿਰ ਤੋਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਭਾਜ = ਭਾਜਕ $\times$ ਭਾਗਫਲ + ਬਾਕੀ

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਜਿਸ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ ਉਹ ਯੂਕਲਿਡ ਦੀ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਜਿਸ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਪਾਠ 1 ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ, ਵਰਗੀ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਅਨੁਸਾਰ,

ਜੇਕਰ $p(x)$ ਅਤੇ $g(x)$ ਕੋਈ ਦੋ ਬਹੁਪਦ ਹਨ ਜਿੱਥੇ $g(x) \neq 0$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਬਹੁਪਦ $q(x)$ ਅਤੇ $r(x)$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$$

ਜਿੱਥੇ $r(x) = 0$ ਜਾਂ $r(x)$ ਦੀ ਘਾਤ $<$ $g(x)$ ਦੀ ਘਾਤ ਹੈ।

ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਲਈ **ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ, ਆਉ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : $3x^2 - x^3 - 3x + 5$ ਨੂੰ $x - 1 - x^2$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦਿਉ ਅਤੇ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਹੁਪਦ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਭਾਗ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਭਾਜ ਅਤੇ ਭਾਜਕ ਦੋਹਾਂ ਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਦੇ ਘਟਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

$$\begin{array}{r|l} & \qquad\qquad x - 2 \\ \hline -x^2 + x - 1 & -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \\ & -x^3 + \ x^2 - \ x \\ & \ \ + \qquad - \qquad + \\ \hline & \qquad 2x^2 - 2x + 5 \\ & \qquad 2x^2 - 2x + 2 \\ & \qquad - \qquad + \qquad - \\ \hline & \qquad\qquad\qquad 3 \end{array}$$

ਇਸ ਲਈ, ਭਾਜ $= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$ ਅਤੇ
ਭਾਜਕ $= -x^2 + x - 1$ ਹੈ।

ਭਾਗ ਦੇਣ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦਿਖਾਈ ਗਈ ਹੈ।
ਅਸੀਂ ਇੱਥੇ ਰੁਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿਉਂਕਿ 3 ਦੀ ਘਾਤ 0, $-x^2 + x - 1$ ਦੀ ਘਾਤ 2 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।
ਇਸ ਲਈ ਭਾਗ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਕਰਕੇ ਬਾਕੀ 3 ਅਤੇ ਭਾਗਫਲ $x - 2$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
ਹੁਣ

ਭਾਜਕ $\times$ ਭਾਗਫਲ + ਬਾਕੀ

$$= (-x^2 + x - 1)(x - 2) + 3$$
$$= -x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2 + 3$$
$$= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$$

= ਭਾਜ

ਇਸ ਲਈ, ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਸੱਚ ਸਾਬਤ ਹੋ ਗਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਸ ਦੀਆਂ ਦੋ ਸਿਫ਼ਰਾਂ $\sqrt{2}$ ਅਤੇ $-\sqrt{2}$ ਪਤਾ ਹੋਣ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਦੋ ਸਿਫ਼ਰਾਂ $\sqrt{2}$ ਅਤੇ $-\sqrt{2}$ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = x^2 - 2$ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ। ਹੁਣ ਆਉ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਹੁਪਦ ਅਤੇ $x^2 - 2$ ਦੇ ਲਈ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 3x + 1 \\
\hline
x^2 - 2 & 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 \\
 & \underline{\overset{-}{2x^4} \qquad \overset{+}{-4x^2}} \\
 & -3x^3 + x^2 + 6x - 2 \\
 & \underline{\overset{+}{-3x^3} \qquad \overset{-}{+6x}} \\
 & x^2 \qquad - 2 \\
 & \underline{\overset{-}{x^2} \qquad \overset{+}{-2}} \\
 & 0
\end{array}
$$

ਭਾਗਫਲ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ $\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2$ ਹੈ।

ਭਾਗਫਲ ਦਾ ਦੂਸਰਾ ਪਦ $\frac{-3x^3}{x^2} = -3x$ ਹੈ।

ਭਾਗਫਲ ਦਾ ਤੀਸਰਾ ਪਦ $\frac{x^2}{x^2} = 1$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = (x^2 - 2)(2x^2 - 3x + 1)$

ਹੁਣ $-3x$ ਨੂੰ ਤੋੜਦੇ ਹੋਏ $2x^2 - 3x + 1$ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ $(2x - 1)(x - 1)$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਸਦੇ ਸਿਫ਼ਰ $x = \frac{1}{2}$ ਅਤੇ $x = 1$ ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}$ ਅਤੇ 1 ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 2.3

1. ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਨੂੰ ਬਹੁਪਦ $g(x)$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਕੇ ਭਾਗਫਲ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$, $g(x) = x^2 - 2$

   (ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5$, $g(x) = x^2 + 1 - x$

   (iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6$, $g(x) = 2 - x^2$

2. ਦੂਸਰੀ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਪਹਿਲੀ ਬਹੁਪਦ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਕੇ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਪਹਿਲੀ ਬਹੁਪਦ, ਦੂਸਰੀ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ :
   (i) $t^2 - 3,\ 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$
   (ii) $x^2 + 3x + 1,\ 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$
   (iii) $x^3 - 3x + 1,\ x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

3. ਜੇਕਰ $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ ਦੇ ਦੋ ਸਿਫ਼ਰ $\sqrt{\frac{5}{3}}$ ਅਤੇ $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ ਹੋਣ ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਬਹੁਪਦ $x^3 - 3x^2 + x + 2$ ਨੂੰ ਬਹੁਪਦ $g(x)$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣ 'ਤੇ ਭਾਗਫਲ $x - 2$ ਅਤੇ ਬਾਕੀ $-2x + 4$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ $g(x)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. ਬਹੁਪਦ $p(x), g(x), q(x)$ ਅਤੇ $r(x)$ ਦੇ ਅਜਿਹੇ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦਿਉ ਜੋ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹੋਣ ਅਤੇ
   (i) ਘਾਤ $p(x)$ = ਘਾਤ $q(x)$ (ii) ਘਾਤ $q(x)$ = ਘਾਤ $r(x)$ (iii) ਘਾਤ $r(x) = 0$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 2.4 (ਇੱਛਾ ਅਨੁਸਾਰ)*

1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਹਨ। ਹਰ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਵੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ :
   (i) $2x^3 + x^2 - 5x + 2;\ \frac{1}{2}, 1, -2$ (ii) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2;\ 2, 1, 1$

2. ਇੱਕ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਦੋ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕਠਾ ਲੈ ਕੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ ਤਿੰਨਾਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 2, –7, –14 ਹੈ।

3. ਜੇਕਰ ਬਹੁਪਦ $x^3 - 3x^2 + x + 1$ ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ $a - b, a, a + b$ ਹੋਣ ਤਾਂ a ਅਤੇ b ਪਤਾ ਕਰੋ।

* ਇਹ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

4. ਜੇਕਰ ਬਹੁਪਦ $x^4-6x^3-26x^2+138x-35$ ਦੇ ਦੋ ਸਿਫ਼ਰ $2\pm\sqrt{3}$ ਹੋਣ ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. ਜੇਕਰ ਬਹੁਪਦ $x^4-6x^3+16x^2-25x+10$ ਨੂੰ ਦੂਸਰੇ ਬਹੁਪਦ x^2-2x+k ਨਾਲ ਭਾਗ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਅਤੇ ਬਾਕੀ $x+a$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ ਤਾਂ k ਅਤੇ a ਪਤਾ ਕਰੋ।

2.5 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ :

1. ਘਾਤ 1, 2 ਅਤੇ 3 ਵਾਲੇ ਬਹੁਪਦਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ, ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
2. ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ax^2+bx+c,ਜਿੱਥੇ a, b, c ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $a\neq 0$ ਹੈ, ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
3. ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿੱਥੇ $y=p(x)$ ਦਾ ਆਲੇਖ x–ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।
4. ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੀਆਂ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇੱਕ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੀਆਂ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਤਿੰਨ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ।
5. ਜੇਕਰ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ax^2+bx+c ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ α ਅਤੇ β ਹੋਣ ਤਾਂ

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

6. ਜੇਕਰ α, β, γ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$$

ਅਤੇ $$\alpha\beta\gamma=\frac{-d}{a}$$

7. ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਅਤੇ ਇੱਕ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਬਹੁਪਦ $g(x)$ ਦੇ ਲਈ ਦੋ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਬਹੁਪਦ $q(x)$ ਅਤੇ $r(x)$ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਕਿ

$$p(x)=g(x)\,q(x)+r(x),$$

ਜਿੱਥੇ $r(x)=0$ ਹੈ ਜਾਂ ਘਾਤ $r(x) <$ ਘਾਤ $g(x)$ ਹੈ।

ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ
Pair of Linear Equations in two variables

3

3.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਤੁਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਥਿਤੀ ਵਰਗੀ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਸਾਹਮਣਾ ਜ਼ਰੂਰ ਕੀਤਾ ਹੋਵੇਗਾ :

ਅਮਰਦੀਪ ਆਪਣੇ ਪਿੰਡ ਦੇ ਇੱਕ ਮੇਲੇ ਵਿੱਚ ਗਈ। ਉਹ ਇੱਕ ਝੂਲੇ (Giant wheel) ਦੀ ਸਵਾਰੀ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਸੀ ਅਤੇ ਹੂਪਲਾ (Hoopla) [ਇੱਕ ਖੇਡ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀ ਇੱਕ ਸਟਾਲ 'ਤੇ ਰੱਖੀ ਕਿਸੇ ਵਸਤੂ 'ਤੇ ਇੱਕ ਛੱਲਾ (ring) ਸੁੱਟਦੇ ਹੋ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਉਹ ਵਸਤੂ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਛੱਲੇ ਦੇ ਵਿੱਚ ਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਉਹ ਵਸਤੂ ਮਿਲ ਜਾਂਦੀ ਹੈ] ਖੇਡਣਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਸੀ। ਜਿੰਨੀ ਵਾਰ ਉਸਨੇ ਝੂਲੇ ਦੀ ਸਵਾਰੀ ਕੀਤੀ ਉਸ ਤੋਂ ਅੱਧੀ ਵਾਰ ਉਸ ਨੇ ਹੂਪਲਾ ਖੇਡ ਖੇਡਿਆ। ਜੇਕਰ ਹਰ ਵਾਰ ਦੀ ਸਵਾਰੀ ਦੇ ਲਈ ਉਸ ਨੂੰ ₹ 3 ਅਤੇ ਹੂਪਲਾ ਖੇਡਣ ਦੇ ਲਈ ₹ 4 ਖਰਚ ਕਰਨੇ ਪਏ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋਗੇ ਕਿ ਉਸਨੇ ਕਿੰਨੀ ਵਾਰ ਝੂਲੇ ਦੀ ਸਵਾਰੀ ਕੀਤੀ ਅਤੇ ਕਿੰਨੇ ਵਾਰ ਹੂਪਲਾ ਖੇਡਿਆ, ਜਦ ਕਿ ਉਸਨੇ ਇਸਦੇ ਲਈ ਕੁੱਲ ₹ 20 ਖਰਚ ਕੀਤੇ?

ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਲਗ-ਅਲਗ ਸਥਿਤੀਆਂ ਲੈ ਕੇ ਚਲੋ। ਜੇਕਰ ਉਸਨੇ ਇੱਕ ਵਾਰ ਸਵਾਰੀ ਕੀਤੀ, ਕੀ ਇਹ ਸੰਭਵ ਹੈ? ਕੀ ਇਹ ਵੀ ਸੰਭਵ ਹੈ ਕਿ ਉਸਨੇ ਦੋ ਵਾਰ ਸਵਾਰੀ ਕੀਤੀ? ਆਦਿ ਜਾਂ ਜਮਾਤ IX ਦੇ ਗਿਆਨ ਨੂੰ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਆਓ ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਸਮਝੀਏ।

ਅਮਰਦੀਪ ਦੁਆਰਾ ਸਵਾਰੀ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ x ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਦੁਆਰਾ ਹੂਪਲਾ ਖੇਡਣ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ y ਨਾਲ ਦਰਸਾਉ। ਹੁਣ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਦੋ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੁਆਰਾ ਵਿਖਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$y = \frac{1}{2}x \qquad (1)$$

$$3x + 4y = 20 \qquad (2)$$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਇਸਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਕਈ ਤਰੀਕੇ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

3.2 ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ

IX ਜਮਾਤ ਤੋਂ ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹਨ:

$$2x + 3y = 5$$

$$x - 2y - 3 = 0$$

ਅਤੇ $x - 0y = 2$ ਭਾਵ $x = 2$

ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਉਹ ਸਮੀਕਰਣ ਜਿਸਨੂੰ $ax + by + c = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ a, b ਅਤੇ c ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ a ਅਤੇ b **ਦੋਨੋਂ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹਨ,** ਦੋ ਚਲਾਂ x ਅਤੇ y ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। (ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ a ਅਤੇ b ਦੋਵੇਂ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਨੂੰ ਅਸੀਂ $a^2 + b^2 \neq 0$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ) ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਹੱਲ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇੱਕ x ਦੇ ਲਈ ਅਤੇ ਦੂਸਰਾ y ਦੇ ਲਈ ਜੋ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਆਓ ਸਮੀਕਰਣ $2x + 3y = 5$ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ (LHS) ਵਿੱਚ $x = 1$ ਅਤੇ $y = 1$ ਭਰੀਏ। ਹੁਣ

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $= 2(1) + 3(1) = 2 + 3 = 5,$

ਜੋ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ (RHS) ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $x = 1$ ਅਤੇ $y = 1$ ਸਮੀਕਰਣ $2x + 3y = 5$ ਦਾ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਹੁਣ ਆਓ ਸਮੀਕਰਣ $2x + 3y = 5$ ਵਿੱਚ $x = 1$ ਅਤੇ $y = 7$ ਭਰੀਏ।

ਹੁਣ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $= 2(1) + 3(7) = 2 + 21 = 23$

ਜੋ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $x = 1$ ਅਤੇ $y = 1$ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਜਿਮਾਇਤੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਇਸਦਾ ਕੀ ਅਰਥ ਹੈ? ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (1,1) ਸਮੀਕਰਣ $2x + 3y = 5$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਈ ਰੇਖਾ ਉਪਰ ਸਥਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ (1,7) ਇਸ ਉੱਪਰ ਸਥਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ **ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹਰੇਕ ਹੱਲ ਉਸਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਉੱਪਰ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।**

ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਇਹ ਕਿਸੇ ਵੀ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ, ਭਾਵ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ ਰੇਖੀ **ਸਮੀਕਰਣ $ax + by + c = 0$ ਦਾ ਹਰੇਕ ਹੱਲ (x, y) ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਉਲਟ ਵੀ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।**

ਹੁਣ ਉਪਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਲਓ। ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕਠਾ ਲੈ ਕੇ ਸਾਨੂੰ ਅਮਰਦੀਪ ਦੇ ਮੇਲੇ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਸੂਚਨਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਇਹ ਦੋ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ, **ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਚਲਾਂ x ਅਤੇ y** ਵਿੱਚ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਜੋੜਾ (ਜਾਂ **ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ**) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਆਓ, ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਇਹ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਹਨ।

ਦੋ ਚਲਾਂ x ਅਤੇ y ਦੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

ਅਤੇ $$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$ ਹੈ।

ਇੱਥੇ $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $a_1^2 + b_1^2 \neq 0, a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ ਹੈ।

ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ ਹਨ :

$2x + 3y - 7 = 0$ ਅਤੇ $9x - 2y + 8 = 0$

$5x = y$ ਅਤੇ $-7x + 2y + 3 = 0$

$x + y = 7$ ਅਤੇ $17 = y$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਹ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਹਨ?

ਜਮਾਤ IX ਤੋਂ ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ (ਭਾਵ ਗ੍ਰਾਫ) ਨਿਰੂਪਣ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਹੁਣ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿਸੇਗਾ? ਇਹ ਦੋ ਸਰਲ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹੋਣਗੀਆਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਲਿਆ ਜਾਵੇਗਾ।

ਤੁਸੀਂ IX ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਇਹ ਵੀ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਤਲ 'ਤੇ ਜੇਕਰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਣ ਤਾਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ :

(i) ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ।

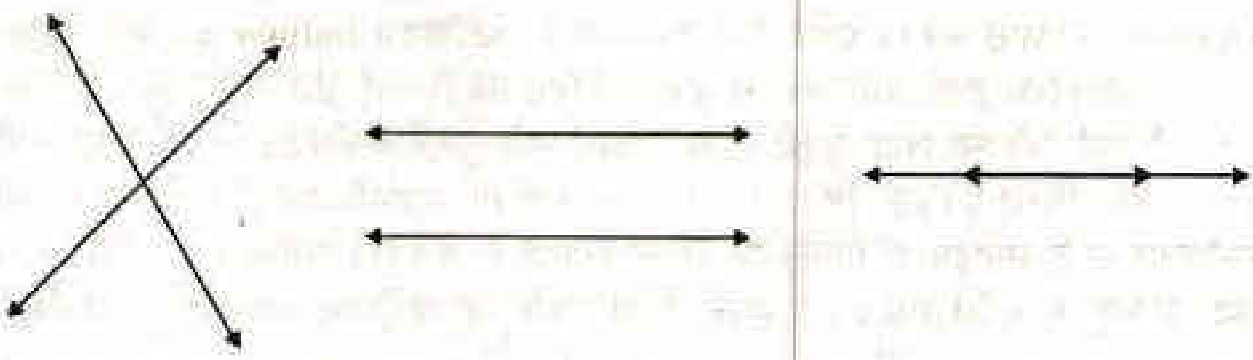
(ii) ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਕੱਟਦੀਆਂ ਨਹੀਂ, ਭਾਵ ਉਹ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।

(iii) ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਹਨ।

ਇਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 3.1 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ :

ਚਿੱਤਰ 3.1 (a) ਵਿੱਚ ਇਹ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ।

ਚਿੱਤਰ 3.2 (b) ਵਿੱਚ ਇਹ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।



(a) (b) (c)

ਚਿੱਤਰ 3.1

ਚਿੱਤਰ 3.1 (c) ਵਿੱਚ ਇਹ ਸੰਪਾਤੀ ਹਨ।

ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੀਆਂ ਦੋ ਵਿਧੀਆਂ ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਅਤੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਨੂੰ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਆਓ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਅਸੀਂ ਭਾਗ 3.1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਅਮਰਦੀਪ ਮੇਲੇ ਵਿੱਚ ₹ 20 ਲੈ ਕੇ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹ ਝੂਲੇ ਦੀ ਸਵਾਰੀ ਕਰਨਾ ਅਤੇ ਹੂਪਲਾ ਖੇਡ ਖੇਡਣਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਅਤੇ ਆਲੇਖੀ (ਜਿਮਾਇਤੀ) ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

ਹੱਲ: ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ ਹੈ :

$$y = \frac{1}{2}x$$

ਭਾਵ $\qquad x - 2y = 0 \qquad (1)$

ਅਤੇ $\qquad 3x + 4y = 20 \qquad (2)$

ਆਓ ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਗ੍ਰਾਫ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਈਏ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਹਰ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਦੋ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਹੱਲਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ 3.1 ਵਿੱਚ ਦੇ ਰਹੇ ਹਾਂ।

ਸਾਰਣੀ 3.1

x	0	2
$y = \frac{x}{2}$	0	1

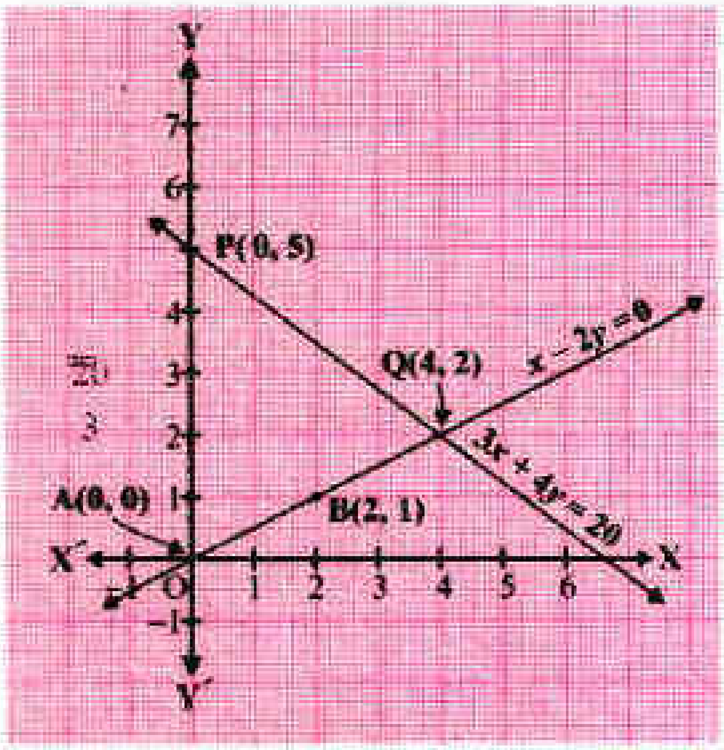
(i)

x	0	$\frac{20}{3}$	4
$y = \frac{20-3x}{4}$	5	0	2

(ii)

IX ਜਮਾਤ ਤੋਂ ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਹਰੇਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਅਣਗਿਣਤ (infinite ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕਾਂ) ਹੱਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਕਰਕੇ ਤੁਸੀਂ ਕੋਈ ਦੋ ਮੁੱਲ ਸੋਚੋ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਉਹ ਹੀ ਹੋਣ ਜੋ ਅਸੀਂ ਲਿਖੇ ਹਨ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਪਹਿਲੀ ਅਤੇ ਦੂਸਰੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਹੱਲ ਲਈ ਅਸੀਂ $x = 0$ ਕਿਉਂ ਲਿਆ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਚਲ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਣ ਇੱਕ ਚੱਲ ਵਾਲਾ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ ਤਾਂ ਜਿਸਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਆਸਾਨ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ। ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ $x = 0$ ਲੈਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $4y = 20$ ਭਾਵ $y = 5$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ $y = 0$ ਲੈਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $3x = 20$ ਭਾਵ $x = \frac{20}{3}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ। ਕਿਉਂਕਿ $\frac{20}{3}$ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸਨੂੰ ਗ੍ਰਾਫ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਅੰਕਿਤ ਕਰਨਾ ਅਸਾਨ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ $y = 2$ ਚੁਣਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ $x = 4$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ ਜੋ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 3.1 ਦੇ ਹੱਲਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਬਿੰਦੂਆਂ A(0,0), B (2,1) ਅਤੇ P (0,5), Q (4,2) ਨੂੰ ਗ੍ਰਾਫ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਲਗਾਉ। ਹੁਣ ਰੇਖਾਵਾਂ AB ਅਤੇ PQ ਨੂੰ ਖਿੱਚੋ ਜੋ ਕਿ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $x - 2y = 0$ ਅਤੇ $3x + 4y = 20$ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 3.2 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.2

ਚਿੱਤਰ 3.2 ਵਿੱਚ ਦੇਖੋ ਕਿ ਦੋਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀਆਂ ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ (4, 2) 'ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਦਾ ਕੀ ਭਾਵ ਹੈ। ਇਸ ਬਾਰੇ ਅਸੀਂ ਅਗਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਦੱਸਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਵਰਿੰਦਰ ਇੱਕ ਸਟੇਸ਼ਨਰੀ ਦੀ ਦੁਕਾਨ ਵਿੱਚ ਗਈ ਅਤੇ ਉਸਨੇ ₹ 9 ਵਿੱਚ 2 ਪੈਨਸਿਲਾਂ 'ਤੇ 3 ਰਬੜਾਂ ਖਰੀਦੀਆਂ। ਉਸਦੀ ਸਹੇਲੀ ਪਾਇਲ ਨੇ ਵਰਿੰਦਰ ਕੋਲ ਨਵੀਂ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਪੈਨਸਿਲਾਂ ਅਤੇ ਰਬੜਾਂ ਦੇਖੀਆਂ ਤਾਂ ਉਸਨੇ ਵੀ ₹ 18 ਵਿੱਚ ਉਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ 4 ਪੈਨਸਿਲਾਂ ਅਤੇ 6 ਰਬੜਾਂ ਖਰੀਦ ਲਈਆਂ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਅਤੇ ਆਲੇਖੀ (ਜਿਮਾਇਤੀ) ਰੂਪਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

ਹੱਲ : ਆਓ ਇੱਕ ਪੈਨਸਿਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ x ਅਤੇ ਇੱਕ ਰਬੜ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ y ਮੰਨ ਲਈਏ ਤਾਂ ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਰੂਪ ਹੇਠਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ।

$$2x + 3y = 9 \quad (1)$$

ਅਤੇ $4x + 6y = 18$ (2)

ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਤੁਲ (equivalent) ਜਿਮਾਇਤੀ ਰੂਪ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਹਰ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਈ ਰੇਖਾ ਉੱਪਰ ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਭਾਵ ਅਸੀਂ ਹਰ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋ ਹੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਹੱਲ ਹੇਠਾਂ 3.2 ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ।

ਸਾਰਣੀ 3.2

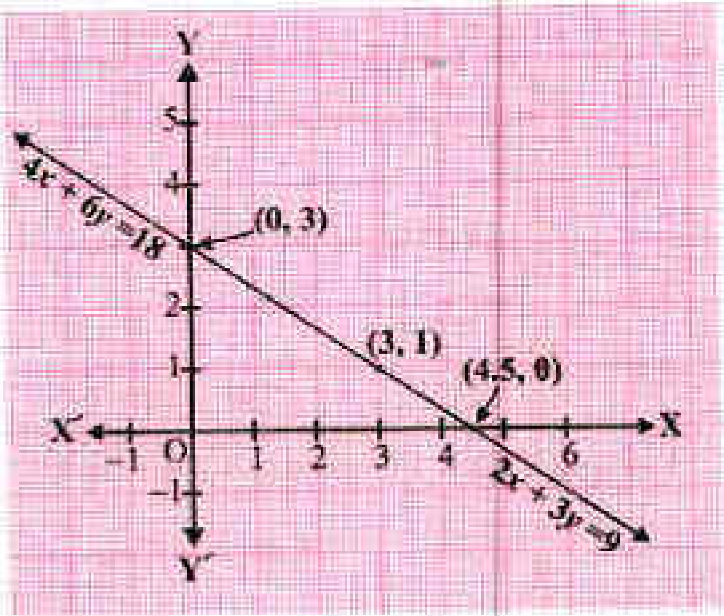
x	0	4.5
$y = \dfrac{9-2x}{3}$	3	0

(i)

x	0	3
$y = \dfrac{18-4x}{6}$	3	1

(ii)

ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਗ੍ਰਾਫ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਆਲੇਖਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 3.3)। ਇਹ ਇਸ ਲਈ ਹੈ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਸਮੀਕਰਣ ਤੁਲ ਹਨ, ਭਾਵ ਇੱਕ ਨੂੰ ਦੂਸਰੇ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.3

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਦੋ ਰੇਲ ਪਟੜੀਆਂ, ਸਮੀਕਰਣਾਂ $x + 2y - 4 = 0$ ਅਤੇ ਇਸ $2x + 4y - 12 = 0$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਈਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਜਿਮਾਇਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕਰੋ (ਦਰਸਾਓ)

ਹੱਲ : ਸਮੀਕਰਣਾਂ

$$x + 2y - 4 = 0 \qquad (1)$$

ਅਤੇ

$$2x + 4y - 12 = 0 \qquad (2)$$

ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦੇ ਦੋ ਹੱਲ ਸਾਰਣੀ 3.3 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ :

ਸਾਰਣੀ 3.3

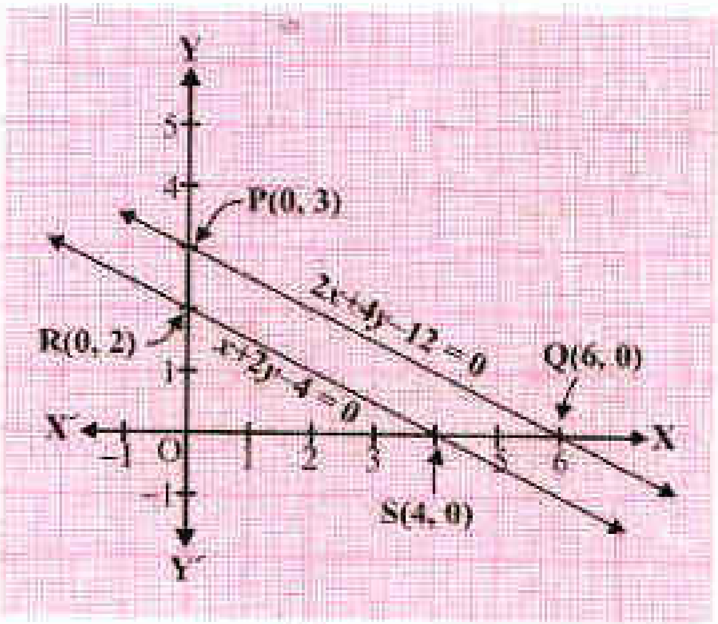
x	0	4
$y = \frac{4-x}{2}$	2	0

(i)

x	0	6
$y = \frac{12-2x}{4}$	3	0

(ii)

ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਗ੍ਰਾਫ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਅਸੀਂ ਬਿੰਦੂਆਂ R(0, 2) ਅਤੇ S(4, 0) ਨੂੰ ਰੇਖਾ RS ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਅੰਕਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਅਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ P (0, 3) ਅਤੇ Q(6, 0) ਨੂੰ ਰੇਖਾ PQ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਅੰਕਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 3.4

ਚਿੱਤਰ 3.4 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਰੇਖਾਵਾਂ ਕਿਤੇ ਵੀ ਨਹੀਂ ਕੱਟਦੀਆਂ ਭਾਵ ਇਹ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਈ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦੇਖੀਆਂ ਹਨ। ਜਿਨਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਅਤੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਰੂਪ

ਦੇਖੋ। ਅਗਲੇ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹਨਾਂ ਨਿਰੂਪਣਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦੇ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ?

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 3.1

1. ਬਲਦੇਵ ਆਪਣੀ ਲੜਕੀ ਨੂੰ ਕਹਿੰਦਾ ਹੈ, 'ਸੱਤ ਸਾਲ ਪਹਿਲਾਂ ਮੈਂ ਤੇਰੇ ਨਾਲੋਂ ਸੱਤ ਗੁਣਾਂ ਉਮਰ ਦਾ ਸੀ। ਹੁਣ ਤੋਂ ਤਿੰਨ ਸਾਲ ਬਾਦ ਮੈਂ ਤੇਰੇ ਤੋਂ ਸਿਰਫ ਤਿੰਨ ਗੁਣਾ ਉਮਰ ਦਾ ਰਹਿ ਜਾਵਾਂਗਾ (ਕੀ ਇਹ ਮਨੋਰੰਜਕ ਹੈ?) ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਅਤੇ ਆਲੇਖੀ ਰੂਪਾਂ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕਰੋ (ਦਰਸਾਓ)।
2. ਕ੍ਰਿਕਟ ਟੀਮ ਦੇ ਇੱਕ ਕੋਚ ਨੇ ₹ 3900 ਵਿੱਚ 3 ਬੱਲੇ ਅਤੇ 6 ਗੇਂਦਾਂ ਖ੍ਰੀਦੀਆਂ। ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਉਸਨੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਬੱਲਾ ਅਤੇ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ 3 ਗੇਦਾਂ ₹ 1300 ਵਿੱਚ ਖਰੀਦੀਆਂ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਅਤੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਰੂਪਾਂ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕਰੋ (ਦਰਸਾਉ)।
3. 2 ਕਿ.ਗ੍ਰਾਮ ਸੇਬ ਅਤੇ 1 ਕਿ.ਗ੍ਰਾਮ ਅੰਗੂਰ ਦਾ ਮੁੱਲ ਕਿਸੇ ਦਿਨ ₹ 160 ਸੀ। ਇੱਕ ਮਹੀਨੇ ਬਾਅਦ 4 ਕਿ.ਗ੍ਰਾਮ ਸੇਬ ਅਤੇ 2 ਕਿ.ਗ੍ਰਾਮ ਅੰਗੂਰ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 300 ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਅਤੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ (ਵਿਅਕਤ ਕਰੋ)।

3.3 ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਆਲੇਖੀ (ਗ੍ਰਾਫ) ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗ੍ਰਾਫ ਵਿੱਚ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਇਹ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ ਜਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ ਜਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਕੀ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਹਰ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਹੱਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ? ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਹਾਂ ਤਾਂ ਫਿਰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ? ਅਸੀਂ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦਾ ਉੱਤਰ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਨਾਲ ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਦੇਵਾਂਗੇ

ਆਓ ਅਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਕਰਕੇ ਦੇਖੀਏ।

- ਉਦਾਹਰਣ 1 ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਅਮਰਦੀਪ ਨੇ ਕਿੰਨੇ ਵਾਰ ਝੂਲੇ ਦੀ ਸਵਾਰੀ ਕੀਤੀ ਅਤੇ ਕਿੰਨੇ ਵਾਰ ਹੂਪਲਾ ਖੇਡ ਖੇਡਿਆ।

ਚਿੱਤਰ 3.2 ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੇ ਸਮੀਕਰਣ ਜਿਮਾਇਤੀ ਰੂਪ ਨਾਲ ਬਿੰਦੂ (4, 2) ਤੇ ਕੱਟਣ ਵਾਲੀਆਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ (4, 2) ਦੋਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ $x - 2y = 0$ ਅਤੇ $3x + 4y = 20$ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੀਆ ਰੇਖਾਵਾਂ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਇਹ ਹੀ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

ਆਓ ਅਸੀਂ ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰੀਏ ਕਿ $x = 4$, $y = 2$ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ। ਦੋਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚ x ਅਤੇ y ਦਾ ਮੁੱਲ ਰੱਖਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $4 - 2 \times 2 = 0$ ਅਤੇ $3(4) + 4(2) = 20$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਹੈ ਕਿ

$= 4$, $y = 2$ ਦੋਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ **ਕਿਉਂਕਿ (4, 2) ਦੋਹਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ. ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਇੱਕ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ।**

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਮਰਦੀਪ ਨੇ ਝੂਲੇ ਦੀ ਚਾਰ ਵਾਰ ਸਵਾਰੀ ਕੀਤੀ ਅਤੇ 2 ਵਾਰ ਹੂਪਲਾ ਖੇਡ ਖੇਡਿਆ।

- ਉਦਾਹਰਣ 2 ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਹਰੇਕ ਪੈਨਸਿਲ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਰਬੜ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ?

ਚਿੱਤਰ 3.3 ਵਿੱਚ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਜਿਮਾਇਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੰਪਾਤੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਜੋੜੇ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਬਿੰਦੂਆਂ (Common Points) ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਕੀ ਇਹਨਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ? ਗ੍ਰਾਫ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਰੇਖਾ ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੋਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣਾਂ $2x + 3y = 9$ ਅਤੇ $4x + 6y = 18$ ਦੇ ਅਨੇਕਾਂ ਹੱਲ (Infinite solution) ਹਨ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਹੈਰਾਨੀ ਨਹੀਂ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਕਿਉਂਕਿ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਣ $4x + 6y = 18$ ਨੂੰ 2 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ $2x + 3y = 9$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜੋ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਹੀ ਹੈ। ਭਾਵ ਦੋਵੇਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਤੁਲ ਹੀ ਹਨ। ਗ੍ਰਾਫ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਹਰੇਕ ਪੈਨਸਿਲ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਰਬੜ ਦਾ ਮੁੱਲ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਹਰੇਕ ਪੈਨਸਿਲ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਰਬੜ ਦਾ ਮੁੱਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ₹ 3 ਅਤੇ ₹ 1 ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਹਰ ਇੱਕ ਪੈਨਸਿਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 3.74 ਅਤੇ ਰਬੜ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 0.50 ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਆਦਿ।

- **ਉਦਾਹਰਣ 3 ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਕੀ ਰੇਲ ਪਟੜੀਆਂ ਕਿਸੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਮਿਲ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ?**

ਉਦਾਹਰਣ 3.4 ਵਿੱਚ, ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਜਿਮਾਇਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਰੇਖਾਵਾਂ ਕੱਟਦੀਆਂ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਹ ਪਟੜੀਆਂ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਨਹੀਂ ਮਿਲਦੀਆਂ। ਇਸ ਦਾ ਇਹ ਅਰਥ ਹੈ ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ, ਜਿਸਦਾ ਕੋਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ, ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਅਸੰਗਤ (inconsistent) ਜੋੜਾ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ ਜਿਸਦਾ ਹੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਸੰਗਤ (consistent) ਜੋੜਾ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਤੁਲ (equivalent) ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਦੇ ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕਾਂ (Infinite) ਹੱਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਦੋ ਚਲਾਂ ਦੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਆਸ਼ਰਿਤ (dependent) ਜੋੜਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਆਸ਼ਰਿਤ ਜੋੜਾ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਸੰਗਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੋ ਚਲਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰੂਪਤ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਹਾਰ ਨੂੰ

ਅਤੇ ਹੱਲ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਸਾਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

(i) ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਕੱਟ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ (unique solution) ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਸੰਗਤ ਜੋੜਾ)।

(ii) ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਕੋਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਅਸੰਗਤ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ)।

(iii) ਰੇਖਾਵਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕਾਂ ਹੱਲ (Infinite solution) ਹੁੰਦੇ ਹਨ। [ਆਸ਼ਰਿਤ (ਸੰਗਤ) ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ]।

ਆਓ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 1, 2 ਅਤੇ 3 ਵਿੱਚ ਬਣੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਿਆਂ 'ਤੇ ਫਿਰ ਤੋਂ ਵਾਪਿਸ ਆਈਏ ਅਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਕਿ ਇਹ ਜੋੜੇ ਜਿਆਮਿਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਹਨ।

(i) $x - 2y = 0$ ਅਤੇ $3x + 4y - 20 = 0$ (ਰੇਖਾਵਾਂ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ)

(ii) $2x + 3y - 9 = 0$ ਅਤੇ $4x + 6y - 18 = 0$ (ਰੇਖਾਵਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਹਨ)

(iii) $x + 2y - 4 = 0$ ਅਤੇ $2x + 4y - 12 = 0$ (ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ)

ਹੁਣ ਆਓ ਸਾਰਿਆਂ ਤਿੰਨਾਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ, $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ ਅਤੇ $\frac{c_1}{c_2}$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਲਿਖੀਏ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰੀਏ। ਇੱਥੇ a_1, b_1, c_1 ਅਤੇ a_2, b_2, c_2 ਭਾਗ 3.2 ਵਿੱਚ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਸਾਰਣੀ 3.4

ਲੜੀ ਨੰ.	ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ	ਆਲੇਖੀ (ਗ੍ਰਾਫੀ) ਨਿਰੂਪਣ	ਬੀਜਗਣਿਤਕ ਨਿਰੂਪਣ
1	$x - 2y = 0$ $3x + 4y - 20 = 0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{0}{-20}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	ਕੱਟਦੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ	ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੱਲ (ਵਿਲੱਖਣ)
2	$2x + 3y - 9 = 0$ $4x + 6y - 18 = 0$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{-9}{-18}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	ਸੰਪਾਤੀ ਰੇਖਾਵਾਂ	ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ
3	$x + 2y - 4 = 0$ $2x + 4y - 12 = 0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-4}{-12}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ	ਕੋਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ

ਸਾਰਣੀ 3.4 ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

ਅਤੇ $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ

(i) ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(ii) ਸੰਪਾਤੀ ਹਨ, ਤਾਂ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ, ਤਾਂ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਇਸਦਾ ਉਲਟ ਵੀ ਕਿਸੇ ਵੀ ਰੇਖੀ ਜੋੜੇ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲੈ ਕੇ ਇਸ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਆਓ ਇਸਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰਨ ਲਈ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜਾ

$$x + 3y = 6 \quad (1)$$

ਅਤੇ

$$2x - 3y = 12 \quad (2)$$

ਸੰਗਤ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਗ੍ਰਾਫ ਦੁਆਰਾ ਹੱਲ ਕਰੋ।

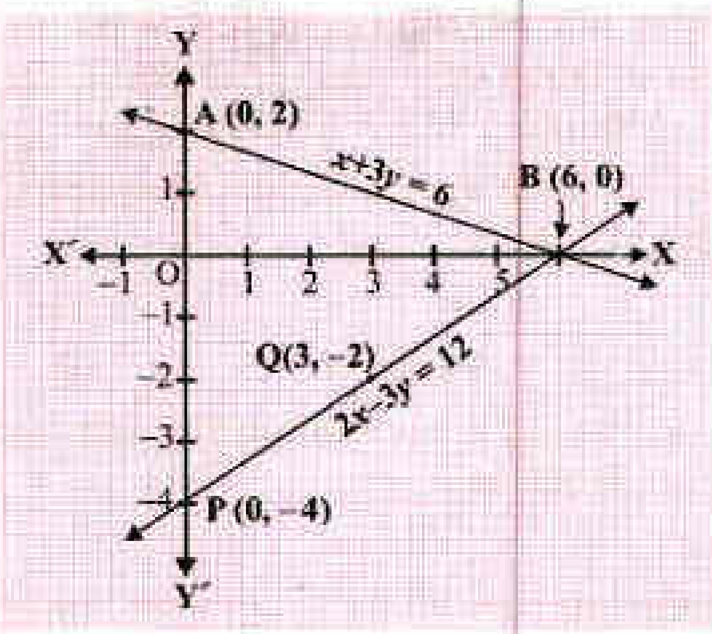
ਹੱਲ : ਆਓ ਸਮੀਕਰਣਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ ਖਿੱਚੀਏ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜੋ ਸਾਰਣੀ 3.5 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹਨ।

ਸਾਰਣੀ 3.5

x	0	6
$y = \frac{6-x}{3}$	2	0

x	0	3
$y = \frac{2x-12}{3}$	–4	–2

ਇੱਕ ਗ੍ਰਾਫ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ A(0, 2), B(6, 0), P(0, –4) ਅਤੇ Q(3, – 2) ਨੂੰ ਆਲੇਖਿਤ ਕਰੋ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਕੇ ਰੇਖਾ AB ਅਤੇ PQ ਚਿੱਤਰ 3.5 ਅਨੁਸਾਰ ਬਣਾਉ।



ਚਿੱਤਰ 3.5

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਰੇਖਾਵਾਂ AB ਅਤੇ PQ ਵਿੱਚ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ B(6, 0) ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਹੱਲ $x = 6, y = 0$ ਹੈ, ਭਾਵ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ ਸੰਗਤ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਗ੍ਰਾਫ ਦੁਆਰਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਜੋੜੇ ਦਾ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਹੈ ਜਾਂ ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ ਹਨ:

$$5x - 8y + 1 = 0 \qquad (1)$$

$$3x - \frac{24}{5}y + \frac{3}{5} = 0 \qquad (2)$$

ਹੱਲ : ਸਮੀਕਰਣ (2) ਨੂੰ $\frac{5}{3}$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ:

$$5x - 8y + 1 = 0$$

ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਤਾਂ ਉਹ ਹੀ ਹੈ ਜੋ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਸਮੀਕਰਣਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਦੇ ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ ਹਨ।

ਗ੍ਰਾਫ 'ਤੇ ਕੁਝ ਬਿੰਦੂ ਲਗਾਉ ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਆਪ ਜਾਂਚ ਕਰ ਲਓ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਚੰਪਾ ਇੱਕ ਸੇਲ ਤੋਂ ਕੁਝ ਪੈਂਟਾਂ ਅਤੇ ਸਕਰਟਾਂ ਖਰੀਦਣ ਗਈ। ਜਦੋਂ ਉਸਦੀਆਂ

ਸਹੇਲੀਆਂ ਨੇ ਪੁੱਛਿਆ ਕਿ ਹਰੇਕ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਨਗ ਖਰੀਦੇ ਤਾਂ ਉਸਨੇ ਉੱਤਰ ਦਿੱਤਾ ''ਸਕਰਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਖਰੀਦੀਆਂ ਗਈਆਂ ਪੈਂਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਦੁਗਣੇ ਤੋਂ ਦੋ ਘੱਟ ਹੈ। ਸਕਰਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਖਰੀਦੀਆਂ ਗਈਆਂ ਪੈਂਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੀ ਚਾਰ ਗੁਣਾ ਤੋਂ ਵੀ ਚਾਰ ਘੱਟ ਹੈ।'' ਸਹੇਲੀਆਂ ਦੀ ਇਹ ਲੱਭਣ ਲਈ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਚੰਪਾ ਨੇ ਕਿੰਨੀਆਂ ਪੈਂਟਾਂ ਅਤੇ ਸਕਰਟਾਂ ਖਰੀਦੀਆਂ ?

ਹੱਲ : ਆਓ ਅਸੀਂ ਪੈਂਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ x ਅਤੇ ਸਕਰਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ y ਨਾਲ ਦਰਸਾਈਏ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਤੋਂ ਬਣੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਹਨ :

$$y = 2x - 2 \quad (1)$$

ਅਤੇ

$$y = 4x - 4 \quad (2)$$

ਹੁਣ ਆਓ ਸਮੀਕਰਣਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਦੇ ਗ੍ਰਾਫ ਖਿੱਚਣ ਲਈ ਹਰ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੀਏ। ਇਹ ਸਾਰਣੀ 3.6 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ

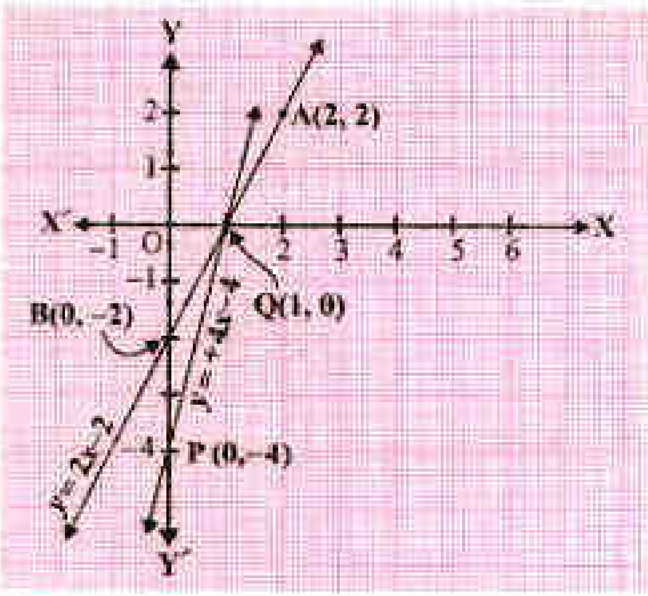
ਸਾਰਣੀ 3.6

x	2	0
$y = 2x - 2$	2	-2

x	0	1
$y = 4x - 4$	-4	0

ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਆਲੇਖਿਤ ਕਰੋ ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਖਿੱਚੋ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਚਿੱਤਰ 3.6 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਬਿੰਦੂ (1,0) 'ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ $x = 1$, $y = 0$ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਇੱਕ ਲੋੜੀਂਦਾ ਹੱਲ ਹੈ, ਭਾਵ ਉਸਦੇ ਦੁਆਰਾ ਖਰੀਦੀਆਂ ਗਈਆਂ ਪੈਂਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 1 ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਨੇ ਕੋਈ ਸਕਰਟ ਨਹੀਂ ਖਰੀਦੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.6

ਪੜਤਾਲ (1) ਅਤੇ (2) ਵਿੱਚ $x = 1$ ਅਤੇ $y = 0$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੋ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 3.2

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਬਣਾਉ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) ਜਮਾਤ X ਦੇ 10 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ ਗਣਿਤ ਦੀ ਇੱਕ ਬੁਝਾਰਤ ਮੁਕਾਬਲੇ ਵਿੱਚ ਭਾਗ ਲਿਆ। ਜੇਕਰ ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ, ਲੜਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਤੋਂ 4 ਵੱਧ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਮੁਕਾਬਲੇ ਵਿੱਚ ਭਾਗ ਲੈਣ ਵਾਲੇ ਲੜਕੇ ਅਤੇ ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (ii) 5 ਪੈਨਸਿਲਾਂ ਅਤੇ 7 ਕਲਮਾਂ ਦਾ ਕੁੱਲ ਮੁੱਲ ₹ 50 ਹੈ, ਜਦ ਕਿ 7 ਪੈਨਸਿਲਾਂ ਅਤੇ 5 ਕਲਮਾਂ ਦਾ ਕੁੱਲ ਮੁੱਲ ₹ 46 ਹੈ। ਇੱਕ ਪੈਨਸਿਲ ਅਤੇ ਇੱਕ ਕਲਮ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2. ਅਨੁਪਾਤਾਂ $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ ਅਤੇ $\frac{c_1}{c_2}$ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਕੇ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਿਆਂ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਉਂਦੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ, ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਜਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਹਨ:

   (i) $5x - 4y + 8 = 0$
   $7x + 6y - 9 = 0$

   (ii) $9x + 3y + 12 = 0$
   $18x + 6y + 24 = 0$

   (iii) $6x - 3y + 10 = 0$
   $2x - y + 9 = 0$

3. ਅਨੁਪਾਤਾਂ $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ ਅਤੇ $\frac{c_1}{c_2}$ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਕੇ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਸੰਗਤ ਹਨ ਜਾਂ ਅਸੰਗਤ :

   (i) $3x + 2y = 5$; $2x - 3y = 7$

   (ii) $2x - 3y = 8$; $4x - 6y = 9$

   (iii) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7$; $9x - 10y = 14$

   (iv) $5x - 3y = 11$; $-10x + 6y = -22$

   (v) $\frac{4}{3}x + 2y = 8$; $2x + 3y = 12$

4. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜਾ ਜੋੜਾ ਸੰਗਤ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਹੜਾ ਅਸੰਗਤ। ਜੇਕਰ ਜੋੜਾ ਸੰਗਤ ਹੈ ਤਾਂ ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ:

   (i) $x + y = 5$, $2x + 2y = 10$

   (ii) $x - y = 8$, $3x - 3y = 16$

   (iii) $2x + y - 6 = 0$, $4x - 2y - 4 = 0$

   (iv) $2x - 2y - 2 = 0$, $4x - 4y - 5 = 0$

5. ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਬਾਗ, ਜਿਸਦੀ ਲੰਬਾਈ, ਚੌੜਾਈ ਤੋਂ 4 ਮੀ. ਵੱਧ ਹੈ, ਦਾ ਅਰਧ ਪਰਿਮਾਪ 36 ਮੀ. ਹੈ। ਬਾਗ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਇਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ $2x + 3y - 8 = 0$ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ। ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਲਿਖੋ ਤਾਂ ਕਿ ਪ੍ਰਾਪਤ ਜੋੜੇ ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਨਿਰੂਪਣ ਜਦੋਂ ਕਿ
   (i) ਕੱਟਦੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹੋਣ। (ii) ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹੋਣ।
   (iii) ਸੰਪਾਤੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹੋਣ।
7. ਸਮੀਕਰਣਾਂ $x - y + 1 = 0$ ਅਤੇ $3x + 2y - 12 = 0$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ ਖਿੱਚੋ। x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨਾਲ ਬਣੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਆਕਾਰ ਖੇਤਰ ਨੂੰ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ (Shade) ਕਰੋ।

3.4 ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਬੀਜਗਣਿਤਕ (Algebraic) ਵਿਧੀ

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਆਲੇਖੀ (ਗ੍ਰਾਫ਼ੀ) ਵਿਧੀ ਬਾਰੇ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸੁਵਿਧਾਜਨਕ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਜਦ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਹੱਲਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼-ਅੰਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨਾ ਹੋਣ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(\sqrt{3}, 2\sqrt{7}), (-1.75, 3.3), \left(\frac{4}{13}, \frac{1}{19}\right)$ ਆਦਿ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਪੜ੍ਹਨ ਵਿੱਚ ਗਲਤੀ ਦੀ ਬਹੁਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਕੀ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਈ ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਵੀ ਹੈ? ਇਸ ਦੀਆਂ ਕਈ ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਧੀਆਂ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

3.4.1 ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ (Substitution) ਵਿਧੀ :

ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲੈ ਕੇ ਸਮਝਾਵਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

$$7x - 15y = 2 \qquad (1)$$

$$x + 2y = 3 \qquad (2)$$

ਹੱਲ :

ਪਗ 1 : ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਚਲ ਨੂੰ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਆਓ ਸਮੀਕਰਣ (2)

$x + 2y = 3$, ਨੂੰ ਲਈਏ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ

$x = 3 - 2y$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀਏ (3)

ਪਗ 2 : x ਦਾ ਇਹ ਮੁੱਲ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਕਰੋ। ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$7(3 - 2y) - 15y = 2$$

ਭਾਵ $21 - 14y - 15y = 2$

ਭਾਵ $-29y = -19$

ਇਸ ਲਈ $y = \frac{19}{29}$

ਪਗ 3 : y ਦਾ ਇਹ ਮੁੱਲ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$x = 3 - 2\left(\frac{19}{29}\right) = \frac{49}{29}$$

ਇਸ ਲਈ $x = \frac{49}{29}, y = \frac{19}{29}$ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਪੜਤਾਲ : $x = \frac{49}{29}$ ਅਤੇ $y = \frac{19}{29}$ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੋ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਹੋਰ ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮਝਣ ਲਈ, ਆਓ ਇਸਦੇ ਲੜੀਬੱਧ ਰੂਪ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਪਗ 1 : ਇੱਕ ਚਲ ਦਾ ਮੁੱਲ, ਮੰਨ ਲਓ y ਨੂੰ ਦੂਸਰੇ ਚਲ, ਮੰਨ ਲਉ x ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਮੀਕਰਣ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੋ ਸੁਵਿਧਾਜਨਕ ਹੋਵੇ।

ਪਗ 2: y ਦੇ ਇਸ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਦੂਸਰੇ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਇੱਕ ਚਲ x ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਕਦੇ-ਕਦੇ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੇਠਾਂ ਉਦਾਹਰਣ 9 ਅਤੇ 10 ਵਿੱਚ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਬਿਨਾਂ ਕਿਸੇ ਚਲ ਦੇ ਕਥਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦੇ ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਪਗ 2 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਥਨ ਝੂਠਾ ਹੈ ਤਾਂ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ ਅਸੰਗਤ ਹੈ।

ਪਗ 3 : ਪਗ 2 ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ x (ਜਾਂ y) ਦਾ ਮੁੱਲ ਉਸ ਸਮੀਕਰਣ ਜਿਸਨੂੰ ਪਗ 1 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ, ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਕਰਕੇ ਦੂਸਰੇ ਚਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਟਿੱਪਣੀ: ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਚਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ਦੂਸਰੇ ਚਲ ਦੇ ਪਦ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਕੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਵਿਧੀ ਨੂੰ **ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਅਭਿਆਸ 3.1 ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਬਲਦੇਵ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਲੜਕੀ ਦੀ ਉਮਰ (ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ) ਕ੍ਰਮਵਾਰ s ਅਤੇ t ਹੈ। ਹੁਣ

ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ, ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ ਹੈ :

$$s - 7 = 7(t - 7), \text{ ਭਾਵ } s - 7t + 42 = 0 \quad (1)$$

ਅਤੇ

$$s + 3 = 3(t + 3), \text{ ਭਾਵ } s - 3t = 6 \quad (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ : $s = 3t + 6$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ s ਦਾ ਮੁੱਲ ਰੱਖਣ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$(3t + 6) - 7t + 42 = 0$$

ਭਾਵ $4t = 48$, ਜਿਸ ਤੋਂ $t = 12$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

t ਦੇ ਇਸ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$s = 3(12) + 6 = 42$$

ਇਸ ਲਈ, ਬਲਦੇਵ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਲੜਕੀ ਦੀ ਉਮਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 42 ਸਾਲ ਅਤੇ 12 ਸਾਲ ਹੈ।

ਇਸ ਉੱਤਰ ਦੀ ਜਾਂਚ ਦੇ ਲਈ, ਇਹ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੱਸਿਆ ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਆਓ ਭਾਗ 3.3 ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ 2 ਨੂੰ ਲਈਏ, ਭਾਵ 2 ਪੈਨਸਿਲਾਂ ਅਤੇ 3 ਰਬੜਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 9 ਅਤੇ 4 ਪੈਨਸਿਲਾਂ ਅਤੇ 6 ਰਬੜਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 18 ਹੈ। ਹਰ ਇੱਕ ਪੈਨਸਿਲ ਅਤੇ ਰਬੜ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਜੋ ਬਣੇ ਸਨ, ਉਹ ਹਨ :

$$2x + 3y = 9 \quad (1)$$

$$4x + 6y = 18 \quad (2)$$

ਅਸੀਂ ਪਹਿਲੇ ਸਮੀਕਰਣ $2x + 3y = 9$ ਤੋਂ x ਦਾ ਮੁੱਲ y ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$x = \frac{9 - 3y}{2} \quad (3)$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ x ਦੇ ਇਸ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{4(9 - 3y)}{2} + 6y = 18$$

ਭਾਵ $18 - 6y + 6y = 18$

ਭਾਵ $18 = 18$

ਇਹ ਕਥਨ y ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ। ਭਾਵੇਂ ਇਸ ਤੋਂ y ਦਾ ਕੋਈ ਮੁੱਲ ਹੱਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ x ਦਾ ਕੋਈ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਇਹ ਸਥਿਤੀ ਇਸ ਲਈ ਪੈਦਾ ਹੋਈ ਕਿਉਂਕਿ ਦੋਵੇਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣ ਇੱਕ ਹੀ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਅਤੇ

(2) ਦੇ ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਇਹ ਹੀ ਹੱਲ ਸਾਨੂੰ ਗ੍ਰਾਫ਼ੀ (ਆਲੇਖੀ) ਵਿਧੀ ਤੋਂ ਮਿਲਿਆ ਹੈ (ਭਾਗ 3.2 ਦੇ ਚਿੱਤਰ 3.3 ਦੇ ਹਵਾਲੇ ਤੋਂ)। ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਪੈਨਸਿਲ ਅਤੇ ਇੱਕ ਰਬੜ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿੱਲਖਣ ਮੁੱਲ (Unique Cost) ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਕਿਉਂਕਿ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਸਾਂਝੇ ਹੱਲ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਆਓ ਭਾਗ 3.2 ਦਾ ਉਦਾਹਰਣ 3 ਲਈਏ। ਕੀ ਰੇਲ ਪਟੜੀਆਂ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਣਗੀਆਂ?

ਹੱਲ : ਇਸ ਤੋਂ ਬਣਾਏ ਗਏ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਸਨ :

$$x + 2y - 4 = 0 \quad (1)$$

$$2x + 4y - 12 = 0 \quad (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਤੋਂ x ਨੂੰ y ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$x = 4 - 2y$$

ਹੁਣ x ਦੇ ਇਸ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$2(4 - 2y) + 4y - 12 = 0$$

ਭਾਵ $\quad 8 - 12 = 0$

ਭਾਵ $\quad -4 = 0$

ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਝੂਠਾ ਕਥਨ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਦੋਵੇਂ ਪਟੜੀਆਂ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਨਹੀਂ ਕੱਟਣਗੀਆਂ।

ਅਭਿਆਸ 3.3

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਿਆਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ :-

   (i) $x + y = 14$, $x - y = 4$

   (ii) $s - t = 3$, $\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$

   (iii) $3x - y = 3$, $9x - 3y = 9$

   (iv) $0.2x + 0.3y = 1.3$, $0.4x + 0.5y = 2.3$

   (v) $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$, $\sqrt{3}x - \sqrt{8}y = 0$

   (vi) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$

2. $2x + 3y = 11$ ਅਤੇ $2x - 4y = -24$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਵਿੱਚ 'm' ਦਾ (ਹ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਲਈ $y = mx + 3$ ਹੋਵੇ।

3. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਬਣਾਉ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ 26 ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਦੂਸਰੀ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਤਿੰਨ ਗੁਣਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(ii) ਦੋ ਸੰਪੂਰਕ ਕੋਣਾਂ ਵਿੱਚ ਵੱਡਾ ਕੋਣ ਛੋਟੇ ਕੋਣ ਤੋਂ 18 ਡਿਗਰੀ ਵੱਧ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(iii) ਇੱਕ ਕ੍ਰਿਕਟ ਟੀਮ ਦੇ ਕੋਚ ਨੇ 7 ਬੱਲੇ ਅਤੇ 6 ਗੇਂਦਾਂ ₹ 3800 ਵਿੱਚ ਖਰੀਦੀਆਂ । ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਉਸਨੇ 3 ਬੱਲੇ ਅਤੇ 5 ਗੇਂਦਾਂ ₹ 1750 ਵਿੱਚ ਖਰੀਦੀਆਂ। ਹਰ ਇੱਕ ਬੱਲੇ ਅਤੇ ਗੇਂਦ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(iv) ਇੱਕ ਸ਼ਹਿਰ ਵਿੱਚ ਟੈਕਸੀ ਕਿਰਾਏ ਵਿੱਚ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਿਰਾਏ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ ਦਾ ਕਿਰਾਇਆ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। 10 ਕਿ.ਮੀ ਦੂਰੀ ਦੇ ਲਈ ਕਿਰਾਇਆ ₹ 105 ਹੈ ਅਤੇ 15 ਕਿ.ਮੀ ਦੇ ਲਈ ਕਿਰਾਇਆ ₹ 155 ਹੈ। ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਿਰਾਇਆ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤੀ ਕਿ.ਮੀ ਕਿਰਾਇਆ ਕੀ ਹੈ? ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ 25 ਕਿ.ਮੀ ਯਾਤਰਾ ਤੈਅ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿੰਨਾ ਕਿਰਾਇਆ ਦੇਣਾ ਪਵੇਗਾ?

(v) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਭਿੰਨ ਦੇ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚ 2 ਜੋੜ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਇਹ $\frac{9}{11}$ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚ 3 ਜੋੜ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਇਹ $\frac{5}{6}$ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਭਿੰਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(vi) ਪੰਜ ਸਾਲ ਬਾਦ ਜੈਕਬ ਦੀ ਉਮਰ ਉਸਦੇ ਲੜਕੇ ਦੀ ਉਮਰ ਦਾ ਤਿੰਨ ਗੁਣਾ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ। ਪੰਜ ਸਾਲ ਪਹਿਲਾਂ ਜੈਕਬ ਦੀ ਉਮਰ ਉਸਦੇ ਲੜਕੇ ਦੀ ਉਮਰ ਦਾ ਸੱਤ ਗੁਣਾ ਸੀ। ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਹੁਣ ਦੀ (ਵਰਤਮਾਨ) ਉਮਰ ਕੀ ਹੈ?

3.4.2 ਵਿਲੋਪਣ (Elimination) ਵਿਧੀ

ਹੁਣ ਆਓ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਧੀ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਜਿਸਨੂੰ ਇੱਕ ਚਲ ਨੂੰ ਲੁਪਤ (ਅਲੋਪ) ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਕਦੇ-ਕਦੇ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਨਾਲੋਂ ਵੱਧ ਸੁਵਿਧਾਜਨਕ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ। ਆਓ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਇਹ ਵਿਧੀ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਦੋ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਆਮਦਨ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 9 : 7 ਹੈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਖਰਚੇ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 4 : 3 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਵਿਅਕਤੀ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ ₹ 2000 ਬਚਾ ਲੈਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਆਮਦਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਆਓ ਦੋਹਾਂ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਆਮਦਨ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ₹ $9x$ ਅਤੇ ₹ $7x$ ਅਤੇ

ਖਰਚਿਆਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ₹ $4y$ ਅਤੇ ₹ $3y$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਈਏ. ਹੁਣ ਸਥਿਤੀ ਅਨੁਸਾਰ ਬਣੇ ਸਮੀਕਰਣ ਹਨ :

$$9x - 4y = 2000 \quad (1)$$

ਅਤੇ

$$7x - 3y = 2000 \quad (2)$$

ਪਗ 1 : y ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਕਰਨ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ 3 ਨਾਲ ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਨੂੰ 4 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰੋ। ਸਾਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ :

$$27x - 12y = 6000 \quad (3)$$

$$28x - 12y = 8000 \quad (4)$$

ਪਗ 2 : y ਦਾ ਵਿਲੋਪਣ (eliminate) ਕਰਨ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ (4) ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਉ, ਕਿਉਂਕਿ y ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਬਰਾਬਰ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$(28x - 27x) - (12y - 12y) = 8000 - 6000$$

ਭਾਵ

$$x = 2000$$

ਪਗ 3 : x ਦਾ ਮੁੱਲ (1) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$9(2000) - 4y = 2000$$

ਭਾਵ

$$y = 4000$$

ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਦਾ ਹੱਲ $x = 2000$, $y = 4000$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਆਮਦਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ₹ 18000 ਅਤੇ ₹ 14000 ਹੈ।

ਜਾਂਚ: 18000 : 14000 = 9 : 7 ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਖਰਚੇ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ

18000 – 2000 : 14000 – 2000 = 16000 : 12000 = 4 : 3 ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ :

1. ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ, ਵਰਤੀ ਗਈ ਵਿਧੀ ਨੂੰ **ਵਿਲੋਪਣ ਵਿਧੀ (elimination method)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇੱਕ ਚਲ ਨੂੰ ਅਲੋਪ ਕਰਕੇ, ਇੱਕ ਚਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ y ਨੂੰ ਅਲੋਪ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ x ਨੂੰ ਵੀ ਅਲੋਪ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੋ।
2. ਤੁਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਜਾਂ ਆਲੇਖੀ (ਗ੍ਰਾਫ਼ੀ) ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵੀ ਕਰ ਸਕਦੇ ਸੀ। ਇਹਨਾਂ ਵਿਧੀਆਂ ਨਾਲ ਵੀ ਹੱਲ ਕਰੋ ਅਤੇ ਦੇਖੋ ਕਿ ਕਿਹੜੀ ਵਿਧੀ ਸਭ ਤੋਂ ਉਚਿਤ ਹੈ।

ਆਓ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵਿਲੋਪਣ ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਪਗ ਦੱਸੀਏ :

ਪਗ 1 : ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦੋਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਲੋੜੀਂਦੇ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਅਚਲ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਚਲ (x ਜਾਂ y) ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਨੂੰ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਰੂਪ ਵਿਚ ਬਰਾਬਰ ਕਰਨ ਲਈ ਗੁਣਾ ਕਰੋ।

ਪਗ 2 : ਇਸ ਤੋਂ ਉਪਰੰਤ ਦੋਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜੋ ਜਾਂ ਘਟਾਉ ਜਿਸ ਨਾਲ ਇੱਕ ਚਲ ਅਲੋਪ ਹੋ

ਜਾਵੇ। ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇੱਕ ਚਲ ਵਿੱਚ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਪਗ 3 ਵਿੱਚ ਜਾਉ।

ਜੇਕਰ ਪਗ 2 ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਚਲ ਰਹਿਤ ਇੱਕ ਸੱਚਾ ਕਥਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਮੂਲ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦੇ ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ ਹਨ।

ਜੇਕਰ ਪਗ 2 ਵਿੱਚ, ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਚੱਲ ਰਹਿਤ ਝੂਠਾ ਕਥਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਮੂਲ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਕੋਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ ਭਾਵ ਇਹ ਅਸੰਗਤ ਹੈ।

ਪਗ 3 : ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਇੱਕ ਚਲ (x ਜਾਂ y) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ, ਉਸ ਚਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਪਗ 4 : x (ਜਾਂ y) ਦੇ ਇਸ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਮੂਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇਕ ਚੱਲ ਵਿੱਚ ਦੂਸਰੇ ਚਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਕਰੋ। ਹੁਣ ਇਸਨੂੰ ਸਮਝਾਉਣ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਵਿਲੋਪਣ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ:

$$2x + 3y = 8 \qquad (1)$$
$$4x + 6y = 7 \qquad (2)$$

ਹੱਲ :

ਪਗ 1 : ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ 2 ਨਾਲ ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਨੂੰ 1 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ x ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਬਰਾਬਰ ਹੋ ਜਾਣ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$4x + 6y = 16 \qquad (3)$$
$$4x + 6y = 7 \qquad (4)$$

ਪਗ 2 : ਸਮੀਕਰਣ (4) ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਉਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$(4x - 4x) + (6y - 6y) = 16 - 7$$

ਭਾਵ $0 = 9$, ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਝੂਠਾ ਕਥਨ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਕੋਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਉਲਟਾ ਕੇ ਬਣੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਜੋੜ 66 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ 2 ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਪਹਿਲੀ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਦਹਾਈ ਅਤੇ ਇੱਕਾਈ ਦੇ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ x ਅਤੇ y ਹਨ ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਵਿਸਤਾਰਿਤ ਰੂਪ ਵਿਚ $10x + y$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ [ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, $56 = 10(5) + 6$]।

ਜਦੋਂ ਅੰਕ ਉਲਟ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ x ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਅਤੇ y ਦਹਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਬਣ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਖਿਆ $10y + x$ ਬਣ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। [ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਜਦ 56 ਨੂੰ ਉਲਟਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $65 = 10(6) + 5$]।

ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸ਼ਰਤ ਅਨੁਸਾਰ,

$$(10x + y) + (10y + x) = 66$$

ਭਾਵ $$11(x+y)=66$$

ਭਾਵ $$x+y=6 \qquad (1)$$

ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਵੀ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ 2 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

ਜਾਂ ਤਾਂ $$x-y=2 \qquad (2)$$

ਜਾਂ $$y-x=2 \qquad (3)$$

ਜੇਕਰ $x-y=2$ ਹੈ, ਤਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਵਿਲੋਪਣ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ $x=4$ ਅਤੇ $y=2$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿਚ ਸਾਨੂੰ ਸੰਖਿਆ 42 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $y-x=2$ ਹੈ, ਤਾਂ (1) ਅਤੇ (3) ਨੂੰ ਵਿਲੋਪਣ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ $x=2$ ਅਤੇ $y=4$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸੰਖਿਆ 24 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਜਿਹੀਆਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 42 ਅਤੇ 24 ਹੈ।

ਜਾਂਚ : ਇੱਥੇ $42+24=66$ ਅਤੇ $4-2=2$ ਹੈ ਅਤੇ $24+42=66$ ਅਤੇ $4-2=2$ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 3.4

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਿਆਂ ਨੂੰ ਵਿਲੋਪਣ ਵਿਧੀ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ। ਕਿਹੜੀ ਵਿਧੀ ਵੱਧ ਉਚਿਤ ਹੈ?

   (i) $x+y=5$ ਅਤੇ $2x-3y=4$ (ii) $3x+4y=10$ ਅਤੇ $2x-2y=2$

   (iii) $3x-5y-4=0$ ਅਤੇ $9x=2y+7$ (iv) $\frac{x}{2}+\frac{2y}{3}=-1$ ਅਤੇ $x-\frac{y}{3}=3$

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਬਣਾਉ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਹੱਲ (ਜੇਕਰ ਉਸਦੀ ਹੋਂਦ ਹੋਵੇ) ਵਿਲੋਪਣ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਅੰਸ਼ ਵਿੱਚ 1 ਜੋੜ ਦੇਈਏ ਅਤੇ ਹਰ ਵਿੱਚੋਂ 1 ਘਟਾ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਭਿੰਨ 1 ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸਿਰਫ਼ ਹਰ ਵਿੱਚ 1 ਜੋੜ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਇਹ $\frac{1}{2}$ ਬਣ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਭਿੰਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (ii) ਪੰਜ ਸਾਲ ਪਹਿਲਾਂ ਨੂਰੀ ਦੀ ਉਮਰ ਸੋਨੂੰ ਦੀ ਉਮਰ ਦਾ ਤਿੰਨ ਗੁਣਾ ਸੀ। ਦਸ ਸਾਲ ਬਾਦ ਨੂਰੀ ਦੀ ਉਮਰ ਸੋਨੂੰ ਦੀ ਉਮਰ ਦਾ ਦੋ ਗੁਣਾ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ। ਨੂਰੀ ਅਤੇ ਸੋਨੂੰ ਦੀ ਉਮਰ ਕਿੰਨੀ ਹੈ?

   (iii) ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 9 ਹੈ। ਇਸ ਸੰਖਿਆ ਦਾ 9 ਗੁਣਾ, ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਉਲਟਾ ਕੇ ਬਣੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ 2 ਗੁਣਾ ਹੈ। ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (iv) ਮੀਨਾ ₹ 2000 ਕਢਵਾਉਣ ਦਿੱਤ ਬੈਂਕ ਵਿੱਚ ਗਈ। ਉਸਨੇ ਖਜਾਨਚੀ ਨੂੰ ₹ 50 ਅਤੇ ₹ 100 ਦੇ ਨੋਟ ਦੇਣ ਲਈ ਕਿਹਾ। ਮੀਨਾ ਨੇ ਕੁੱਲ 25 ਨੋਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ। ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਉਸਨੇ ₹ 50 ਅਤੇ ₹100 ਦੇ ਕਿੰਨੇ-ਕਿੰਨੇ ਨੋਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ?

(v) ਕਿਰਾਏ 'ਤੇ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੇਣ ਵਾਲੀ ਕਿਸੇ ਲਾਇਬਰੇਰੀ ਦਾ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਦਿਨ ਦਾ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਿਰਾਇਆ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਤੋਂ ਬਾਦ ਹਰ ਇੱਕ ਵਾਧੂ ਦਿਨ ਦਾ ਕਿਰਾਇਆ ਅਲੱਗ ਹੈ। ਸਰਿਤਾ ਨੇ ਸੱਤ ਦਿਨ ਤੱਕ ਇੱਕ ਪੁਸਤਕ ਰੱਖਣ ਲਈ ₹ 27 ਦਿੱਤੇ ਜਦਕਿ ਮੰਜੂ ਨੇ ਇੱਕ ਪੁਸਤਕ ਪੰਜ ਦਿਨ ਰੱਖਣ ਲਈ ₹ 21 ਦਿੱਤੇ। ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਿਰਾਇਆ ਅਤੇ ਹਰ ਇੱਕ ਵਾਧੂ ਦਿਨ ਦਾ ਕਿਰਾਇਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

3.4.3 ਤਿਰਛੀ ਗੁਣਾ ਵਿਧੀ

ਹੁਣ ਤੱਕ, ਤੁਸੀਂ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ ਕਿ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਆਲੇਖੀ (ਗ੍ਰਾਫੀ), ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਅਤੇ ਵਿਲੋਪਣ ਵਿਧੀਆਂ ਰਾਹੀ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਹੋਰ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਵਿਧੀ ਬਾਰੇ ਦੱਸ ਰਹੇ ਹਾਂ, ਜੋ ਕਈ ਕਾਰਣਾਂ ਕਰਕੇ ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਬਹੁਤ ਉਪਯੋਗੀ ਵਿਧੀ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਅੱਗੇ ਵਧੀਏ, ਆਓ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਥਿਤੀ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

5 ਸੰਤਰੇ ਅਤੇ 3 ਸੇਬਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 35 ਹੈ ਅਤੇ 2 ਸੰਤਰੇ ਅਤੇ 4 ਸੇਬਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 28 ਹੈ। ਆਓ ਇੱਕ ਸੰਤਰੇ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸੇਬ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੀਏ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਸੰਤਰੇ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ x ਅਤੇ ਇੱਕ ਸੇਬ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ y ਹੈ ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਬਣਨਗੀਆਂ :

$$5x + 3y = 35, \text{ ਭਾਵ } 5x + 3y - 35 = 0 \quad (1)$$

ਅਤੇ

$$2x + 4y = 28, \text{ ਭਾਵ } 2x + 4y - 28 = 0 \quad (2)$$

ਆਓ ਵਿਲੋਪਨ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੀਏ।

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ 4 ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਨੂੰ 3 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$(4)(5)x + (4)(3)y + (4)(-35) = 0 \quad (3)$$

$$(3)(2)x + (3)(4)y + (3)(-28) = 0 \quad (4)$$

ਸਮੀਕਰਣ (4) ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਉਣ ਨਾਲ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$[(5)(4) - (3)(2)]x + [(4)(3) - (3)(4)]y + [4(-35) - (3)(-28)] = 0$$

ਇਸ ਲਈ

$$x = \frac{-[(4)(-35) - (3)(-28)]}{(5)(4) - (3)(2)}$$

ਭਾਵ

$$x = \frac{(3)(-28) - (4)(-35)}{(5)(4) - (2)(3)} \quad (5)$$

ਜੇਕਰ ਸਮੀਕਰਣਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ਅਤੇ $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

$$a_1 = 5,\ b_1 = 3,\ c_1 = -35,\ a_2 = 2,\ b_2 = 4,\ c_2 = -28$$

ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਣ (5) ਨੂੰ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ : $x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਤੁਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ : $y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

ਸਮੀਕਰਣ (5) ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$x = \frac{-84 + 140}{20 - 6} = 4$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $$y = \frac{(-35)(2) - (5)(-28)}{20 - 6} = \frac{-70 + 140}{14} = 5$$

ਇਸ ਲਈ, $x = 4, y = 5$ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਇੱਕ ਸੰਤਰੇ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 4 ਅਤੇ ਇੱਕ ਸੇਬ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 5 ਹੈ।

ਪੜਤਾਲ : 5 ਸੰਤਰਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ +3 ਸੇਬਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ = ₹ 20 + ₹ 15 = ₹ 35

2 ਸੰਤਰਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ +4 ਸੇਬਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ = ₹ 8 + ₹ 20 = ₹ 28

ਆਓ ਹੁਣ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਵਿਧੀ ਦੋ ਚਲਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad (1)$$

ਅਤੇ $$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad (2)$$

ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਧੀ ਨਾਲ x ਅਤੇ y ਦੇ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅੱਗੇ ਵਧਾਂਗੇ।

ਪਗ 1 : ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ b_2 ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਨੂੰ b_1 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ:

$$b_2a_1x + b_2b_1y + b_2c_1 = 0 \quad (3)$$

$$b_1a_2x + b_1b_2y + b_1c_2 = 0 \quad (4)$$

ਪਗ 2 : ਸਮੀਕਰਣ (4) ਨੂੰ (3) ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਉਣ ਨਾਲ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$(b_2a_1 - b_1a_2)\,x + (b_2b_1 - b_1b_2)\,y + (b_2c_1 - b_1c_2) = 0$$

ਭਾਵ $$(b_2a_1 - b_1a_2)\,x = b_1c_2 - b_2c_1$$

ਇਸ ਲਈ $$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1},\ \text{ਜਦਕਿ}\ b_2a_1 - b_1a_2 \neq 0\ \text{ਹੋਵੇ} \quad (5)$$

ਪਗ 3 : x ਦਾ ਮੁੱਲ (1) ਅਤੇ (2) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਨਾਲ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad (6)$$

ਹੁਣ ਦੋ ਸਥਿਤੀਆਂ ਪੈਦਾ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ :

ਸਥਿਤੀ 1 : $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ਜੇਕਰ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ 2 : $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ਜੇਕਰ ਹੈ। $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$ ਹੈ, ਤਾਂ $a_1 = k\,a_2, b_1 = k\,b_2$ ਹੋਵੇਗਾ।

a_1 ਅਤੇ b_1 ਨੂੰ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$k\,(a_2x + b_2y) + c_1 = 0 \qquad (7)$$

ਇਹ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ (7) ਅਤੇ (2) ਦੋਵੇਂ ਤਾਂ ਹੀ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ $c_1 = k\,c_2$ ਹੋਵੇ ਭਾਵ $\frac{c_1}{c_2} = k$ ਹੋਵੇ।

ਜੇਕਰ $c_1 = k\,c_2$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਹੱਲ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰੇਗਾ ਅਤੇ ਉਲਟ ਵੀ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ, ਜੇਕਰ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਅਸੀਮਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਜੇਕਰ $c_1 \neq k\,c_2$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਹੱਲ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਕਰੇਗਾ ਅਤੇ ਉਲਟ ਵੀ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਜੋੜੇ ਦਾ ਕੋਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ।

(1) ਅਤੇ (2) ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਬਾਰੇ ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ:

(i) ਜਦੋਂ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ (Unique Solution) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

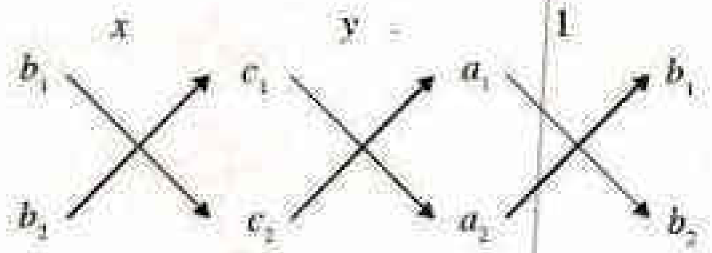
(ii) ਜਦੋਂ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਜੋੜੇ ਦੇ ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ (many solution) ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(iii) ਜਦੋਂ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਜੋੜੇ ਦਾ ਕੋਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ (5) ਅਤੇ (6) ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੱਲ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹੋ :

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad (8)$$

ਉਪਰੋਕਤ ਪਰਿਣਾਮ ਨੂੰ ਯਾਦ ਰੱਖਣ ਲਈ, ਤੁਹਾਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਚਿੱਤਰ ਉਪਯੋਗੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ :



ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੇ ਤੀਰ ਦੇ ਨਿਸ਼ਾਨ ਸੂਚਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਗੁਣਨਫਲ ਨੂੰ ਪਹਿਲੇ ਗੁਣਨਫਲ ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਉਣਾ ਹੈ।

ਇਸ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਿਆਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪਗਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਅੱਗੇ ਵਧਾਂਗੇ:

ਪਗ 1 : ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ (1) ਅਤੇ (2) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

ਪਗ 2 : ਉਪਰੋਕਤ ਚਿੱਤਰ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ (8) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖੋ।

ਪਗ 3 : x ਅਤੇ y ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਦ ਕਿ $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ਹੋਵੇ।

ਉਪਰੋਕਤ ਪਗ 2 ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਸ਼ਾਰਾ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਨੂੰ ਤਿਰਛੀ ਗੁਣਾ ਵਿਧੀ ਕਿਉਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

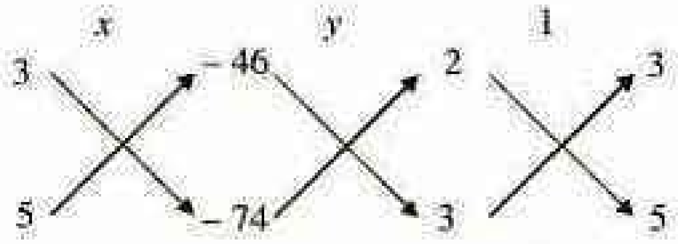
ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਚੰਡੀਗੜ੍ਹ ਦੇ ਬੱਸ ਸਟੈਂਡ 'ਤੇ ਜੇਕਰ ਦੋ ਟਿਕਟਾਂ ਜੀਰਕਪੁਰ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਟਿਕਟਾਂ ਰਾਜਪੁਰੇ ਦੀਆਂ ਖਰੀਦੀਏ ਤਾਂ ਕੁੱਲ ਕਿਰਾਇਆ ₹ 46 ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ 3 ਟਿਕਟਾਂ ਜੀਰਕਪੁਰ ਅਤੇ 5 ਟਿਕਟਾਂ ਰਾਜਪੁਰੇ ਦੀਆਂ ਲਈਏ ਤਾਂ ਕੁੱਲ ਕਿਰਾਇਆ ₹ 74 ਹੈ। ਬੱਸ ਸਟੈਂਡ ਤੋਂ ਜੀਰਕਪੁਰ ਅਤੇ ਰਾਜਪੁਰੇ ਦਾ ਕਿਰਾਇਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਚੰਡੀਗੜ ਦੇ ਬਸ ਸਟੈਂਡ ਤੋਂ ਜੀਰਕਪੁਰ ਦਾ ਕਿਰਾਇਆ ₹ x ਅਤੇ ਰਾਜਪੁਰੇ ਦਾ ਕਿਰਾਇਆ ₹ y ਹੈ। ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$2x + 3y = 46, \text{ ਭਾਵ } 2x + 3y - 46 = 0 \qquad (1)$$

$$3x + 5y = 74, \text{ ਭਾਵ } 3x + 5y - 74 = 0 \qquad (2)$$

ਤਿਰਛੀ ਗੁਣਾ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਚਿੱਤਰ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ :



ਹੁਣ $$\frac{x}{(3)(-74)-(5)(-46)} = \frac{y}{(-46)(3)-(-74)(2)} = \frac{1}{(2)(5)-(3)(3)}$$

ਭਾਵ $$\frac{x}{-222+230} = \frac{y}{-138+148} = \frac{1}{10-9}$$

ਭਾਵ $$\frac{x}{8} = \frac{y}{10} = \frac{1}{1}$$

ਭਾਵ $$\frac{x}{8} = \frac{1}{1} \text{ ਅਤੇ } \frac{y}{10} = \frac{1}{1}$$

ਭਾਵ $$x = 8 \text{ ਅਤੇ } y = 10$$

ਇਸ ਲਈ, ਚੰਡੀਗੜ ਦੇ ਬੱਸ ਸਟੈਂਡ ਤੋਂ ਜੀਰਕਪੁਰ ਦਾ ਕਿਰਾਇਆ ₹ 8 ਅਤੇ ਰਾਜਪੁਰੇ ਦਾ ਕਿਰਾਇਆ ₹ 10 ਹੈ।

ਜਾਂਚ : ਤੁਸੀਂ ਸ਼ੁਰੂ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਤੋਂ ਪੜਤਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਜੋ ਹੱਲ ਅਸੀਂ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਹਨ ਉਹ ਸਹੀ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 15 : p ਦੇ ਕਿਹੜੇ ਮੁੱਲਾਂ ਨਾਲ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਹੈ?

$$4x + py + 8 = 0$$
$$2x + 2y + 2 = 0$$

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $a_1 = 4, a_2 = 2, b_1 = p, b_2 = 2$ ਹੈ।

ਹੁਣ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਜੋੜੇ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਹੋਣ ਲਈ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਭਾਵ $$\frac{4}{2} \neq \frac{p}{2}$$

ਭਾਵ $$p \neq 4$$

ਇਸ ਲਈ, 4 ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ, p ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਮੁੱਲ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 16 : k ਦੇ ਕਿਸ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦੇ ਅਸੀਮਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ ਹੋਣਗੇ?

$$kx + 3y - (k - 3) = 0$$

$$12x + ky - k = 0$$

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{k}{12}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{k}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{k-3}{k}$ ਹੈ।

ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਦੇ ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ ਹੋਣ ਦੇ ਲਈ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ $\quad \frac{k}{12} = \frac{3}{k} = \frac{k-3}{k}$

ਜਾਂ $\quad \frac{k}{12} = \frac{3}{k}$

ਜਿਸ ਤੋਂ $k^2 = 36$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ $k = \pm 6$ ਹੈ।

ਨਾਲ ਹੀ $\quad \frac{3}{k} = \frac{k-3}{k}$ ਤੋਂ

ਜਿਸ ਤੋਂ $3k = k^2 - 3k$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ $6k = k^2$ ਹੈ।

ਜਿਸਦਾ ਭਾਵ $k = 0$ ਹੈ ਜਾਂ $k = 6$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ k ਦਾ ਮੁੱਲ ਜੋ ਦੋਹਾਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰਾ (ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ, $k = 6$ ਹੈ। ਇਸ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਦੇ ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 3.5

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਹੈ, ਕਿਸਦਾ ਕੋਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਜਾਂ ਕਿਸਦੇ ਅਸੀਮਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ ਹਨ। ਇੱਕ ਹੱਲ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਉਸਨੂੰ ਤਿਰਛੀ ਗੁਣਾ ਦੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $x - 3y - 3 = 0$
$3x - 9y - 2 = 0$

(ii) $2x + y = 5$
$3x + 2y = 8$

(iii) $3x - 5y = 20$
$6x - 10y = 40$

(iv) $x - 3y - 7 = 0$
$3x - 3y - 15 = 0$

2. (i) a ਅਤੇ b ਦੇ ਕਿਹੜੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਦੇ ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ ਹੋਣਗੇ?

$2x + 3y = 7$

$(a - b)x + (a + b)y = 3a + b - 2$

(ii) k ਦੇ ਕਿਹੜੇ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਜੋੜੇ ਦਾ ਕੋਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ?

$3x + y = 1$

$(2k - 1)x + (k - 1)y = 2k + 1$

3. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਅਤੇ ਤਿਰਛੀ ਗੁਣਾ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ। ਤੁਸੀਂ ਕਿਹੜੀ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਵੱਧ ਢੁਕਵੀਂ ਮੰਨਦੇ ਹੋ?

$8x + 5y = 9$

$3x + 2y = 4$

4. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਜੋੜੇ ਬਣਾਉ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਹੱਲ (ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੋਵੇ) ਕਿਸੇ ਵੀ ਬੀਜਗਣਿਤਕ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) ਇੱਕ ਹੋਸਟਲ (Hostel) ਦੇ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਖਰਚ ਦਾ ਇੱਕ ਭਾਗ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਇਸ 'ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੇ ਕਿੰਨੇ ਦਿਨ ਭੋਜਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ A ਜਿਸਨੇ 20 ਦਿਨ ਭੋਜਨ ਕੀਤਾ ਹੈ, ₹ 1000 ਹੋਸਟਲ (Hostel) ਦੇ ਖਰਚ ਲਈ ਦਿੰਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਦੂਸਰਾ ਵਿਦਿਆਰਥੀ B ਜਿਸਨੇ 26 ਦਿਨ ਭੋਜਨ ਕੀਤਾ ਹੈ, ਹੋਸਟਲ ਦੇ ਖਰਚ ਲਈ ₹ 1180 ਖਰਚ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਖਰਚ ਅਤੇ ਹਰ ਇੱਕ ਦਿਨ ਦੇ ਭੋਜਨ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(ii) ਇੱਕ ਭਿੰਨ ਦੇ ਸਿਰਫ ਅੰਸ਼ ਵਿੱਚੋਂ 1 ਘਟਾਉਣ ਨਾਲ ਉਹ $\frac{1}{3}$ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰ ਵਿੱਚ 8 ਜੋੜਨ ਨਾਲ ਉਹ $\frac{1}{4}$ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਭਿੰਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(iii) ਯਸ਼ਪਾਲ ਨੇ ਇੱਕ ਟੈਸਟ ਵਿੱਚ 40 ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ, ਜਦੋਂ ਉਸਨੂੰ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੇ 3 ਅੰਕ ਮਿਲੇ ਅਤੇ ਗਲਤ ਉੱਤਰ ਤੇ 1 ਅੰਕ ਦੀ ਕਟੌਤੀ ਕੀਤੀ ਗਈ। ਜੇਕਰ ਉਸਨੂੰ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੇ 4 ਅੰਕ ਮਿਲਣ ਅਤੇ ਗਲਤ ਉੱਤਰ ਦੇ 2 ਅੰਕ ਕੱਟੇ ਜਾਣ ਤਾਂ ਉਹ 50 ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਟੈਸਟ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸਨ?

(iv) ਇੱਕ ਰਾਜਮਾਰਗ 'ਤੇ ਦੋ ਸਥਾਨ A ਤੇ B, 100 ਕਿ.ਮੀ. ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹਨ। ਇੱਕ ਕਾਰ A ਤੋਂ ਅਤੇ ਦੂਸਰੀ ਕਾਰ B ਤੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਸਮੇਂ 'ਤੇ ਚਲਣਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਕਾਰਾਂ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਗਤੀ (ਚਾਲ) ਨਾਲ ਇੱਕ ਹੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਚਲਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਇਹ 5 ਘੰਟੇ ਬਾਅਦ ਮਿਲ ਜਾਣਗੀਆਂ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਕਾਰਾਂ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਵੱਲ (ਜਾਂ ਵਿਰੋਧੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ) ਚਲਦੀਆਂ ਹਨ ਤਾਂ ਇਹ 1 ਘੰਟੇ ਬਾਅਦ ਮਿਲ ਜਾਣਗੀਆਂ। ਦੋਵਾਂ ਕਾਰਾਂ ਦੀ ਗਤੀ (ਚਾਲ) ਪਤਾ ਕਰੋ।

(v) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਆਇਤ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਨੂੰ 5 ਇਕਾਈਆਂ ਘਟਾ ਦੇਈਏ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਨੂੰ 3 ਇਕਾਈਆਂ ਵਧਾ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਆਇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 9 ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ ਘੱਟ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਲੰਬਾਈ 3 ਇਕਾਈਆਂ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਨੂੰ 2 ਇਕਾਈਆਂ ਵਧਾ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਖੇਤਰਫਲ 67 ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ ਵੱਧ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਆਇਤ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

3.5 ਦੋ ਚਲਾਂ ਦੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲੇ ਜਾ ਸਕਣ ਵਾਲੇ ਸਮੀਕਰਣ:

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਿਆਂ ਬਾਰੇ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ ਜੋ ਰੇਖੀ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਕੁਝ ਢੁਕਵੀਂ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨਾ ਦੁਆਰਾ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੁਆਰਾ ਸਮਝਾਵਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 17 : ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13$$

$$\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2$$

ਹੱਲ : ਆਉ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਨੂੰ

$$2\left(\frac{1}{x}\right) + 3\left(\frac{1}{y}\right) = 13 \qquad (1)$$

$$5\left(\frac{1}{x}\right) - 4\left(\frac{1}{y}\right) = -2 \qquad (2)$$

ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀਏ।

ਇਹ ਸਮੀਕਰਣਾਂ $ax + by + c = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਅਤੇ (2) ਵਿੱਚ $\frac{1}{x} = p$ ਅਤੇ $\frac{1}{y} = q$ ਰੱਖ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$2p + 3q = 13 \qquad (3)$$

$$5p - 4q = -2 \qquad (4)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰਕੇ $p = 2, q = 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ $p = \frac{1}{x}$ ਅਤੇ $q = \frac{1}{y}$ ਹੈ।

p ਅਤੇ q ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਰੱਖਣ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$\frac{1}{x} = 2$ ਭਾਵ $x = \frac{1}{2}$ ਅਤੇ $\frac{1}{y} = 3$ ਭਾਵ $y = \frac{1}{3}$

ਜਾਂਚ : ਦੋਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚ $x = \frac{1}{2}$ ਅਤੇ $y = \frac{1}{3}$ ਰੱਖਣ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋਨੋਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੋ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 18 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਕੇ ਹੱਲ ਕਰੋ:

$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$$

$$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$$

ਹੱਲ : ਆਓ $\frac{1}{x-1} = p$ ਅਤੇ $\frac{1}{y-2} = q$ ਰੱਖੋ, ਹੁਣ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ

$$5\left(\frac{1}{x-1}\right) + \frac{1}{y-2} = 2 \qquad (1)$$

$$6\left(\frac{1}{x-1}\right) - 3\left(\frac{1}{y-2}\right) = 1 \qquad (2)$$

$$5p + q = 2 \qquad (3)$$

$$6p - 3q = 1 \quad (4)$$

ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ :

ਸਮੀਕਰਣਾਂ (3) ਅਤੇ (4) ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ, $p = \frac{1}{3}$ ਅਤੇ $q = \frac{1}{3}$

ਹੁਣ p ਦੇ ਲਈ $\frac{1}{x-1}$, ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{3}$$

ਭਾਵ $\quad x - 1 = 3$, ਭਾਵ $x = 4$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ q ਦੇ ਲਈ $\frac{1}{y-2}$, ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

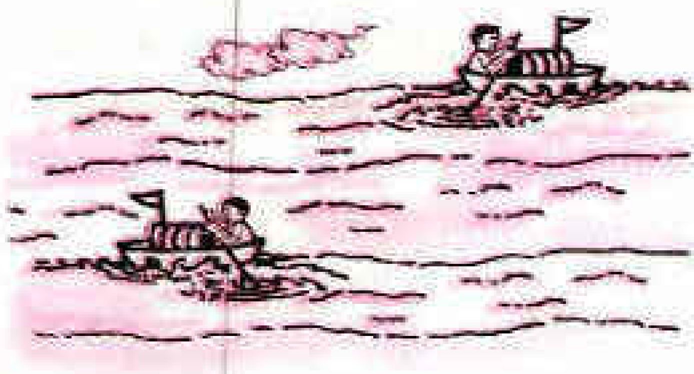
$$\frac{1}{y-2} = \frac{1}{3}$$

ਭਾਵ $\quad 3 = y - 2$, ਭਾਵ $y = 5$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਹੱਲ $x = 4, y = 5$ ਹੈ।

ਜਾਂਚ : (1) ਅਤੇ (2) ਵਿੱਚ $x = 4$ ਅਤੇ $y = 5$ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਇਹ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 18 : ਇੱਕ ਕਿਸ਼ਤੀ 10 ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਧਾਰਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਉਲਟ 30 km ਅਤੇ ਧਾਰਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ 44 km ਜਾਂਦੀ ਹੈ। 13 ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਇਹ ਧਾਰਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਉਲਟ 40 km ਅਤੇ ਧਾਰਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ 55 km ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਧਾਰਾ ਦੀ ਚਾਲ ਅਤੇ ਕਿਸ਼ਤੀ ਦੀ ਸਥਿਰ ਪਾਣੀ ਵਿੱਚ ਚਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿਸ਼ਤੀ ਦੀ ਸਥਿਰ ਪਾਣੀ ਵਿੱਚ ਚਾਲ x km/h ਹੈ ਅਤੇ ਧਾਰਾ ਦੀ ਚਾਲ y km/h ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਕਿਸ਼ਤੀ ਦੀ ਧਾਰਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਚਾਲ = $(x + y)$ km/h ਅਤੇ ਕਿਸ਼ਤੀ ਦੀ ਧਾਰਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਉਲਟ ਚਾਲ = $(x - y)$ km/h ਹੋਵੇਗੀ।

ਨਾਲ ਹੀ $$\text{ਸਮਾਂ} = \frac{\text{ਦੂਰੀ}}{\text{ਚਾਲ}}$$

ਪਹਿਲੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਜਦੋਂ ਕਿਸ਼ਤੀ 30 km ਧਾਰਾ ਦੇ ਉਲਟ ਚਲਦੀ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਲਿਆ ਗਿਆ ਸਮਾਂ t_1 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$t_1 = \frac{30}{(x-y)}$$

ਮੰਨ ਲਉ ਜਦੋਂ ਕਿਸ਼ਤੀ 44 km ਧਾਰਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਚਲਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ t_2 ਘੰਟੇ ਸਮਾਂ ਲੈਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ $t_2 = \frac{44}{x+y}$ ਹੈ। ਕੁੱਲ ਲੱਗਿਆ ਸਮਾਂ $t_1 + t_2 = 10$ ਘੰਟੇ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਸਾਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ ਮਿਲਦਾ ਹੈ:

$$\frac{30}{x-y} + \frac{44}{x+y} = 10 \qquad (1)$$

ਦੂਸਰੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, 13 ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਇਹ 40 ਕਿ.ਮੀ. ਧਾਰਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਉਲਟ ਅਤੇ 55 ਕਿ.ਮੀ. ਧਾਰਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਚਲਦੀ ਹੈ। ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਤੋਂ ਸਮੀਕਰਣ ਮਿਲਦੀ ਹੈ:

$$\frac{40}{x-y} + \frac{55}{x+y} = 13 \qquad (2)$$

$\frac{1}{x-y} = u$ ਅਤੇ $\frac{1}{x+y} = v$ ਰੱਖੋ। (3)

ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਅਤੇ (2) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਜੋੜਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$30u + 44v = 10$ ਜਾਂ $30u + 44v - 10 = 0$ (4)

$40u + 55v = 13$ ਜਾਂ $40u + 55v - 13 = 0$ (5)

ਤਿਰਛੀ ਗੁਣਾ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$\frac{u}{44(-13)-55(-10)} = \frac{v}{40(-10)-30(-13)} = \frac{1}{30(55)-44(40)}$$

ਭਾਵ $$\frac{u}{-22} = \frac{v}{-10} = \frac{1}{-110}$$

ਭਾਵ $$u = \frac{1}{5},\quad v = \frac{1}{11}$$

ਹੁਣ u ਅਤੇ v ਦੇ ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ:

$$\frac{1}{x-y}=\frac{1}{5} \text{ ਅਤੇ } \frac{1}{x+y}=\frac{1}{11}$$

ਭਾਵ $x-y=5$ ਅਤੇ $x+y=11$ (6)

ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$2x=16$$

ਭਾਵ $x=8$

(6) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਘਟਾਉਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$2y=6$$

ਭਾਵ $y=3$

ਇਸ ਲਈ, ਕਿਸ਼ਤੀ ਦੀ ਸਥਿਰ ਪਾਣੀ ਵਿੱਚ ਚਾਲ 8 km/h ਅਤੇ ਧਾਰਾ ਦੀ ਚਾਲ 3 km/h ਹੈ।

ਪੜਤਾਲ : ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 3.6

1. ਅੱਗੇ ਦਿੱਤੇ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਿਆਂ ਨੂੰ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਕੇ ਹੱਲ ਕਰੋ :

(i) $\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}=2$

$\frac{1}{3x}+\frac{1}{2y}=\frac{13}{6}$

(ii) $\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt{y}}=2$

$\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{9}{\sqrt{y}}=-1$

(iii) $\frac{4}{x}+3y=14$

$\frac{3}{x}-4y=23$

(iv) $\frac{5}{x-1}+\frac{1}{y-2}=2$

$\frac{6}{x-1}-\frac{3}{y-2}=1$

(v) $\frac{7x-2y}{xy}=5$

$\frac{8x+7y}{xy}=15$

(vi) $6x+3y=6xy$

$2x+4y=5xy$

(vii) $\frac{10}{x+y}+\frac{2}{x-y}=4$

(viii) $\frac{1}{3x+y}+\frac{1}{3x-y}=\frac{3}{4}$

(ix) $\dfrac{15}{x+y} - \dfrac{5}{x-y} = -2$ (x) $\dfrac{1}{2(3x+y)} - \dfrac{1}{2(3x-y)} = \dfrac{-1}{8}$

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਓ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) ਰਿਤੂ ਧਾਰਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ 2 ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ 20 km ਤੈਰ ਸਕਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਧਾਰਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਉਲਟ 2 ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ 4 km ਤੈਰ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਉਸਦੀ ਖੜੇ ਪਾਣੀ ਵਿੱਚ ਤੈਰਨ ਦੀ ਚਾਲ (ਗਤੀ) ਅਤੇ ਧਾਰਾ ਦੀ ਚਾਲ (ਗਤੀ) ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (ii) 2 ਇਸਤਰੀਆਂ ਅਤੇ 5 ਆਦਮੀ ਇੱਕ ਕਸੀਦੇ ਦੇ ਕੰਮ ਨੂੰ ਇੱਕਠੇ 4 ਦਿਨ ਵਿੱਚ ਪੂਰਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜਦਕਿ 3 ਇਸਤਰੀਆਂ ਅਤੇ 6 ਆਦਮੀ ਇਸਨੂੰ 3 ਦਿਨ ਵਿੱਚ ਪੂਰਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਕੰਮ ਨੂੰ ਇੱਕ ਇਕੱਲੀ ਇਸਤਰੀ ਕਿੰਨੇ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਪੂਰਾ ਕਰੇਗੀ? ਇਸ ਕੰਮ ਨੂੰ ਇਕੱਲਾ ਇੱਕ ਆਦਮੀ ਕਿੰਨੇ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਪੂਰਾ ਕਰੇਗਾ?

   (iii) ਦੀਪਿਕਾ 300 km ਦੂਰੀ ਤੇ ਸਥਿਤ ਆਪਣੇ ਘਰ ਜਾਣ ਦੇ ਲਈ ਕੁਝ ਦੂਰੀ ਰੇਲਗੱਡੀ ਦੁਆਰਾ ਅਤੇ ਕੁਝ ਦੂਰੀ ਬੱਸ ਦੁਆਰਾ ਤੈਅ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਹ 60 km ਰੇਲਗੱਡੀ ਦੁਆਰਾ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਬੱਸ ਦੁਆਰਾ ਕਰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ 4 ਘੰਟੇ ਲੱਗਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਉਹ 100 km ਦੁਬਾਰਾ ਰੇਲਗੱਡੀ ਰਾਹੀਂ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਜਾਤਰਾ ਬੱਸ ਦੁਆਰਾ ਕਰੇ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ 10 ਮਿੰਟ ਵੱਧ ਲੱਗਦੇ ਹਨ। ਰੇਲਗੱਡੀ ਅਤੇ ਬੱਸ ਦੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਚਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 3.7 (ਇੱਛਾ ਅਨੁਸਾਰ)*

1. ਦੋ ਦੋਸਤਾਂ ਹਨੀ ਅਤੇ ਸੰਨੀ ਦੀ ਉਮਰ ਵਿੱਚ 3 ਸਾਲ ਦਾ ਅੰਤਰ ਹੈ। ਹਨੀ ਦੇ ਪਿਤਾ ਹਰਮਿੰਦਰ ਦੀ ਉਮਰ ਹਨੀ ਦੀ ਉਮਰ ਤੋਂ ਦੁੱਗਣੀ ਹੈ ਅਤੇ ਸੰਨੀ ਦੀ ਉਮਰ ਆਪਣੀ ਭੈਣ ਗੁਨੂ ਦੀ ਉਮਰ ਤੋਂ ਦੁੱਗਣੀ ਹੈ। ਗੁਨੂ ਅਤੇ ਹਰਮਿੰਦਰ ਦੀ ਉਮਰ ਵਿੱਚ 30 ਸਾਲ ਦਾ ਅੰਤਰ ਹੈ। ਹਨੀ ਅਤੇ ਸੰਨੀ ਦੀ ਉਮਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਇੱਕ ਮਿੱਤਰ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਕਹਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿ "ਜੇਕਰ ਤੁਸੀ ਮੈਨੂੰ ਇੱਕ ਸੌ ਰੁਪਏ ਦੇ ਦਿਉ ਤਾਂ ਮੇਰੇ ਕੋਲ ਤੁਹਾਡੇ ਨਾਲੋਂ ਦੋ ਗੁਣਾ ਪੈਸੇ ਹੋ ਜਾਣਗੇ।" ਦੂਸਰਾ ਕਹਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿ "ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਮੈਨੂੰ ₹10 ਦੇ ਦਿਉ ਤਾਂ ਮੈਂ ਤੁਹਾਡੇ ਤੋਂ ਛੇ ਗੁਣਾ ਅਮੀਰ ਹੋ ਜਾਵਾਂਗਾ।" ਪਤਾ ਕਰੋ ਉਹਨਾਂ ਕੋਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਕਿੰਨੇ ਪੈਸੇ ਹਨ? (ਭਾਸਕਰ II ਦੇ ਬੀਜਗਣਿਤ ਤੋਂ)
   [ਸੰਕੇਤ : $x + 100 = 2(y - 100)$; $y + 10 = 6(x - 10)$]
3. ਇੱਕ ਰੇਲਗੱਡੀ ਕੁਝ ਦੂਰੀ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਚਾਲ ਨਾਲ ਤੈਅ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਗੱਡੀ ਦੀ ਗਤੀ 10 km/h ਵਧਾ ਦਿੱਤੀ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਹ ਉੱਨੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਨ ਲਈ 2 ਘੰਟੇ ਘੱਟ ਸਮਾਂ ਲਵੇਗੀ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਰੇਲਗੱਡੀ ਦੀ ਗਤੀ 10 km/h ਘਟਾ ਦਿੱਤੀ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਹ ਉੱਨੀ ਦੂਰੀ ਲਈ 3 ਘੰਟੇ ਵੱਧ ਸਮਾਂ

*ਇਹ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਲਵੇਗੀ। ਰੇਲਗੱਡੀ ਦੁਆਰਾ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਇੱਕ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਪੰਗਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਖੜ੍ਹਾ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪੰਗਤੀ ਵਿੱਚ 3 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਵੱਧ ਹੁੰਦੇ ਤਾਂ ਇੱਕ ਪੰਗਤੀ ਘੱਟ ਹੁੰਦੀ। ਜੇਕਰ ਪੰਗਤੀ ਵਿੱਚ 3 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਘੱਟ ਹੁੰਦੇ, ਤਾਂ 2 ਪੰਗਤੀਆਂ ਵੱਧ ਬਣਦੀਆਂ। ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. ਇੱਕ ΔABC ਵਿੱਚ $\angle C = 3\angle B = 2(\angle A + \angle B)$ ਹੈ। ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਤਿੰਨੇ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਸਮੀਕਰਣਾਂ $5x - y = 5$ ਅਤੇ $3x - y = 3$ ਦੇ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਖਿੱਚੋ। ਇਹਨਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਅਤੇ y - ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਬਣੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਅਤੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਿਆਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

   (i) $px + qy = p - q$
   $qx - py = p + q$

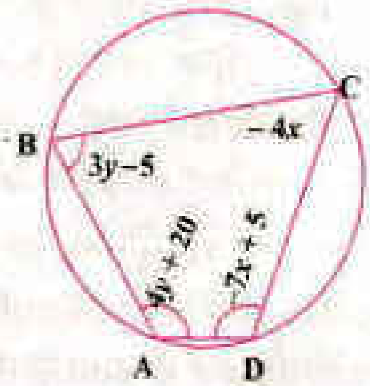
   (ii) $ax + by = c$
   $bx + ay = 1 + c$

   (iii) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$
   $ax + by = a^2 + b^2$

   (iv) $(a - b)x + (a + b)y = a^2 - 2ab - b^2$
   $(a + b)(x + y) = a^2 + b^2$

   (v) $152x - 378y = -74$
   $-378x + 152y = -604$

8. ABCD ਇੱਕ ਚੱਕਰੀ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ। ਇਸ ਚੱਕਰੀ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 3.7)।



ਚਿੱਤਰ 3.7

3.6 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ :

1. ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਿੱਚ ਦੋ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜਾ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਹੈ:

   $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

   $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

   ਜਿੱਥੇ $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਕਿ
   $a_1^2 + b_1^2 \neq 0, a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ ਹੈ।

2. ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਆਲੇਖੀ (ਗ੍ਰਾਫ਼ੀ) ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

   (i) ਆਲੇਖੀ (ਗ੍ਰਾਫ਼ੀ) ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ

   (ii) ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ

3. **(ਗ੍ਰਾਫ਼ੀ) ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ :**

ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

(i) ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ ਤਾਂ ਇਹ ਬਿੰਦੂ ਦੋਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਹੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ ਸੰਗਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਹਨ ਤਾਂ ਇਸਦੇ ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕਾਂ ਹੱਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ- ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ ਆਸ਼ਰਿਤ (ਸੰਗਤ) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਕੋਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ ਅਸੰਗਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

4. **ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਧੀ :** ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਹੈ :

   (i) ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ   (ii) ਵਿਲੋਪਣ ਵਿਧੀ   (iii) ਤਿਰਛੀ ਗੁਣਾ ਵਿਧੀ

5. ਜੇਕਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ਅਤੇ $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਉਤਪੰਨ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ :

(i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$: ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ ਸੰਗਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$: ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ ਅਸੰਗਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$: ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ ਆਸ਼ਰਿਤ (ਸੰਗਤ) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

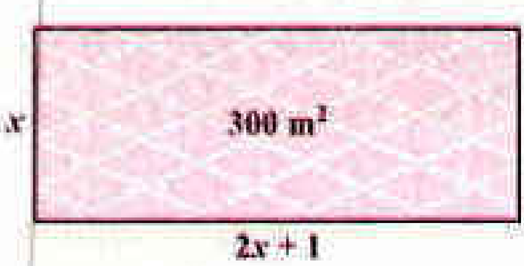
6. ਅਨੇਕਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਹਨ ਜਿਸ ਨੂੰ ਗਣਿਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਦੋ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਨਾ ਹੋਣ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਕਰਕੇ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

0 0 0

ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ 4

4.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਅਧਿਆਇ 2 ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਬਹੁਪਦਾਂ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ। $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ਇੱਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਕਈ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਮੁਸ਼ਕਲਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਧਾਰਮਿਕ ਟਰੱਸਟ ਨੇ 300 m^2 ਖੇਤਰਫਲ ਦਾ ਪ੍ਰਾਰਥਨਾ ਹਾਲ ਬਣਾਉਣਾ ਹੈ, ਜਿਸਦੀ ਲੰਬਾਈ ਉਸਦੀ ਚੌੜਾਈ ਦੇ ਦੁੱਗਣੇ ਤੋਂ ਇੱਕ ਮੀਟਰ ਵੱਧ ਹੋਵੇ। ਹਾਲ ਕਮਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਕੀ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ? ਮੰਨ ਲਉ ਹਾਲ ਦੀ ਚੌੜਾਈ x ਮੀਟਰ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸਦੀ ਲੰਬਾਈ $(2x + 1)$ ਮੀਟਰ ਹੋਵੇਗੀ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 4.1 ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 4.1

ਹੁਣ ਹਾਲ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= (2x + 1) \cdot x\ m^2 = (2x^2 + x)\ m^2$

ਇਸ ਲਈ $2x^2 + x = 300$ .... (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

ਭਾਵ $2x^2 + x - 300 = 0$

ਇਸ ਲਈ, ਹਾਲ ਦੀ ਚੌੜਾਈ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $2x^2 + x - 300 = 0$, ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰੇਗੀ।

ਜ਼ਿਆਦਾਤਰ ਲੋਕ ਵਿਸ਼ਵਾਸ ਕਰਦੇ ਹਨ ਕਿ ਬੇਬੀਲੋਨ ਵਾਸੀਆਂ ਨੇ ਹੀ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਉਹ ਜਾਣਦੇ ਸਨ ਕਿ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ [illegible] ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ

ਕਿ ਇਹ ਸਮੱਸਿਆ $x^2 - px + q = 0$ ਵਰਗੇ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਰਗੀ ਹੈ। ਯੂਨਾਨੀ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ ਯੂਕਲਿਡ ਨੇ ਲੰਬਾਈਆਂ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣ ਲਈ ਇੱਕ ਜਿਮਾਇਤੀ ਵਿਧੀ ਵਿਕਸਿਤ ਕੀਤੀ ਜਿਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਵਰਤਮਾਨ ਸ਼ਬਦਾਵਲੀ ਵਿੱਚ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਹੱਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦਾ ਸਿਹਰਾ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਚੀਨ ਭਾਰਤੀ ਵਿਗਿਆਨੀਆਂ ਨੂੰ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਬ੍ਰਹਮਗੁਪਤ (598-665 ਈ.) ਨੇ $ax^2 + bx = c$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦਾ ਸਪਸ਼ਟ ਸੂਤਰ ਦਿੱਤਾ ਸੀ। ਬਾਦ ਵਿੱਚ, ਸ੍ਰੀਧਰਾਚਾਰਿਆ (1025 ਈ.) ਨੇ ਇੱਕ ਸੂਤਰ ਕੱਢਿਆ ਜਿਸਨੂੰ ਹੁਣ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸੂਤਰ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੋ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ (ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਭਾਸਕਰ II ਨੇ ਲਿਖਿਆ)। ਇੱਕ ਅਰਬ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ ਅਲ ਖਵਾਰਿਜ਼ਮੀ (ਲਗਭਗ 800 ਈ.) ਨੇ ਵੀ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ। ਅਬਰਾਹਮ ਬਾਰ ਹਿਯਾ ਹਾ-ਨਾਸੀ (Abraham bar Hiyya Ha-Nasi) ਨੇ 1145 ਵਿੱਚ ਛਪੀ ਆਪਣੀ ਪੁਸਤਕ ਲਿਬਰ ਇੰਬਾਡੋਰਮ (Liber Embadorum) ਵਿੱਚ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਪੂਰਨ ਹੱਲ ਦਿੱਤੇ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣ ਦੀਆਂ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਵਿਧੀਆਂ ਬਾਰੇ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋਗੇ। ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਵੀ ਤੁਸੀਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਦੇਖੋਗੇ।

4.2 ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ

ਚਲ x ਵਿੱਚ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2 + bx + c = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਜਿੱਥੇ a, b, c ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $a \neq 0$ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, $2x^2 + x - 300 = 0$ ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $2x^2 - 3x + 1 = 0$, $4x - 3x^2 + 2 = 0$ ਅਤੇ $1 - x^2 + 300 = 0$ ਵੀ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਹਨ।

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਸਮੀਕਰਣ $p(x) = 0$, ਜਿੱਥੇ $p(x)$ ਘਾਤ 2 ਦਾ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਹੈ, ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ ਪ੍ਰੰਤੂ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ $p(x)$ ਦੇ ਪਦ ਘਾਤਾਂ ਦੇ ਘਟਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਇੱਕ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, **ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ** ਹੈ।

ਸਾਡੇ ਆਲੇ ਦੁਆਲੇ ਦੀਆਂ ਅਨੇਕਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਅਤੇ ਗਣਿਤ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਆਓ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਗਣਿਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ :

(i) ਜੌਨ ਅਤੇ ਰੇਖਾ ਦੋਹਾਂ ਕੋਲ ਕੁੱਲ 45 ਬੰਟੇ ਹਨ। ਦੋਵੇਂ ਪੰਜ-ਪੰਜ ਬੰਟੇ ਗੁਆ ਦਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਹੁਣ ਉਹਨਾਂ ਕੋਲ ਬੰਟਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ 124 ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਨਾ ਚਾਹਾਂਗੇ ਕਿ ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਕੋਲ ਕਿੰਨੇ-ਕਿੰਨੇ ਬੰਟੇ ਸਨ।

(ii) ਇੱਕ ਘਰੇਲੂ ਉਦਯੋਗ ਇੱਕ ਦਿਨ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਖਿਡੌਣੇ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਖਿਡੌਣੇ ਦਾ ਮੁੱਲ (₹ ਵਿੱਚ) 55 ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਦਿਨ ਵਿਚ ਬਣਾਏ ਗਏ ਖਿਡੌਣਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਘਟਾਉਣ ਉਪਰੰਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ, ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਦਿਨ ਖਿਡੌਣੇ ਬਣਾਉਣ 'ਤੇ ਕੁੱਲ ਖਰਚ ₹ 750 ਸੀ। ਅਸੀਂ ਉਸ ਦਿਨ ਬਣਾਏ ਗਏ ਖਿਡੌਣਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹਾਂਗੇ।

ਹੱਲ :

(i) ਮੰਨ ਲਉ ਜੌਨ ਕੋਲ ਬੰਟਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ x ਸੀ,

ਤਾਂ ਰੇਖਾ ਕੋਲ ਬੰਟਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= 45 - x$ (ਕਿਉਂ?)

ਜੌਨ ਕੋਲ 5 ਬੰਟੇ ਗੁਆਚਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਬਚੇ ਬੰਟਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= x - 5$

ਰੇਖਾ ਕੋਲ 5 ਬੰਟੇ ਗੁਆਚਣ ਤੋਂ ਬਾਦ ਬਚੇ ਬੰਟਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= 45 - x - 5$

$= 40 - x$

ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ $= (x - 5)(40 - x)$

$= 40x - x^2 - 200 + 5x$

$= -x^2 + 45x - 200$

ਹੁਣ $-x^2 + 45x - 200 = 124$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਗੁਣਨਫਲ = 124)

ਭਾਵ $-x^2 + 45x - 324 = 0$

ਜਾਂ $x^2 - 45x + 324 = 0$

ਇਸ ਲਈ, ਜੌਨ ਕੋਲ ਜਿੰਨੇ ਬੰਟੇ ਸੀ, ਉਹ ਸਮੀਕਰਣ

$$x^2 - 45x + 324 = 0$$

ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ।

(ii) ਮੰਨ ਲਉ ਉਸ ਦਿਨ ਬਣਾਏ ਖਿਡੌਣਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ x ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਉਸ ਦਿਨ ਪ੍ਰਤੀ ਖਿਡੌਣੇ ਲਾਗਤ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) $= 55 - x$

ਭਾਵ ਉਸ ਦਿਨ ਕੁੱਲ ਨਿਰਮਾਣ ਲਾਗਤ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) $= x(55 - x)$

ਇਸ ਲਈ $x(55 - x) = 750$

ਭਾਵ $55x - x^2 = 750$

ਜਾਂ $-x^2 + 55x - 750 = 0$

ਜਾਂ $x^2 - 55x + 750 = 0$

ਇਸ ਲਈ, ਉਸ ਦਿਨ ਬਣਾਏ ਗਏ ਖਿਡੌਣਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ, ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ

$$x^2 - 55x + 750 = 0$$

ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ:

(i) $(x-2)^2+1=2x-3$ (ii) $x(x+1)+8=(x+2)(x-2)$

(iii) $x(2x+3)=x^2+1$ (iv) $(x+2)^3=x^3-4$

ਹੱਲ :

(i) ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $=(x-2)^2+1=x^2-4x+4+1=x^2-4x+5$

ਇਸ ਲਈ $(x-2)^2+1=2x-3$ ਨੂੰ

$x^2-4x+5=2x-3$ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ

ਭਾਵ $x^2-6x+8=0$

ਇਹ $ax^2+bx+c=0$ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ।

ਭਾਵ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

(ii) ਕਿਉਂਕਿ $x(x+1)+8=x^2+x+8$ ਅਤੇ $(x+2)(x-2)=x^2-4$ ਹੈ,

ਇਸ ਲਈ $x^2+x+8=x^2-4$

ਭਾਵ $x+12=0$

ਇਹ $ax^2+bx+c=0$ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iii) ਇੱਥੇ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $=x(2x+3)=2x^2+3x$

ਭਾਵ $x(2x+3)=x^2+1$ ਨੂੰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ;

$2x^2+3x=x^2+1$

ਇਸ ਲਈ $x^2+3x-1=0$ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

ਇਹ $ax^2+bx+c=0$ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

(iv) ਇੱਥੇ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $=(x+2)^3=x^3+6x^2+12x+8$

ਇਸ ਲਈ $(x+2)^3=x^3-4$ ਨੂੰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ,

$x^3+6x^2+12x+8=x^3-4$

ਭਾਵ $6x^2+12x+12=0$ ਜਾਂ $x^2+2x+2=0$

ਇਹ $ax^2+bx+c=0$ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ (ii) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇਖਣ ਵਿੱਚ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਲੱਗਦੀ ਹੈ ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ (iv) ਵਿਚ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇਖਣ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ (ਘਾਤ ਤਿੰਨ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ) ਸਮੀਕਰਣ ਲੱਗਦੀ ਹੈ, ਦੋ ਘਾਤੀ ਨਹੀਂ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ। ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਸੀਂ ਵੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਇਹ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿ ਇਹ ਦੋ ਘਾਤੀ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ, ਸਾਨੂੰ ਉਸ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 4.1

1. ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ:

(i) $(x + 1)^2 = 2(x - 3)$ (ii) $x^2 - 2x = (-2)(3 - x)$

(iii) $(x - 2)(x + 1) = (x - 1)(x + 3)$ (iv) $(x - 3)(2x + 1) = x(x + 5)$

(v) $(2x - 1)(x - 3) = (x + 5)(x - 1)$ (vi) $x^2 + 3x + 1 = (x - 2)^2$

(vii) $(x + 2)^3 = 2x(x^2 - 1)$ (viii) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x - 2)^3$

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ:

(i) ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਪਲਾਟ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 528 m^2 ਹੈ। ਪਲਾਟ ਦੀ ਲੰਬਾਈ (ਮੀਟਰਾਂ ਵਿੱਚ), ਚੌੜਾਈ ਦੇ ਦੁੱਗਣੇ ਤੋਂ ਇੱਕ ਵੱਧ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਪਲਾਟ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ।

(ii) ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ 306 ਹੈ। ਅਸੀਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰਨੀਆਂ ਹਨ।

(iii) ਰੋਹਨ ਦੀ ਮਾਂ ਉਸ ਨਾਲੋਂ 26 ਸਾਲ ਵੱਡੀ ਹੈ। ਹੁਣ ਤੋਂ ਤਿੰਨ ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਉਮਰਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ 360 ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ। ਅਸੀਂ ਰੋਹਨ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ।

(iv) ਇੱਕ ਰੇਲਗੱਡੀ 380 km ਦੀ ਦੂਰੀ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਚਾਲ ਨਾਲ ਤੈਅ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੀ ਚਾਲ 8 km/h ਘੱਟ ਹੁੰਦੀ ਤਾਂ ਉਹ ਉਸ ਦੂਰੀ ਨੂੰ ਤੈਅ ਕਰਨ ਲਈ 3 ਘੰਟੇ ਵੱਧ ਸਮਾਂ ਲੈਂਦੀ। ਅਸੀਂ ਰੇਲਗੱਡੀ ਦੀ ਚਾਲ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ।

4.3 ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੁਆਰਾ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ

ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $2x^2 - 3x + 1 = 0$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਵਿੱਚ x ਦੀ ਥਾਂ 1 ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $(2 \times 1^2) - (3 \times 1) + 1 = 0$ = ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ। ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 1 ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $2x^2 - 3x + 1 = 0$ ਦਾ ਇੱਕ ਮੂਲ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਵੀ ਹੈ ਕਿ 1 ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $2x^2 - 3x + 1$ ਦੀ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ α ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ ਦਾ ਇੱਕ ਮੂਲ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ ਜੇਕਰ $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = \alpha$ **ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ ਜਾਂ α ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।** ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ **ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$ ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਅਤੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2 + bx + c = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਇੱਕ ਹੀ ਹਨ।**

ਤੁਸੀਂ ਅਧਿਆਇ 2 ਵਿੱਚ ਵੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੀਆਂ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ

ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਕਿਸੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ ਹੱਲ/ਮੂਲ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਤੁਸੀਂ ਨੌਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਪਦ ਨੂੰ ਤੋੜ ਕੇ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਗਿਆਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕਰਾਂਗੇ। ਆਉ ਦੇਖੀਏ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਗੁਣਨਖੰਡਨ ਦੁਆਰਾ ਸਮੀਕਰਣ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾ, ਅਸੀਂ ਵਿਚਕਾਰਲੇ (ਮੱਧ) ਪਦ $-5x$ ਨੂੰ $-2x -3x$ [ਕਿਉਂਕਿ $(-2x) \times (-3x) = 6x^2 = (2x^2) \times 3$] ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਤੋੜਦੇ ਹਾਂ।

ਭਾਵ $\quad 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 2x(x - 1) - 3(x - 1) = (2x - 3)(x - 1)$

ਇਸ ਲਈ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ਨੂੰ $(2x - 3)(x - 1) = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੁਬਾਰਾ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਭਾਵ x ਦੇ ਉਹ ਮੁੱਲ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਲਈ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ਉਹੀ ਹਨ ਜੋ $(2x - 3)(x - 1) = 0$ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਭਾਵ $2x - 3 = 0$ ਜਾਂ $x - 1 = 0$ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਗੇ।

ਹੁਣ $2x - 3 = 0$, $x = \frac{3}{2}$ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $x - 1 = 0$, $x = 1$ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।

ਭਾਵ $x = \frac{3}{2}$ ਅਤੇ $x = 1$ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਹੱਲ ਹਨ।

ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, 1 ਅਤੇ $\frac{3}{2}$ ਸਮੀਕਰਣ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ਦੇ ਹੱਲ/ਮੂਲ ਹਨ।

ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ ਹੀ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਮੂਲ ਹਨ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਅਸੀਂ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ਦੇ ਮੂਲਾਂ ਨੂੰ $2x^2 - 5x + 3$ ਦੇ ਦੋ ਰੇਖੀ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਕੇ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨੂੰ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $6x^2 - x - 2 = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ:

$$\begin{aligned} 6x^2 - x - 2 &= 6x^2 + 3x - 4x - 2 \\ &= 3x(2x + 1) - 2(2x + 1) \\ &= (3x - 2)(2x + 1) \end{aligned}$$

$6x^2 - x - 2 = 0$ ਦੇ ਮੂਲ x ਦੇ ਉਹ ਮੁੱਲ ਹਨ ਜਿੰਨਾਂ ਲਈ $(3x - 2)(2x + 1) = 0$ ਹੋਵੇ।

ਭਾਵ $\qquad 3x - 2 = 0 \quad$ ਜਾਂ $\quad 2x + 1 = 0$

ਭਾਵ $x = \frac{2}{3}$ ਜਾਂ $x = -\frac{1}{2}$

ਇਸ ਲਈ $6x^2 - x - 2 = 0$ ਦੇ ਮੂਲ $\frac{2}{3}$ ਤੇ $-\frac{1}{2}$ ਹਨ।

ਅਸੀਂ ਮੂਲਾਂ ਦੀ ਪੜਤਾਲ (Verify) ਲਈ ਇਹ ਜਾਂਚ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\frac{2}{3}$ ਅਤੇ $-\frac{1}{2}$ ਸਮੀਕਰਣ $6x^2 - x - 2 = 0$ ਨੂੰ ਸਤੁੰਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :
$$3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 3x^2 - \sqrt{6}x - \sqrt{6}x + 2$$
$$= \sqrt{3}x\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right) - \sqrt{2}\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right)$$
$$= \left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right)$$

ਇਸ ਲਈ, ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਮੂਲ x ਦੇ ਉਹ ਮੁੱਲ ਹਨ, ਜਿੰਨਾਂ ਲਈ
$$\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right) = 0$$

ਹੁਣ $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ਦੇ ਲਈ $\sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਇਹ ਮੂਲ ਗੁਣਨਖੰਡ $\sqrt{3}x - \sqrt{2}$ ਦੇ ਦੋ ਵਾਰ ਆਉਣ ਕਾਰਣ, ਦੋ ਵਾਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਇਹ ਮੂਲ ਦੁਹਰਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ ਦੇ ਮੂਲ $\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਭਾਗ 4.1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਪ੍ਰਾਰਥਨਾ ਹਾਲ ਦੀਆਂ ਵਿਮਾਵਾਂ/ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ (dimensions) ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਭਾਗ 4.1 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪਤਾ ਲਗਾਇਆ ਸੀ ਕਿ ਜੇਕਰ ਹਾਲ ਦੀ ਚੌੜਾਈ x ਮੀਟਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ x ਸਮੀਕਰਣ $2x^2 + x - 300 = 0$ ਨੂੰ ਸਤੁੰਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :

$$2x^2 - 24x + 25x - 300 = 0$$

ਜਾਂ $2x(x - 12) + 25(x - 12) = 0$

ਭਾਵ $(x - 12)(2x + 25) = 0$

ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋ ਮੂਲ $x = 12$ ਜਾਂ $x = -12.5$ ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ x ਹਾਲ ਦੀ ਚੌੜਾਈ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ, ਇਹ ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ।

ਇਸ ਲਈ, ਹਾਲ ਦੀ ਚੌੜਾਈ 12 m ਹੈ। ਇਸ ਦੀ ਲੰਬਾਈ $= 2x + 1 = 25$ m ਹੋਵੇਗੀ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 4.2

1. ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (i) $x^2 - 3x - 10 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 6 = 0$
   (iii) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ (iv) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$
   (v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$
2. ਉਦਾਹਰਣ 1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।
3. ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 27 ਅਤੇ ਗੁਣਨਫਲ 182 ਹੋਵੇ।
4. ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 365 ਹੋਵੇ।
5. ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਉਚਾਈ ਇਸ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੋਂ 7 cm ਘੱਟ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਕਰਣ 13 cm ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਇੱਕ ਘਰੇਲੂ ਉਦਯੋਗ ਇੱਕ ਦਿਨ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਬਰਤਨ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਦਿਨ ਇਹ ਵੇਖਿਆ ਗਿਆ ਕਿ ਹਰੇਕ ਬਰਤਨ ਦੀ ਨਿਰਮਾਣ ਲਾਗਤ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) ਉਸ ਦਿਨ ਬਣਾਏ ਗਏ ਬਰਤਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਦੁੱਗਣੇ ਤੋਂ 3 ਵੱਧ ਸੀ। ਜੇਕਰ ਉਸ ਦਿਨ ਦੀ ਕੁੱਲ ਨਿਰਮਾਣ ਲਾਗਤ ₹ 90 ਸੀ ਤਾਂ ਉਸ ਦਿਨ ਬਣਾਏ ਗਏ ਬਰਤਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਨਗ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਦੀ ਲਾਗਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4.4 ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣਾਉਣ ਦੀ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ, ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਇੱਕ ਵਿਧੀ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਸੀ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ।

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਸਥਿਤੀ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

ਸੁਨੀਤਾ ਦੀ ਦੋ ਸਾਲ ਪਹਿਲਾਂ ਦੀ ਉਮਰ (ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ) ਅਤੇ ਹੁਣ ਤੋਂ ਚਾਰ ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਦੀ ਉਮਰ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਉਸਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਦੇ ਦੁੱਗਣੇ ਤੋਂ ਇੱਕ ਵੱਧ ਹੈ। ਉਸ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਕੀ ਹੈ?

ਇਸ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਲਈ, ਮੰਨ ਲਉ ਉਸ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ (ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ) x ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਦੀ 2 ਸਾਲ ਪਹਿਲਾਂ ਦੀ ਉਮਰ ਅਤੇ ਹੁਣ ਤੋਂ 4 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਦੀ ਉਮਰ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ $(x-2)(x+4)$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $(x-2)(x+4) = 2x + 1$

ਭਾਵ $x^2 + 2x - 8 = 2x + 1$

ਭਾਵ $x^2 - 9 = 0$

ਇਸ ਲਈ, ਸੁਨੀਤਾ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $x^2 - 9 = 0$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ $x^2 = 9$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਵਰਗ ਮੂਲ ਲੈਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $x = 3$ ਜਾਂ $x = -3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਉਮਰ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $x = 3$ ਹੀ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ, ਸੁਨੀਤਾ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ 3 ਸਾਲ ਹੈ।

ਹੁਣ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $(x + 2)^2 - 9 = 0$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ $(x + 2)^2 = 9$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਵਰਗ ਮੂਲ ਲੈਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $x + 2 = 3$ ਜਾਂ $x + 2 = -3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

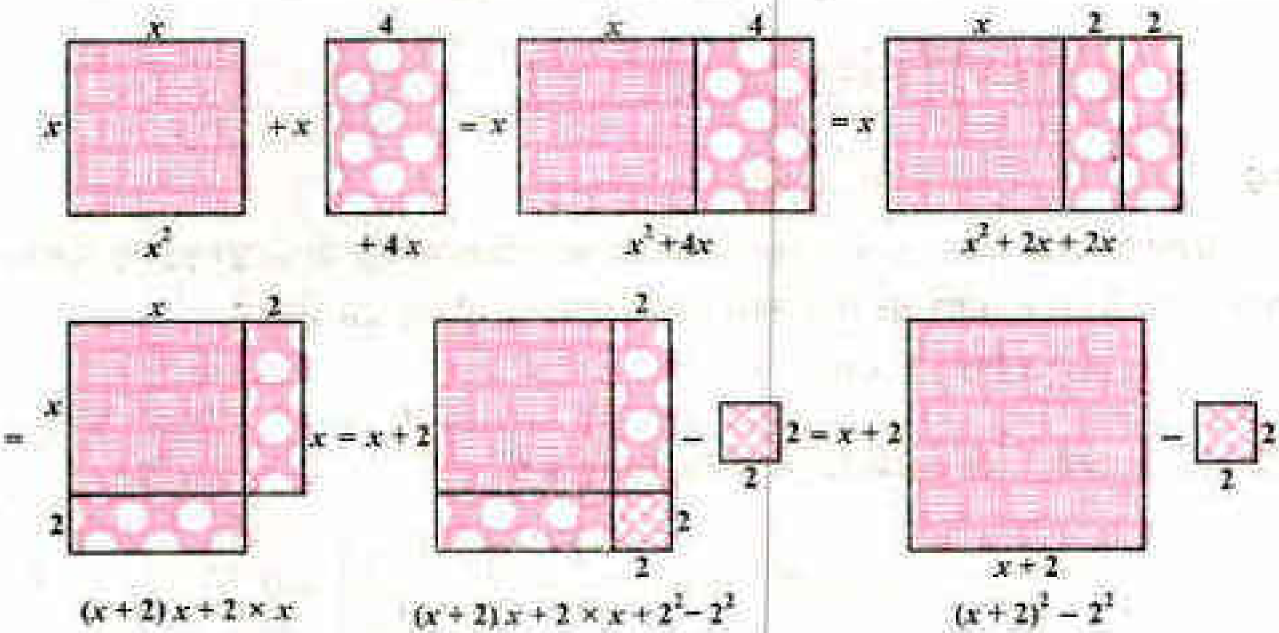
ਇਸ ਲਈ $\quad x = 1 \quad$ ਜਾਂ $\quad x = -5$

ਭਾਵ $(x + 2)^2 - 9 = 0$ ਦੇ ਮੂਲ 1 ਅਤੇ -5 ਹਨ।

ਉਪਰੋਕਤ ਦੋਵੇਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ x ਵਾਲਾ ਪਦ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਰਗ ਦੇ ਅੰਦਰ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਵਰਗ ਮੂਲ ਲੈ ਕੇ ਆਸਾਨੀ ਨਾਲ ਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰ ਲਏ ਸਨ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਜੇਕਰ ਸਾਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ $x^2 + 4x - 5 = 0$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਤਾਂ ਕੀ ਹੁੰਦਾ? ਅਸੀਂ ਸ਼ਾਇਦ ਇਸ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਜਦੋਂ ਤਕ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਪਤਾ ਨਹੀਂ ਲੱਗ ਜਾਂਦਾ ਕਿ, $x^2 + 4x - 5 = (x + 2)^2 - 9$ ਹੈ।

ਭਾਵ $x^2 + 4x - 5 = 0$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ $(x + 2)^2 - 9 = 0$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ। ਜੋ ਅਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਛੇਤੀ ਹੀ ਹੱਲ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ $(x + a)^2 - b^2 = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇਸ ਦੇ ਮੂਲ ਆਸਾਨੀ ਨਾਲ ਪਤਾ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਆਓ ਦੇਖੀਏ, ਕੀ ਇਹ ਸੰਭਵ ਹੈ? ਚਿੱਤਰ 4.2 ਦੇਖੋ।

ਇਸ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x^2 + 4x$, $(x + 2)^2 - 4$ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 4.2

ਇਹ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

$$x^2 + 4x = \left(x^2 + \frac{4}{2}x\right) + \frac{4}{2}x$$

$$= x^2 + 2x + 2x$$

$$= (x+2)\,x + 2 \times x$$

$$= (x+2)\,x + 2 \times x + 2 \times 2 - 2 \times 2$$

$$= (x+2)\,x + (x+2) \times 2 - 2 \times 2$$

$$= (x+2)\,(x+2) - 2^2$$

$$= (x+2)^2 - 4$$

ਭਾਵ $x^2 + 4x - 5 = (x+2)^2 - 4 - 5 = (x+2)^2 - 9$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x^2 + 4x - 5 = 0$ ਨੂੰ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣਾ ਕੇ $(x+2)^2 - 9 = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ **ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣਾਉਣ ਦੀ ਵਿਧੀ** ਨਾਲ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਸੰਖੇਪ ਵਿੱਚ, ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਦਿਖਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$x^2 + 4x = \left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - 4$$

ਭਾਵ $x^2 + 4x - 5 = 0$ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$\left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - 4 - 5 = 0$$

ਭਾਵ $(x+2)^2 - 9 = 0$

ਹੁਣ ਸਮੀਕਰਣ $3x^2 - 5x + 2 = 0$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ x^2 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ 3 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$9x^2 - 15x + 6 = 0$$

ਹੁਣ $9x^2 - 15x + 6 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times \frac{5}{2} + 6$

$$= (3x)^2 - 2 \times 3x \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6$$

$$= \left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6 = \left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

ਭਾਵ $9x^2 - 15x + 6 = 0$ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

ਭਾਵ $$\left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

ਇਸ ਲਈ, $9x^2 - 15x + 6 = 0$ ਦੇ ਉਹੀ ਮੂਲ ਹਨ ਜੋ $\left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ਦੇ ਹਨ।

ਭਾਵ $$3x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \text{ ਜਾਂ } 3x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$$

(ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ $3x - \frac{5}{2} = \pm\frac{1}{2}$ ਜਿੱਥੇ '$\pm$' ਧਨ ਅਤੇ ਰਿਣ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ)

ਇਸ ਲਈ $$3x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \text{ ਜਾਂ } 3x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$$

ਭਾਵ $$x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \text{ ਜਾਂ } x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$$

ਇਸ ਲਈ $$x = 1 \text{ ਜਾਂ } x = \frac{4}{6}$$

ਭਾਵ $$x = 1 \text{ ਜਾਂ } x = \frac{2}{3}$$

ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਮੂਲ 1 ਅਤੇ $\frac{2}{3}$ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਇਸ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਦੂਜੀ ਵਿਧੀ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

ਸਮੀਕਰਣ $$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

ਉਹੀ ਹੈ ਜੋ $$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0 \text{ ਹੈ।}$$

ਹੁਣ $$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = \left\{x - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right\}^2 - \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right\}^2 + \frac{2}{3}$$

$$= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{2}{3} - \frac{25}{36}$$

$$= \left(x-\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} = \left(x-\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

ਇਸ ਲਈ $3x^2 - 5x + 2 = 0$ ਦਾ ਉਹੀ ਹੱਲ ਹੈ ਜੋ $\left(x-\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 0$ ਦਾ ਹੈ।

ਭਾਵ $x - \frac{5}{6} = \pm\frac{1}{6}$, ਭਾਵ $x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$ ਅਤੇ $x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਲਈ, ਆਓ ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਉਦਾਹਰਣ 3 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣਾਉਣ ਦੀ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਮੀਕਰਣ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ਉਹੀ ਹੈ ਜੋ $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ ਹੈ।

ਹੁਣ $$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = \left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{3}{2} = \left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$$

ਇਸ ਲਈ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ਨੂੰ $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਭਾਵ ਸਮੀਕਰਣ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਉਹੀ ਹੈ ਜੋ $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਹਨ

ਹੁਣ $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ ਉਹੀ ਹੈ ਜੋ $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ $$x - \frac{5}{4} = \pm\frac{1}{4}$$

ਭਾਵ $$x = \frac{5}{4} \pm \frac{1}{4}$$

ਭਾਵ $$x = \frac{5}{4} + \frac{1}{4} \text{ ਜਾਂ } x = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}$$

ਭਾਵ $$x = \frac{3}{2} \text{ ਜਾਂ } x = 1$$

ਇਸ ਲਈ, ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਹੱਲ $x = \frac{3}{2}$ ਅਤੇ 1 ਹਨ।

ਆਓ ਹੁਣ ਇਨ੍ਹਾਂ ਮੂਲਾਂ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੀਏ।

$2x^2 - 5x + 3 = 0$ ਵਿੱਚ $x = \frac{3}{2}$ ਭਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{3}{2}\right) + 3 = 0$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਸਹੀ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਤੁਸੀਂ ਵਿਖਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ $x = 1$ ਵੀ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਣ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ਨੂੰ 2 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ 'ਤੇ $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਸੀ ਜਿਸ ਨਾਲ ਪਹਿਲਾ ਪਦ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣ ਗਿਆ ਅਤੇ ਫਿਰ ਵਰਗ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕੀਤਾ। ਇਸ ਦੀ ਬਜਾਏ ਅਸੀਂ ਸਾਰੇ ਪਦਾਂ ਨੂੰ 2 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ ਵੀ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਨੂੰ $4x^2 = (2x)^2$ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਸੀ ਅਤੇ ਫਿਰ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣਾ ਲੈਂਦੇ।

ਇਸ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਅਗਲੀ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਸਮਝਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣਾਉਣ ਦੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਸਮੀਕਰਣ $5x^2 - 6x - 2 = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ 5 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$25x^2 - 30x - 10 = 0$$

ਇਹ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ:

$$(5x)^2 - 2 \times (5x) \times 3 + 3^2 - 3^2 - 10 = 0$$

ਭਾਵ $(5x - 3)^2 - 9 - 10 = 0$

ਭਾਵ $(5x - 3)^2 - 19 = 0$

ਭਾਵ $(5x - 3)^2 = 19$

ਭਾਵ $5x - 3 = \pm\sqrt{19}$

ਭਾਵ $5x = 3 \pm \sqrt{19}$

ਇਸ ਲਈ $x = \frac{3 \pm \sqrt{19}}{5}$

ਇਸ ਲਈ, ਮੂਲ $\frac{3 + \sqrt{19}}{5}$ ਅਤੇ $\frac{3 - \sqrt{19}}{5}$ ਹਨ।

ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਮੂਲ $\frac{3+\sqrt{19}}{5}$ ਅਤੇ $\frac{3-\sqrt{19}}{5}$ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣਾਉਣ ਦੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ $4x^2 + 3x + 5 = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਓ $4x^2 + 3x + 5 = 0$ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ :

$$(2x)^2 + 2 \times (2x) \times \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 5 = 0$$

ਭਾਵ
$$\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + 5 = 0$$

ਭਾਵ
$$\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{71}{16} = 0$$

ਭਾਵ
$$\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{-71}{6} < 0 \text{ ਹੈ}$$

ਪ੍ਰੰਤੂ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਲਈ $\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ (ਕਿਉਂ?)। ਇਸ ਲਈ x ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਮੁੱਲ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ। ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਹੁਣ ਤੱਕ ਤੁਸੀਂ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣਾਉਣ ਦੀ ਵਿਧੀ ਵਾਲੇ ਕਈ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇਖੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ,ਆਓ ਇਸ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਦੇਈਏ।

ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ ਉੱਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਸਾਰੇ ਪਦਾਂ ਨੂੰ a ਨਾਲ ਵੰਡਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ : $$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

ਇਸ ਲਈ, ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਅਸੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

ਭਾਵ $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਮੂਲ ਉਹੀ ਹਨ, ਜੋ

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0, \text{ ਭਾਵ } \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \qquad (1)$$

ਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ $b^2-4ac\geq 0$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ (1) ਦਾ ਵਰਗ ਮੂਲ ਲੈਣ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ਇਸ ਲਈ $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ਭਾਵ $ax^2+bx+c=0$ ਦੇ ਮੂਲ $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ਅਤੇ $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ਹਨ, ਜੇਕਰ $b^2-4ac\geq 0$ ਹੈ। ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ $b^2-4ac<0$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਮੂਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ। (ਕਿਉਂ?)।

ਇਸ ਲਈ: ਜੇਕਰ $b^2-4ac\geq 0$ ਹੈ, ਤਾਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2+bx+c=0$ ਦੇ ਮੂਲ $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ਹਨ।

ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਇਸ ਵਿਧੀ ਨੂੰ **ਦੋ ਘਾਤੀ ਸੂਤਰ (quadratic formula)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਦੋ ਘਾਤੀ ਸੂਤਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਦੇ ਲਈ ਆਉ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 4.1 ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 2(i) ਨੂੰ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸੂਤਰ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਪਲਾਟ ਦੀ ਚੌੜਾਈ x ਮੀਟਰ ਹੈ ਤਾਂ ਲੰਬਾਈ $(2x+1)$ ਮੀਟਰ ਹੈ। ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $x(2x+1)=528$ ਭਾਵ $2x^2+x-528=0$ ਹੈ। ਇਹ $ax^2+bx+c=0$ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $a=2, b=1, c=-528$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸੂਤਰ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4(2)(528)}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{4225}}{4}=\frac{-1\pm 65}{4}$$

ਭਾਵ $x = \frac{64}{4}$ ਜਾਂ $x = \frac{-66}{4}$

ਭਾਵ $x = 16$ ਜਾਂ $x = -\frac{33}{2}$

ਕਿਉਂਕਿ x ਇੱਕ ਪਸਾਰ (ਚੌੜਾਈ) ਹੋਣ ਕਾਰਣ ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ, ਇਸ ਲਈ, ਪਲਾਟ ਦੀ ਚੌੜਾਈ 16 ਮੀ: ਅਤੇ ਲੰਬਾਈ 33 ਮੀ.ਹੈ।

ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਪੜਤਾਲ ਕਰਨੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਮੂਲ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਦੋ ਅਜਿਹੀਆਂ ਲਗਾਤਾਰ ਟਾਂਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 290 ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਟਾਂਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ x ਹੈ ਤਾਂ ਦੂਜੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $x + 2$ ਹੋਵੇਗੀ। ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਅਨੁਸਾਰ,

$$x^2 + (x+2)^2 = 290$$

ਭਾਵ $x^2 + x^2 + 4x + 4 = 290$

ਭਾਵ $2x^2 + 4x - 286 = 0$

ਭਾਵ $x^2 + 2x - 143 = 0$,

ਜੋ x ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਦੋ ਘਾਤੀ ਸੂਤਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+572}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-2 \pm 24}{2}$$

ਭਾਵ $x = 11$ ਜਾਂ $x = -13$

ਪ੍ਰੰਤੂ x ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $x = 11$ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿਉਂਕਿ $x \neq -13$ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ। ਇਸ ਲਈ ਦੋਵੇਂ ਲਗਾਤਾਰ ਟਾਂਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 11 ਅਤੇ 13 ਹਨ। ਪੜਤਾਲ $11^2 + 13^2 = 121 + 169 = 290$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਪਾਰਕ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀ ਚੌੜਾਈ ਇਸ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਨਾਲੋਂ 3m ਘੱਟ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਹਿਲਾ ਤੋਂ ਬਣੇ ਇੱਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਕੋਣਾਕਾਰ ਪਾਰਕ, ਜਿਸ ਦਾ ਆਧਾਰ ਆਇਤਾਕਾਰ ਪਾਰਕ ਦੀ ਚੌੜਾਈ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਅਤੇ ਉਚਾਈ 12m ਹੈ, ਤੋਂ 4 ਵਰਗ ਮੀਟਰ ਵੱਧ ਹੈ। ਇਸ ਆਇਤਾਕਾਰ ਪਾਰਕ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

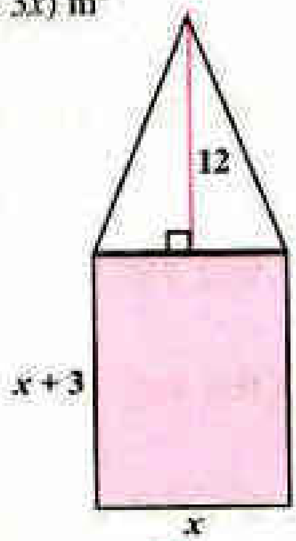
ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਆਇਤਾਕਾਰ ਪਾਰਕ ਦੀ ਚੌੜਾਈ x m ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਇਸਦੀ ਲੰਬਾਈ $= (x + 3)$ m ਹੋਵੇਗੀ।

ਇਸ ਲਈ ਆਇਤਾਕਾਰ ਪਾਰਕ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= x(x + 3)\ m^2 = (x^2 + 3x)\ m^2$

ਹੁਣ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤਿਕੋਣ ਦਾ ਆਧਾਰ $= x$ m

ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2} \times x \times 12 = 6x\ m^2$



ਚਿੱਤਰ 4.3

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਅਨੁਸਾਰ,

$$x^2 + 3x = 6x + 4$$

ਭਾਵ
$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

ਦੋ ਘਾਤੀ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = 4 \text{ ਜਾਂ } -1$$

ਪ੍ਰੰਤੂ $x \neq -1$ ਹੈ (ਕਿਉਂ?)। ਇਸ ਲਈ $x = 4$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਪਾਰਕ ਦੀ ਚੌੜਾਈ $= 4$ m ਅਤੇ ਲੰਬਾਈ $= 7$ m ਹੋਵੇਗੀ।

ਪੜਤਾਲ : ਆਇਤਾਕਾਰ ਪਾਰਕ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 28\ m^2$ ਹੈ।

ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਕਾਰ ਪਾਰਕ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 24\ m^2 = (28 - 4)\ m^2$

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਮੂਲ, ਜੇਕਰ ਸੰਭਵ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪਤਾ ਲਗਾਉ।

(i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ (ii) $x^2 + 4x + 5 = 0$ (iii) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

ਹੱਲ :

(i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ ਲਈ, ਇੱਥੇ $a = 3, b = -5, c = 2$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, $b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 > 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}$ ਹੈ, ਭਾਵ $x = 1$ ਜਾਂ $x = \frac{2}{3}$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਮੂਲ $\frac{2}{3}$ ਅਤੇ 1 ਹਨ।

(ii) $x^2 + 4x + 5 = 0$ ਲਈ; ਇੱਥੇ $a = 1, b = 4, c = 5$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 < 0$ ਹੈ।

ਪ੍ਰੰਤੂ ਕਿਉਂਕਿ ਕਿਸੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ, ਇਸ ਲਈ $\sqrt{b^2 - 4ac}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਨਹੀਂ ਹਨ।

(iii) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ ਲਈ; ਇੱਥੇ $a = 2, b = -2\sqrt{2}, c = 1$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\quad b^2 - 4ac = 8 - 8 = 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\quad x = \dfrac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm 0$ ਹੈ, ਭਾਵ $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਮੂਲ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ:

(i) $x + \dfrac{1}{x} = 3, x \neq 0$ $\qquad$ (ii) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-2} = 3, x \neq 0, 2$

ਹੱਲ :

(i) $x + \dfrac{1}{x} = 3$ ਦੇ ਲਈ : ਸਾਰੇ ਪਦਾਂ ਨੂੰ $x \neq 0$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ,ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$x^2 + 1 = 3x$$

ਭਾਵ $\quad x^2 - 3x + 1 = 0$, ਜੋ ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\quad a = 1, b = -3, c = 1$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\quad b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0$

ਇਸ ਲਈ $\quad x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ $\quad$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ ਮੂਲ $\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$ ਅਤੇ $\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$ ਹਨ।

(ii) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-2} = 3, x \neq 0, 2$:

ਕਿਉਂਕਿ $x \neq 0, 2$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ $x(x-2)$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$(x-2) - x = 3x(x-2)$$
$$= 3x^2 - 6x$$

ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਬਦਲ ਕੇ $3x^2 - 6x + 2 = 0$ ਬਣ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਇੱਥੇ $a = 3, b = -6, c = 2$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $b^2 - 4ac = 36 - 24 = 12 > 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \dfrac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$

ਇਸ ਲਈ, ਮੂਲ $\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ ਅਤੇ $\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਇੱਕ ਕਿਸ਼ਤੀ, ਜਿਸਦੀ ਖੜੇ ਪਾਣੀ ਵਿੱਚ ਚਾਲ 18 km/h ਹੈ। 24 km ਧਾਰਾ ਦੀ ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਜਾਣ ਲਈ, ਇਹੀ ਦੂਰੀ ਧਾਰਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਜਾਣ ਲਈ ਲੱਗੇ ਸਮੇਂ ਤੋਂ 1 ਘੰਟਾ ਵੱਧ ਸਮਾਂ ਲੈਂਦੀ ਹੈ। ਧਾਰਾ ਦੀ ਚਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਧਾਰਾ ਦੀ ਚਾਲ x ਕਿ.km/h ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਧਾਰਾ ਦੀ ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਕਿਸ਼ਤੀ ਦੀ ਚਾਲ $= (18 - x)$ km/h ਅਤੇ ਧਾਰਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਕਿਸ਼ਤੀ ਦੀ ਚਾਲ $= (18 + x)$ km/h ਹੈ।

ਜਾਣ ਲਈ ਲਿਆ ਗਿਆ ਸਮਾਂ $= \dfrac{\text{ਦੂਰੀ}}{\text{ਚਾਲ}} = \dfrac{24}{18-x}$ ਘੰਟੇ

ਇਸੇ ਤਰਾਂ, ਧਾਰਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਜਾਣ ਲਈ ਲੱਗਿਆ ਸਮਾਂ $= \dfrac{24}{18+x}$ ਘੰਟੇ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਅਨੁਸਾਰ,

$$\frac{24}{18-x} - \frac{24}{18+x} = 1$$

ਭਾਵ $24(18 + x) - 24(18 - x) = (18 - x)(18 + x)$

ਭਾਵ $x^2 + 48x - 324 = 0$

ਦੋ ਘਾਤੀ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 + 1296}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{3600}}{2}$$

$$= \frac{-48 \pm 60}{2} = 6 \text{ ਜਾਂ } -54$$

ਕਿਉਂਕਿ x ਧਾਰਾ ਦੀ ਚਾਲ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਮੂਲ $x = -54$ ਨੂੰ ਛੱਡ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ $x = 6$ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਧਾਰਾ ਦੀ ਚਾਲ 6 km/h ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 4.3

1. ਜੇਕਰ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਮੂਲ ਸੰਭਵ ਹੋਣ ਤਾਂ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣਾਉਣ ਦੀ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (i) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 4 = 0$

   (iii) $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$ (iv) $2x^2 + x + 4 = 0$

2. ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਮੂਲ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪਤਾ ਲਗਾਉ।

3. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) $x - \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$ (ii) $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}, x \neq -4, 7$

4. 3 ਸਾਲ ਪਹਿਲਾਂ ਰਹਿਮਾਨ ਦੀ ਉਮਰ (ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ) ਅਤੇ ਹੁਣ ਤੋਂ 5 ਸਾਲ ਬਾਦ ਦੀ ਉਮਰ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $\frac{1}{3}$ ਹੈ। ਉਸਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. ਇੱਕ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਟੈਸਟ ਵਿੱਚ ਸ਼ੈਫਾਲੀ ਦੇ ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਅੰਗ੍ਰੇਜ਼ੀ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 30 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਸਨੂੰ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ 2 ਅੰਕ ਵੱਧ ਅਤੇ ਅੰਗ੍ਰੇਜ਼ੀ ਵਿੱਚ 3 ਅੰਕ ਘੱਟ ਮਿਲੇ ਹੁੰਦੇ ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ 210 ਹੁੰਦਾ। ਉਸ ਦੁਆਰਾ ਦੋਵੇਂ ਵਿਸ਼ਿਆ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਖੇਤ ਦਾ ਵਿਕਰਣ ਉਸ ਦੀ ਛੋਟੀ ਭੁਜਾ ਤੋਂ 60 m ਵੱਧ ਲੰਬਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਵੱਡੀ ਭੁਜਾ ਛੋਟੀ ਭੁਜਾ ਤੋਂ 30 m ਵੱਧ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਖੇਤ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ 180 ਹੈ। ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ, ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਅੱਠ ਗੁਣਾ ਹੈ। ਦੋਵੇਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਇੱਕ ਰੇਲਗੱਡੀ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਚਾਲ ਨਾਲ 360 km ਦਾ ਸਫ਼ਰ ਤੈਅ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਚਾਲ 5 km/h ਵੱਧ ਹੁੰਦੀ ਤਾਂ ਉਹ ਉਸੇ ਸਫ਼ਰ ਲਈ 1 ਘੰਟਾ ਘੱਟ ਸਮਾਂ ਲੈਂਦੀ। ਰੇਲਗੱਡੀ ਦੀ ਚਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9. ਦੋ ਟੂਟੀਆਂ ਮਿਲ ਕੇ ਇੱਕ ਹੌਜ਼ ਨੂੰ $9\frac{3}{8}$ ਘੰਟਿਆ ਵਿੱਚ ਭਰ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਵੱਡੇ ਵਿਆਸ ਵਾਲੀ

ਟੂਟੀ, ਘੱਟ ਵਿਆਸ ਵਾਲੀ ਟੂਟੀ ਤੋਂ 10 ਘੰਟੇ ਘੱਟ ਸਮਾਂ ਲੈਂਦੀ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਟੂਟੀ ਦੁਆਰਾ ਹੌਜ ਨੂੰ ਭਰਨ ਲਈ ਲਿਆ ਗਿਆ ਸਮਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਅੰਮ੍ਰਿਤਸਰ ਤੋਂ ਲੁਧਿਆਣਾ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ 132 km/h ਦਾ ਸਫ਼ਰ ਕਰਨ ਲਈ ਇੱਕ ਐਕਸਪ੍ਰੈਸ ਰੇਲਗੱਡੀ, ਸਵਾਰੀ ਗੱਡੀ ਤੋਂ 1 ਘੰਟਾ ਘੱਟ ਸਮਾਂ ਲੈਂਦੀ ਹੈ। (ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਸਟੇਸ਼ਨਾ ਦੇ ਰੁਕਣ ਦਾ ਸਮਾਂ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਨਾ ਰੱਖਿਆ ਜਾਵੇ)। ਜੇਕਰ ਐਕਸਪ੍ਰੈਸ ਦੀ ਔਸਤ ਚਾਲ, ਸਵਾਰੀ ਗੱਡੀ ਦੀ ਔਸਤ ਚਾਲ ਤੋਂ 11 km/h ਜਿਆਦਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਰੇਲ ਗੱਡੀਆਂ ਦੀ ਔਸਤ ਚਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. ਦੋ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 468 m^2 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪਰਿਮਾਪਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ 24 m ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਵਰਗਾਂ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4.5 ਮੂਲਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤੀ

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਵੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2 + bx + c = 0$ ਦੇ ਮੂਲ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ਦੁਆਰਾ ਤੈਅ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ $b^2 - 4ac > 0$ ਹੈ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਦੋ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ

$-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ਅਤੇ $-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਜੇਕਰ $b^2 - 4ac = 0$ ਹੈ ਤਾਂ $x = -\frac{b}{2a} \pm 0$, ਭਾਵ $x = -\frac{b}{2a}$ ਜਾਂ $-\frac{b}{2a}$ ਹੈ।

ਭਾਵ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ $ax^2 + bx + c = 0$ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਮੂਲ $\frac{-b}{2a}$ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿਚ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2 + bx + c = 0$ ਦੇ ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਹਨ।

ਜੇਕਰ $b^2 - 4ac < 0$ ਹੈ ਤਾਂ ਅਜਿਹੀ ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਵਰਗ $b^2 - 4ac$ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਕਿਉਂਕਿ $b^2 - 4ac$ ਇਹ ਤੈਅ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2 + bx + c = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ, ਇਸ ਲਈ b^2-4ac ਨੂੰ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ **ਡਿਸਕ੍ਰਿਮੀਨੈਂਟ (Discriminent)** ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ $ax^2 + bx + c = 0$ ਦੇ

(i) ਦੋ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ $b^2 - 4ac > 0$ ਹੋਵੇ।

(ii) ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ $b^2 - 4ac = 0$ ਹੋਵੇ।

(iii) ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ, ਜੇਕਰ $b^2 - 4ac < 0$ ਹੋਵੇ।

ਆਓ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਉਦਾਹਰਣ 16 : ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $2x^2 - 4x + 3 = 0$ ਦਾ ਡਿਸਕ੍ਰਿਮੀਨੈਂਟ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਫਿਰ ਮੂਲਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤੀ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਉ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2 + bx + c = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $a = 2, b = -4$ ਅਤੇ $c = 3$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਡਿਸਕ੍ਰਿਮੀਨੈਂਟ

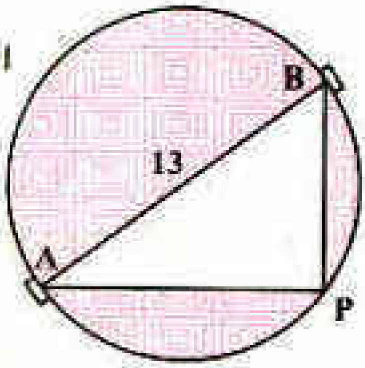
$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - (4 \times 2 \times 3) = 16 - 24 = -8 < 0 \text{ ਹੈ।}$$

ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 17 : 13 ਮੀਟਰ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਪਾਰਕ ਦੇ ਘੇਰੇ 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਇੱਕ ਖੰਭਾ ਇਸ ਤਰਾਂ ਗੱਡਣਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਪਾਰਕ ਦੇ ਇੱਕ ਵਿਆਸ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਸਿਰਿਆਂ 'ਤੇ ਬਣੇ ਫਾਟਕ A ਅਤੇ B ਤੋਂ ਖੰਭੇ ਦੀਆਂ ਦੂਰੀਆਂ ਦਾ ਅੰਤਰ 7 ਮੀਟਰ ਹੋਵੇ। ਕੀ ਅਜਿਹਾ ਕਰਨਾ ਸੰਭਵ ਹੈ? ਜੇਕਰ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਫਾਟਕਾਂ ਤੋਂ ਕਿੰਨੀ - ਕਿੰਨੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਖੰਭਾ ਗੱਡਣਾ ਹੋਵੇਗਾ?

ਹੱਲ : ਆਓ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇੱਕ ਚਿੱਤਰ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 4.4)।

ਮੰਨ ਲਉ ਖੰਭੇ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਥਿਤੀ P ਹੈ ਅਤੇ ਖੰਭੇ ਦੀ ਫਾਟਕ B ਤੋਂ ਦੂਰੀ x ਮੀ.ਹੈ ਭਾਵ $BP = x$ m ਹੈ। ਹੁਣ ਖੰਭੇ ਦੀ ਦੋਵੇਂ ਫਾਟਕਾਂ ਤੋਂ ਦੂਰੀਆਂ ਦਾ ਅੰਤਰ $= AP - BP$ (ਜਾਂ $BP - AP$) $= 7$ m ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $AP = (x + 7)$ m ਹੋਵੇਗੀ।



ਚਿੱਤਰ 4.4

ਹੁਣ $AB = 13$ m ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ AB ਵਿਆਸ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$$\angle APB = 90^\circ \quad \text{(ਕਿਉਂ?)}$$

ਇਸ ਲਈ $\quad AP^2 + PB^2 = AB^2$ (ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਤੋਂ)

ਭਾਵ $\quad (x + 7)^2 + x^2 = 13^2$

ਭਾਵ $\quad x^2 + 14x + 49 + x^2 = 169$

ਭਾਵ $\quad 2x^2 + 14x - 120 = 0$

ਇਸ ਲਈ, ਖੰਭੇ ਦੀ ਫਾਟਕ B ਤੋਂ ਦੂਰੀ 'x' ਸਮੀਕਰਣ $x^2 + 7x - 60 = 0$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਇਹ ਦੇਖਣ ਲਈ ਕਿ ਅਜਿਹਾ ਸੰਭਵ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ, ਆਓ ਇਸ ਦੇ ਡਿਸਕ੍ਰਿਮੀਨੈਂਟ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਦਾ ਡਿਸਕ੍ਰਿਮੀਨੈਂਟ ਹੈ :

$$b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times (-60) = 289 > 0$$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਹਨ ਅਤੇ ਖੰਭੇ ਨੂੰ ਪਾਰਕ ਦੇ ਘੇਰੇ 'ਤੇ ਗੱਡਿਆ ਜਾ ਸਕਣਾ ਸੰਭਵ ਹੈ।

ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $x^2 + 7x - 60 = 0$ ਨੂੰ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ,

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

ਇਸ ਲਈ, $x = 5$ ਜਾਂ -12 ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ x, ਖੰਭੇ ਅਤੇ ਫਾਟਕ B ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਦੂਰੀ ਹੈ, ਇਹ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $x = -12$ ਨੂੰ ਛੱਡ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਲਈ $x = 5$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਖੰਭੇ ਨੂੰ ਪਾਰਕ ਦੇ ਘੇਰੇ ਤੇ ਫਾਟਕ B ਤੋਂ 5 m ਅਤੇ ਫਾਟਕ A ਤੋਂ $\sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ m ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਗੱਡਣਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 18 : ਸਮੀਕਰਣ $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ ਦਾ ਡਿਸਕ੍ਰਿਮੀਨੈਂਟ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਫਿਰ ਮੂਲਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤੀ ਬਾਰੇ ਦੱਸੋ। ਜੇਕਰ ਮੂਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਹਨ ਤਾਂ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਉ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $a = 3, b = -2, c = \frac{1}{3}$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਡਿਸਕ੍ਰਿਮੀਨੈਂਟ $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4 - 4 = 0$ ਹੈ।

ਭਾਵ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਰਕਰਣ ਦੇ ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਹਨ।

ਇਹ ਮੂਲ $\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}$, ਭਾਵ $\frac{2}{6}, \frac{2}{6}$, ਭਾਵ $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 4.4

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਮੂਲਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤੀ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਉ। ਜੇਕਰ ਮੂਲ ਸੰਭਵ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਉ:

   (i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

   (iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹਰੇਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ k ਦਾ ਅਜਿਹਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਉਸ ਦੇ ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਮੂਲ ਹੋਣ।

   (i) $2x^2 + kx + 3 = 0$ (ii) $kx(x - 2) + 6 = 0$

3. ਕੀ ਅਜਿਹਾ ਅੰਬਾਂ ਦਾ ਆਇਤਾਕਾਰ ਬਾਗ ਲਗਾਉਣਾ ਸੰਭਵ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀ ਲਬਾਂਈ, ਚੋੜਾਈ ਨਾਲੋਂ ਦੁੱਗਣੀ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 800 m^2 ਹੋਵੇ। ਜੇਕਰ ਸੰਭਵ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੋੜਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਕੀ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਥਿਤੀ ਸੰਭਵ ਹੈ? ਜੇਕਰ ਹਾਂ ਤਾਂ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਦੋ ਮਿੱਤਰਾਂ ਦੀਆਂ ਉਮਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 20 ਸਾਲ ਹੈ। ਚਾਰ ਸਾਲ ਪਹਿਲਾਂ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਉਮਰਾਂ (ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ) ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ 48 m ਸੀ।

5. ਕੀ ਪਰਿਮਾਪ 80 m ਅਤੇ ਖੇਤਰਫਲ 400 m^2 ਦੇ ਇੱਕ ਪਾਰਕ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣਾ ਸੰਭਵ ਹੈ? ਜੇਕਰ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4.6 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ :

1. ਚਲ x ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2 + bx + c = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿੱਥੇ a, b, c ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $a \neq 0$ ਹੈ।
2. ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ α ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2 + bx + c = 0$ ਦਾ ਇੱਕ ਮੂਲ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ ਹੋਵੇ। ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$ ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਅਤੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2 + bx + c = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਇੱਕ ਹੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
3. ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ ਨੂੰ ਦੋ ਰੇਖੀ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਸਕੀਏ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2 + bx + c = 0$ ਦੇ ਮੂਲ, ਹਰੇਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨੂੰ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।
4. ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣਾਉਣ ਦੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਵੀ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
5. ਦੋ ਘਾਤੀ ਸੂਤਰ : ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2 + bx + c = 0$ ਦੇ ਮੂਲ $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ਦੁਆਰਾ ਤੈਅ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ $b^2 - 4ac \geq 0$ ਹੋਵੇ।
6. ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ ਵਿੱਚ
   (i) ਦੋ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, $b^2 - 4ac > 0$ ਹੋਵੇ।
   (ii) ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਮੂਲ ਭਾਵ ਸੰਪਾਤੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ $b^2 - 4ac = 0$ ਹੋਵੇ ਅਤੇ
   (iii) ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਜੇਕਰ $b^2 - 4ac < 0$ ਹੋਵੇ।

ਪਾਠਕਾਂ ਲਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼

ਸ਼ਬਦ ਸੱਮਸਿਆਵਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੱਲਾਂ ਦੀ ਜਾਂਚ/ਪੜਤਾਲ ਸਮੱਸਿਆ ਦੌਰਾਨ ਬਣਾਈ ਗਈ ਸਮੀਕਰਣ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਬਲਕਿ ਮੂਲ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤੀ ਜਾਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ (ਅਭਿਆਸ 3 ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ 11, 13, 19 ਅਤੇ ਅਧਿਆਇ 4 ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ 10, 11, 12 ਨੂੰ ਦੇਖੋ)।

ਅੰਕ ਗਣਿਤਕ ਲੜੀਆਂ 5

ARITHMETIC PROGRESSION

5.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰ ਵੇਖਿਆ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕਾਂ ਵਸਤੂਆਂ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਨਮੂਨੇ (pattern) ਅਨੁਸਾਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਜਿਵੇਂ ਸੂਰਜਮੁਖੀ ਦੇ ਫੁੱਲ ਦੀਆਂ ਪੰਖੜੀਆਂ, ਸ਼ਹਿਦ ਦੀਆਂ ਮੱਖੀਆਂ ਦੇ ਛੱਤੇ ਵਿੱਚ ਛੇਕ, ਇੱਕ ਫਲੀ ਵਿੱਚ ਦਾਣੇ, ਇੱਕ ਅਨਾਨਾਸ ਅਤੇ ਇੱਕ ਪਾਈਨ ਕੋਨ (Pine cone) ਉੱਤੇ ਕੁੰਡਲਦਾਰ (spirals) ਆਦਿ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਪੇਸ਼ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਨਮੂਨਿਆਂ ਵੱਲ ਧਿਆਨ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਕੁਝ ਅਜਿਹੇ ਉਦਾਹਰਣ ਹਨ :

(i) ਰੀਨਾ ਨੇ ਇੱਕ ਨੌਕਰੀ ਲਈ ਬੇਨਤੀ ਪੱਤਰ ਦਿੱਤਾ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਨਿਯੁਕਤੀ ਹੋ ਗਈ। ਉਸਨੂੰ ਇਹ ਨੌਕਰੀ ₹ 8000 ਮਹੀਨਾ ਤਨਖਾਹ ਅਤੇ ₹ 500 ਸਾਲਾਨਾ ਵਾਧੇ ਦੀ ਸ਼ਰਤ 'ਤੇ ਦਿੱਤੀ ਗਈ। ਉਸਦੀ ਤਨਖਾਹ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) ਪਹਿਲੇ ਸਾਲ, ਦੂਸਰੇ ਸਾਲ, ਤੀਸਰੇ ਸਾਲ ਆਦਿ ਲਈ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 8000, 8500, 9000, . . . ਹੋਵੇਗੀ।

(ii) ਇੱਕ ਪੌੜੀ ਦੇ ਡੰਡਿਆਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਹੇਠਾਂ ਤੋਂ ਉੱਪਰ ਵੱਲ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਰੂਪ ਨਾਲ 2 cm ਘੱਟਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 5.1)। ਸਭ ਤੋਂ ਹੇਠਲੇ ਡੰਡੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 45 cm ਹੈ। ਹੇਠੋਂ ਪਹਿਲੇ, ਦੂਜੇ, ਤੀਜੇ . . . . ਡੰਡਿਆਂ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ (cm ਵਿੱਚ) ਕ੍ਰਮਵਾਰ 45, 43, 41, 39, 37, 35, 33 ਅਤੇ 31 ਹਨ।

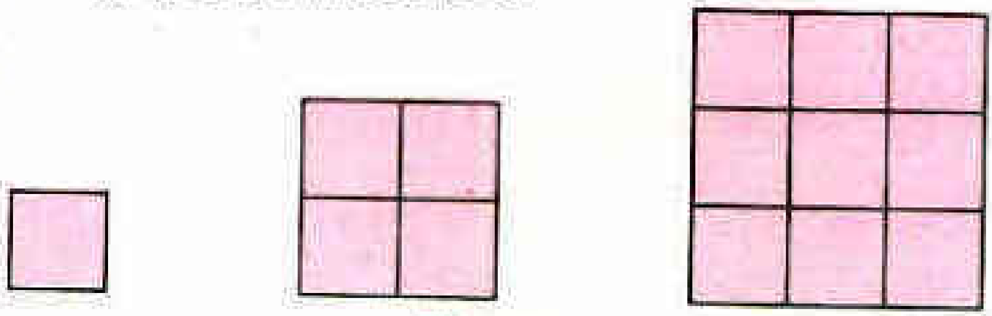
ਚਿੱਤਰ 5.1

(iii) ਕਿਸੇ ਬੱਚਤ ਯੋਜਨਾ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਧਨ 3 ਸਾਲਾਂ ਬਾਅਦ ਖੁਦ ਦਾ $\frac{5}{4}$ ਗੁਣਾ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

₹ 8000 ਦੀ ਮੂਲ ਰਾਸ਼ੀ 3, 6, 9 ਅਤੇ 12 ਸਾਲ ਦੇ ਬਾਅਦ ਸਮਾਂ ਪੂਰਾ ਹੋਣ 'ਤੇ ਰਾਸ਼ੀ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) ਕ੍ਰਮਵਾਰ:

10000, 12500, 15625 ਅਤੇ 19531.25 ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ।

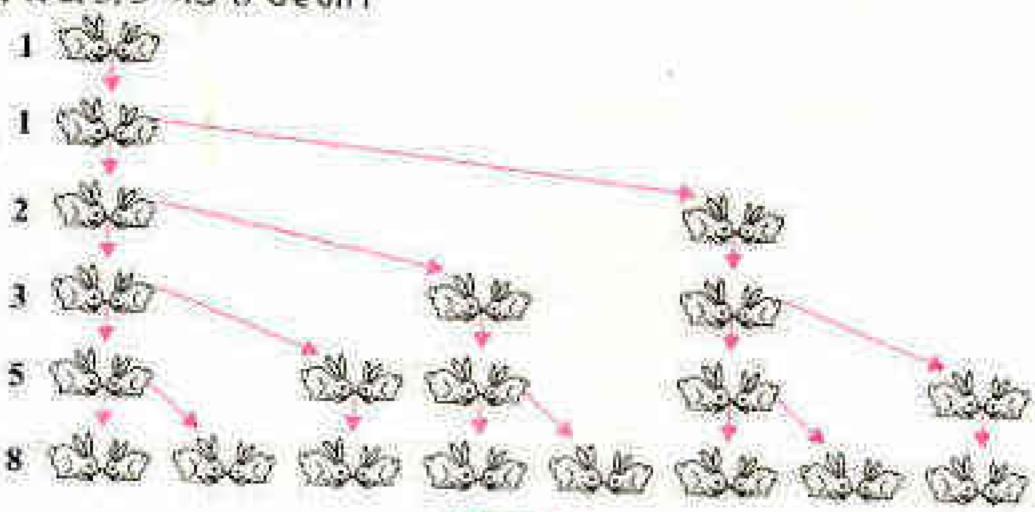
(iv) ਭੁਜਾਵਾਂ 1, 2, 3, . . . ਇਕਾਈਆਂ (units) ਵਾਲੇ ਵਰਗਾਂ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਵਰਗਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 5.2), ਕ੍ਰਮਵਾਰ $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 5.2

(v) ਸ਼ਕੀਲਾ ਆਪਣੀ ਲੜਕੀ ਦੀ ਗੋਲਕ ਵਿੱਚ ₹ 100 ਉਸ ਸਮੇਂ ਪਾਉਂਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਹ ਇੱਕ ਸਾਲ ਦੀ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰ ਸਾਲ ਉਸ ਵਿੱਚ ₹ 50 ਦਾ ਵਾਧਾ ਕਰਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਉਸ ਦੇ ਪਹਿਲੇ, ਦੂਜੇ, ਤੀਸਰੇ, ਚੌਥੇ ਜਨਮ ਦਿਨ ਤੇ ਗੋਲਕ ਵਿੱਚ ਪਾਈ ਗਈ ਰਕਮ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) ਕ੍ਰਮਵਾਰ 100, 150, 200, 250, . . . ਹੋਵੇਗੀ।

(vi) ਖਰਗੋਸ਼ਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਆਪਣੇ ਪਹਿਲੇ ਮਹੀਨੇ ਪ੍ਰਜਨਨ ਕਰਨ ਦੇ ਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਦੂਸਰੇ ਅਤੇ ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਹਰੇਕ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ ਉਹ ਇੱਕ ਨਵਾਂ ਜੋੜਾ ਪੈਦਾ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਨਵਾਂ ਜੋੜਾ ਆਪਣੇ ਦੂਜੇ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਮਹੀਨੇ ਦੌਰਾਨ ਇੱਕ ਨਵਾਂ ਜੋੜਾ ਪੈਦਾ ਕਰਦੇ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 5.3)। ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਖਰਗੋਸ਼ ਦੀ ਮੌਤ ਨਹੀਂ ਹੋਈ, ਪਹਿਲੇ, ਦੂਸਰੇ, ਤੀਸਰੇ . . . . ਛੇਵੇਂ ਮਹੀਨੇ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਖਰਗੋਸ਼ਾਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 1, 1, 2, 3, 5 ਅਤੇ 8 ਹੋਵੇਗੀ।



ਚਿੱਤਰ 5.3

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਨਮੂਨੇ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ। ਕੁਝ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਪਦ ਆਪਣੇ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਸੰਖਿਆ ਜੋੜਨ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ; ਕੁਝ ਵਿੱਚ ਇਹ ਪਦ ਆਪਣੇ ਤੋਂ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਨੂੰ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਕੁਝ ਹੋਰਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਪਦ ਲਗਾਤਾਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗ ਹਨ, ਆਦਿ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਨਮੂਨੇ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਵਾਲਾ ਪਦ ਆਪਣੇ ਤੋਂ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸੰਖਿਆ ਜੋੜਨ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖਾਂਗੇ ਕਿ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੇ nਵੇਂ ਪਦ ਅਤੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਗਿਆਨ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ, ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਕਰਾਂਗੇ।

5.2 ਅੰਕ ਗਣਿਤਕ ਲੜੀਆਂ

ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆ ਸੂਚੀਆਂ (lists) 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ

(i) 1, 2, 3, 4, . . .

(ii) 100, 70, 40, 10, . . .

(iii) –3, –2, –1, 0, . . .

(iv) 3, 3, 3, 3, . . .

(v) –1.0, –1.5, –2.0, –2.5, . . .

ਸੂਚੀ ਦੀ ਹਰੇਕ ਸੰਖਿਆ ਇੱਕ **ਪਦ (Term)** ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਸੂਚੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਸੂਚੀ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇੱਕ ਪਦ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਉਸਦਾ ਅਗਲਾ ਪਦ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਜੇਕਰ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਅਜਿਹਾ ਕਿਵੇਂ ਕਰੋਗੇ? ਸ਼ਾਇਦ ਕਿਸੇ ਨਮੂਨੇ ਜਾਂ ਨਿਯਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਤੁਸੀਂ ਅਜਿਹਾ ਕਰੋਗੇ। ਆਉ ਉਪਰੋਕਤ ਸੂਚੀਆਂ ਨੂੰ ਦੇਖੀਏ ਅਤੇ ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਸਬੰਧਿਤ ਨਿਯਮਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖੀਏ।

(i) ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪਦ ਆਪਣੇ ਪਿਛਲੇ ਪਦ ਤੋਂ 1 ਵੱਧ ਹੈ।

(ii) ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪਦ ਆਪਣੇ ਪਿਛਲੇ ਪਦ ਤੋਂ 30 ਘੱਟ ਹੈ।

(iii) ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪਦ ਆਪਣੇ ਪਿਛਲੇ ਪਦ ਵਿੱਚ 1 ਜੋੜਨ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iv) ਵਿੱਚ ਸਾਰੇ ਪਦ 3 ਹੈ ਭਾਵ ਹਰੇਕ ਪਦ ਆਪਣੇ ਪਿਛਲੇ ਪਦ ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰ ਜੋੜਕੇ (ਜਾਂ ਸਿਫ਼ਰ ਘਟਾ ਕੇ) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(v) ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪਦ ਆਪਣੇ ਪਿਛਲੇ ਪਦ ਵਿੱਚ – 0.5 ਜੋੜਕੇ (ਜਾਂ ਉਸ ਵਿਚੋਂ 0.5 ਘਟਾ ਕੇ) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਸੂਚੀਆਂ ਵਿਚ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਆਪਣੇ ਪਿਛਲੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸੰਖਿਆ ਜੋੜ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਅਜਿਹੀ ਲੜੀ ਨੂੰ ਇਹ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਅੰਕ **ਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (Arithmetic Progression ਜਾਂ A.P.)** ਬਣਾ ਰਹੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ **ਇੱਕ ਅੰਕ-ਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਸੂਚੀ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪਦ (ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ) ਆਪਣੇ ਤੋਂ ਪਿਛਲੇ ਪਦ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸੰਖਿਆ ਜੋੜ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।**

ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸੰਖਿਆ A.P. ਦਾ **ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ (common difference)** ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਯਾਦ ਰੱਖੋ ਕਿ ਇਹ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ **ਧਨਾਤਮਕ, ਰਿਣਾਤਮਕ ਜਾਂ ਸਿਫ਼ਰ** ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਇਸ A.P ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਨੂੰ a_1, ਦੂਸਰੇ ਪਦ ਨੂੰ $a_2, \ldots, n$ ਵੇਂ ਪਦ ਨੂੰ a_n ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਨੂੰ d ਨਾਲ ਦਰਸਾਈਏ। ਤਦ A.P., $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d$ ਹੈ।

A.P ਦੇ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ:

(a) ਕਿਸੇ ਸਕੂਲ ਦੀ ਸਵੇਰ ਦੀ ਸਭਾ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ ਖੜੇ ਕੁਝ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆ ਦੀਆਂ ਉੱਚਾਈਆਂ (cm. ਵਿੱਚ) 147 , 148, 149, . . ., 157 ਹਨ।

(b) ਕਿਸੇ ਸ਼ਹਿਰ ਵਿੱਚ ਜਨਵਰੀ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਹਫ਼ਤੇ ਦੌਰਾਨ ਲਏ ਗਏ ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਤਾਪਮਾਨ (ਡਿਗਰੀ ਸੈਲਸੀਅਸ ਵਿੱਚ) ਵਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ 'ਤੇ

$$-3.1, -3.0, -2.9, -2.8, -2.7, -2.6, -2.5 \text{ ਹਨ।}$$

(c) ₹ 1000 ਇੱਕ ਕਰਜ਼ੇ ਵਿਚੋਂ ਹਰੇਕ ਮਹੀਨੇ 5% ਕਰਜ਼ਾ ਵਾਪਸ ਕਰਨ 'ਤੇ ਬਾਕੀ ਰਾਸ਼ੀਆਂ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) 950 , 900 , 850 , 800 , . . ., 50 ਹਨ।

(d) ਕਿਸੇ ਸਕੂਲ ਦੁਆਰਾ ਜਮਾਤਾਂ I ਤੋਂ XII ਤੱਕ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਨਗਦ ਇਨਾਮ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) ਕ੍ਰਮਵਾਰ 200, 250, 300, 350, . . ., 750 ਹਨ।

(e) ਜਦੋਂ ₹ 50 ਪ੍ਰਤਿ ਮਹੀਨਾਂ ਦੀ ਬੱਚਤ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ 10 ਮਹੀਨਿਆਂ ਲਈ ਹਰੇਕ ਮਹੀਨੇ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਬੱਚਤ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450 ਅਤੇ 500 ਹੈ।

ਇਹ ਤੁਹਾਡੇ ਅਭਿਆਸ ਲਈ ਛੱਡਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਤੁਸੀਂ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰੋ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਚੋਂ ਹਰੇਕ ਲੜੀ ਇੱਕ A.P. ਕਿਉਂ ਹੈ।

ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$$

ਇੱਕ ਅੰਕ ਗਣਿਤਕ ਲੜੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਜਿਥੇ ਪਹਿਲਾ ਪਦ a ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ d ਹੈ। **ਇਸ ਨੂੰ A.P. ਦਾ ਆਮ ਰੂਪ (general form)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣਾਂ (a) ਤੋਂ (e) ਵਿੱਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਸੀਮਿਤ (finite) ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ A.P. ਨੂੰ ਇੱਕ **ਸੀਮਿਤ A.P.** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਵੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ A.P. ਦਾ ਇੱਕ **ਅੰਤਿਮ ਪਦ (last term)** ਹੈ। ਇਸੇ ਭਾਗ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ (i) ਤੋਂ (v) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ A.P. ਸੀਮਿਤ A.P. ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਹ **ਅਸੀਮਿਤ A.P. (Infinite Arithmetic Progressions)** ਕਹਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਅਜਿਹੇ A.P. ਵਿੱਚ ਅੰਤਿਮ ਪਦ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ।

ਹੁਣ ਇੱਕ A.P ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਜਾਣਨ ਲਈ ਤੁਹਾਨੂੰ ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਕਿਹੜੀ ਸੂਚਨਾ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ? ਕੀ ਇਸਦੇ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ? ਜਾਂ ਕੀ ਇਸ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਅੰਤਰ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ? ਤੁਸੀਂ ਵੇਖੋਗੇ ਕਿ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੋਵਾਂ ਭਾਵ ਪਹਿਲਾ ਪਦ a ਅਤੇ d ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਹੋਣੀ ਜਰੂਰੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਜੇਕਰ ਪਹਿਲਾ ਪਦ $a = 6$ ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ $d = 3$ ਹੈ ਤਾਂ

6, 9,12, 15, . . . A.P. ਹੈ।

ਅਤੇ ਜੇਕਰ $a = 6$ ਅਤੇ $d = -3$ ਹੈ ਤਾਂ

6, 3, 0, –3, . . . A.P. ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ

$a = -7$, $d = -2$, ਤਾਂ –7, –9, –11, –13, . . . A.P. ਹੈ।

$a = 1.0$, $d = 0.1$, ਤਾਂ 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, . . . A.P. ਹੈ।

$a = 0$, $d = 1\frac{1}{2}$, ਤਾਂ $0, 1\frac{1}{2}, 3, 4\frac{1}{2}, 6, \ldots$ A.P. ਹੈ।

$a = 2$, $d = 0$, ਤਾਂ 2, 2, 2, 2, . . . A.P. ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ a ਅਤੇ d ਦਾ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ A.P. ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਇਸ ਦੀ ਉਲਟ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਭਾਵ ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਲੜੀ ਦਿੱਤੀ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਹ ਇੱਕ A.P. ਹੈ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇਸ ਤੋਂ a ਅਤੇ d ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਕਿਉਂਕਿ a ਪਹਿਲਾ ਪਦ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਨੂੰ ਆਸਾਨੀ ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ A.P. ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਆਉਣ ਵਾਲਾ ਪਦ ਆਪਣੇ ਤੋਂ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਵਿੱਚ d ਜੋੜਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ A.P. ਦੇ ਲਈ, ਉਸਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਨੂੰ ਉਸਦੇ ਅਗਲੇ ਪਦ ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਉਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ d ਸਾਰੇ ਪਦਾਂ ਲਈ ਇੱਕ ਹੀ ਹੋਵੇਗਾ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ

6, 9, 12, 15, . . .

ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$a_2 - a_1 = 9 - 6 = 3$$
$$a_3 - a_2 = 12 - 9 = 3$$
$$a_4 - a_3 = 15 - 12 = 3$$

ਇੱਥੇ ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਕਿਸੇ ਵੀ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ 3 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਉਪਰੋਕਤ ਲੜੀ ਇੱਕ A.P. ਹੈ, ਜਿਸ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ $a = 6$ ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ $d = 3$ ਹੈ।

ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਲੜੀ: $6, 3, 0, -3, \ldots$ ਦੇ ਲਈ

$$a_2 - a_1 = 3 - 6 = -3$$
$$a_3 - a_2 = 0 - 3 = -3$$
$$a_4 - a_3 = -3 - 0 = -3$$

ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਵੀ ਇੱਕ A.P. ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ 6 ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ –3 ਹੈ।

ਆਮ ਰੂਪ ਵਿੱਚ A.P. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ਦੇ ਲਈ

$$d = a_{k+1} - a_k$$

ਜਿੱਥੇ a_{k+1} ਅਤੇ a_k ਕ੍ਰਮਵਾਰ $(k+1)$ਵਾਂ ਅਤੇ kਵਾਂ ਪਦ ਹਨ।

ਇੱਕ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ A.P. ਦਾ d ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਨੂੰ $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots$ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਲੋੜ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੀ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ।

ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ 1, 1, 2, 3, 5, . . . 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਕੇਵਲ ਦੇਖਣ ਤੇ ਹੀ ਇਹ ਪਤਾ ਚਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਪਦਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇਕੋ ਜਿਹਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ A.P. ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ A.P. : $6, 3, 0, -3, \ldots$ ਦਾ d ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ 3 ਵਿੱਚੋਂ 6 ਨੂੰ ਘਟਾਇਆ ਸੀ, 6 ਵਿੱਚੋਂ 3 ਨੂੰ ਨਹੀਂ ਘਟਾਇਆ ਸੀ। ਭਾਵ d ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣ ਲਈ ਸਾਨੂੰ $(k+1)$ ਵੇਂ ਪਦ ਵਿੱਚੋਂ kਵੇਂ ਪਦ ਨੂੰ ਹੀ ਘਟਾਉਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ, ਚਾਹੇ $(k+1)$ ਵਾਂ ਪਦ ਛੋਟਾ ਹੀ ਕਿਉਂ ਨਾ ਹੋਵੇ

ਆਓ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਇਨ੍ਹਾਂ ਧਾਰਨਾਵਾਂ (concepts) ਨੂੰ ਹੋਰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : A.P. : $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$ ਦੇ ਲਈ ਪਹਿਲਾ ਪਦ a ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ d ਲਿਖੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $a = \frac{3}{2}, d = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$ ਹੈ।

ਯਾਦ ਰੱਖੋ ਕਿ ਜੇਕਰ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਕਿ ਸੰਖਿਆਵਾਂ A.P. ਵਿੱਚ ਹਨ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਪਦਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ d ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀਆਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਲੜੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ -ਕਿਹੜੇ A.P. ਨਹੀਂ ਹਨ? ਜੇਕਰ ਇਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ A.P. ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਅਗਲੇ ਦੋ ਪਦ ਲਿਖੋ।

(i) 4, 10, 16, 22, . . . (ii) 1, – 1, – 3, – 5, . . .

(iii) – 2, 2, – 2, 2, – 2, . . . (iv) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, . . .

ਹੱਲ : (i)
$$a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$$
$$a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$$
$$a_4 - a_3 = 22 - 16 = 6$$

ਭਾਵ ਹਰੇਕ ਵਾਰ $a_{k+1} - a_k$ ਇੱਕੋ ਜਿਹਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਲੜੀ ਇੱਕ A.P. ਹੈ। ਜਿਸਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ $d = 6$ ਹੈ।

ਇਸ ਦੇ ਅਗਲੇ ਦੋ ਪਦ $22 + 6 = 28$ ਅਤੇ $28 + 6 = 34$ ਹਨ।

(ii) $a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$

$a_3 - a_2 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$

$a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$

ਭਾਵ ਹਰੇਕ ਵਾਰ $a_{k+1} - a_k$ ਇੱਕੋ ਜਿਹਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਲੜੀ ਇੱਕ A.P. ਹੈ। ਜਿਸਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ $d = -2$ ਹੈ।

ਇਸ ਦੇ ਅਗਲੇ ਦੋ ਪਦ

$$-5 + (-2) = -7 \quad \text{ਅਤੇ} \quad -7 + (-2) = -9 \text{ ਹਨ।}$$

(iii) $a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$

$a_3 - a_2 = -2 - 2 = -4$

ਕਿਉਂਕਿ $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਲੜੀ ਇੱਕ A.P. ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iv) $a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0$, $a_3 - a_2 = 1 - 1 = 0$, $a_4 - a_3 = 2 - 1 = 1$

ਇਥੇ $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਲੜੀ ਇੱਕ A.P. ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 5.1

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿਚੋਂ ਕਿਹੜੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਸਬੰਧਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ A.P. ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਉਂ?

   (i) ਹਰੇਕ ਕਿਲੋਮੀਟਰ ਦੇ ਬਾਅਦ ਟੈਕਸੀ ਦਾ ਕਿਰਾਇਆ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਪਹਿਲੇ ਕਿਲੋਮੀਟਰ ਲਈ ਕਿਰਾਇਆ ₹ 15 ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਵਾਧੂ ਕਿਲੋਮੀਟਰ ਦਾ ਕਿਰਾਇਆ ₹ 8 ਹੈ।

(ii) ਕਿਸੇ ਬੇਲਨ (cylinder) ਵਿੱਚ ਹਵਾ ਦੀ ਮਾਤਰਾ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਹਵਾ ਕੱਢਣ ਵਾਲਾ ਪੰਪ ਹਰੇਕ ਵਾਰ ਬੇਲਨ ਵਿੱਚ ਬਾਕੀ ਹਵਾ ਦਾ $\frac{1}{4}$ ਹਿੱਸਾ ਬਾਹਰ ਕੱਢ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਹਰੇਕ ਮੀਟਰ ਦੀ ਖੁਦਾਈ ਤੋਂ ਬਾਅਦ, ਇੱਕ ਖੂਹ ਪੁੱਟਣ ਦੀ ਲਾਗਤ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਪਹਿਲੇ ਮੀਟਰ ਖੁਦਾਈ ਦੀ ਲਾਗਤ ₹ 150 ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿ ਮੀਟਰ ਖੁਦਾਈ ਦੀ ਲਾਗਤ ₹ 50 ਵੱਧ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

(iv) ਖਾਤੇ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਸਾਲ ਦਾ ਮਿਸ਼ਰਧਨ, ਜਦੋਂ ਕਿ ₹ 10000 ਦੀ ਰਕਮ 8 % ਸਾਲਾਨਾ ਦਰ 'ਤੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਵਿਆਜ 'ਤੇ ਜਮਾਂ ਕਰਵਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

2. ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਚਾਰ ਪਦ ਲਿਖੋ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਪਹਿਲਾ ਪਦ a ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ d ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ:

(i) $a = 10,\quad d = 10$ (ii) $a = -2,\quad d = 0$

(iii) $a = 4,\quad d = -3$ (iv) $a = -1,\quad d = \frac{1}{2}$

(v) $a = -1.25,\quad d = -0.25$

3. ਹੇਠਾਂ ਹਰੇਕ A.P. ਦੇ ਲਈ ਪਹਿਲਾ ਪਦ ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ:

(i) $3, 1, -1, -3, \ldots$ (ii) $-5, -1, 3, 7, \ldots$

(iii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}, \ldots$ (iv) $0.6, 1.7, 2.8, 3.9, \ldots$

4. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ-ਕਿਹੜੇ A.P. ਹਨ? ਜੇਕਰ ਕੋਈ A.P. ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ:

(i) $2, 4, 8, 16, \ldots$ (ii) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$

(iii) $-1.2, -3.2, -5.2, -7.2, \ldots$ (iv) $-10, -6, -2, 2, \ldots$

(v) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}, \ldots$ (vi) $0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, \ldots$

(vii) $0, -4, -8, -12, \ldots$ (viii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$

(ix) $1, 3, 9, 27, \ldots$ (x) $a, 2a, 3a, 4a, \ldots$

(xi) $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ (xii) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \ldots$

(xiii) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, \ldots$ (xiv) $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, \ldots$

(xv) $1^2, 5^2, 7^2, 73, \ldots$

5.3 A.P. ਦਾ *n*ਵਾਂ ਪਦ

ਆਉ ਭਾਗ 5.1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਉਸ ਸਥਿਤੀ 'ਤੇ ਦੁਬਾਰਾ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਰੀਨਾ ਨੇ ਇੱਕ ਨੌਕਰੀ ਲਈ ਬੇਨਤੀ ਪੱਤਰ ਦਿੱਤਾ ਸੀ ਅਤੇ ਉਸ ਨੂੰ ਚੁਣ ਲਿਆ ਗਿਆ ਸੀ। ਉਸਨੂੰ ਇਹ ਨੌਕਰੀ ₹ 8000 ਪ੍ਰਤਿ ਮਹੀਨਾ ਤਨਖਾਹ ਅਤੇ ₹ 500 ਸਾਲਾਨਾ ਵਾਧੇ ਸ਼ਰਤ ਤੇ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਸੀ। ਪੰਜਵੇਂ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਉਸ ਦੀ ਮਹੀਨਾ ਵਾਰ ਤਨਖਾਹ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ?

ਇਸ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਲਈ, ਆਉ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਦੂਜੇ ਸਾਲ ਉਸ ਦੀ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਤਨਖਾਹ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ।

ਇਹ (₹8000 + ₹500) = ₹8500 ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੀਸਰੇ, ਚੌਥੇ ਅਤੇ ਪੰਜਵੇਂ ਸਾਲ ਲਈ ਉਸ ਦੀ ਤਨਖਾਹ ਪਿਛਲੇ ਸਾਲ ਦੀ ਤਨਖਾਹ ਵਿੱਚ ₹500 ਜੋੜ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ,

ਉਸ ਦੀ ਤੀਸਰੇ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਤਨਖਾਹ = ₹ (8500 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500)

= ₹ (8000 + 2 × 500)

= ₹[8000 + (3 – 1) × 500] (ਤੀਸਰੇ ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ)

= ₹ 9000

ਚੌਥੇ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਤਨਖਾਹ = ₹ (9000 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500)

= ₹ (8000 + 3 × 500)

= ₹ [8000 + (4 – 1) × 500] (ਚੌਥੇ ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ)

= ₹ 9500

ਪੰਜਵੇਂ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਤਨਖਾਹ = ₹ (9500 + 500)

= ₹ (8000+500+500+500 + 500)

= ₹ (8000 + 4 × 500)

= ₹ [8000 + (5 – 1) × 500] (ਪੰਜਵੇਂ ਸਾਲ ਲਈ)

= ₹10000

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸੂਚੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਰਹੀ ਹੈ :

8000, 8500, 9000, 9500, 10000, . . .

ਇਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਇੱਕ A.P. ਬਣਾ ਰਹੀਆਂ ਹਨ। (ਕਿਉਂ?)

ਹੁਣ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਨਮੂਨੇ (Pattern) ਨੂੰ ਵੇਖ ਕੇ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਉਸ ਦੇ ਛੇਵੇਂ ਸਾਲ ਦੀ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਤਨਖਾਹ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਕੀ ਤੁਸੀਂ 15ਵੇਂ ਸਾਲ ਦੀ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਤਨਖਾਹ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਉਹ ਅੱਗੇ ਵੀ ਇਸੇ ਨੌਕਰੀ 'ਤੇ ਕੰਮ ਕਰਦੀ ਰਹੇਗੀ, 25ਵੇਂ ਸਾਲ ਦੇ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਤਨਖਾਹ ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਇਸ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਲਈ ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੇ ਸਾਲ ਦੀ ਤਨਖਾਹ ਵਿੱਚ ₹ 500 ਜੋੜ ਕੇ ਲੋੜੀਂਦੀ ਤਨਖਾਹ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰੋਗੇ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਨੂੰ ਸੰਖੇਪ ਰੂਪ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਆਉ ਦੇਖੀਏ। ਜਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਤਨਖਾਹਾਂ ਨੂੰ ਉੱਪਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਹੈ, ਉਸ ਤੋਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕੁੱਝ ਮਹਿਸੂਸ ਤਾਂ ਹੋ ਗਿਆ ਹੋਵੇਗਾ।

15ਵੇਂ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਤਨਖਾਹ

$$= \text{14ਵੇਂ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਤਨਖਾਹ} + ₹\ 500$$

$$= ₹\left[8000 + \underbrace{500 + 500 + 500 + \ldots + 500}_{\text{13 ਵਾਰੀ}}\right] + ₹\ 500$$

$$= ₹\ [8000 + 14 \times 500]$$

$$= ₹[8000 + (15 - 1) \times 500] = ₹\ 15000$$

ਭਾਵ ਪਹਿਲੀ ਤਨਖਾਹ + (15 – 1) × ਸਾਲਾਨਾ ਤਨਖਾਹ ਵਾਧਾ

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ 25ਵੇਂ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਉਸਦੀ ਤਨਖਾਹ ਹੋਵੇਗੀ :

$$₹\ [8000 + (25 - 1) \times 500] = ₹\ 20000$$

= ਪਹਿਲੀ ਤਨਖਾਹ + (25 – 1) × ਸਾਲਾਨਾ ਵਾਧਾ

ਇਸ ਉਦਾਹਰਣ ਤੋਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕੁਝ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਤਾਂ ਜ਼ਰੂਰ ਹੋ ਗਿਆ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ A.P. ਦੇ 15ਵੇਂ ਪਦ, 25ਵੇਂ ਪਦ ਅਤੇ ਆਮ ਰੂਪ ਵਿੱਚ nਵੇਂ ਪਦ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ਇੱਕ A.P. ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ a ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ d ਹੈ।

ਤਾਂ

ਦੂਸਰਾ ਪਦ $a_2 = a + d = a + (2 - 1)\,d$

ਤੀਸਰਾ ਪਦ $a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d = a + (3 - 1)\,d$

ਚੌਥਾ ਪਦ $a_4 = a_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d = a + (4 - 1)\,d$

....

....

ਇਸ ਨਮੂਨੇ (pattern) ਨੂੰ ਦੇਖਦੇ ਹੋਏ,ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ nਵਾਂ ਪਦ $a_n = a + (n-1)d$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ : **ਪਹਿਲਾ ਪਦ a ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ d ਵਾਲੀ ਇੱਕ A.P. ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ $a_n = a + (n-1)d$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।**

a_n ਨੂੰ A.P. ਦਾ ਆਮ ਪਦ **(General term)** ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ **ਕਿਸੇ A.P. ਵਿੱਚ** m ਪਦ ਹਨ ਤਾਂ a_m **ਇਸਦੇ ਅੰਤਿਮ ਪਦ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਕਦੇ - ਕਦੇ l ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।**

ਆਓ ਹੁਣ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : A.P. : 2, 7, 12, . . . ਦਾ 10 ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $a = 2$, $d = 7 - 2 = 5$ ਅਤੇ $n = 10$ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ $a_n = a + (n-1)d$ ਹੈ,ਇਸ ਲਈ

$$a_{10} = 2 + (10-1) \times 5 = 2 + 45 = 47$$

ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤੀ A.P. ਦਾ 10ਵਾਂ ਪਦ 47 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : A.P. : 21, 18, 15, . . . ਦਾ ਕਿੰਨਵਾਂ ਪਦ -81 ਹੈ? ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ - ਨਾਲ ਕੀ ਇਸ A.P. ਦਾ ਕੋਈ ਪਦ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ? ਕਾਰਣ ਸਹਿਤ ਉੱਤਰ ਦਿਓ।

ਹੱਲ : ਇਥੇ, $a = 21$, $d = 18 - 21 = -3$ ਅਤੇ $a_n = -81$ ਹੈ। ਅਸੀਂ n ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣਾ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ $a_n = a + (n-1)d$,

ਇਸ ਲਈ $-81 = 21 + (n-1)(-3)$

ਜਾਂ $-81 = 24 - 3n$

ਜਾਂ $-105 = -3n$

ਇਸ ਲਈ $n = 35$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ A.P. ਦਾ 35ਵਾਂ ਪਦ -81 ਹੈ।

ਅੱਗੇ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਜਾਣਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੋਈ n ਅਜਿਹਾ ਹੈ ਕਿ $a_n = 0$ ਹੋਵੇ। ਜੇਕਰ ਅਜਿਹਾ n ਹੋਵੇ ਤਾਂ

$$21 + (n-1)(-3) = 0,$$

ਭਾਵ $3(n-1) = 21$

ਜਾਂ $n = 8$

ਇਸ ਲਈ, 8ਵਾਂ ਪਦ 0 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਉਹ A.P. ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ ਤੀਸਰਾ ਪਦ 5 ਅਤੇ 7ਵਾਂ ਪਦ 9 ਹੈ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ :

$$a_3 = a + (3-1)d = a + 2d = 5 \quad (1)$$

ਅਤੇ

$$a_7 = a + (7-1)d = a + 6d = 9 \quad (2)$$

ਸਮੀਕਰਣਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਦੇ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$a = 3, \quad d = 1$$

ਇਸ ਲਈ, ਲੋੜੀਂਦੀ A.P. : 3, 4, 5, 6, 7, . . . ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਕੀ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਸੂਚੀ 5, 11, 17, 23, . . . ਦਾ ਕੋਈ ਪਦ 301 ਹੈ? ਕਿਉਂ?

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ :

$$a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6, \quad a_3 - a_2 = 17 - 11 = 6, \quad a_4 - a_3 = 23 - 17 = 6$$

ਕਿਉਂਕਿ $k = 1, 2, 3,$ ਆਦਿ ਲਈ $a_{k+1} - a_k$ ਬਰਾਬਰ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਲੜੀ ਇੱਕ A.P. ਹੈ।

ਇੱਥੇ $a = 5$ ਅਤੇ $d = 6$

ਮੰਨ ਲਓ A.P. ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ 301 ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$a_n = a + (n-1)d$$

ਇਸ ਲਈ

$$301 = 5 + (n-1) \times 6$$

ਭਾਵ

$$301 = 6n - 1$$

ਇਸ ਲਈ

$$n = \frac{302}{6} = \frac{151}{3}$$

ਪਰੰਤੂ n ਇੱਕ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ (ਕਿਉਂ?)। ਇਸ ਲਈ 301 ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਦਾ ਪਦ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 3 ਨਾਲ ਵੰਡੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : 3 ਨਾਲ ਵੰਡੀਆਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀਆਂ ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ :

$$12, 15, 18, \ldots, 99$$

ਕੀ ਇਹ ਇੱਕ A.P. ਹੈ? ਹਾਂ, ਇਹ ਹੈ। ਇੱਥੇ $a = 12$, $d = 3$ ਅਤੇ $a_n = 99$ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ $$a_n = a + (n-1)d,$$

ਇਸ ਲਈ $$99 = 12 + (n-1) \times 3$$

ਭਾਵ $$87 = (n-1) \times 3$$

ਭਾਵ $$n - 1 = \frac{87}{3} = 29$$

ਭਾਵ $$n = 29 + 1 = 30$$

ਇਸ ਲਈ, 3 ਨਾਲ ਵੰਡੀਆਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀਆਂ ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁੱਲ 30 ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : A.P. : 10, 7, 4, . . ., – 62 ਦਾ ਅੰਤਿਮ ਪਦ ਤੋਂ (ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਵੱਲ ਪਾਸੇ) 11ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ, $a = 10$, $d = 7 - 10 = -3$, $l = -62$,

ਜਿਥੇ $$l = a + (n-1)d$$

ਅੰਤਿਮ ਪਦ ਤੋਂ 11 ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ A.P. ਦੇ ਕੁੱਲ ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਇਸ ਲਈ $$-62 = 10 + (n-1)(-3)$$

ਜਾਂ $$-72 = (n-1)(-3)$$

ਭਾਵ $$n - 1 = 24$$

ਜਾਂ $$n = 25$$

ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ A.P. ਵਿੱਚ 25 ਪਦ ਹਨ।

ਅੰਤਿਮ ਪਦ ਤੋਂ 11ਵਾਂ ਪਦ A.P. ਦਾ 15 ਵਾਂ ਪਦ ਹੋਵੇਗਾ। (ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਇਹ 14 ਵਾਂ ਪਦ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ $$a_{15} = 10 + (15-1)(-3) = 10 - 42 = -32$$

ਇਸ ਲਈ, ਅੰਤਮ ਪਦ ਤੋਂ 11ਵਾਂ ਪਦ – 32 ਹੈ।

ਬਦਲਵਾਂ ਹੱਲ :

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ A.P. ਨੂੰ ਉਲਟ ਪਾਸਿਉਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ $a = -62$ ਹੈ ਅਤੇ

ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ $d = 3$ ਹੈ। (ਕਿਉਂ?)

ਹੁਣ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਇਹ ਬਣ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ A.P. ਦਾ 11ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ।

ਇਸ ਲਈ $$a_{11} = -62 + (11-1) \times 3 = -62 + 30 = -32$$

ਇਸ ਲਈ, ਅੰਤਿਮ ਪਦ ਤੋਂ ਲੋੜੀਂਦਾ 11ਵਾਂ ਪਦ -32 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ₹ 1000 ਦੀ ਇੱਕ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ 8% ਸਾਲਾਨਾ ਸਾਧਾਰਣ ਵਿਆਜ ਦੀ ਦਰ 'ਤੇ ਜਮਾਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਵਿਆਜ ਇੱਕ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰੋ। ਕੀ ਇਹ ਵਿਆਜ ਇੱਕ A.P. ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ? ਜੇਕਰ ਅਜਿਹਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਤੱਥ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ 30 ਸਾਲਾਂ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਵਿਆਜ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਧਾਰਣ ਵਿਆਜ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸੂਤਰ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ:

$$\text{ਸਾਧਾਰਣ ਵਿਆਜ} = \frac{P \times R \times T}{100}$$

ਇਸ ਲਈ, ਪਹਿਲੇ ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਵਿਆਜ = ₹ $\frac{1000 \times 8 \times 1}{100}$ = ₹80

ਦੂਜੇ ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਵਿਆਜ = ₹ $\frac{1000 \times 8 \times 2}{100}$ = ₹160 ;

ਤੀਸਰੇ ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਵਿਆਜ = ₹ $\frac{1000 \times 8 \times 3}{100}$ = ₹ 240

ਇਸੇ ਤਰਾਂ ਅਸੀਂ ਚੌਥੇ, ਪੰਜਵੇਂ ਆਦਿ ਸਾਲਾਂ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਵਿਆਜ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਲਈ: ਪਹਿਲੇ, ਦੂਸਰੇ, ਤੀਸਰੇ ... ਸਾਲਾਂ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਵਿਆਜ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਹਨ:

$$80, 160, 240, \ldots$$

ਇਹ ਇੱਕ A.P. ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਪਦਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ 80 ਹੈ, ਭਾਵ $d = 80$ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ, ਇਥੇ $a = 80$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ 30 ਸਾਲਾਂ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਵਿਆਜ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ a_{30} ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਹੁਣ $$a_{30} = a + (30-1)\, d = 80 + 29 \times 80 = 2400$$

ਇਸ ਲਈ, 30 ਸਾਲਾਂ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਵਿਆਜ ₹ 2400 ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਫੁੱਲਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਕਿਆਰੀ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ 23 ਗੁਲਾਬ ਦੇ ਪੌਦੇ ਹਨ, ਦੂਜੀ

ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ 21 ਪੌਦੇ ਹਨ, ਤੀਜੀ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ 19 ਪੌਦੇ ਹਨ ਆਦਿ, ਉਸ ਦੀ ਅੰਤਿਮ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ 5 ਗੁਲਾਬ ਦੇ ਪੌਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਕਿਆਰੀ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੀਆਂ ਕਤਾਰਾਂ ਹਨ?

ਹੱਲ : ਪਹਿਲੀ, ਦੂਜੀ, ਤੀਜੀ ... ਕਤਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਗੁਲਾਬ ਦੇ ਪੌਦਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ:

$$23, 21, 19, \ldots, 5$$

ਇਹ ਇੱਕ A.P. ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ (ਕਿਉਂ?)। ਮੰਨ ਲਉ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ n ਹੈ।

ਤਾਂ $a = 23$, $d = 21 - 23 = -2$ ਅਤੇ $a_n = 5$ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ $a_n = a + (n-1)d$

ਇਸ ਲਈ

$$5 = 23 + (n-1)(-2)$$

ਭਾਵ $-18 = (n-1)(-2)$

ਜਾਂ $n = 10$

ਇਸ ਲਈ, ਫੁੱਲਾਂ ਦੀ ਕਿਆਰੀ ਵਿੱਚ 10 ਕਤਾਰਾਂ ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 5.2

1. ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ, ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਨੂੰ ਭਰੋ, ਜਿੱਥੇ AP ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ a, ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ d ਅਤੇ nਵਾਂ ਪਦ a_n ਹੈ।

	a	d	n	a_n
(i)	7	3	8	...
(ii)	−18	...	10	0
(iii)	...	−3	18	−5
(iv)	−18.9	2.5	...	3.6
(v)	3.5	0	105	...

2. ਹੇਠ ਦਿੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਕਾਰਣ ਦੱਸੋ :

(i) A.P.: 10, 7, 4, . . . , ਦਾ 30ਵਾਂ ਪਦ ਹੈ:

(A) 97 (B) 77 (C) −77 (D) −87

(ii) A.P.: $-3, -\frac{1}{2}, 2, \ldots$, ਦਾ 11ਵਾਂ ਪਦ ਹੈ:

(A) 28 (B) 22 (C) -38 (D) $-48\frac{1}{2}$

3. ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆ ਅੰਕਗਣਿਤਕ ਲੜੀਆਂ (A.P) ਵਿੱਚ ਖਾਲੀ ਖਾਨਿਆਂ ਦੇ ਪਦਾ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) 2, $\boxed{}$, 26

(ii) $\boxed{}$, 13, $\boxed{}$, 3

(iii) 5, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $9\frac{1}{2}$

(iv) -4, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, 6

(v) $\boxed{}$, 38, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, -22

4. A.P. : 3, 8, 13, 18, . . . ਦਾ ਕਿੰਨਵਾਂ ਪਦ 78 ਹੈ?

5. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਅੰਕਗਣਿਤਕ ਲੜੀ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਪਦ ਹਨ?

(i) 7, 13, 19, . . . , 205 (ii) 18, $15\frac{1}{2}$, 13, . . . , -47

6. ਕੀ A.P., 11, 8, 5, 2 . . . ਦਾ ਇੱਕ ਪਦ -150 ਹੈ? ਕਿਉਂ?

7. ਉਸ A.P. ਦਾ 31ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ 11ਵਾਂ ਪਦ 38 ਅਤੇ 16 ਵਾਂ ਪਦ 73 ਹੈ।

8. ਇੱਕ A.P. ਵਿੱਚ 50 ਪਦ ਹਨ, ਜਿਸ ਦਾ ਤੀਸਰਾ ਪਦ 12 ਹੈ ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ ਪਦ 106 ਹੈ। ਇਸ ਦਾ 29ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ A.P ਦਾ ਤੀਸਰਾ ਅਤੇ 9ਵਾਂ ਪਦ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 4 ਅਤੇ -8 ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਕਿੰਨਵਾਂ ਪਦ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇਗਾ?

10. ਕਿਸੇ A.P. ਦਾ 17ਵਾਂ ਪਦ ਉਸਦੇ 10ਵੇਂ ਪਦ ਤੋਂ 7 ਵੱਧ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. A.P. : 3, 15, 27, 39, ... ਦਾ ਕਿੰਨਵਾਂ ਪਦ ਉਸਦੇ 54 ਵੇਂ ਪਦ ਤੋਂ 132 ਵੱਧ ਹੋਵੇਗਾ?

12. ਦੋ ਅੰਕਗਣਿਤਕ ਲੜੀਆਂ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਹਨਾਂ ਦੇ 100ਵੇਂ ਪਦਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ 100 ਹੈ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਦੇ 1000ਵੇਂ ਪਦਾ ਦਾ ਅੰਤਰ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ?

13. ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀਆ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 7 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹਨ।

14. 10 ਅਤੇ 250 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ 4 ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਗੁਣਜ ਹਨ?

15. n ਦੇ ਕਿਹੜੇ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ, ਦੋਵੇਂ ਅੰਕ ਗਣਿਤਕ ਲੜੀਆਂ 63, 65, 67, ... ਅਤੇ 3, 10, 17, ... ਦੇ nਵੇਂ ਪਦ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣਗੇ?

16. ਉਹ A.P ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ ਤੀਜਾ ਪਦ 16 ਹੈ ਅਤੇ 7ਵਾਂ ਪਦ 5ਵੇਂ ਪਦ ਨਾਲੋਂ 12 ਵੱਧ ਹੈ।

17. A.P. : 3, 8, 13, ..., 253 ਵਿੱਚ ਅੰਤਿਮ ਪਦ ਤੋਂ 20ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

18. ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ ਚੌਥੇ ਅਤੇ 8ਵੇਂ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 24 ਹੈ ਅਤੇ 6ਵੇਂ ਅਤੇ 10ਵੇਂ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 44 ਹੈ। ਇਸ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਤਿਨ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

19. ਸੁਬਾ ਰਾਓ ਨੇ 1995 ਵਿੱਚ ₹ 5000 ਪ੍ਰਤਿ ਮਹੀਨਾ ਤਨਖਾਹ 'ਤੇ ਕੰਮ ਸ਼ੁਰੂ ਕੀਤਾ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਸਾਲ ₹ 200 ਦਾ ਸਾਲਾਨਾ ਵਾਧਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ। ਕਿਹੜੇ ਸਾਲ ਉਸਦੀ ਤਨਖਾਹ ₹ 7000 ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ?

20. ਰਾਮ ਕਲੀ ਨੇ ਕਿਸੇ ਸਾਲ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਹਫਤੇ ₹ 5 ਦੀ ਬੱਚਤ ਕੀਤੀ ਅਤੇ ਫਿਰ ਆਪਣੀ ਹਫਤਾਵਾਰੀ ਬੱਚਤ ₹ 1.75 ਵਧਾਉਂਦੀ ਗਈ। ਜੇਕਰ nਵੇਂ ਹਫਤੇ ਵਿੱਚ ਉਸਦੀ ਹਫਤਾਵਾਰੀ ਬੱਚਤ ₹ 20.75 ਹੋਵੇ ਤਾਂ n ਪਤਾ ਕਰੋ।

5.4 A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ

ਆਉ ਭਾਗ 5.1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਥਿਤੀ 'ਤੇ ਫਿਰ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸ਼ਕੀਲਾ ਆਪਣੀ ਪੁਤਰੀ ਦੇ ਗੋਲਕ ਵਿੱਚ ਉਸਦੇ 1 ਸਾਲ ਦੀ ਹੋਣ 'ਤੇ ₹ 100 ਪਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਉਸਦੇ ਦੂਸਰੇ ਜਨਮ ਦਿਨ ਉਤੇ ₹ 150, ਤੀਜੇ ਜਨਮ ਦਿਨ 'ਤੇ ₹ 200 ਪਾਉਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਅੱਗੇ ਜਾਰੀ ਰੱਖਦੀ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਉਸਦੀ ਪੁਤਰੀ ਦੀ ਉਮਰ 21 ਸਾਲ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ, ਤਾਂ ਉਸਦੀ ਗੋਲਕ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨਾ ਧਨ ਇਕੱਠਾ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ?

ਇਥੇ ਉਸਦੇ ਪਹਿਲੇ, ਦੂਜੇ, ਤੀਜੇ, ਚੌਥੇ ... ਜਨਮ ਦਿਨ ਉੱਤੇ ਉਸ ਦੇ ਗੋਲਕ ਵਿੱਚ ਪਾਈ ਗਈ ਰਕਮ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 100, 150, 200, 250, ... ਹੈ ਅਤੇ ਇਹੀ ਕ੍ਰਮ ਉਸਦੇ 21ਵੇਂ ਜਨਮ ਦਿਨ ਤੱਕ ਚਲਦਾ ਰਿਹਾ। 21ਵੇਂ ਜਨਮ ਦਿਨ ਤੱਕ ਇੱਕਠੀ ਹੋਈ ਕੁੱਲ ਰਾਸ਼ੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਉਪਰੋਕਤ ਲੜੀ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਨਹੀਂ ਸੋਚਦੇ ਕਿ ਇਹ ਇੱਕ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਵਿੱਚ ਸਮਾਂ ਵੀ ਅਧਿਕ ਲੱਗੇਗਾ। ਕੀ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਨੂੰ ਸਰਲ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ? ਇਹ ਤਾਂ ਹੀ ਸੰਭਵ ਹੋਵੇਗਾ, ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਦਾ ਜੋੜ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਈ ਵਿਧੀ ਪਤਾ ਕਰ ਲਵਾਂਗੇ। ਆਓ ਦੇਖੀਏ।

ਅਸੀਂ ਗੌਂਸ (ਜਿਸ ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਅਧਿਆਇ 1 ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ) ਨੂੰ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਮੱਸਿਆ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜੋ ਉਸਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਉਦੋਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸੀ ਜਦੋਂ ਉਹ 10 ਸਾਲ ਦਾ ਸੀ। ਉਸਨੂੰ 1 ਤੋਂ 100 ਤੱਕ ਦੀਆਂ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿਹਾ ਗਿਆ ਸੀ। ਉਸਨੇ ਤੁਰੰਤ ਉੱਤਰ ਦਿਤਾ ਕਿ ਜੋੜ 5050 ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਉਸਨੂੰ ਅਜਿਹਾ ਕਿਵੇਂ ਕੀਤਾ? ਉਸਨੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ :

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$$

ਫਿਰ ਉਸਨੇ ਉਲਟ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਿਖਿਆ :

$$S = 100 + 99 + \ldots + 3 + 2 + 1$$

ਉਪਰੋਕਤ ਨੂੰ ਜੋੜਨ 'ਤੇ ਉਸ ਨੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ :

$$2S = (100 + 1) + (99 + 2) + \ldots + (3 + 98) + (2 + 99) + (1 + 100)$$

$$= 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 \quad \text{(100 ਵਾਰੀ)}$$

ਇਸ ਲਈ $S = \dfrac{100 \times 101}{2} = 5050$, ਭਾਵ ਜੋੜ $= 5050$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਕਨੀਕ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਮੰਨ ਲਓ ਇਹ A.P. ਹੈ:

$$a, a + d, a + 2d, \ldots$$

ਇਸ A.P ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ $a + (n - 1)\,d$ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਓ S ਇਸ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ ਤਾਂ

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + [a + (n - 1)\,d] \qquad (1)$$

ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਉਲਟੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿਚ ਲਿਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$S = [a + (n - 1)\,d] + [a + (n - 2)\,d] + \ldots + (a + d) + a \qquad (2)$$

ਹੁਣ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਪਦਾਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਜੋੜਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$2S = \underbrace{[2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d] + \ldots + [2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d]}_{n \text{ ਵਾਰੀ}}$$

ਜਾਂ $\quad 2S = n\,[2a + (n - 1)\,d] \qquad$ (ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਵਿੱਚ n ਪਦ ਹਨ)

ਜਾਂ $\quad S = \dfrac{n}{2}\,[2a + (n - 1)\,d]$

ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ S ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੀ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

$$S = \frac{n}{2}[a + a + (n-1)d]$$

ਭਾਵ
$$S = \frac{n}{2}(a + a_n) \qquad (3)$$

ਹੁਣ, ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ ਕੇਵਲ n ਹੀ ਪਦ ਹੋਣ, ਤਾਂ a_n ਅੰਤਿਮ ਪਦ l ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ (3) ਤੋਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ :

$$S = \frac{n}{2}(a + l) \qquad (4)$$

ਪਰਿਣਾਮ ਦਾ ਇਹ ਰੂਪ ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗੀ ਹੈ, ਜਦੋਂ A.P. ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ ਪਦ ਦਿੱਤੇ ਹੋਣ ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਨਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉਸੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 'ਤੇ ਦੁਬਾਰਾ ਵਾਪਸ ਆ ਜਾਂਦੇ ਹਾਂ, ਜੋ ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਪੁੱਛਿਆ ਗਿਆ ਸੀ। ਸ਼ਕੀਲਾ ਦੀ ਪੁੱਤਰੀ ਦੇ ਗੋਲਕ ਵਿੱਚ ਉਸਦੇ ਪਹਿਲੇ, ਦੂਜੇ, ਤੀਸਰੇ, . . ., ਜਨਮ ਦਿਨ 'ਤੇ ਪਾਈਆਂ ਗਈਆਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ (₹ ਵਿੱਚ) ਕ੍ਰਮਵਾਰ 100, 150, 200, 250, . . ., ਹਨ।

ਇਹ ਇੱਕ A.P. ਹੈ। ਅਸੀਂ ਉਸ ਦੇ 21ਵੇਂ ਜਨਮ ਦਿਨ ਤੱਕ ਇਕੱਠੀ ਹੋਈ ਕੁੱਲ ਰਾਸ਼ੀ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ। ਭਾਵ ਅਸੀਂ ਇਸ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ 21 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

ਇਥੇ $a = 100$, $d = 50$ ਅਤੇ $n = 21$ ਹੈ। ਸੂਤਰ

$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ

$$S = \frac{21}{2}[2 \times 100 + (21-1) \times 50] = \frac{21}{2}[200 + 1000]$$

$$= \frac{21}{2} \times 1200 = 12600$$

ਇਸ ਲਈ, ਉਸਦੇ 21ਵੇਂ ਜਨਮ ਦਿਨ ਤੱਕ ਇੱਕਠੀ ਹੋਈ ਗੋਲਕ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਰਕਮ ₹12600 ਹੈ।

ਕੀ ਸੂਤਰ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਸਰਲ ਨਹੀਂ ਹੋ ਗਿਆ?

ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਅਸੀਂ S ਦੀ ਥਾਂ 'ਤੇ S_n ਦਾ ਵੀ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ

ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਸੀਂ A.P. ਦੇ 20 ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ S_{20} ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਸੂਤਰ ਵਿੱਚ ਚਾਰ ਰਾਸ਼ੀਆਂ S, a, d ਅਤੇ n ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਤਿੰਨ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦਾ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਚੌਥੀ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਕਿਸੇ A.P. ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ, ਉਸ ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਅਤੇ ਪਹਿਲੇ $(n-1)$ ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਅੰਤਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਭਾਵ $a_n = S_n - S_{n-1}$ ਹੈ।

ਆਉ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : A.P. : 8, 3, –2, . . . ਦੇ ਪਹਿਲੇ 22 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $a = 8$, $d = 3 - 8 = -5$ ਅਤੇ $n = 22$ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

ਇਸ ਲਈ $$S = \frac{22}{2}[16 + 21(-5)] = 11(16 - 105) = 11(-89) = -979$$

ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ A.P ਦੇ ਪਹਿਲੇ 22 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ –979 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ 14 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 1050 ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ 10 ਹੈ ਤਾਂ 20 ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇਥੇ $S_{14} = 1050$, $n = 14$ ਅਤੇ $a = 10$ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ $$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

ਇਸ ਲਈ $$1050 = \frac{14}{2}[20 + 13d] = 140 + 91d$$

ਭਾਵ $$910 = 91d$$

ਜਾਂ $$d = 10$$

ਇਸ ਲਈ $$a_{20} = 10 + (20-1) \times 10 = 200$$

ਭਾਵ 20 ਵਾਂ ਪਦ 200 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 13 : A.P. : 24, 21, 18, . . . ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਪਦ ਲਏ ਜਾਣ,ਤਾਂ ਕਿ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ 78 ਹੋਵੇ?

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $a = 24$, $d = 21 - 24 = -3$ ਅਤੇ $S_n = 78$ ਹੈ। ਅਸੀਂ n ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

ਇਸ ਲਈ $$78 = \frac{n}{2}[48 + (n-1)(-3)] = \frac{n}{2}[51 - 3n]$$

ਜਾਂ $$3n^2 - 51n + 156 = 0$$

ਜਾਂ $$n^2 - 17n + 52 = 0$$

ਜਾਂ $$(n-4)(n-13) = 0$$

ਇਸ ਲਈ $$n = 4 \text{ ਜਾਂ } 13$$

n ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਮੁੱਲ ਸੰਭਵ ਹਨ ਅਤੇ ਸਵੀਕਾਰ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਪਦਾਂ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸੰਖਿਆ 4 ਜਾਂ 13 ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ :

1. ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਪਹਿਲੇ 4 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ = ਪਹਿਲੇ 13 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ = 78 ਹੈ।
2. ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਉੱਤਰ ਸੰਭਵ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ 5ਵੇਂ ਤੋਂ 13ਵੇਂ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ। ਇਹ ਇਸ ਲਈ ਹੈ ਕਿ ਇਥੇ a ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ ਅਤੇ d ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ, ਜਿਸ ਨਾਲ ਕੁਝ ਪਦ ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਕੁਝ ਪਦ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਕੱਟ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ:

(i) ਪਹਿਲੀਆਂ 1000 ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (ii) ਪਹਿਲੀਆਂ n ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ

ਹੱਲ :

(i) ਮੰਨ ਲਓ $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 1000$ ਹੈ।

A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਲਈ ਸੂਤਰ $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$S_{1000} = \frac{1000}{2}(1 + 1000) = 500 \times 1001 = 500500$$

ਇਸ ਲਈ, ਪਹਿਲੇ 1000 ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 500500 ਹੈ।

(ii) ਮੰਨ ਲਓ $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ ਹੈ।

ਇਥੇ $a = 1$ ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ $l = n$ ਪਦ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $S_n = \frac{n(1+n)}{2}$ ਜਾਂ $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, **ਪਹਿਲੀਆਂ n ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਸੂਤਰ**

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$ **ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।**

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਉਸ ਲੜੀ ਦੇ ਪਹਿਲੇ 24 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਦਾ n ਵਾਂ ਪਦ $a_n = 3 + 2n$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ :

ਕਿਉਂਕਿ $a_n = 3 + 2n$ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ $a_1 = 3 + 2 = 5$

$a_2 = 3 + 2 \times 2 = 7$

$a_3 = 3 + 2 \times 3 = 9$

$\vdots$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਲੜੀ 5, 7, 9, 11, . . . ਹੈ।

ਇੱਥੇ $7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9 = 2$ ਆਦਿ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, ਇਨ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਇੱਕ A.P. ਬਣਦੀ ਹੈ। ਜਿਸਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ 2 ਹੈ।

S_{24} ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਡੇ ਕੋਲ: $n = 24$, $a = 5$, $d = 2$

ਇਸ ਲਈ $S_{24} = \frac{24}{2}[2\times5 + (24-1)\times2] = 12[10 + 46] = 672$

ਇਸ ਲਈ, ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਲੜੀ ਦੇ ਪਹਿਲੇ 24 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 672 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16 : ਟੀ.ਵੀ. ਸੈੱਟਾਂ ਦਾ ਨਿਰਮਾਤਾ ਤੀਜੇ ਸਾਲ 600 ਟੀ.ਵੀ. ਅਤੇ 7ਵੇਂ ਸਾਲ 700 ਟੀ.ਵੀ. ਸੈੱਟਾਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਹਰ ਸਾਲ ਉਤਪਾਦਨ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਰੂਪ ਨਾਲ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) ਪਹਿਲੇ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਉਤਪਾਦਨ (ii) 10ਵੇਂ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਉਤਪਾਦਨ

(iii) ਪਹਿਲੇ 7 ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਉਤਪਾਦਨ।

ਹੱਲ: (i) ਕਿਉਂਕਿ ਹਰ ਸਾਲ ਉਤਪਾਦਨ ਵਿੱਚ ਸਮਾਨ ਰੂਪ ਨਾਲ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲੇ, ਦੂਸਰੇ, ਤੀਸਰੇ,... ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਉਤਪਾਦਿਤ ਟੀ.ਵੀ ਸੈੱਟਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ A.P ਵਿੱਚ ਹੋਣਗੀਆਂ। ਆਓ nਵੇਂ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਉਤਪਾਦਿਤ ਟੀ.ਵੀ ਸੈੱਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ a_n ਨਾਲ ਦਰਸਾਈਏ।

ਇਸ ਲਈ $a_3 = 600$ ਅਤੇ $a_7 = 700$

ਜਾਂ $a + 2d = 600$

ਅਤੇ $a + 6d = 700$

ਇਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $d = 25$ ਅਤੇ $a = 550$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਪਹਿਲੇ ਸਾਲ ਉਤਪਾਦਿਤ ਟੀ.ਵੀ ਸੈੱਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 550 ਹੈ।

(ii) ਹੁਣ $a_{10} = a + 9d = 550 + 9 \times 25 = 775$

ਇਸ ਲਈ 10ਵੇਂ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਉਤਪਾਦਿਤ ਟੀ.ਵੀ. ਸੈੱਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 775 ਹੈ।

(iii) ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$S_7 = \frac{7}{2}[2 \times 550 + (7-1) \times 25]$$
$$= \frac{7}{2}[1100 + 150] = 4375$$

ਇਸ ਲਈ, ਪਹਿਲੇ 7 ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਬਣਾਏ ਗਏ ਟੀ.ਵੀ. ਸੈੱਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 4375 ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 5.3

1. ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਅੰਕਗਣਿਤਕ ਲੜੀਆਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ:

   (i) 2, 7, 12, . . ., 10 ਪਦਾਂ ਤੱਕ (ii) –37, –33, –29, . . ., 12 ਪਦਾਂ ਤੱਕ

   (iii) 0.6, 1.7, 2.8, . . ., 100 ਪਦਾਂ ਤੱਕ (iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, \ldots$, 11 ਪਦਾਂ ਤੱਕ

2. ਹੇਠ ਦਿੱਤਿਆਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ:

   (i) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + \ldots + 84$ (ii) $34 + 32 + 30 + \ldots + 10$

   (iii) $-5 + (-8) + (-11) + \ldots + (-230)$

3. ਇੱਕ A.P. ਵਿੱਚ

   (i) $a = 5, d = 3$ ਅਤੇ $a_n = 50$ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। n ਅਤੇ S_n ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (ii) $a = 7$ ਅਤੇ $a_{13} = 35$ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। d ਅਤੇ S_{13} ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (iii) $a_{12} = 37$ ਅਤੇ $d = 3$ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। a ਅਤੇ S_{12} ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (iv) $a_3 = 15$ ਅਤੇ $S_{10} = 125$ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। d ਅਤੇ a_{10} ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (v) $d = 5$ ਅਤੇ $S_9 = 75$ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। a ਅਤੇ a_9 ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (vi) $a = 2$, $d = 8$ ਅਤੇ $S_n = 90$ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। n ਅਤੇ a_n ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (vii) $a = 8, a_n = 62$ ਅਤੇ $S_n = 210$ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। n ਅਤੇ d ਪਤਾ ਕਰੋ।

(viii) $a_n = 4$, $d = 2$ ਅਤੇ $S_n = -14$ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। n ਅਤੇ a ਪਤਾ ਕਰੋ।

(ix) $a = 3$, $n = 8$ ਅਤੇ $S = 192$ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। d ਪਤਾ ਕਰੋ।

(x) $l = 28$, $S = 144$ ਅਤੇ ਕੁੱਲ 9 ਪਦ ਹਨ। a ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. 636 ਜੋੜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ A.P. : 9, 17, 25, . . . ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਪਦ ਲੈਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ?

5. ਕਿਸੇ A.P. ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ 5, ਅੰਤਿਮ ਪਦ 45 ਅਤੇ ਜੋੜਫਲ 400 ਹਨ। ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਕਿਸੇ A.P. ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ ਪਦ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 17 ਅਤੇ 350 ਹਨ। ਜੇਕਰ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ 9 ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਪਦ ਹੋਣਗੇ ਅਤੇ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਕਿੰਨਾ ਹੋਵੇਗਾ?

7. ਉਸ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ 22 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $d = 7$ ਹੈ ਅਤੇ 22ਵਾਂ ਪਦ 149 ਹੈ।

8. ਉਸ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ 51 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸਦੇ ਦੂਸਰੇ ਅਤੇ ਤੀਸਰੇ ਪਦ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 14 ਅਤੇ 18 ਹਨ।

9. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ 7 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ 49 ਹੈ ਅਤੇ ਪਹਿਲੇ 17 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 289 ਹੈ; ਤਾਂ ਇਸ ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਦਿਖਾਉ ਕਿ $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ਤੋਂ ਇੱਕ A.P. ਬਣਦੀ ਹੈ, ਜੇਕਰ a_n ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋਵੇ।

(i) $a_n = 3 + 4n$ (ii) $a_n = 9 - 5n$

ਨਾਲ ਹੀ, ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਪਹਿਲੇ 15 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ $4n - n^2$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ (ਭਾਵ S_1) ਕੀ ਹੈ? ਪਹਿਲੇ ਦੋ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਕੀ ਹੈ? ਦੂਜਾ ਪਦ ਕੀ ਹੈ? ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੀਸਰਾ, 10ਵਾਂ ਅਤੇ nਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

12. ਅਜਿਹੀਆਂ ਪਹਿਲੀਆਂ 40 ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ 6 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੋਣ।

13. 8 ਦੇ ਪਹਿਲੇ 15 ਗੁਣਜਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

14. 0 ਅਤੇ 50 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

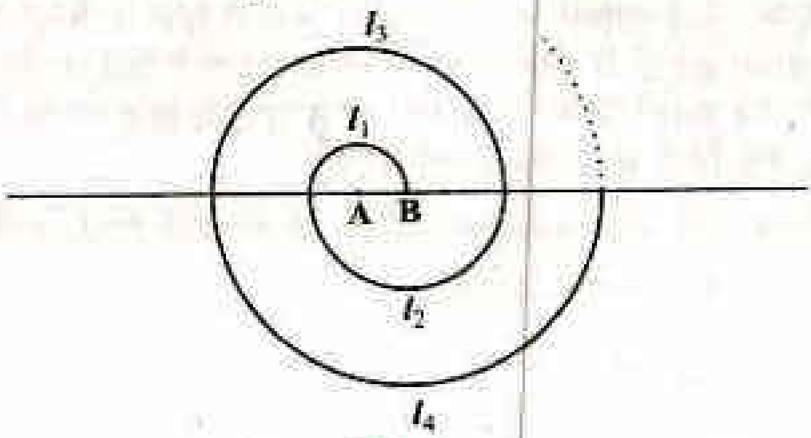
15. ਨਿਰਮਾਣ ਕਾਰਜ ਨਾਲ ਸਬੰਧਤ ਕਿਸੇ ਠੇਕੇ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਮਿਤੀ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਕੰਮ ਦੇਰੀ ਨਾਲ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਜੁਰਮਾਨਾ ਲਗਾਉਣ ਦੀ ਵਿਵਸਥਾ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ : ਪਹਿਲੇ ਦਿਨ ਦੇ ਲਈ ₹ 200, ਦੂਸਰੇ ਦਿਨ ਲਈ ₹ 250 ਤੀਸਰੇ ਦਿਨ ਲਈ ₹ 300 ਆਦਿ ਭਾਵ ਹਰੇਕ ਅਗਲੇ ਦਿਨ ਦਾ ਜੁਰਮਾਨਾ ਆਪਣੇ ਤੋਂ ਠੀਕ ਪਹਿਲੇ ਦਿਨ ਦੇ ਜੁਰਮਾਨੇ ਨਾਲੋਂ ₹ 50 ਵੱਧ ਹੈ। ਇੱਕ

ਠੇਕੇਦਾਰ ਨੂੰ ਜੁਰਮਾਨੇ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀ ਰਕਮ ਦੇਣੀ ਪਵੇਗੀ, ਜੇਕਰ ਉਹ ਇਸ ਕੰਮ ਵਿੱਚ 30 ਦਿਨ ਦੀ ਦੇਰੀ ਕਰ ਦਿੰਦਾ ਹੈ?

16. ਕਿਸੇ ਸਕੂਲ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੁੱਚੇ ਵਿਦਿਅਕ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨ ਲਈ 7 ਨਕਦ ਇਨਾਮ ਦੇਣ ਲਈ ₹ 700 ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ਰੱਖੀ ਗਈ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਇਨਾਮ ਆਪਣੇ ਤੋਂ ਠੀਕ ਪਹਿਲੇ ਇਨਾਮ ਤੋਂ ₹ 20 ਘੱਟ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਇਨਾਮ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

17. ਇੱਕ ਸਕੂਲ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ ਹਵਾ ਪ੍ਰਦੂਸ਼ਣ ਘਟਾਉਣ ਲਈ ਸਕੂਲ ਦੇ ਅੰਦਰ ਅਤੇ ਬਾਹਰ ਪੌਦੇ ਲਗਾਉਣ ਬਾਰੇ ਸੋਚਿਆ। ਇਹ ਫੈਸਲਾ ਲਿਆ ਗਿਆ ਕਿ ਹਰੇਕ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦਾ ਹਰੇਕ ਸੈਕਸ਼ਨ ਆਪਣੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਪੌਦੇ ਲਗਾਵੇਗਾ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਪਹਿਲੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦਾ ਇੱਕ ਸੈਕਸ਼ਨ 1 ਪੌਦਾ ਲਗਾਵੇਗਾ, ਸ਼੍ਰੇਣੀ II ਦਾ ਇੱਕ ਸੈਕਸ਼ਨ 2 ਪੌਦੇ ਲਗਾਵੇਗਾ, ਸ਼੍ਰੇਣੀ III ਦਾ ਇੱਕ ਸੈਕਸ਼ਨ 3 ਪੌਦੇ ਲਗਾਵੇਗਾ, ਆਦਿ, ਅਤੇ ਅਜਿਹਾ ਸ਼੍ਰੇਣੀ XII ਤਕ ਚਲਦਾ ਰਹੇਗਾ। ਹਰੇਕ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦੇ 3 ਸੈਕਸ਼ਨ ਹਨ। ਇਸ ਸਕੂਲ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਲਗਾਏ ਗਏ ਪੌਦਿਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ?

18. ਕੇਂਦਰ A ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਵਾਰੀ-ਵਾਰੀ ਨਾਲ A ਅਤੇ B ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ, ਅਰਧਵਿਆਸ 0.5 cm, 1.0 cm, 1.5 cm, 2.0 cm, ... ਵਾਲੇ ਲਗਾਤਾਰ, ਅਰਧ ਚੱਕਰਾਂ ਨੂੰ ਖਿੱਚ ਕੇ ਇੱਕ ਕੁੰਡਲਦਾਰ (spiral) ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, (ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 5.4 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਤੇਰਾਂ ਲਗਾਤਾਰ ਅਰਧ ਚੱਕਰਾਂ ਤੋਂ ਬਣੇ ਇਸ ਕੁੰਡਲਦਾਰ (Spiral) ਦੀ ਕੁੱਲ ਲੰਬਾਈ ਕੀ ਹੈ? ($\pi = \frac{22}{7}$ ਲਓ)



ਚਿੱਤਰ 5.4

[ਸੰਕੇਤ : ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਕੇਂਦਰ A, B, A, B, ... ਵਾਲੇ ਅਰਧ ਚੱਕਰਾਂ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ l_1, l_2, l_3, l_4 ਹਨ।]

19. 200 ਮੋਟੀਆਂ ਲੱਕੜਾਂ (Logs) ਦੀ ਢੇਰੀ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਰੱਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਭ ਤੋਂ ਹੇਠਾਂ ਵਾਲੀ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ 20 ਮੋਟੀਆਂ ਲੱਕੜਾਂ ਉਸਤੋਂ ਅਗਲੀ ਕਰਤਾਰ ਵਿੱਚ 19 ਮੋਟੀਆਂ ਲੱਕੜਾਂ ਉਸ ਤੋਂ ਅਗਲੀ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ 18 ਮੋਟੀਆਂ ਲੱਕੜਾਂ ਆਦਿ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 5.5)। ਇਹ 200 ਮੋਟੀਆਂ ਲੱਕੜਾਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਕਤਾਰਾ ਵਿੱਚ ਰੱਖੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਸਭ ਤੋਂ ਉਪਰਲੀ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀਆਂ ਮੋਟੀਆਂ ਲੱਕੜਾਂ ਹਨ?

ਚਿੱਤਰ 5.5

20. ਇੱਕ ਆਲੂ ਦੌੜ (potato race) ਵਿੱਚ ਆਰੰਭਿਕ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਾਲਟੀ ਰੱਖੀ ਹੋਈ ਹੈ ਜੋ ਪਹਿਲੇ ਆਲੂ ਤੋਂ 5 ਮੀਟਰ ਦੂਰ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਆਲੂਆਂ ਨੂੰ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਵਿੱਚ 3 m ਦੀ ਆਪਸੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਰੱਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਰੇਖਾ ਉੱਤੇ 10 ਆਲੂ ਰੱਖੇ ਗਏ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 5.6)।

ਚਿੱਤਰ 5.6

ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਤਿਯੋਗੀ ਬਾਲਟੀ ਤੋਂ ਚਲਣਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੀ ਹੈ, ਨਜ਼ਦੀਕ ਤੋਂ ਨਜ਼ਦੀਕ ਵਾਲੇ ਆਲੂ ਨੂੰ ਚੁੱਕਦੀ ਹੈ, ਉਸਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਵਾਪਿਸ ਆ ਕੇ (ਦੌੜ ਕੇ) ਬਾਲਟੀ ਵਿੱਚ ਪਾ ਦਿੰਦੀ ਹੈ, ਦੂਸਰਾ ਆਲੂ ਚੁੱਕਣ ਲਈ ਵਾਪਸ ਦੌੜਦੀ ਹੈ, ਉਸ ਨੂੰ ਚੁੱਕ ਕੇ ਵਾਪਿਸ ਬਾਲਟੀ ਵਿੱਚ ਪਾ ਦਿੰਦੀ ਹੈ, ਅਤੇ ਉਹ ਅਜਿਹਾ ਉਦੋਂ ਤੱਕ ਕਰਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਸਾਰੇ ਆਲੂ ਬਾਲਟੀ ਵਿੱਚ ਨਾ ਆ ਜਾਣ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਯੋਗੀ ਨੂੰ ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਨੀ ਪਵੇਗੀ?

[ਸੰਕੇਤ : ਪਹਿਲੇ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਆਲੂਆਂ ਨੂੰ ਚੁੱਕ ਕੇ ਬਾਲਟੀ ਵਿੱਚ ਪਾਉਣ ਲਈ ਦੌੜੀ ਗਈ ਦੂਰੀ $= 2 \times 5 + 2 \times (5 + 3)$ ਹੈ।]

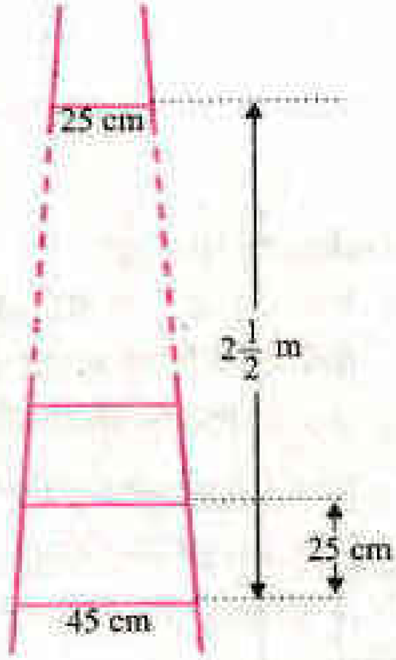
ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 5.4 (ਇੱਛਾ ਅਨੁਸਾਰ)*

1. A.P. : 121, 117, 113, . . ., ਦਾ ਕਿਹੜਾ ਪਦ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾ ਰਿਣਾਤਮਕ ਪਦ ਹੋਵੇਗਾ?
[ਸੰਕੇਤ : $a_n < 0$ ਦੇ ਲਈ n ਪਤਾ ਕਰੋ।]

2. ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ ਤੀਸਰੇ ਅਤੇ ਸੱਤਵੇਂ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 6 ਹੈ ਅਤੇ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ 8 ਹੈ। ਇਸ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ 16 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

* ਇਹ ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰੀਖਿਆਂ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

3. ਇੱਕ ਪੌੜੀ ਦੇ ਲਗਾਤਾਰ ਡੰਡੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ 25 cm ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 5.7)। ਡੰਡਿਆਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਰੂਪ ਨਾਲ ਘਟਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਸਭ ਤੋਂ ਹੇਠਲੇ ਡੰਡੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 45 cm ਹੈ ਅਤੇ ਸਭ ਤੋਂ ਉਪਰਲੇ ਡੰਡੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 25 cm ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਪਰਲੇ ਅਤੇ ਹੇਠਲੇ ਡੰਡੇ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਦੂਰੀ $2\frac{1}{2}$ m ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਡੰਡਿਆਂ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਲੱਕੜੀ ਦੀ ਕਿੰਨੀ ਲੰਬਾਈ ਦੀ ਲੋੜ ਹੋਵੇਗੀ?



ਚਿੱਤਰ 5.7

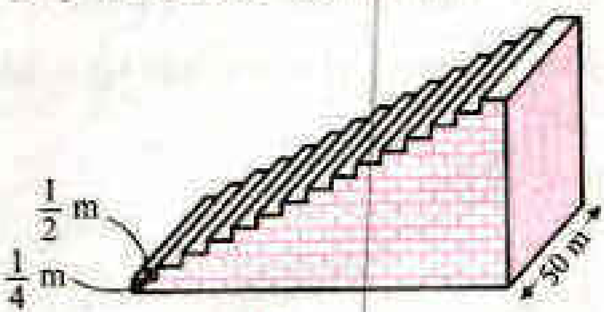
[ਸੰਕੇਤ : ਡੰਡਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = $\frac{250}{25}+1$ ਹੈ।]

4. ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ ਮਕਾਨਾਂ ਨੂੰ ਲਗਾਤਾਰ ਸੰਖਿਆ 1 ਤੋਂ 49 ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਦਿਖਾਉ ਕਿ x ਦਾ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਮੁੱਲ ਹੈ ਕਿ x ਨਾਲ ਦਰਸਾਏ ਮਕਾਨ ਤੋਂ ਪਹਿਲੇ ਦੇ ਮਕਾਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਉਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਾਲੇ ਮਕਾਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

[ਸੰਕੇਤ : $S_{x-1} = S_{49} - S_x$ ਹੈ]

5. ਇੱਕ ਫੁੱਟਬਾਲ ਦੇ ਮੈਦਾਨ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਛੋਟਾ ਚਬੂਤਰਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ 15 ਪੌੜੀਆਂ ਬਣੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਹਨ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਪੌੜੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 50 m ਹੈ ਅਤੇ ਉਹ ਠੋਸ ਕੰਕਰੀਟ ਦੀ ਬਣੀ ਹੋਈ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਪੌੜੀ ਵਿੱਚ $\frac{1}{4}$ m ਦੀ ਚੜ੍ਹਾਈ ਅਤੇ $\frac{1}{2}$ m ਦਾ ਫੈਲਾਵ (ਚੌੜਾਈ) ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 5.8)। ਇਸ ਚਬੂਤਰੇ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਲੱਗੀ ਕੰਕਰੀਟ ਦਾ ਕੁੱਲ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

[ਸੰਕੇਤ : ਪਹਿਲੀ ਪੌੜੀ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਲੱਗੀ ਕੰਕਰੀਟ ਦਾ ਆਇਤਨ = $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 50\ m^3$ ਹੈ]



ਚਿੱਤਰ 5.8

5.5 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ :

1. ਇੱਕ ਅੰਕ ਗਣਿਤਕ ਲੜੀ, ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਸੂਚੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪਦ (ਪਹਿਲੇ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ) ਆਪਣੇ ਤੋਂ ਠੀਕ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸੰਖਿਆ (d) ਜੋੜ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸੰਖਿਆ d ਇਸ ਅੰਕ ਗਣਿਤਕ ਲੜੀ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ।

   ਇੱਕ A.P. ਦਾ ਆਮ ਰੂਪ $a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$ ਹੈ।

2. ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸੂਚੀ A.P. ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅੰਤਰ $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots$ ਤੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ ਭਾਵ k ਦੇ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ $a_{k+1} - a_k$ ਇੱਕੋ ਹੋਵੇ।

3. ਪਹਿਲਾ ਪਦ a ਅਤੇ ਸਾਂਝੇ ਅੰਤਰ d ਵਾਲੀ A.P. ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ (ਜਾਂ ਵਿਆਪਕ ਪਦ) a_n ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$a_n = a + (n-1)d$$

4. ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ S ਸੂਤਰ

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

5. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੀਮਿਤ A.P. ਦਾ ਅੰਤਿਮ ਪਦ (ਮੰਨ ਲਉ n ਵਾਂ ਪਦ) l ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ A.P. ਦੇ ਸਾਰੇ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ S ਸੂਤਰ

$$S = \frac{n}{2}(a + l)$$ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪਾਠਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼

ਜੇਕਰ a, b, c, A.P. ਵਿੱਚ ਹਨ ਤਾਂ $b = \frac{a+c}{2}$ ਅਤੇ b, a ਅਤੇ c ਦਾ ਅੰਕ ਗਣਿਤਕ ਮੱਧਮਾਨ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਤ੍ਰਿਭੁਜ 6

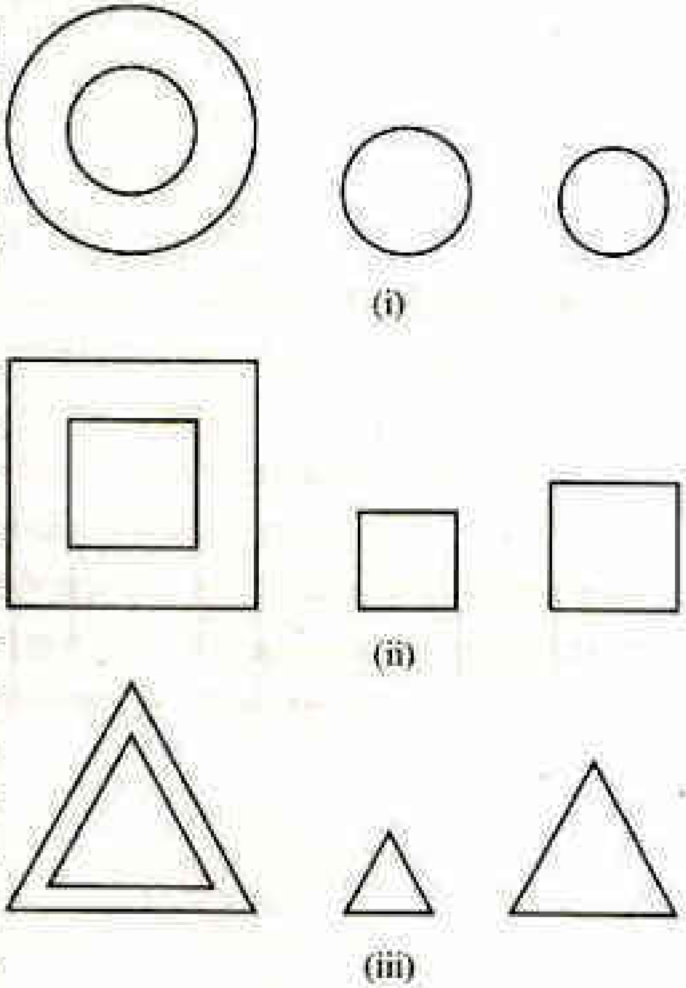
6.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੀ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਤੋਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਅਤੇ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਤੋਂ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਾਣੂ ਹੋ। ਜਮਾਤ ਨੌਵੀਂ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਦੇ ਬਾਰੇ (ਵਿਸਥਾਰ) ਨਾਲ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਨੂੰ ਸਰਬੰਗਸਮ ਉਦੋਂ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਸਮਾਨ ਆਕਾਰ ਅਤੇ ਸਮਾਨ ਮਾਪ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਅਜਿਹੀਆਂ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਬਾਰੇ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਆਕਾਰ (shape) ਸਮਾਨ ਹੋਣ ਪ੍ਰੰਤੂ ਮਾਪ (size) ਦਾ ਸਮਾਨ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਦੋ ਚਿੱਤਰ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਆਕਾਰ ਸਮਾਨ ਹੋਣ (ਪ੍ਰੰਤੂ ਮਾਪ ਸਮਾਨ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ) ਸਮਰੂਪ ਚਿੱਤਰ (similar figures) ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਸ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਪਹਿਲਾਂ ਪੜ੍ਹੀ ਹੋਈ ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਆਸਾਨ ਪ੍ਰਮਾਣ ਦੇਵਾਂਗੇ।

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਪਹਾੜਾਂ (ਜਿਵੇਂ ਮਾਊਂਟ ਐਵਰੇਸਟ) ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਜਾਂ ਦੂਰ ਦੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ (ਜਿਵੇਂ ਚੰਦਰਮਾਂ) ਦੀਆਂ ਦੂਰੀਆਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕੀਤੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ? ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਸੋਚਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਮਾਪਣ ਵਾਲੇ ਫੀਤੇ ਨਾਲ ਸਿੱਧਾ ਮਾਪਿਆ ਗਿਆ ਹੈ? ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਉੱਚਾਈਆਂ ਅਤੇ ਦੂਰੀਆਂ ਨੂੰ ਅਪ੍ਰਤੱਖ ਮਾਪਣ ਵਿਧੀ (indirect measurement) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਮਾਪਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਜੋ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਉੱਤੇ ਨਿਰਭਰ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਉਦਾਹਰਣ 7, ਅਭਿਆਸ 6.3 ਦਾ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 15 ਅਤੇ ਇਸੇ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਅਧਿਆਇ 8 ਅਤੇ 9)।

6.2 ਸਮਰੂਪ ਚਿੱਤਰ

ਜਮਾਤ ਨੌਵੀਂ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਬਰਾਬਰ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਸਾਰੇ ਚੱਕਰ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੀ ਭੁਜਾ ਵਾਲੇ ਸਾਰੇ ਵਰਗ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੀ ਭੁਜਾ ਵਾਲੇ ਸਾਰੇ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।



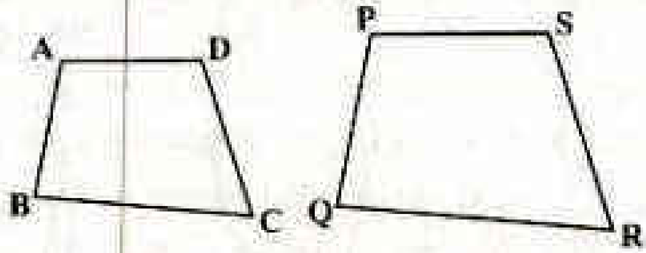
ਚਿੱਤਰ 6.1

ਹੁਣ ਕਿਸੇ ਦੋ (ਜਾਂ ਅਧਿਕ) ਚੱਕਰਾਂ ਉੱਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.1 (i)]। ਕੀ ਇਹ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹਨ? ਕਿਉਂਕਿ ਇਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਾਰਿਆਂ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਇਹ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸਰਬੰਗਸਮ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਇਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹਨ ਅਤੇ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਆਕਾਰ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਇਹ ਸਾਰੇ ਉਹ ਚਿੱਤਰ ਹਨ ਜਿਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸਮਰੂਪ (similar) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਦੋ ਸਮਰੂਪ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੇ ਆਕਾਰ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਨਾਂ ਦੇ ਮਾਪ ਸਮਾਨ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਸਾਰੇ ਚੱਕਰ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਦੋ ਜਾਂ ਅਧਿਕ ਵਰਗਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਂ ਦੋ ਅਧਿਕ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਸੋਚਦੇ ਹੋ? [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.1 (ii) ਅਤੇ (iii)] ਸਾਰੇ ਚੱਕਰਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ, ਇਥੇ ਸਾਰੇ ਵਰਗ ਸਮਰੂਪ ਹਨ ਅਤੇ ਸਾਰੀਆਂ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਮਰੂਪ ਹਨ।

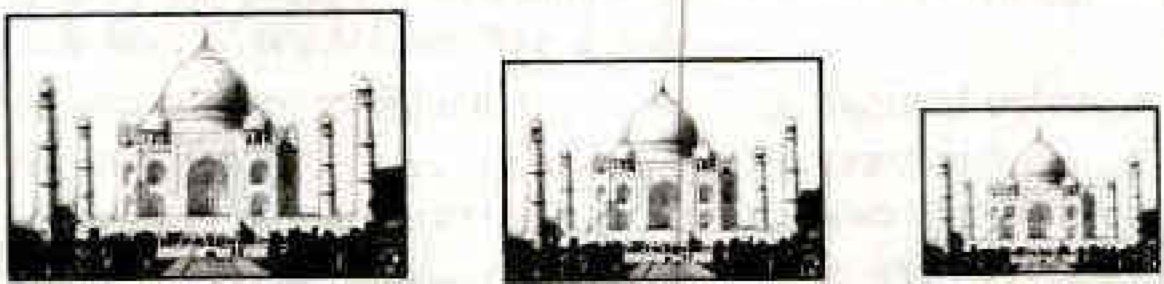
ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਤੋਂ, ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਰੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਚਿੱਤਰ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਸਾਰੇ ਸਮਰੂਪ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦਾ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਕੀ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਅਤੇ ਇੱਕ ਵਰਗ ਸਮਰੂਪ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ? ਕੀ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਅਤੇ ਇੱਕ ਵਰਗ ਸਮਰੂਪ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ? ਇਨਾਂ ਚਿੱਤਰਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖਦਿਆਂ ਹੀ ਤੁਸੀਂ ਉੱਤਰ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹੋ [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.1]। ਸਪਸ਼ਟ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਇਹ ਚਿੱਤਰ ਸਮਰੂਪ ਨਹੀਂ ਹਨ। (ਕਿਉਂ?)

ਤੁਸੀਂ ਦੋ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ABCD ਅਤੇ PQRS ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ? [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.2] ਕੀ ਇਹ ਚਿੱਤਰ ਸਮਰੂਪ ਹਨ? ਇਹ ਚਿੱਤਰ ਸਮਰੂਪ ਜਾਪਦੇ ਹਨ ਪ੍ਰੰਤੂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੂਪ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਜਰੂਰੀ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਸਮਰੂਪ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਪਤਾ ਕਰੀਏ ਅਤੇ ਇਸ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੇ ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਦੋ ਚਿੱਤਰ ਸਮਰੂਪ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ, ਕੁਝ ਨਿਯਮ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਆਓ ਚਿੱਤਰ 6.3 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਚਿੱਤਰਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖੀਏ :



ਚਿੱਤਰ 6.2


ਚਿੱਤਰ 6.3

ਤੁਸੀਂ ਤਰੁੰਤ ਹੀ ਕਹੋਗੇ ਕਿ ਇਹ ਇੱਕ ਹੀ ਯਾਦਗਾਰ (ਤਾਜ ਮਹਿਲ) ਦੇ ਚਿੱਤਰ ਹਨ ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਮਾਪ ਦੇ ਹਨ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਕਹੋਗੇ ਕਿ ਇਹ ਚਿੱਤਰ ਸਮਰੂਪ ਹਨ? ਹਾਂ, ਇਹ ਹਨ। ਤੁਸੀਂ ਇਕੋ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਇਕੋ ਮਾਪ ਵਾਲੇ ਉਨਾਂ ਦੇ ਚਿੱਤਰਾਂ ਬਾਰੇ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ਜਿਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਉਸਦੀ 10 ਸਾਲ ਦੀ ਉਮਰ ਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਉਸਦੀ 40 ਸਾਲ ਦੀ ਉਮਰ ਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਚਿੱਤਰ ਸਮਰੂਪ ਹਨ? ਇਹ ਚਿੱਤਰ ਸਮਾਨ ਮਾਪ ਦੇ ਹਨ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੂਪ ਨਾਲ ਇਹ ਸਮਾਨ ਆਕਾਰ ਵਾਲੇ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਇਹ ਸਮਰੂਪ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਜਦੋਂ ਕੋਈ ਫੋਟੋਗ੍ਰਾਫਰ ਇੱਕ ਹੀ ਨੈਗੇਟਿਵ ਨਾਲ ਭਿੰਨ-2 ਮਾਪਾਂ ਵਾਲੇ ਫੋਟੋ ਪ੍ਰਿਟ ਕੱਢਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਕੀ ਕਰਦਾ ਹੈ? ਤੁਸੀਂ ਟਿਕਟ ਸਾਈਜ਼, ਪਾਸਪੋਰਟ ਸਾਈਜ਼ ਅਤੇ ਪੋਸਟ ਕਾਰਡ ਸਾਈਜ਼ ਫੋਟੋ (ਜਾਂ ਚਿੱਤਰਾਂ) ਬਾਰੇ ਜ਼ਰੂਰ ਸੁਣਿਆ ਹੋਵੇਗਾ। ਉਹ ਸਾਧਾਰਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਛੋਟੇ ਮਾਪ (size) ਦੀ ਫਿਲਮ (film), ਮੰਨ ਲਓ 35 mm ਮਾਪ ਦੀ ਫਿਲਮ ਹੈ, ਉਤੇ ਫੋਟੋ ਖਿੱਚਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਫਿਰ ਉਸ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵੱਡੇ ਮਾਪ, ਜਿਵੇਂ 45 mm (ਜਾਂ 55 mm) ਮਾਪ ਵਾਲੀ ਫੋਟੋ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਧਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਛੋਟੇ ਚਿੱਤਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਰੇਖਾ-ਖੰਡ ਨੂੰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਵੱਡੇ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਇਸ ਦਾ ਸੰਗਤ

ਰੇਖਾਖੰਡ ਲੰਬਾਈ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਦਾ $\frac{45}{35}$ $\left(\text{ਜਾਂ } \frac{55}{35}\right)$ ਗੁਣਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਛੋਟੇ ਚਿੱਤਰ ਦਾ ਹਰੇਕ ਰੇਖਾਖੰਡ 35 : 45 (ਜਾਂ 35 : 55) ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਵੱਡੇ ਚਿੱਤਰ ਦਾ ਹਰੇਕ ਰੇਖਾਖੰਡ 45 : 35 (ਜਾਂ 55 :35) ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ-2 ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਭਿੰਨ-2 ਮਾਪ ਵਾਲੇ ਦੋ ਚਿੱਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਸੰਗਤ ਰੇਖਾਖੰਡਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਜੋੜੇ ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ ਬਣੇ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਲਵੋਂਗੇ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਇਹ ਕੋਣ ਹਮੇਸ਼ਾ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣਗੇ। ਇਹੀ ਦੋ ਚਿੱਤਰਾਂ ਅਤੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕਰਕੇ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਦਾ ਸਾਰ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ:

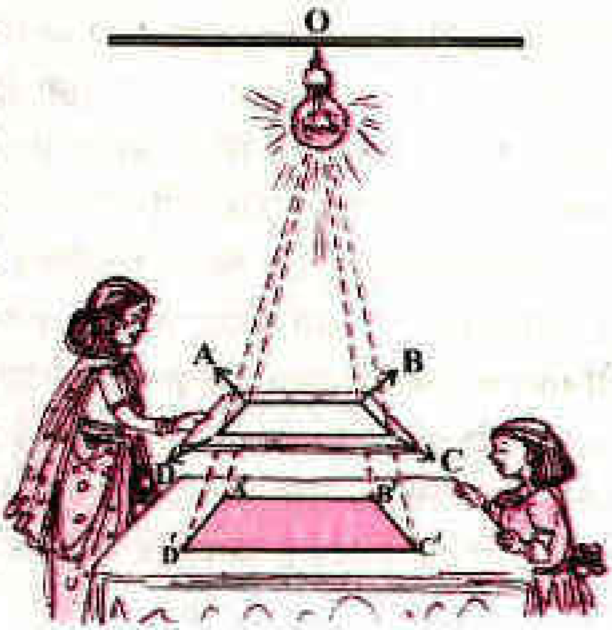
ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਸਮਾਨ ਸੰਖਿਆ ਵਾਲੇ ਦੋ ਬਹੁਭੁਜ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ (i) ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ (ii) ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੋਣ (ਭਾਵ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ) ਹੋਣ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਬਹੁਭੁਜਾਂ ਲਈ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਇਸ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਨੂੰ *ਸਕੇਲ ਗੁਣਕ (scale factor)*[ਜਾਂ *ਪ੍ਰਤੀਨਿਧਤਵ ਭਿੰਨ (Representative Fraction)*] ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਜਰੂਰ ਸੁਣਿਆ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ *ਸੰਸਾਰ ਦਾ ਨਕਸ਼ਾ* ਅਤੇ ਭਵਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਲਈ ਬਣਾਈ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੂਪ ਰੇਖਾ ਇੱਕ ਉਪਯੁਕਤ ਸਕੇਲ ਗੁਣਕ ਅਤੇ ਕੁਝ ਰਿਵਾਇਤਾਂ (conventions) ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖ ਕੇ ਬਣਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਨੂੰ ਵੱਧ ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਨਾਲ ਸਮਝਾਉਣ ਲਈ ਆਉ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਕਿਰਿਆ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਕਿਰਿਆ 1 : ਆਪਣੀ ਜਮਾਤ ਦੇ ਕਮਰੇ ਦੀ ਛੱਤ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ O 'ਤੇ ਰੋਸ਼ਨੀਵਾਲਾ ਬੱਲਬ ਲਗਾਉ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਠੀਕ ਹੇਠਾਂ ਇੱਕ ਮੇਜ਼ ਰੱਖੋ। ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਗੱਤੇ ਵਿਚੋਂ ਇੱਕ ਬਹੁਭੁਜ, ਮੰਨ ਲਉ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD, ਕੱਟੋ ਅਤੇ ਇਸ ਗੱਤੇ ਨੂੰ ਜਮੀਨ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਮੇਜ਼ ਅਤੇ ਜਗਦੇ ਹੋਏ ਬੱਲਬ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਰੱਖੋ। ਮੇਜ਼ 'ਤੇ ABCD ਦਾ ਇੱਕ ਪਰਛਾਵਾਂ ਬਣੇਗਾ। ਇਸ ਦੀ ਬਾਹਰੀ ਰੂਪ ਰੇਖਾ ਨੂੰ A′B′C′D′ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.4)।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਚਤੁਰਭੁਜ A′B′C′D′ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦਾ ਇੱਕ ਆਕਾਰ ਵਡਿਆਉਣਾ



ਚਿੱਤਰ 6.4

(Enlargement) ਜਾਂ ਵੱਡਾ ਰੂਪ ਹੈ। ਇਹ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ ਦੇ ਇਸ ਗੁਣ ਕਾਰਣ ਹੈ ਕਿ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ ਸਿਧੀ ਰੇਖਾ ਵਿੱਚ ਚੱਲਦਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ A′ ਕਿਰਨ OA ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ, B′ ਕਿਰਨ OB ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ, C′ ਕਿਰਣ OC ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ ਅਤੇ D′ ਕਿਰਣ OD ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਚਤੁਰਭੁਜ A′B′C′D′ ਅਤੇ ABCD ਸਮਾਨ ਆਕਾਰ ਦੇ ਹਨ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਮਾਪ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, ਚਤੁਰਭੁਜ A′B′C′D′ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ABCD ਚਤੁਰਭੁਜ A′B′C′D′ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਹੈ।

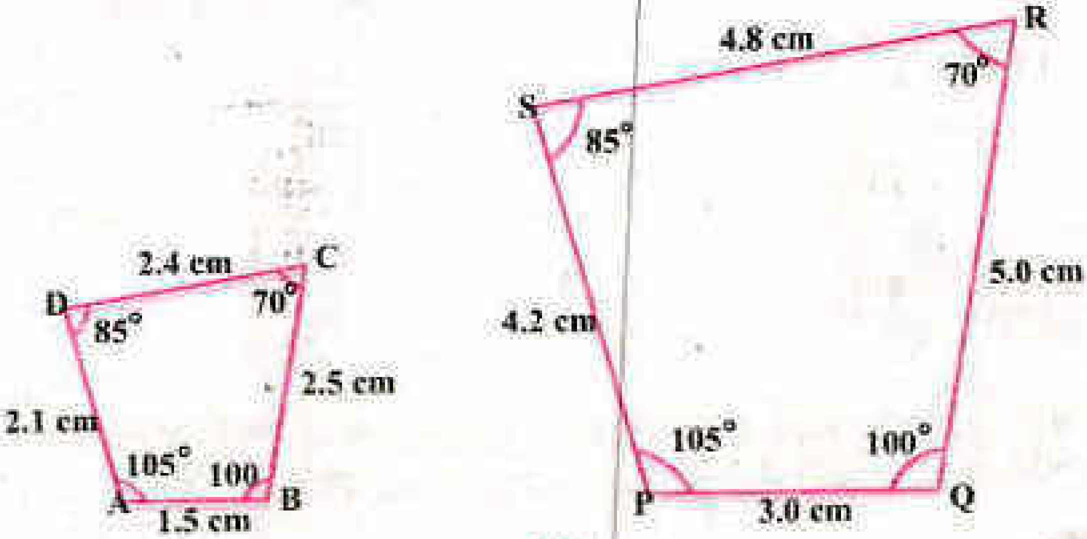
ਇੱਥੇ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਸਿਖਰ A′ ਸਿਖਰ A ਦੇ ਸੰਗਤ ਹੈ, ਸਿਖਰ B′ ਸਿਖਰ B ਦੇ ਸੰਗਤ ਹੈ, ਸਿਖਰ C′ ਸਿਖਰ C ਦੇ ਸੰਗਤ ਹੈ ਅਤੇ ਸਿਖਰ D′ ਸਿਖਰ D ਦੇ ਸੰਗਤ ਹੈ। ਸੰਕੇਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਨ੍ਹਾਂ ਸੰਗਤਤਾਵਾਂ (correspondences) ਨੂੰ $A' \leftrightarrow A$, $B' \leftrightarrow B$, $C' \leftrightarrow C$ ਅਤੇ $D' \leftrightarrow D$ ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਦੋਵੇਂ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਦੇ ਕੋਣਾਂ ਅਤੇ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਅਸਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਮਾਪ ਕੇ, ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਦਿਖਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ

(i) $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$ ਅਤੇ

(ii) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'}$.

ਇਸ ਨਾਲ ਦੁਬਾਰਾ ਇਹ ਗੱਲ ਸਪਸ਼ਟ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਕਿ *ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਸਮਾਨ ਸੰਖਿਆ ਵਾਲੇ ਦੋ ਬਹੁਭੁਜ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ (i) ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਅਤੇ (ii) ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ (ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤ) ਵਿੱਚ ਹੋਣ।*

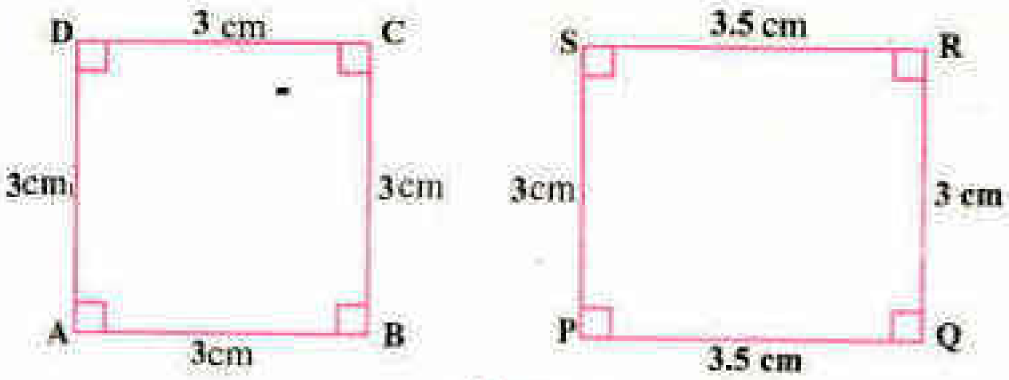
ਉਪਰੋਕਤ ਦੇ ਆਧਾਰ 'ਤੇ, ਤੁਸੀਂ ਆਸਾਨੀ ਨਾਲ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 6.5 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਅਤੇ PQRS ਸਮਰੂਪ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 6.5

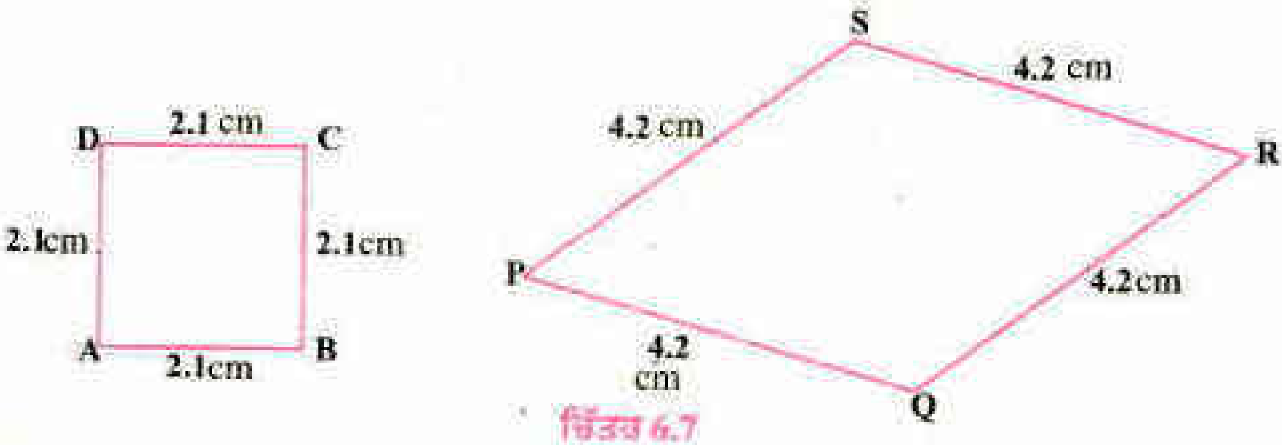
ਟਿੱਪਣੀ : ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਵਿਖਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਬਹੁਭੁਜ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਬਹੁਭੁਜ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਇਹ ਦੂਸਰਾ ਬਹੁਭੁਜ ਇੱਕ ਤੀਸਰੇ ਬਹੁਭੁਜ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਪਹਿਲਾ ਬਹੁਭੁਜ ਤੀਸਰੇ ਬਹੁਭੁਜ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਹੋਵੇਗਾ।

ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 6.6 ਵਿੱਚ ਦੋ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ (ਵਿੱਚ ਵਰਗ ਅਤੇ ਇੱਕ ਆਇਤ) ਵਿੱਚ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹਨ ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕੋ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਚਤੁਰਭੁਜ ਸਮਰੂਪ ਨਹੀਂ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 6.6

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 6.7 ਦੀਆਂ ਦੋ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ (ਇੱਕ ਵਰਗ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ) ਵਿੱਚ, ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ.ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਬਹੁਭੁਜਾਂ (ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ) ਵੀ ਸਮਰੂਪ ਨਹੀਂ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 6.7

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਦੋ ਬਹੁਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਦੇ ਲਈ ਸ਼ਰਤਾਂ (i) ਅਤੇ (ii) ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਦਾ ਹੀ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੋਣਾ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਲਈ ਕਾਫ਼ੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 6.1

1. ਬਰੈਕਟਾਂ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਹੀ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਖਾਲੀ ਸਥਾਨ ਭਰੋ :
   (i) ਸਾਰੇ ਚੱਕਰ ———— ਹੁੰਦੇ ਹਨ। (ਸਰਬੰਗਸਮ, ਸਮਰੂਪ)

(ii) ਸਾਰੇ ਵਰਗ———— ਹੁੰਦੇ ਹਨ। (ਸਮਰੂਪ, ਸਰਬੰਗਸਮ)

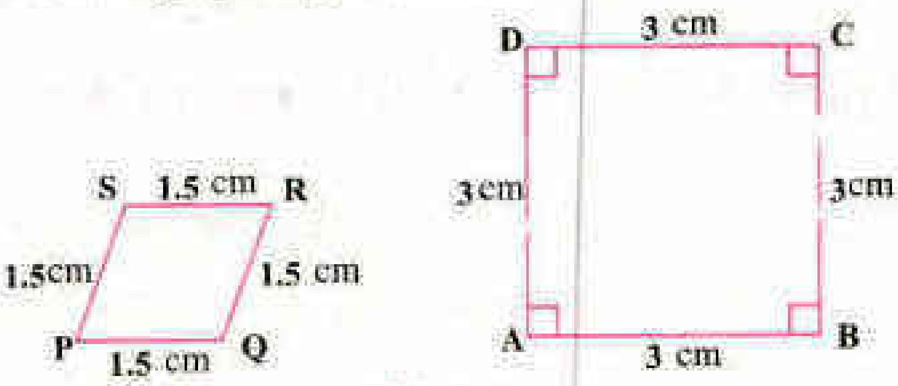
(iii) ਸਾਰੇ ———— ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ (ਸਮਦੋਭੁਜੀ, ਸਮਭੁਜੀ)

(iv) ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਸੰਖਿਆ ਵਾਲੇ ਦੋ ਬਹੁਭੁਜ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ (i) ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ———— ਹੋਣ ਅਤੇ (ii) ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ———— ਹੋਣ। (ਬਰਾਬਰ, ਸਮਾਨੁਪਾਤੀ)

2. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੀਆ ਦੋ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦਿਉ :

(i) ਸਮਰੂਪ ਚਿੱਤਰ (ii) ਅਜਿਹੇ ਚਿੱਤਰ ਜੋ ਸਮਰੂਪ ਨਹੀਂ ਹਨ।

3. ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਸਮਰੂਪ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ



ਚਿੱਤਰ 6.8

6.3 ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ

ਤੁਸੀਂ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ?

ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਵੀ ਇੱਕ ਬਹੁਭੁਜ ਹੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਲਈ ਵੀ ਉਹੀ ਸ਼ਰਤਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜੋ ਬਹੁਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾਂ ਲਈ ਲਿਖੀਆਂ ਸਨ। ਭਾਵ

ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਜੇਕਰ

(i) ਉਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਅਤੇ

(ii) ਉਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ (ਭਾਵ ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤੀ) ਹੋਣ

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਜੇਕਰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਉਹ ਸਮਾਨ ਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ (equiangular triangles) ਕਹਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਇੱਕ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਯੂਨਾਨੀ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸਤਰੀ ਥੇਲਸ (Thales) ਨੇ ਦੋ ਸਮਾਨ ਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਲਈ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਤੱਥ ਬਾਰੇ ਦੱਸਿਆ ਜੋ ਅੱਗੇ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ:

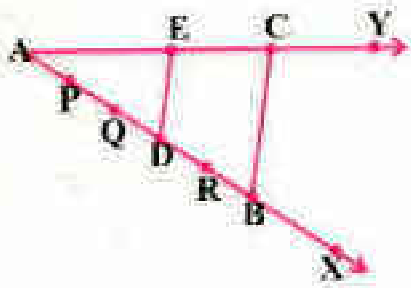
ਥੇਲਸ
(ਈ.ਪੂ. 640 – 546)

ਦੋ ਸਮਾਨ ਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਹਮੇਸ਼ਾ ਸਮਾਨ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।

ਅਜਿਹਾ ਵਿਸ਼ਵਾਸ਼ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਉਨ੍ਹਾਂ ਨੇ ਇੱਕ ਪਰਿਣਾਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਿਸਨੂੰ ਮੂਲ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤਤਾ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਅੱਜਕਲ ਥੇਲਸ ਪ੍ਰਮੇਯ) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਮੂਲ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤਤਾ ਪ੍ਰਮੇਯ (Basic Proportionality Theorem) ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਲਈ ਆਓ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਕਿਰਿਆ ਕਰੀਏ:

ਕਿਰਿਆ 2 : ਕੋਈ ਕੋਣ XAY ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਇੱਕ ਭੁਜਾ AX ਉੱਤੇ ਕੁਝ ਬਿੰਦੂ (ਮੰਨ ਲਉ ਪੰਜ ਬਿੰਦੂ) P, Q, D, R ਅਤੇ B ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ ਕਿ AP = PQ = QD = DR = RB ਹੋਵੇ।



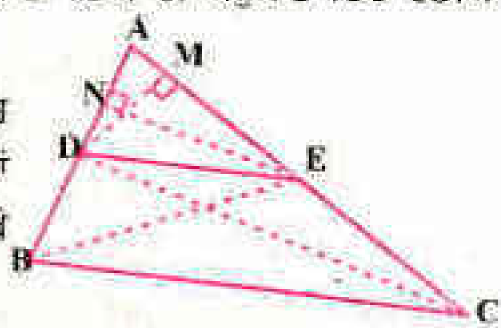
ਚਿੱਤਰ 6.9

ਹੁਣ ਬਿੰਦੂ B ਤੋਂ ਹੁੰਦੀ ਹੋਈ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੋ, ਜੋ ਭੁਜਾ AY ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ C 'ਤੇ ਕੱਟੇ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.9)।

ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ, ਬਿੰਦੂ D ਤੋਂ BC ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੋ, ਜੋ AC ਨੂੰ E 'ਤੇ ਕੱਟੇ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੀਆਂ ਰਚਨਾਵਾਂ ਤੋਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$ ਹੈ? AE ਅਤੇ EC ਨੂੰ ਮਾਪੋ। $\frac{AE}{EC}$ ਕੀ ਹੈ? ਦੇਖੋ $\frac{AE}{EC}$ ਵੀ $\frac{3}{2}$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ΔABC ਵਿੱਚ $DE \parallel BC$ ਹੈ ਅਤੇ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ਹੈ। ਕੀ ਇਹ ਸਿਰਫ਼ ਸੰਜੋਗ ਹੈ? ਨਹੀਂ, ਇਹ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਕਾਰਨ ਹੈ (ਜਿਸ ਨੂੰ ਮੂਲ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤਤਾ ਪ੍ਰਮੇਯ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ) :

ਪ੍ਰਮੇਯ 6.1: *ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਬਾਕੀ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੋਈ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੀ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।*

ਸਬੂਤ : ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਭੁਜਾ BC ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਬਾਕੀ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ AB ਅਤੇ AC ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ D ਅਤੇ E ਉੱਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.10)।



ਚਿੱਤਰ 6.10

ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

ਆਉ B ਅਤੇ E ਅਤੇ C ਅਤੇ D ਨੂੰ ਮਿਲਾਈਏ ਅਤੇ ਫਿਰ $DM \perp AC$ ਅਤੇ $EN \perp AB$ ਖਿੱਚੀਏ।

ਹੁਣ, Δ ADE ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ($\frac{1}{2}$ ਆਧਾਰ × ਉੱਚਾਈ) = $\frac{1}{2}$ AD × EN

ਜਮਾਤ ਨੌਵੀਂ ਤੋਂ ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ Δ ADE ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ar (ADE) ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\quad ar(ADE) = \frac{1}{2} AD \times EN$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $\quad ar(BDE) = \frac{1}{2} DB \times EN,$

$ar(ADE) = \frac{1}{2} AE \times DM$ ਅਤੇ $ar(DEC) = \frac{1}{2} EC \times DM$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{ar(ADE)}{ar(BDE)} = \frac{\frac{1}{2} AD \times EN}{\frac{1}{2} DB \times EN} = \frac{AD}{DB} \qquad (1)$$

ਅਤੇ
$$\frac{ar(ADE)}{ar(DEC)} = \frac{\frac{1}{2} AE \times DM}{\frac{1}{2} EC \times DM} = \frac{AE}{EC} \qquad (2)$$

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ Δ BDE ਅਤੇ Δ DEC ਇੱਕ ਹੀ ਆਧਾਰ DE ਅਤੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ BC ਅਤੇ DE ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਬਣੇ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $\quad ar(BDE) = ar(DEC) \qquad (3)$

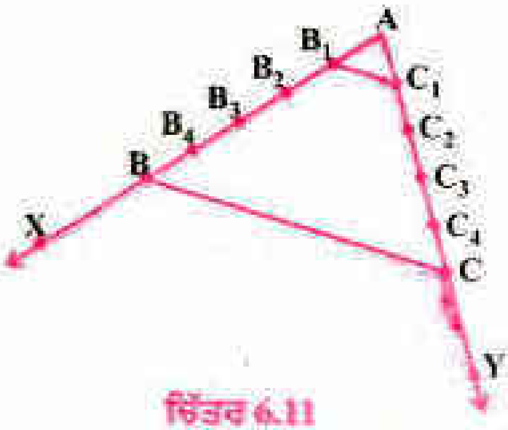
ਇਸ ਲਈ (1), (2) ਅਤੇ (3), ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

ਕੀ ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਉਲਟ (ਵਿਲੋਮ) ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ (ਉਲਟ ਦੇ ਅਰਥ ਲਈ ਅੰਤਿਕਾ 1 ਦੇਖੋ) ਇਸ ਦੀ ਜਾਂਚ ਲਈ, ਆਓ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਕਿਰਿਆ ਕਰੀਏ :

ਕਿਰਿਆ 3 : ਆਪਣੀ ਕਾਪੀ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਕੋਣ XAY ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ ਕਿਰਣ AX 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ B_1, B_2, B_3, B_4 ਅਤੇ B ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ ਕਿ $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B$ ਹੋਵੇ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਕਿਰਣ AY, ਉੱਤੇ ਬਿੰਦੂ C_1, C_2, C_3, C_4 ਅਤੇ C ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ ਕਿ $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C$ ਹੋਵੇ। ਫਿਰ B_1C_1 ਅਤੇ BC ਨੂੰ ਮਿਲਾਓ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.11)।



ਚਿੱਤਰ 6.11

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C}$ (ਹਰੇਕ $\frac{1}{4}$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ)

ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਰੇਖਾਵਾਂ B_1C_1 ਅਤੇ BC ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ, ਭਾਵ

$$B_1C_1 \parallel BC \qquad (1)$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਕ੍ਰਮਵਾਰ B_2C_2, B_3C_3 ਅਤੇ B_4C_4 ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਕੇ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ

$$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C}\left(=\frac{2}{3}\right) \text{ ਅਤੇ } B_2C_2 \parallel BC \qquad (2)$$

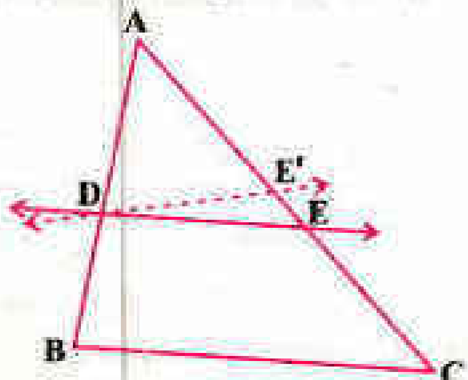
$$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C}\left(=\frac{3}{2}\right) \text{ ਅਤੇ } B_3C_3 \parallel BC, \qquad (3)$$

$$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C}\left(=\frac{4}{1}\right) \text{ ਅਤੇ } B_4C_4 \parallel BC \qquad (4)$$

(1), (2), (3) ਅਤੇ (4) ਤੋਂ, ਇਹ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਰੇਖਾ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕੋ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡੇ, ਤਾਂ ਉਹ ਤੀਸਰੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਮਾਨ ਅੰਤਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਤੁਸੀਂ ਕੋਈ ਹੋਰ ਮਾਪ ਦਾ ਕੋਣ XAY ਖਿੱਚ ਕੇ ਅਤੇ ਭੁਜਾਵਾਂ AX ਅਤੇ AY ਉੱਤੇ ਕਿੰਨੇ ਵੀ ਸਮਾਨ ਭਾਗ ਅੰਕਿਤ ਕਰਕੇ ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਹਰੇਕ ਵਾਰ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਹੀ ਸਿੱਟੇ 'ਤੇ ਪਹੁੰਚੋਗੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਪ੍ਰਮੇਯ 6.1 ਦਾ ਉਲਟ ਹੈ:

ਪ੍ਰਮੇਯ 6.2 : *ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਰੇਖਾ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡੇ ਤਾਂ ਉਹ ਤੀਸਰੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।*



ਚਿੱਤਰ 6.12

ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਰੇਖਾ DE ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਈਏ ਤਾਂ ਕਿ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ਹੋਵੇ ਅਤੇ DE ਭੁਜਾ BC ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਨਾ ਹੋਵੇ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.12)।

ਹੁਣ ਜੇਕਰ DE ਭੁਜਾ BC ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਤਾਂ BC ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ DE′ ਖਿਚੋ।

ਇਸ ਲਈ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ $\frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$ (ਕਿਉਂ?)

ਉਪਰੋਕਤ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪਾਸਿਆਂ ਵਿੱਚ 1 ਜੋੜ ਕੇ, ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ E ਅਤੇ E' ਨੂੰ ਜ਼ਰੂਰ ਹੀ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ (ਕਿਉਂ?) ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰਨ ਲਈ ਆਓ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਰੇਖਾ ਕਿਸੇ ΔABC ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ AB ਅਤੇ AC ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ D ਅਤੇ E ਉਤੇ ਕੱਟੇ ਅਤੇ ਭੁਜਾ BC ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ਹੋਵੇਗਾ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.13)।

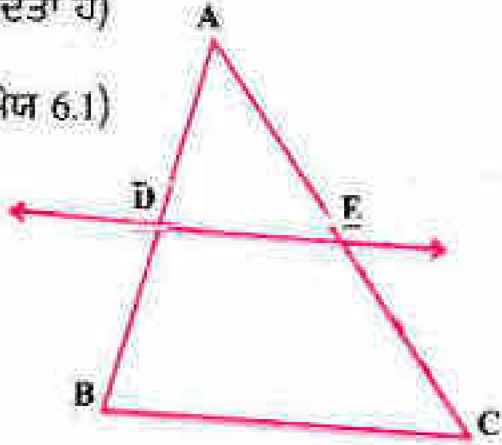
ਹੱਲ : $DE \parallel BC$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

ਇਸ ਲਈ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (ਪ੍ਰਮੇਯ 6.1)

ਭਾਵ $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

ਜਾਂ $\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$

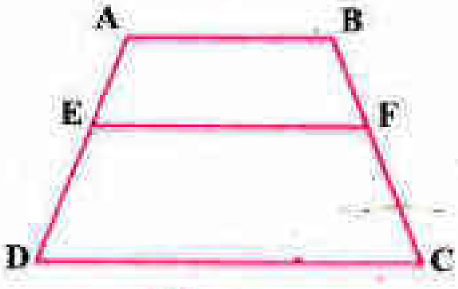
ਜਾਂ $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$



ਚਿੱਤਰ 6.13

ਇਸ ਲਈ $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ABCD ਇੱਕ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $AB \parallel DC$ ਹੈ। ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾਵਾਂ AD ਅਤੇ BC ਉਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂ E ਅਤੇ F ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਸਥਿਤ ਹਨ ਕਿ EF ਭੁਜਾ AB ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.14)।



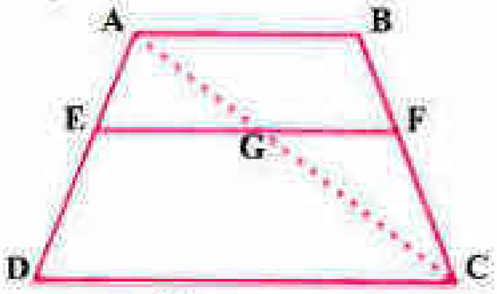
ਚਿੱਤਰ 6.14

ਦਿਖਾਓ ਕਿ $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਆਓ A ਅਤੇ C ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਜੋ EF ਨੂੰ G 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.15)।

$AB \parallel DC$ ਅਤੇ $EF \parallel AB$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

ਇਸ ਲਈ $EF \parallel DC$ (ਇੱਕੋ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ, ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ)



ਚਿੱਤਰ 6.15

ਹੁਣ ΔADC ਵਿੱਚ,

$EG \parallel DC$ (ਕਿਉਂਕਿ $EF \parallel DC$)

ਇਸ ਲਈ $\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$ (ਪ੍ਰਮੇਯ 6.1) (1)

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ΔCAB ਵਿੱਚ

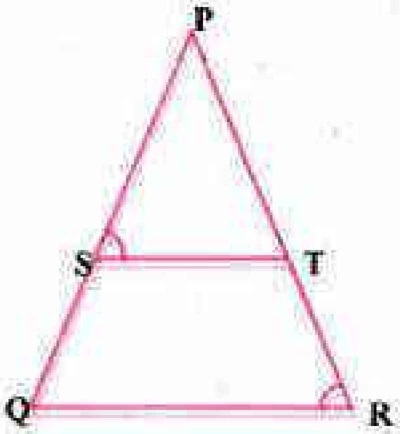
$$\frac{CG}{AG} = \frac{CF}{BF}$$

ਭਾਵ $$\frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC} \quad (2)$$

ਇਸ ਲਈ (1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਚਿੱਤਰ 6.16 ਵਿੱਚ $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ ਹੈ ਅਤੇ $\angle PST = \angle PRQ$ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ΔPQR ਇੱਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.16

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ, $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$

ਇਸ ਲਈ $ST \parallel QR$ (ਪ੍ਰਮੇਯ 6.2)

ਇਸ ਲਈ $\angle PST = \angle PQR$ (ਸੰਗਤ ਕੋਣ) (1)

ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਇਹ ਵੀ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ

$$\angle PST = \angle PRQ \quad (2)$$

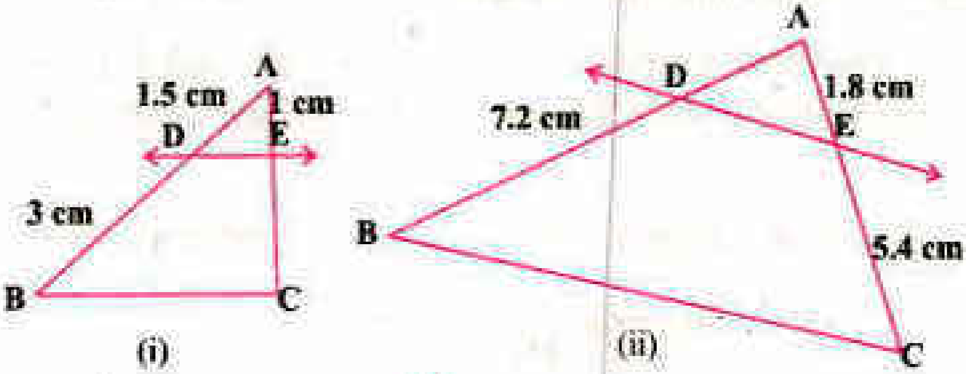
ਇਸ ਲਈ $\angle PRQ = \angle PQR$ [(1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ]

ਇਸ ਲਈ $PQ = PR$ (ਬਰਾਬਰ ਕੋਣਾਂ ਦੀਆਂ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ)

ਭਾਵ ΔPQR ਇੱਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।

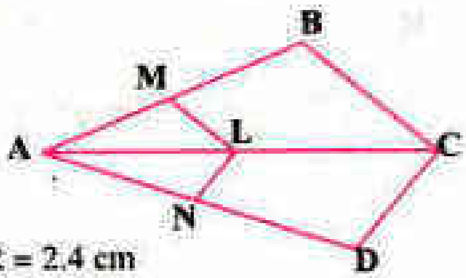
ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 6.2

1. ਚਿੱਤਰ 6.17 (i) ਅਤੇ (ii) ਵਿੱਚ, DE || BC ਹੈ। (i) ਵਿੱਚ EC ਅਤੇ (ii) ਵਿੱਚ AD ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ:



ਚਿੱਤਰ 6.17

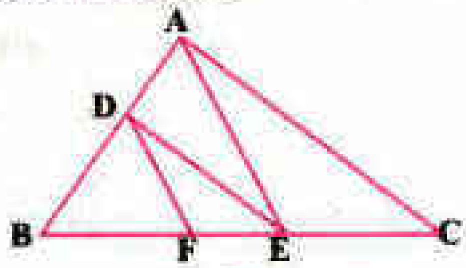
2. ਕਿਸੇ Δ PQR ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ PQ ਅਤੇ PR ਉੱਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂ E ਅਤੇ F ਸਥਿਤ ਹਨ। ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਦੱਸੋ ਕਿ, ਕੀ EF || QR ਹੈ:
   (i) PE = 3.9 cm, EQ = 3 cm, PF = 3.6 cm ਅਤੇ FR = 2.4 cm
   (ii) PE = 4 cm, QE = 4.5 cm, PF = 8 cm ਅਤੇ RF = 9 cm
   (iii) PQ = 1.28 cm, PR = 2.56 cm, PE = 0.18 cm ਅਤੇ PF = 0.36 cm



ਚਿੱਤਰ 6.18

3. ਚਿੱਤਰ 6.18 ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ LM || CB ਅਤੇ LN || CD ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$ ਹੈ।

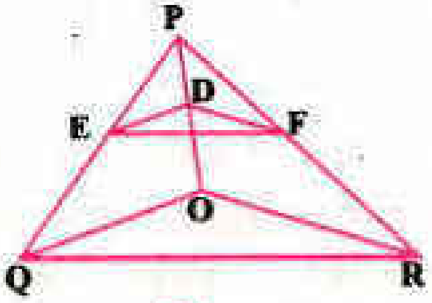
4. ਚਿੱਤਰ 6.19 ਵਿੱਚ DE || AC ਅਤੇ DF || AE ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$ ਹੈ।



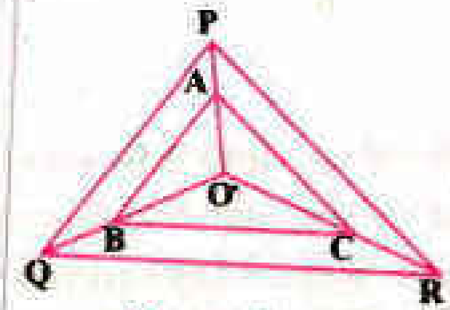
ਚਿੱਤਰ 6.19

5. ਚਿੱਤਰ 6.20 ਵਿੱਚ DE || OQ ਅਤੇ DF || OR ਹੈ। ਦਿਖਾਉ ਕਿ EF || QR ਹੈ।

6. ਚਿੱਤਰ 6.21 ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮਵਾਰ OP, OQ ਅਤੇ OR ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ A, B ਅਤੇ C ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ AB || PQ ਅਤੇ AC || PR ਹੈ। ਦਰਸਾਓ ਕਿ BC || QR ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.20



ਚਿੱਤਰ 6.21

7. ਪ੍ਰਮੇਯ 6.1 ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਦੂਸਰੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਰੇਖਾ ਤੀਸਰੀ ਭੁਜਾ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ। (ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ)।

8. ਪ੍ਰਮੇਯ 6.2 ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਕਿਸੇ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਤੀਸਰੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। (ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਅਜਿਹਾ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ)।

9. ABCD ਇੱਕ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ AB ∥ DC ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ O 'ਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ। ਦਿਖਾਓ ਕਿ $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ ਹੈ।

10. ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ O ਉੱਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੱਟਦੇ ਹਨ ਕਿ $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ ਹੈ। ਦਿਖਾਓ ਕਿ ABCD ਇੱਕ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ।

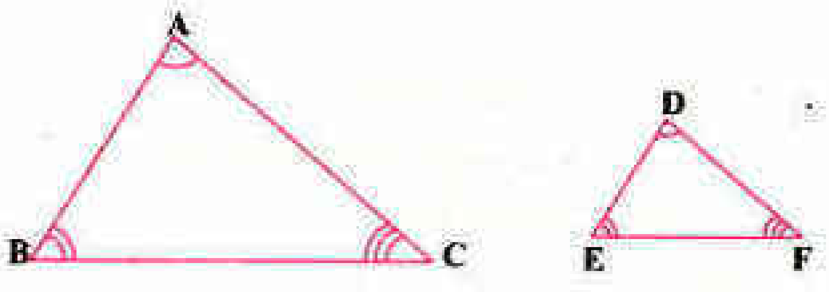
6.4 ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਲਈ ਮਾਪਦੰਡ (ਕਸੌਟੀਆਂ)

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਿਹਾ ਸੀ ਕਿ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜੇਕਰ (i) ਉਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਅਤੇ (ii) ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ (ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤ) ਹੋਣ। ਭਾਵ

ਜੇਕਰ Δ ABC ਅਤੇ Δ DEF ਵਿੱਚ,

(i) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ ਹੈ ਅਤੇ

(ii) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਦੋਵੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.22)।



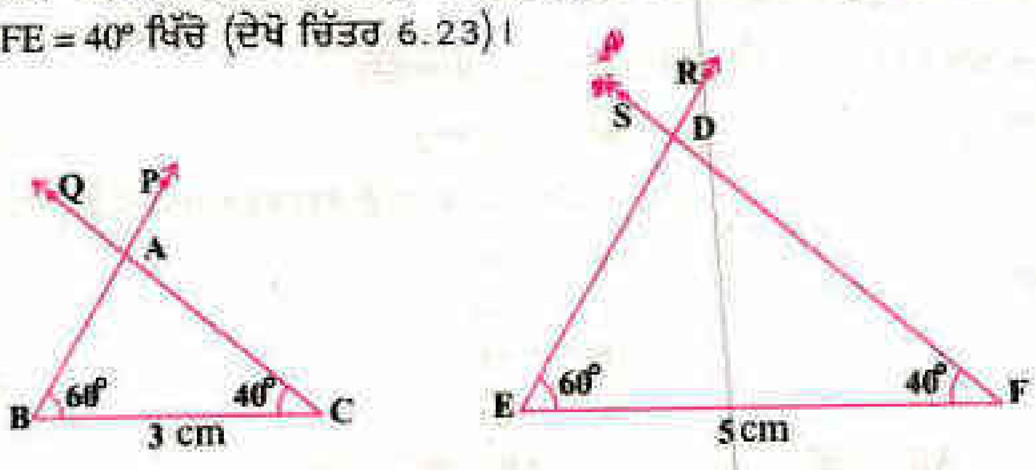
ਚਿੱਤਰ 6.22

ਇੱਥੇ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ A, D ਦੇ ਸੰਗਤ ਹੈ ; B, E ਦੇ ਸੰਗਤ ਹੈ ਅਤੇ C, F ਦੇ ਸੰਗਤ ਹੈ। ਸੰਕੇਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇਨਾਂ ਤ੍ਰਿਭਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਨੂੰ 'Δ ABC ~ Δ DEF' ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ 'ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਸਮਰੂਪ ਹੈ ਤ੍ਰਿਭੁਜ DEF ਦੇ' ਪੜਦੇ ਹਾਂ। ਸੰਕੇਤ '~' 'ਸਮਰੂਪ' ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ 'ਸਰਬੰਗਸਮ' ਦੇ ਲਈ ਸੰਕੇਤ '≅' ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਸੀ।

ਇਸ ਗੱਲ ਵੱਲ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਧਿਆਨ ਦੇਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸੀ, ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਨੂੰ ਵੀ ਸੰਕੇਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦੀ ਸੰਗਤਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਹੀ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਚਿੱਤਰ 6.22 ਦੀਆਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ABC ਅਤੇ DEF ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ $\Delta ABC \sim \Delta EDF$ ਜਾਂ $\Delta ABC \sim \Delta FED$ ਨਹੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਪ੍ਰੰਤੂ ਅਸੀਂ $\Delta BAC \sim \Delta EDF$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਹੁਣ ਇੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਉਠਦਾ ਹੈ: ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਮੰਨ ਲਓ ABC ਅਤੇ DEF ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਦੀ ਜਾਂਚ ਲਈ ਕੀ ਅਸੀਂ ਹਮੇਸ਼ਾ ਉਸ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੀ ਸਮਾਨਤਾ ($\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$) ਅਤੇ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੀ ਸਮਾਨਤਾ $\left(\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}\right)$ ਉੱਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ? ਆਓ ਇਸ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੀਏ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਲਈ ਕੁਝ ਅਜਿਹੇ ਮਾਪਦੰਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਸਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਭਾਗਾਂ ਦੇ ਸਿਰਫ਼ ਤਿੰਨ ਜੋੜੇ ਹੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੁੰਦੇ ਸਨ। ਇਥੇ ਵੀ ਆਓ ਅਸੀਂ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਲਈ ਕੁਝ ਅਜਿਹੀਆਂ ਕਸੌਟੀਆਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਛੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੀ ਥਾਂ 'ਤੇ ਇਨ੍ਹਾਂ ਸੰਗਤ ਭਾਗਾਂ ਦੇ ਘੱਟ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੀ ਸੰਬੰਧ ਸਥਾਪਿਤ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਆਓ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਕਿਰਿਆ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਕਿਰਿਆ 4 : ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੇ, ਮੰਨ ਲਓ 3 cm ਅਤੇ 5 cm ਵਾਲੇ, ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਦੋ ਰੇਖਾਖੰਡ BC ਅਤੇ EF ਖਿੱਚੋ। ਫਿਰ ਬਿੰਦੂਆਂ B ਅਤੇ C ਉੱਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\angle PBC$ ਅਤੇ $\angle QCB$ ਕੋਈ ਵੀ ਮਾਪ, ਮੰਨ ਲਓ 60° ਅਤੇ 40° ਦੇ ਬਣਾਓ। ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ ਬਿੰਦੂਆਂ E ਅਤੇ F 'ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\angle REF = 60^\circ$ ਅਤੇ $\angle SFE = 40^\circ$ ਖਿੱਚੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.23)।



ਚਿੱਤਰ 6.23

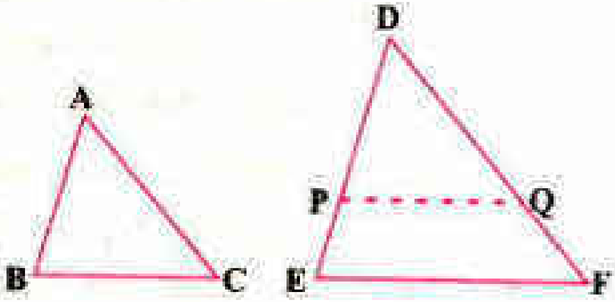
ਮੰਨ ਲਓ ਕਿਰਣਾਂ BP ਅਤੇ CQ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ A ਉੱਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਕਿਰਣ ER ਅਤੇ FS ਆਪਸ ਵਿੱਚ D 'ਤੇ ਕਟਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਅਤੇ DEF ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ਕਿ $\angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ ਅਤੇ $\angle A = \angle D$ ਹਨ ਭਾਵ ਇਨ੍ਹਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ

ਹਨ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $\frac{BC}{EF} = \frac{3}{5} = 0.6$ ਹੈ। $\frac{AB}{DE}$ ਅਤੇ $\frac{CA}{FD}$ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ? AB, DE, CA ਅਤੇ FD ਨੂੰ ਮਾਪਣ 'ਤੇ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ $\frac{AB}{DE}$ ਅਤੇ $\frac{CA}{FD}$ ਵੀ 0.6 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹਨ (ਜਾਂ ਲਗਭਗ 0.6 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਮਾਪਣ ਵਿੱਚ ਗਲਤੀ ਹੋਵੇ)। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਸਮਾਨ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਵਾਲੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਅਨੇਕਾਂ ਜੋੜੇ ਖਿੱਚ ਕੇ ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਹਰੇਕ ਵਾਰ ਤੁਸੀਂ ਵੇਖੋਗੇ ਕਿ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ ਹਨ। ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਕਸੌਟੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ:

ਪ੍ਰਮੇਯ 6.3 : *ਜੇਕਰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਵੀ ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤੀ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।*

ਉਪਰੋਕਤ ਕਸੌਟੀ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਨੂੰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ *ਸਮਰੂਪਤਾ ਲਈ* AAA (ਕੋਣ-ਕੋਣ-ਕੋਣ) ਕਸੌਟੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਦੋ ਅਜਿਹੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਅਤੇ DEF ਲੈ ਕੇ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ ਅਤੇ $\angle C = \angle F$ ਹੋਵੇ, ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.24)।



ਚਿੱਤਰ 6.24

DP = AB ਅਤੇ DQ = AC ਕੱਟੋ ਅਤੇ P ਅਤੇ Q ਨੂੰ ਮਿਲਾਉ।

ਇਸ ਲਈ $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਤੋਂ $\angle B = \angle P = \angle E$ ਅਤੇ $PQ \parallel EF$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ (ਕਿਵੇਂ?)

ਇਸ ਲਈ $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ (ਕਿਉਂ?)

ਭਾਵ $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

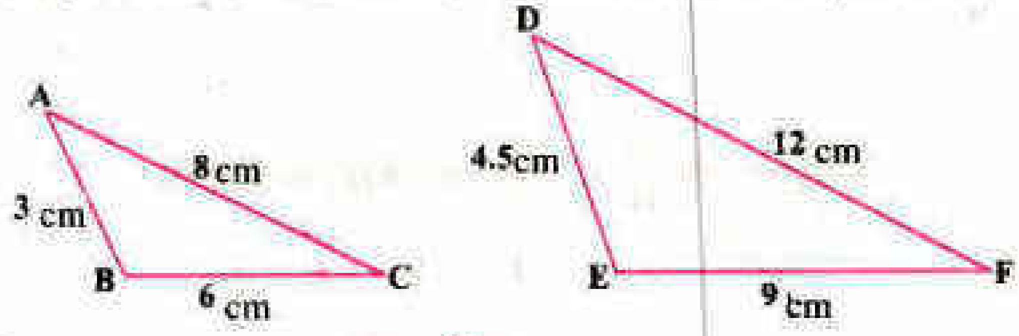
ਟਿੱਪਣੀ : ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਕੋਣ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕੋਣ ਜੋੜ ਗੁਣ ਦੇ ਕਾਰਣ, ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਤੀਸਰੇ ਕੋਣ ਵੀ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਲਈ AAA ਕਸੌਟੀ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ:

ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਕੋਣ ਇੱਕ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਦੋ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਉਪਰੋਕਤ ਨੂੰ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਲਈ AA ਕਸੌਟੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉੱਪਰ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਤਿੰਨੇ ਕੋਣ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਦੂਸਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਤਿੰਨੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਸਮਾਨੁਪਾਤੀ (ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ) ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਕਥਨ ਦੇ ਉਲਟ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਕੀ ਇਹ ਉਲਟ ਸੱਚ ਹੈ ? ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਦੂਸਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਕੀ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ ਕਿ ਇਨ੍ਹਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹਨ? ਆਓ ਇੱਕ ਕਿਰਿਆ ਰਾਹੀਂ ਜਾਂਚ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਕਿਰਿਆ 5 : ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ABC ਅਤੇ DEF ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਬਣਾਓ ਕਿ AB = 3 cm, BC = 6 cm, CA = 8 cm, DE = 4.5 cm, EF = 9 cm ਅਤੇ FD = 12 cm ਹੋਵੇ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.25)।



ਚਿੱਤਰ 6.25

ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ: $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (ਹਰੇਕ $\frac{2}{3}$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ)

ਹੁਣ $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$ ਅਤੇ $\angle F$ ਨੂੰ ਮਾਪੋ। ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ ਅਤੇ $\angle C = \angle F$ ਹੈ, ਭਾਵ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

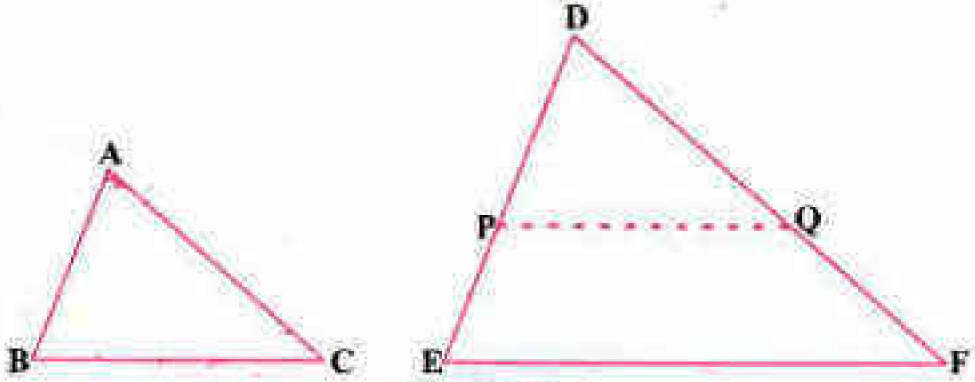
ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਅਨੇਕਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਖਿੱਚ ਕੇ (ਜਿੰਨ੍ਹਾ ਵਿੱਚ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਇੱਕ ਹੀ ਹੋਣ), ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਹਰੇਕ ਵਾਰ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਪਾਉਗੇ ਕਿ ਇਨ੍ਹਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹਨ। ਇਹ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਦੀ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਕਸੌਟੀ ਦੇ ਕਾਰਣ ਹੈ:

ਪ੍ਰਮੇਯ 6.4 : ਜੇਕਰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੂਸਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤੀ (ਭਾਵ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ) ਹੋਣ, ਤਾਂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਇਸ ਕਸੌਟੀ ਨੂੰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ *ਸਮਰੂਪਤਾ* ਦੀ SSS (ਭੁਜਾ-ਭੁਜਾ-ਭੁਜਾ) *ਕਸੌਟੀ* ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਅਜਿਹੀਆਂ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ABC ਅਤੇ DEF ਲੈ ਕੇ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}$ ਹੋਵੇ, ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.26) :

ΔDEF ਵਿੱਚ $DP = AB$ ਅਤੇ $DQ = AC$ ਕੱਟੋ ਅਤੇ P ਅਤੇ Q ਨੂੰ ਮਿਲਾਉ।



ਚਿੱਤਰ 6.26

ਇਥੇ ਇਹ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ $\frac{DP}{PE}=\frac{DQ}{QF}$ ਅਤੇ $PQ \parallel EF$ ਹੈ (ਕਿਵੇਂ?)

ਇਸ ਲਈ $\angle P = \angle E$ ਅਤੇ $\angle Q = \angle F$.

ਇਸ ਲਈ $\frac{DP}{DE}=\frac{DQ}{DF}=\frac{PQ}{EF}$

ਜਿਸ ਤੋਂ $\frac{DP}{DE}=\frac{DQ}{DF}=\frac{BC}{EF}$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ $BC = PQ$ (ਕਿਉਂ?)

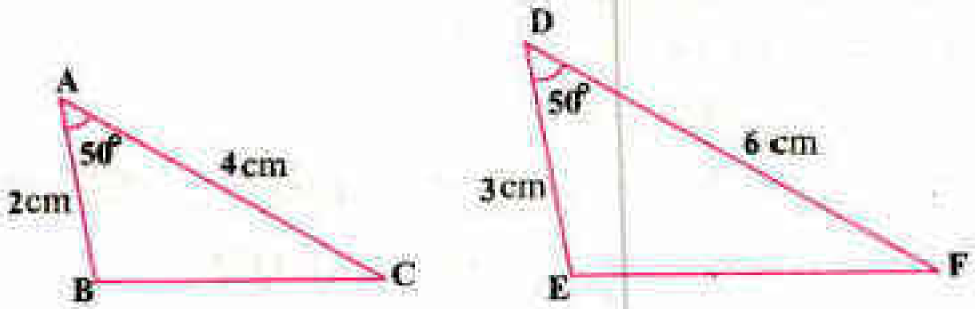
ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ ਅਤੇ $\angle C = \angle F$ (ਕਿਵੇਂ?)

ਟਿੱਪਣੀ : ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਦੋ ਬਹੁਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ (ਸ਼ਰਤਾਂ) ਭਾਵ (i) ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਅਤੇ (ii) ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੋਣ, ਵਿਚੋਂ ਕੇਵਲ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਦਾ ਹੀ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੋਣਾ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਦੇ ਲਈ ਕਾਫ਼ੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਪ੍ਰਮੇਯ 6.3 ਅਤੇ 6.4 ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੇ ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੋਵੇਂ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਨਾਲ ਦੂਸਰਾ ਆਪਣੇ ਆਪ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਦੀਆਂ ਉਨ੍ਹਾਂ ਕਸੌਟੀਆਂ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਅਸੀਂ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹੀਆਂ ਸਨ। ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ਕਿ SSS ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ ਦੀ ਤੁਲਨਾ, SSS ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਕਸੌਟੀ ਨਾਲ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਸੰਕੇਤ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਲਈ ਅਜਿਹੀ ਕਸੌਟੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇ ਜਿਸਦੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਲਈ SAS ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਕਸੌਟੀ ਨਾਲ ਤੁਲਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕੇ। ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਆਉ ਇੱਕ ਕਿਰਿਆ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਕਿਰਿਆ 6 : ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ABC ਅਤੇ DEF ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣਾਓ ਕਿ AB = 2 cm, $\angle A = 50°$, AC = 4 cm, DE = 3 cm, $\angle D = 50°$ ਅਤੇ DF = 6 cm ਹੋਵੇ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.27)।



ਚਿੱਤਰ 6.27

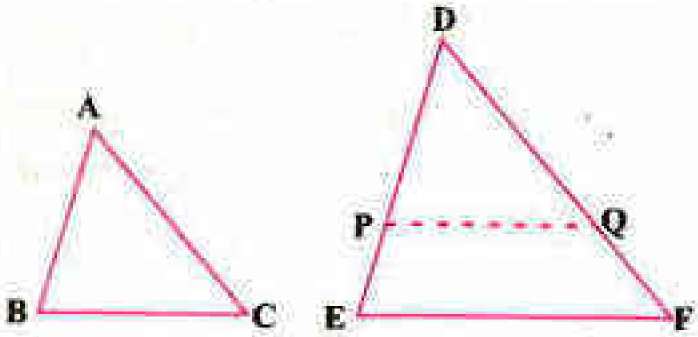
ਇਥੇ, ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (ਹਰੇਕ $\frac{2}{3}$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ) ਅਤੇ $\angle A$(ਭੁਜਾਵਾਂ AB ਅਤੇ AC ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ) = $\angle D$(ਭੁਜਾਵਾਂ DE ਅਤੇ DF ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ) ਹੈ। ਭਾਵ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਇੱਕ ਕੋਣ ਦੂਸਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਇੱਕ ਕੋਣ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਨ੍ਹਾਂ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ (ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤੀ) ਹਨ। ਹੁਣ, ਆਉ $\angle B$, $\angle C$, $\angle E$ ਅਤੇ $\angle F$ ਨੂੰ ਮਾਪੋ।

ਤੁਸੀਂ ਵੇਖੋਗੇ ਕਿ $\angle B = \angle E$ ਅਤੇ $\angle C = \angle F$ ਹੈ। ਭਾਵ, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ ਅਤੇ $\angle C = \angle F$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ AAA ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ ਤੋਂ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਅਜਿਹੇ ਅਨੇਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਖਿੱਚ ਕੇ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਇੱਕ ਕੋਣ ਦੂਸਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਇੱਕ ਕੋਣ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਇਨ੍ਹਾਂ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ (ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤੀ) ਹੋਣ, ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਹਰੇਕ ਵਾਰ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਮਰੂਪ ਹਨ। ਇਹ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਦੀ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਕਸੌਟੀ ਦੇ ਕਾਰਣ ਹਨ:

ਪ੍ਰਮੇਯ 6.5 : *ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਇੱਕ ਕੋਣ ਦੂਸਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਇੱਕ ਕੋਣ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਇਨ੍ਹਾਂ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ ਹੋਣ ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।*

ਇਸ ਕਸੌਟੀ ਨੂੰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ *ਸਮਰੂਪਤਾ* ਲਈ *SAS* (ਭੁਜਾ-ਕੋਣ-ਭੁਜਾ) *ਕਸੌਟੀ* ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਪਹਿਲਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਵੀ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਅਤੇ DEF ਅਜਿਹੇ ਲੈ ਕੇ ਕਿ $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (< 1) ਹੋਵੇ ਅਤੇ $\angle A = \angle D$ ਹੋਵੇ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.28) ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। Δ DEF ਵਿੱਚ DP = AB ਅਤੇ DQ = AC ਕੱਟੋ ਅਤੇ P ਅਤੇ Q ਨੂੰ ਮਿਲਾਉ।



ਚਿੱਤਰ 6.28

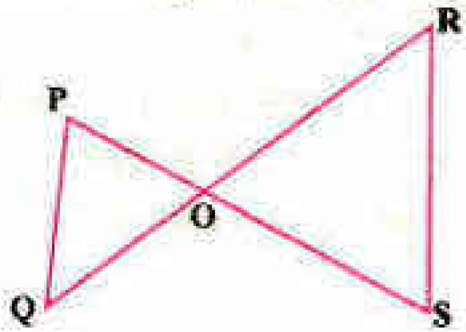
ਹੁਣ $\quad PQ \parallel EF$ ਅਤੇ $\Delta ABC \cong \Delta DPQ \quad$ (ਕਿਵੇਂ?)

ਇਸ ਲਈ $\quad \angle A = \angle D,\ \angle B = \angle P$ ਅਤੇ $\angle C = \angle Q$ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ $\quad \Delta ABC \sim \Delta DEF \quad$ (ਕਿਉਂ?)

ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਕਸੌਟੀਆਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਚਿੱਤਰ 6.29 ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ $PQ \parallel RS$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\Delta POQ \sim \Delta SOR$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.29

ਹੱਲ : $\quad PQ \parallel RS \quad$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

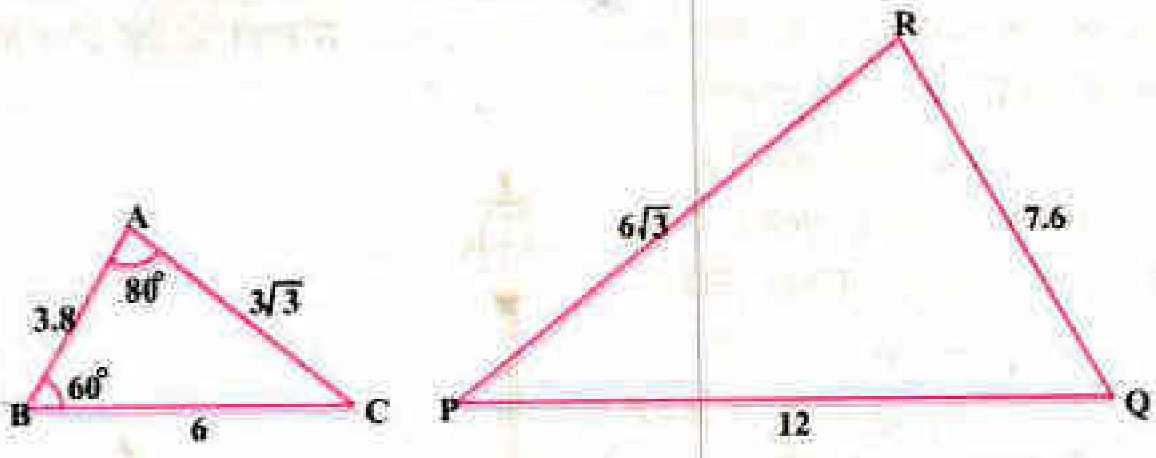
ਇਸ ਲਈ $\quad \angle P = \angle S \quad$ (ਇਕਾਂਤਰ ਕੋਣ)

ਅਤੇ $\quad \angle Q = \angle R \quad$ (ਇਕਾਂਤਰ ਕੋਣ)

ਨਾਲ ਹੀ $\quad \angle POQ = \angle SOR \quad$ (ਸਿਖਰ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ)

ਇਸ ਲਈ $\quad \Delta POQ \sim \Delta SOR \quad$ (AAA ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ)

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਚਿੱਤਰ 6.30 ਵਿੱਚ ∠P ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 6.30

ਹੱਲ : ΔABC ਅਤੇ Δ PQR ਵਿੱਚ,

$$\frac{AB}{RQ} = \frac{3.8}{7.6} = \frac{1}{2},\ \frac{BC}{QP} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \text{ ਅਤੇ } \frac{CA}{PR} = \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

ਭਾਵ $\frac{AB}{RQ} = \frac{BC}{QP} = \frac{CA}{PR}$

ਇਸ ਲਈ $\Delta ABC \sim \Delta RQP$ (SSS ਸਮਰੂਪਤਾ)

ਇਸ ਲਈ $\angle C = \angle P$

(ਸਮਰੂਪਤਾ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ)

ਪਰੰਤੂ $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$ (ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਗੁਣ ਤੋਂ)

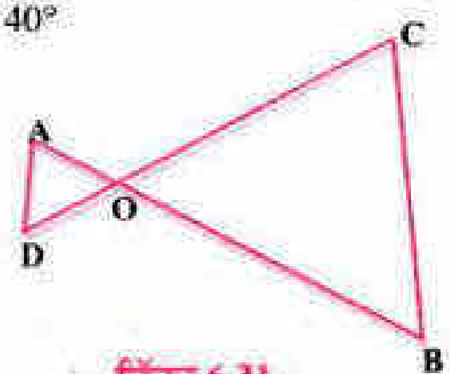
$= 180° - 80° - 60° = 40°$

ਇਸ ਲਈ $\angle P = 40°$

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਚਿੱਤਰ 6.31 ਵਿੱਚ,

OA . OB = OC . OD ਹੈ।

ਦਿਖਾਉ ਕਿ $\angle A = \angle C$ ਅਤੇ $\angle B = \angle D$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.31

ਹੱਲ : OA . OB = OC . OD (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

ਇਸ ਲਈ $\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB}$ (1)

ਨਾਲ ਹੀ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ $\angle AOD = \angle COB$ (ਸਿਖਰ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ) (2)

ਇਸ ਲਈ (1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ $\Delta AOD \sim \Delta COB$ (SAS ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ)

ਇਸ ਲਈ $\angle A = \angle C$ ਅਤੇ $\angle D = \angle B$ (ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ)

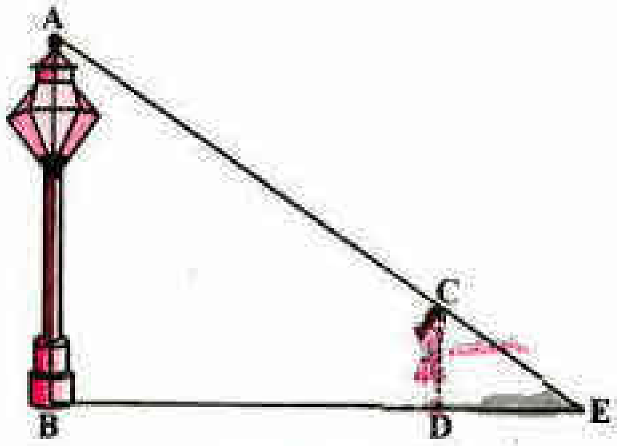
ਉਦਾਹਰਣ 7 : 90 cm ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਲੜਕੀ ਬਲਬ ਲੱਗੇ ਇੱਕ ਖੰਭੇ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੋਂ 1.2 m/s ਦੀ ਚਾਲ ਨਾਲ ਦੂਰ ਜਾ ਰਹੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਬਲਬ ਜ਼ਮੀਨ ਤੋਂ 3.6 m ਉੱਚਾਈ 'ਤੇ ਹੋਵੇ ਤਾਂ 4 ਸੈਕਿੰਡ ਬਾਅਦ ਉਸ ਲੜਕੀ ਦੀ ਛਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ AB ਬਲਬ ਲੱਗੇ ਖੰਭੇ ਨੂੰ ਅਤੇ CD ਲੜਕੀ ਦੁਆਰਾ ਖੰਭੇ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੋਂ ਦੂਰ 4 ਸੈਕਿੰਡ ਚੱਲਣ ਬਾਅਦ ਉਸਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.32)।

ਚਿੱਤਰ ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ DE ਲੜਕੀ ਦੇ ਪਰਛਾਵੇਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਓ DE, x m ਹੈ।

ਹੁਣ, $BD = 1.2 \text{ m} \times 4 = 4.8 \text{ m}$

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ΔABE ਅਤੇ ΔCDE ਵਿੱਚ,



ਚਿੱਤਰ 6.32

$\angle B = \angle D$ (ਹਰੇਕ 90° ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਖੰਭਾ ਅਤੇ ਲੜਕੀ ਦੋਵੇਂ ਜ਼ਮੀਨ ਦੇ ਲੰਬ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਖੜੇ ਹਨ)

ਅਤੇ $\angle E = \angle E$ (ਸਮਾਨ ਕੋਣ)

ਇਸ ਲਈ $\Delta ABE \sim \Delta CDE$ (AA ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ)

ਇਸ ਲਈ $\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$ (ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ)

ਭਾਵ $\frac{4.8 + x}{x} = \frac{3.6}{0.9}$ $\left(90 \text{ cm} = \frac{90}{100} \text{ m} = 0.9 \text{ m}\right)$

ਭਾਵ $4.8 + x = 4x$

ਭਾਵ $3x = 4.8$

ਭਾਵ $x = 1.6$

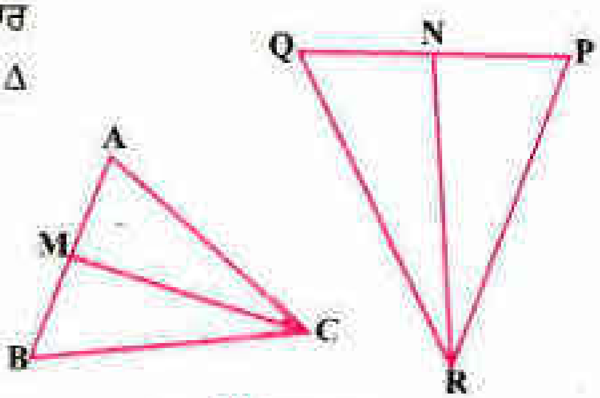
ਇਸ ਲਈ 4 ਸੈਕਿੰਡ ਚੱਲਣ ਦੇ ਬਾਅਦ ਲੜਕੀ ਦੇ ਪਰਛਾਵੇਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 1.6 m ਹੋਵੇਗੀ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਚਿੱਤਰ 6.33 ਵਿੱਚ CM ਅਤੇ RN ਕ੍ਰਮਵਾਰ ΔABC ਅਤੇ ΔPQR ਦੀਆਂ ਮੱਧਿਕਾਵਾਂ ਹਨ। ਜੇਕਰ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

(i) $\Delta AMC \sim \Delta PNR$

(ii) $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$

(iii) $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$



ਚਿੱਤਰ 6.33

ਹੱਲ : (i) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

ਇਸ ਲਈ $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$ (1)

ਅਤੇ $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$ ਅਤੇ $\angle C = \angle R$ (2)

ਪਰੰਤੂ $AB = 2\,AM$ ਅਤੇ $PQ = 2\,PN$

(ਕਿਉਂਕਿ CM ਅਤੇ RN ਮੱਧਿਕਾਵਾਂ ਹਨ)

ਇਸ ਲਈ (1) ਤੋਂ $\frac{2\,AM}{2PN} = \frac{CA}{RP}$

ਭਾਵ $\frac{AM}{PN} = \frac{CA}{RP}$ (3)

ਨਾਲ ਹੀ $\angle MAC = \angle NPR$ [(2) ਤੋਂ] (4)

ਇਸ ਲਈ (3) ਅਤੇ (4) ਤੋਂ,

$\Delta AMC \sim \Delta PNR$ (SAS ਸਮਰੂਪਤਾ) (5)

(ii) (5) ਤੋਂ $\frac{CM}{RN} = \frac{CA}{RP}$ (6)

ਪਰੰਤੂ $\frac{CA}{RP} = \frac{AB}{PQ}$ [(1) ਤੋਂ] (7)

ਇਸ ਲਈ $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$ [(6) ਅਤੇ (7) ਤੋਂ] (8)

(iii) (1) ਤੋਂ $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ [(1) ਤੋਂ]

ਇਸ ਲਈ $\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR}$ [(8) ਤੋਂ] (9)

ਨਾਲ ਹੀ $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ} = \frac{2\,BM}{2\,QN}$

ਭਾਵ $\frac{CM}{RN} = \frac{BM}{QN}$ (10)

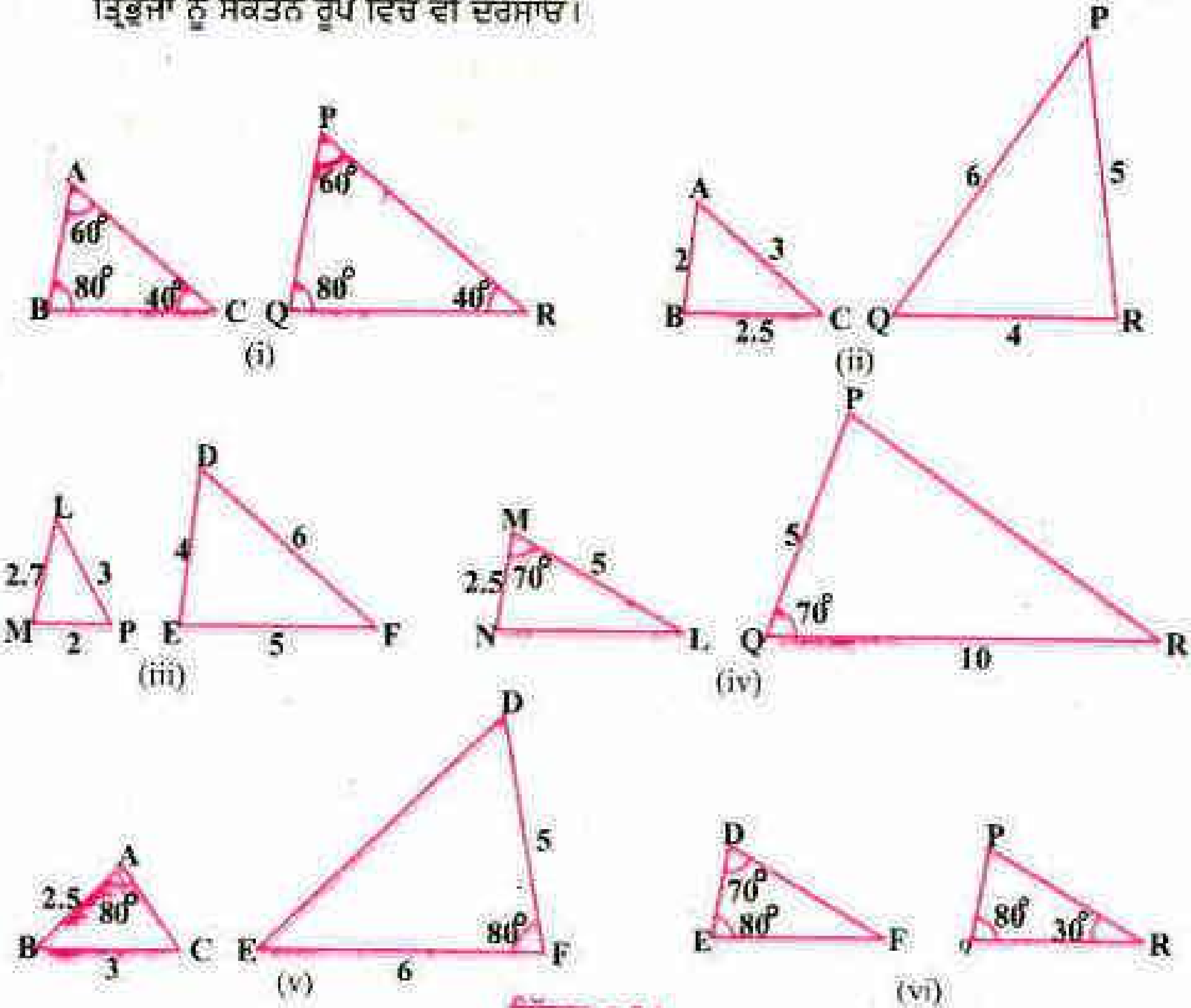
ਭਾਵ $\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR} = \frac{BM}{QN}$ [(9) ਅਤੇ (10) ਤੋਂ]

ਇਸ ਲਈ $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$ (SSS ਸਮਰੂਪਤਾ)

[**ਟਿੱਪਣੀ :** ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਭਾਗ (iii) ਨੂੰ ਭਾਗ (i) ਵਿੱਚ ਵਰਤੀ ਗਈ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਵੀ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।]

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 6.3

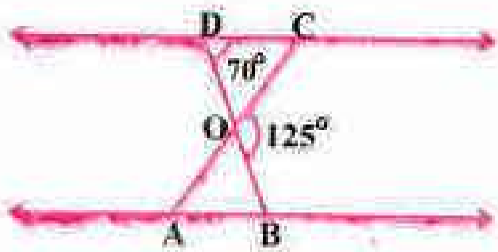
1. ਦੱਸੋ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 6.34 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ-ਕਿਹੜੇ ਜੋੜੇ ਸਮਰੂਪ ਹਨ। ਉਸ ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ ਨੂੰ ਲਿਖੋ ਜਿਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੁਸੀਂ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਲਈ ਕੀਤਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਨੂੰ ਸੰਕੇਤਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੀ ਦਰਸਾਓ।



ਚਿੱਤਰ 6.34

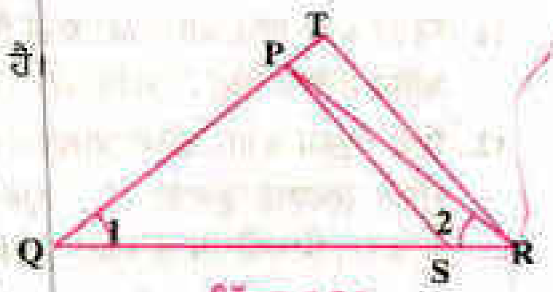
2. ਚਿੱਤਰ 6.35 ਵਿੱਚ $\Delta ODC \sim \Delta OBA$, $\angle BOC = 125^\circ$ ਅਤੇ $\angle CDO = 70^\circ$ ਹੈ। $\angle DOC$, $\angle DCO$ ਅਤੇ $\angle OAB$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

3. ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD, ਜਿਸ ਵਿੱਚ AB || DC ਹੈ, ਦੇ ਵਿਕਰਣ AC ਅਤੇ BD ਆਪਸ ਵਿੱਚ O 'ਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ। ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਦਿਖਾਓ ਕਿ $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.35

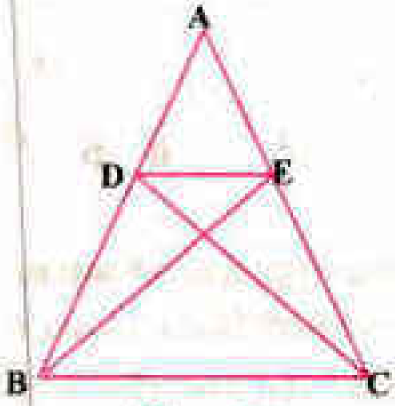
4. ਚਿੱਤਰ 6.36 ਵਿੱਚ, $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ ਅਤੇ $\angle 1 = \angle 2$ ਹੈ। ਦਿਖਾਉ ਕਿ $\Delta PQS \sim \Delta TQR$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.36

5. ΔPQR ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ PR ਅਤੇ QR ਉਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂ S ਅਤੇ T ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਿਤ ਹਨ ਕਿ $\angle P = \angle RTS$ ਹੈ। ਦਿਖਾਉ ਕਿ $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$ ਹੈ।

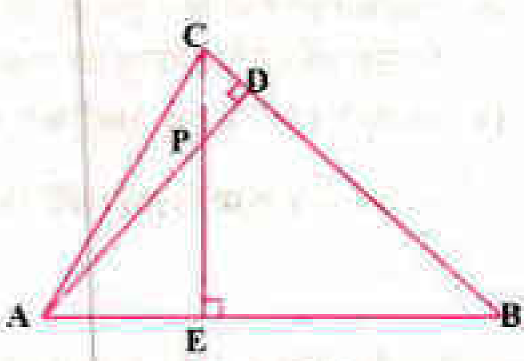
6. ਚਿੱਤਰ 6.37 ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ ਹੈ ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.37

7. ਚਿੱਤਰ 6.38 ਵਿੱਚ, ΔABC ਦੇ ਸਿਖਰ ਲੰਬ AD ਅਤੇ CE ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ P ਉੱਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ ਦਿਖਾਉ ਕਿ:
   (i) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$
   (ii) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$
   (iii) $\Delta AEP \sim \Delta ADB$
   (iv) $\Delta PDC \sim \Delta BEC$

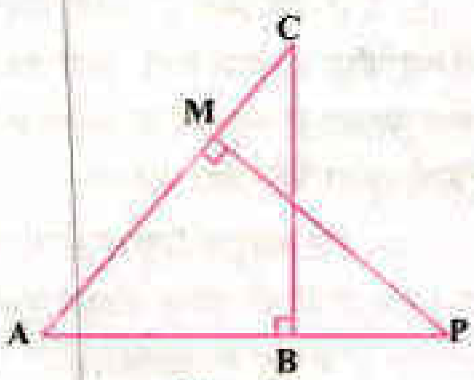
8. ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦੀ ਵਧਾਈ ਗਈ ਭੁਜਾ AD ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ E ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ BE ਭੁਜਾ CD ਨੂੰ F 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਦਿਖਾਉ ਕਿ $\Delta ABE \sim \Delta CFB$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.38

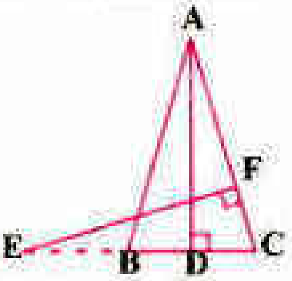
9. ਚਿੱਤਰ 6.39 ਵਿੱਚ, ABC ਅਤੇ AMP ਦੋ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕੋਣ B ਅਤੇ M ਸਮਕੋਣ ਹਨ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ:
   (i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$
   (ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$

10. CD ਅਤੇ GH ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\angle ACB$ ਅਤੇ $\angle EGF$ ਦੇ ਅਜਿਹੇ ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਹਨ ਕਿ ਬਿੰਦੂ D ਅਤੇ H ਕ੍ਰਮਵਾਰ ΔABC ਅਤੇ ΔFEG ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ AB ਅਤੇ FE ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ ਹਨ। ਜੇਕਰ $\Delta ABC \sim \Delta FEG$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ:
   (i) $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$
   (ii) $\Delta DCB \sim \Delta HGE$
   (iii) $\Delta DCA \sim \Delta HGF$

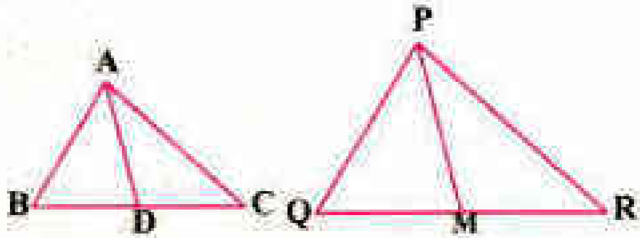


ਚਿੱਤਰ 6.39

11. ਚਿੱਤਰ 6.40 ਵਿੱਚ, AB = AC ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀ ਵਧਾਈ ਗਈ ਭੁਜਾ CB ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ E ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਜੇਕਰ $AD \perp BC$ ਅਤੇ $EF \perp AC$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\Delta ABD \sim \Delta ECF$ ਹੈ।
12. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀਆਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਭੁਜਾਵਾਂ AB, BC ਅਤੇ ਮੱਧਿਕਾ AD ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ PQR ਦੀਆਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਭੁਜਾਵਾਂ PQ, QR ਅਤੇ ਮਧਿੱਕਾ PM ਦੇ ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤੀ ਹਨ (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.41)। ਦਿਖਾਉ ਕਿ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.40



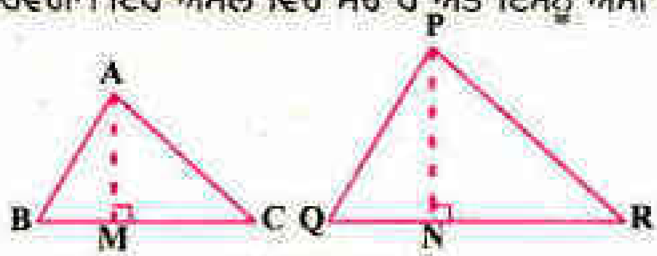
ਚਿੱਤਰ 6.41

13. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀ ਭੁਜਾ BC ਉੱਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ D ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਿਤ ਹੈ ਕਿ $\angle ADC = \angle BAC$ ਹੈ। ਦਿਖਾਉ ਕਿ $CA^2 = CB.CD$ ਹੈ।
14. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ AB, AC ਅਤੇ ਮੱਧਿਕਾ AD ਇੱਕ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ PQ, PR ਮੱਧਿਕਾ PM ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤੀ। ਦਰਸਾਉ ਕਿ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ਹੈ।
15. 6 m ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਲੰਬ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਖੜੇ ਖੰਭੇ ਦੀ ਜ਼ਮੀਨ 'ਤੇ ਪਰਛਾਵੇਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 4 m ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਉਸੇ ਸਮੇਂ ਇੱਕ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਪਰਛਾਵੇਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 28 m ਹੈ। ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।
16. AD ਅਤੇ PM ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ABC ਅਤੇ PQR ਦੀਆਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਮੱਧਿਕਾਵਾਂ ਹਨ, ਜਦੋਂ ਕਿ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$ ਹੈ।

6.5 ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ

ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਖ ਲਿਆ ਹੈ ਕਿ ਦੋ ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਇੱਕ ਹੀ (ਸਮਾਨ) ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਸੋਚਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਨ੍ਹਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਅਤੇ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਸੰਬੰਧ ਹੈ? ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ (square units) ਵਿੱਚ ਮਾਪਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਉਮੀਦ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਵਰਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਹ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਅਗਲੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਵਿੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 6.6 : *ਦੋ ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਵਰਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।*



ਚਿੱਤਰ 6.42

ਸਬੂਤ : ਸਾਨੂੰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਅਤੇ PQR ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹਨ ਕਿ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.42)।

ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ $\frac{ar(ABC)}{ar(PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2$

ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸਿਖਰ ਲੰਬ AM ਅਤੇ PN ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ।

ਹੁਣ $$ar(ABC) = \frac{1}{2} BC \times AM$$

ਅਤੇ $$ar(PQR) = \frac{1}{2} QR \times PN$$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{ar(ABC)}{ar(PQR)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AM}{\frac{1}{2} \times QR \times PN} = \frac{BC \times AM}{QR \times PN} \quad (1)$$

ਹੁਣ, ΔABM ਅਤੇ ΔPQN ਵਿੱਚ,

$\angle B = \angle Q$ (ਕਿਉਂਕਿ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ਹੈ)

ਅਤੇ $\angle M = \angle N$ (ਹਰੇਕ 90° ਦਾ ਹੈ)

ਇਸ ਲਈ $\Delta ABM \sim \Delta PQN$ (AA ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ)

ਇਸ ਲਈ $$\frac{AM}{PN} = \frac{AB}{PQ} \quad (2)$$

ਨਾਲ ਹੀ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

ਇਸ ਲਈ $$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} \quad (3)$$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{ar(ABC)}{ar(PQR)} = \frac{AB}{PQ} \times \frac{AM}{PN} \quad [(1) \text{ ਅਤੇ } (3) \text{ ਤੋਂ}]$$

$$= \frac{AB}{PQ} \times \frac{AB}{PQ} \quad [(2) \text{ ਤੋਂ}]$$

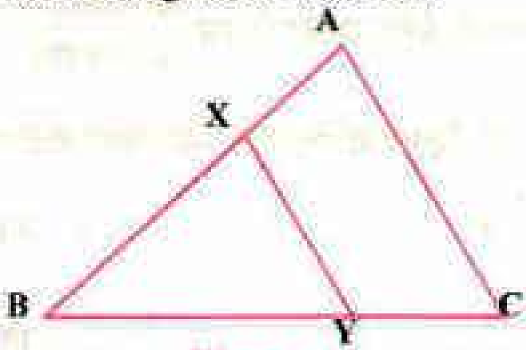
$$= \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2$$

ਹੁਣ (3) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$\frac{ar\,(ABC)}{ar\,(PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2$$

ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਚਿੱਤਰ 6.43 ਵਿੱਚ, ਰੇਖਾਖੰਡ XY ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀ ਭੁਜਾ AC ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਇਸ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਖੇਤਰਫਲ ਵਾਲੇ ਦੋ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਅਨੁਪਾਤ $\frac{AX}{AB}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 6.43

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\quad XY \parallel AC \quad$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

ਇਸ ਲਈ $\quad \angle BXY = \angle A$ ਅਤੇ $\angle BYX = \angle C \quad$ (ਸੰਗਤ ਕੋਣ)

ਇਸ ਲਈ $\quad \Delta ABC \sim \Delta XBY \quad$ (AA ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ)

ਇਸ ਲਈ $\quad \frac{ar\,(ABC)}{ar\,(XBY)} = \left(\frac{AB}{XB}\right)^2 \quad$ (ਪ੍ਰਮੇਯ 6.6) (1)

ਨਾਲ ਹੀ $\quad ar\,(ABC) = 2\,ar\,(XBY) \quad$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

ਇਸ ਲਈ $\quad \frac{ar\,(ABC)}{ar\,(XBY)} = \frac{2}{1} \quad$ (2)

ਇਸ ਲਈ (1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ

$$\left(\frac{AB}{XB}\right)^2 = \frac{2}{1}, \text{ ਭਾਵ } \frac{AB}{XB} = \frac{\sqrt{2}}{1} \text{ ਹੈ।}$$

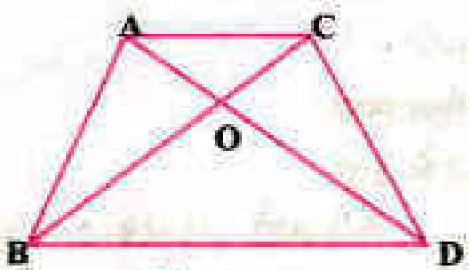
ਜਾਂ $$\frac{XB}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ਜਾਂ $$1 - \frac{XB}{AB} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ਜਾਂ $$\frac{AB - XB}{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}, \text{ ਭਾਵ } \frac{AX}{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \text{ ਹੈ।}$$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 6.4

1. ਮੰਨ ਲਓ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 64 cm^2 ਅਤੇ 121 cm^2 ਹਨ। ਜੇਕਰ $EF = 15.4$ cm ਹੋਵੇ ਤਾਂ BC ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਇੱਕ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਜਿਸ ਵਿੱਚ $AB \parallel DC$ ਹੈ, ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਆਪਸ ਵਿੱਚ O ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ $AB = 2\,CD$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ AOB ਅਤੇ COD ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਚਿੱਤਰ 6.44 ਵਿੱਚ ਇੱਕੋ ਆਧਾਰ BC ਉੱਤੇ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਅਤੇ DBC ਬਣੇ ਹੋਏ ਹਨ। ਜੇਕਰ AD, BC ਨੂੰ O 'ਤੇ ਕੱਟੇ ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $\frac{ar\,(ABC)}{ar\,(DBC)} = \frac{AO}{DO}$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.44

4. ਜੇਕਰ ਦੋ ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
5. ਇਸ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ AB, BC ਅਤੇ CA ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ D, E ਅਤੇ F ਹਨ। ΔDEF ਅਤੇ ΔABC ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋ ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਮੱਧਿਕਾਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਦਾ ਵਰਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
7. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਵਰਗ ਦੀ ਕਿਸੇ ਭੁਜਾ 'ਤੇ ਬਣਾਏ ਗਏ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਉਸੇ ਵਰਗ ਦੇ ਇੱਕ ਵਿਕਰਣ 'ਤੇ ਬਣੇ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦਾ ਅੱਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਸਪਸ਼ਟੀਕਰਣ ਵੀ ਦਿਉ

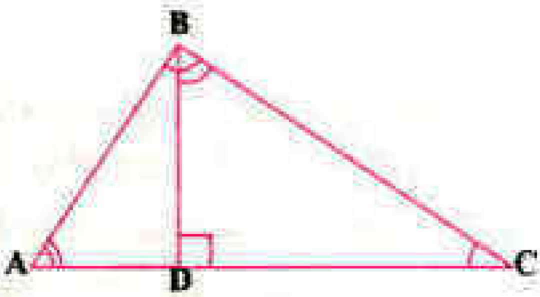
8. ABC ਅਤੇ BDE ਦੋ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ D ਭੁਜਾ BC ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ABC ਅਤੇ BDE ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਹੈ :
   (A) 2 : 1 (B) 1 : 2 (C) 4 : 1 (D) 1 : 4
9. ਦੋ ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ 4 : 9 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਹੈ:
   (A) 2 : 3 (B) 4 : 9 (C) 81 : 16 (D) 16 : 81

6.6 ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨਾਲ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਾਣੂੰ ਹੋ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਤੁਸੀਂ ਕੁਝ ਕ੍ਰਿਆਵਾਂ ਦੁਆਰਾ ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕੀਤੀ ਸੀ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਆਧਾਰ 'ਤੇ ਕੁਝ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੱਲ ਕੀਤੇ ਸਨ। ਤੁਸੀਂ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਇਸ ਦੇ ਸਬੂਤ ਬਾਰੇ ਵੀ ਪੜ੍ਹਿਆ ਸੀ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਸਿੱਟਾ, ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਦੇਵਾਂਗੇ। ਇਸ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕਰਣ 'ਤੇ ਸਨਮੁੱਖ ਸਿਖ਼ਰ ਤੋਂ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਲੰਬ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪਾਸ ਬਣੇ ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ

ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਇੱਕ ਸਿੱਟੇ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਾਂਗੇ।

ਹੁਣ ਆਉ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਲਈਏ ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ B ਸਮਕੋਣ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ BD ਕਰਣ AC ਉੱਤੇ ਲੰਬ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.45)। ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ Δ ADB ਅਤੇ Δ ABC ਵਿੱਚ,



ਚਿੱਤਰ 6.45

$\angle A = \angle A$

ਅਤੇ $\angle ADB = \angle ABC$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (ਕਿਵੇਂ?) (1)

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (ਕਿਵੇਂ?) (2)

ਇਸ ਲਈ, (1) ਅਤੇ (2) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਲੰਬ BD ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪਾਸੇ ਦੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸੰਪੂਰਨ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਹਨ।

ਨਾਲ ਹੀ, ਕਿਉਂਕਿ $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ ਹੈ

ਅਤੇ $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ $\Delta ADB \sim \Delta BDC$ (ਭਾਗ 6.2 ਦੀ ਟਿੱਪਣੀ ਤੋਂ)

ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪ੍ਰਮੇਯ 'ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹਾਂ :

ਪ੍ਰਮੇਯ 6.7 : *ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਮਕੋਣ ਵਾਲੇ ਸਿਖਰ ਤੋਂ ਕਰਣ 'ਤੇ ਲੰਬ ਖਿੱਚਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਇਸ ਲੰਬ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪਾਸੇ ਬਣੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਮੂਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।*


ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ
(569-479 ਈ.)

ਆਉ ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰੀਏ।

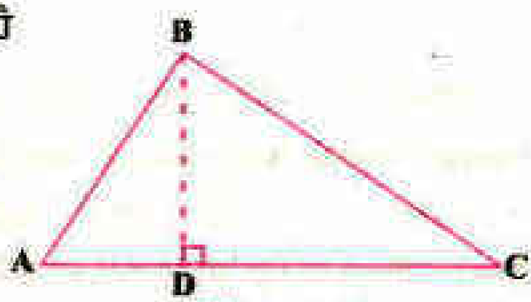
ਪ੍ਰਮੇਯ 6.8 : *ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਵਿੱਚ ਕਰਣ ਦਾ ਵਰਗ ਬਾਕੀ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।*

ਸਬੂਤ : ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ $\angle B$ ਸਮਕੋਣ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ $AC^2 = AB^2 + BC^2$

ਆਉ $BD \perp AC$ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.46)

ਹੁਣ $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (ਪ੍ਰਮੇਯ 6.7)



ਚਿੱਤਰ 6.46

ਇਸ ਲਈ $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$ (ਭੁਜਾਵਾਂ ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤੀ ਹਨ)

ਜਾਂ $AD \,.\, AC = AB^2$ (1)

ਨਾਲ ਹੀ $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (ਪ੍ਰਮੇਯ 6.7)

ਇਸ ਲਈ $\frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AC}$ (ਭੁਜਾਵਾਂ ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤੀ ਹਨ)

ਜਾਂ $CD \,.\, AC = BC^2$ (2)

(1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਜੋੜਨ 'ਤੇ

$$AD \,.\, AC + CD \,.\, AC = AB^2 + BC^2$$

ਜਾਂ $AC\,(AD + CD) = AB^2 + BC^2$

ਜਾਂ $AC \,.\, AC = AB^2 + BC^2$

ਜਾਂ $AC^2 = AB^2 + BC^2$

ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਚੀਨ ਭਾਰਤੀ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ ਬੋਧਾਯਨ (ਲਗਭਗ 800 ਈ. ਪੂ.) ਨੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਸੀ :

ਇੱਕ ਆਇਤ ਦਾ ਵਿਕਰਣ ਖੁਦ ਉਨਾਂ ਹੀ ਖੇਤਰਫਲ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਨਾਂ ਉਸ ਦੀਆਂ ਦੋਵੇਂ ਭੁਜਾਵਾਂ (ਭਾਵ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ) ਨਾਲ ਮਿਲ ਕੇ ਬਣਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ :

ਕਿਸੇ ਆਇਤ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਨਾਲ ਬਣੇ ਵਰਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਇਸ ਦੀਆਂ ਦੋਵੇਂ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ 'ਤੇ ਬਣੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਇਸੇ ਕਾਰਣ ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਕਦੇ-ਕਦੇ ਬੋਧਾਯਨ ਪ੍ਰਮੇਯ ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

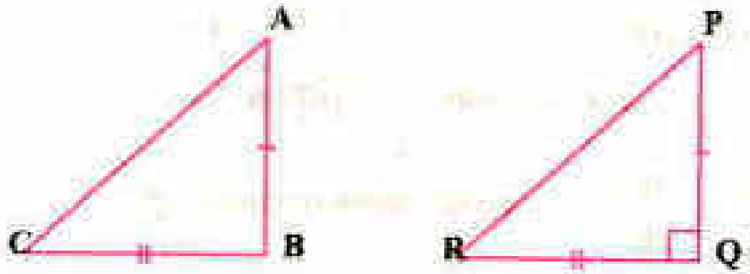
ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਉਲਟ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕੀ ਕਿਹਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ? ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਜਾਂਚ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਇਸ ਦਾ ਉਲਟ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 6.9 : *ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦਾ ਵਰਗ, ਦੂਸਰੀਆਂ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪਹਿਲੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਾਹਮਣੇ ਵਾਲਾ ਕੋਣ, ਸਮਕੋਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।*

ਸਬੂਤ : ਇੱਥੇ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦਿੱਤਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ $\angle B = 90^\circ$

ਇਸ ਨੂੰ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ΔPQR ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ, $\angle Q = 90°$, $PQ = AB$ ਅਤੇ $QR = BC$ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.47)।



ਚਿੱਤਰ 6.47

ਹੁਣ ΔPQR ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

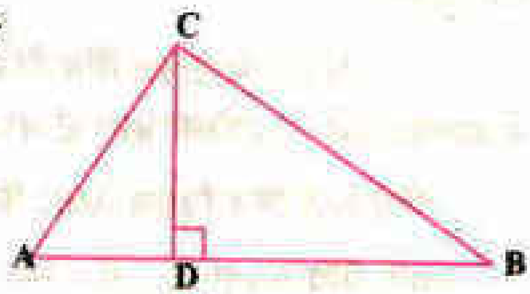
	$PR^2 = PQ^2 + QR^2$	(ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ, ਕਿਉਂਕਿ $\angle Q = 90°$ ਹੈ)	
ਜਾਂ	$PR^2 = AB^2 + BC^2$	(ਰਚਨਾ ਤੋਂ)	(1)
ਪਰੰਤੂ	$AC^2 = AB^2 + BC^2$	(ਦਿੱਤਾ ਹੈ)	(2)
ਇਸ ਲਈ	$AC = PR$	[(1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ]	(3)

ਹੁਣ, ΔABC ਅਤੇ ΔPQR ਵਿੱਚ

	$AB = PQ$	(ਰਚਨਾ ਤੋਂ)
	$BC = QR$	(ਰਚਨਾ ਤੋਂ)
	$AC = PR$	[ਉੱਪਰ (3) ਵਿੱਚ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਹੈ]
ਇਸ ਲਈ	$\Delta ABC \cong \Delta PQR$	(SSS ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ)
ਇਸ ਲਈ	$\angle B = \angle Q$	(CPCT)
ਪਰੰਤੂ	$\angle Q = 90°$	(ਰਚਨਾ ਤੋਂ)
ਇਸ ਲਈ	$\angle B = 90°$	

ਟਿੱਪਣੀ : ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਸਬੂਤ ਦੇ ਲਈ ਅੰਤਿਕਾ 1 ਦੇਖੋ। ਆਓ ਇਨਾਂ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਦਰਸਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਚਿੱਤਰ 6.48 ਵਿੱਚ $\angle ACB = 90°$ ਅਤੇ $CD \perp AB$ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BD}{AD}$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.48

ਹੱਲ : $\Delta ACD \sim \Delta ABC$

(ਪ੍ਰਮੇਯ 6.7)

ਇਸ ਲਈ $$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$$

ਜਾਂ $$AC^2 = AB \,.\, AD \qquad (1)$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $$\Delta BCD \sim \Delta BAC \qquad \text{(ਪ੍ਰਮੇਯ 6.7)}$$

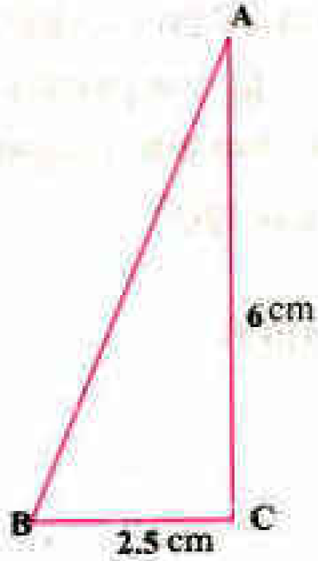
ਇਸ ਲਈ $$\frac{BC}{BA} = \frac{BD}{BC}$$

ਜਾਂ $$BC^2 = BA \,.\, BD \qquad (2)$$

ਇਸ ਲਈ (1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ

$$\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BA \cdot BD}{AB \cdot AD} = \frac{BD}{AD}$$

ਉਦਾਹਰਣ 11 . ਇੱਕ ਪੌੜੀ ਕਿਸੇ ਦੀਵਾਰ ਨਾਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਟਿਕੀ ਹੋਈ ਹੈ ਕਿ ਇਸਦਾ ਹੇਠਲਾ ਸਿਰਾ ਕੰਧ (ਦੀਵਾਰ) ਤੋਂ 2.5 m ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਉਪਰਲਾ ਸਿਰਾ ਜ਼ਮੀਨ ਤੋਂ 6 m ਦੀ ਉੱਚਾਈ 'ਤੇ ਬਣੀ ਇੱਕ ਖਿੜਕੀ ਤੱਕ ਪਹੁੰਚਦਾ ਹੈ। ਪੌੜੀ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 6.49

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ AB ਪੌੜੀ ਹੈ ਅਤੇ CA ਕੰਧ (ਦੀਵਾਰ) ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਖਿੜਕੀ A 'ਤੇ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.49)।

ਨਾਲ ਹੀ $BC = 2.5$ m ਅਤੇ $CA = 6$ m ਹੈ।

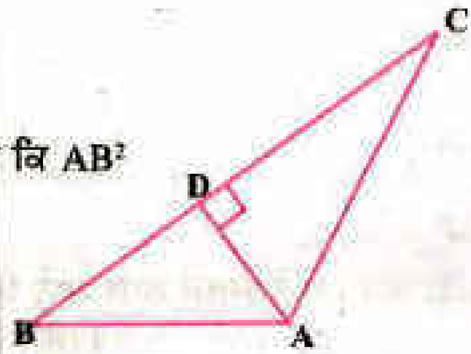
ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$
$$= (2.5)^2 + (6)^2$$
$$= 42.25$$

ਇਸ ਲਈ $AB = 6.5$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਪੌੜੀ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 6.5 m ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਚਿੱਤਰ 6.50 ਵਿੱਚ $AD \perp BC$ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.50

ਹੱਲ : ΔADC ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 \qquad (1)$$

(ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ)

Δ ADB ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

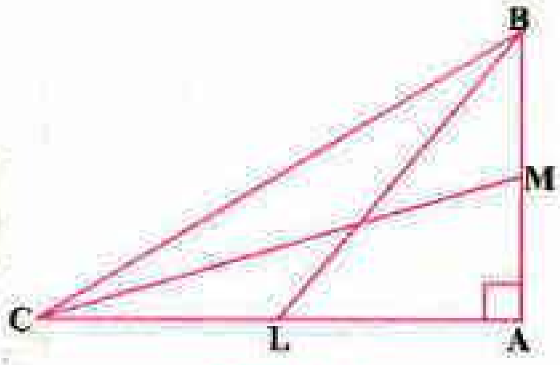
$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \quad (2) \quad \text{(ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ)}$$

(2) ਵਿੱਚੋਂ (1) ਨੂੰ ਘਟਾਉਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$$

ਜਾਂ $$AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$$

ਉਦਾਹਰਣ 13 : BL ਅਤੇ CM ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀਆਂ ਮੱਧਿਕਾਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਕੋਣ A ਸਮਕੋਣ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $4(BL^2 + CM^2) = 5\,BC^2$



ਚਿੱਤਰ 6.51

ਹੱਲ : BL ਅਤੇ CM ਇੱਕ Δ ABC ਦੀਆਂ ਮੱਧਿਕਾਵਾਂ ਹਨ : ਜਿਸ ਵਿੱਚ $\angle A = 90°$ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.51)।

Δ ABC ਵਿੱਚ

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad \text{(ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ)} \quad (1)$$

Δ ABL ਤੋਂ

$$BL^2 = AL^2 + AB^2$$

ਜਾਂ $$BL^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + AB^2 \quad \text{(AC ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ L ਹੈ)}$$

ਜਾਂ $$BL^2 = \frac{AC^2}{4} + AB^2$$

ਜਾਂ $$4\,BL^2 = AC^2 + 4\,AB^2 \quad (2)$$

Δ CMA ਤੋਂ

$$CM^2 = AC^2 + AM^2$$

ਜਾਂ $$CM^2 = AC^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \quad \text{(AB ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ M ਹੈ)}$$

ਜਾਂ $$CM^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4}$$

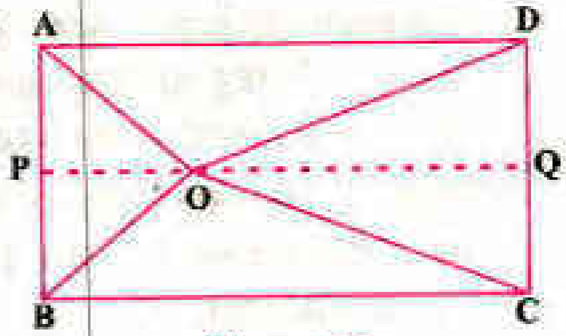
ਜਾਂ $$4\,CM^2 = 4\,AC^2 + AB^2 \quad (3)$$

(2) ਅਤੇ (3) ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$4(BL^2 + CM^2) = 5(AC^2 + AB^2)$$

ਜਾਂ $$4(BL^2 + CM^2) = 5\,BC^2 \quad [(1)\text{ ਤੋਂ}]$$

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਆਇਤ ABCD ਦੇ ਅੰਦਰ ਸਥਿਤ O ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.52)। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.52

ਹੱਲ :

O ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਂਦੀ ਹੋਈ $PQ \parallel BC$ ਖਿੱਚੋ ਜਿਸ ਨਾਲ ਕਿ P ਭੁਜਾ AB 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਵੇ ਅਤੇ Q ਭੁਜਾ DC 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਵੇ

ਹੁਣ $PQ \parallel BC$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $PQ \perp AB$ ਅਤੇ $PQ \perp DC$ ($\angle B = 90^\circ$ ਅਤੇ $\angle C = 90^\circ$)

ਇਸ ਲਈ $\angle BPQ = 90^\circ$ ਅਤੇ $\angle CQP = 90^\circ$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ BPQC ਅਤੇ APQD ਦੋਨੋਂ ਆਇਤਾਂ ਹਨ।

ਹੁਣ ΔOPB ਤੋਂ

$$OB^2 = BP^2 + OP^2 \quad (1)$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ΔOQD ਤੋਂ

$$OD^2 = OQ^2 + DQ^2 \quad (2)$$

ΔOQC ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$OC^2 = OQ^2 + CQ^2 \quad (3)$$

ਅਤੇ ΔOAP ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$OA^2 = AP^2 + OP^2 \quad (4)$$

(1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੇ

$$OB^2 + OD^2 = BP^2 + OP^2 + OQ^2 + DQ^2$$
$$= CQ^2 + OP^2 + OQ^2 + AP^2$$

(ਕਿਉਂਕਿ $BP = CQ$ ਅਤੇ $DQ = AP$ ਹੈ)

$$= CQ^2 + OQ^2 + OP^2 + AP^2$$
$$= OC^2 + OA^2 \quad [(3) \text{ ਅਤੇ } (4) \text{ ਤੋਂ}]$$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 6.5

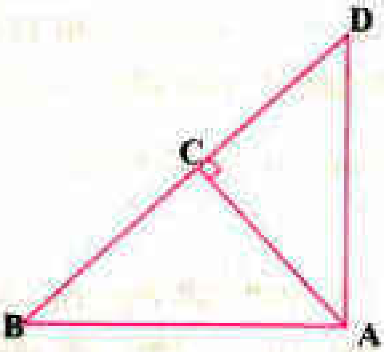
1. ਕੁਝ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ। ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਵਿਚੋਂ ਕਿਹੜੀ-ਕਿਹੜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਕਰਣ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਵੀ ਲਿਖੋ :

(i) 7 cm, 24 cm, 25 cm (ii) 3 cm, 8 cm, 6 cm

(iii) 50 cm, 80 cm, 100 cm (iv) 13 cm, , 12 cm, 5cm

2. PQR ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ P ਸਮਕੋਣ ਹੈ ਅਤੇ QR 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ M ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਿਤ ਹੈ ਕਿ $PM \perp QR$ ਹੈ। ਦਰਸਾਉ ਕਿ $PM^2 = QM \cdot MR$ ਹੈ।

3. ਚਿੱਤਰ 6.53 ਵਿੱਚ ABD ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਇਸਦਾ ਕੋਣ A ਸਮਕੋਣ ਹੈ ਅਤੇ $AC \perp BD$ ਹੈ। ਦਿਖਾਉ ਕਿ
   (i) $AB^2 = BC \cdot BD$
   (ii) $AC^2 = BC \cdot DC$
   (iii) $AD^2 = BD \cdot CD$



ਚਿੱਤਰ 6.53

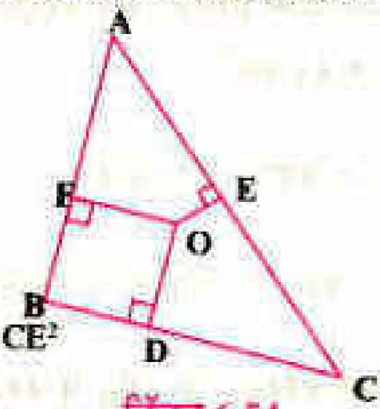
4. ABC ਇੱਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ C ਸਮਕੋਣ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $AB^2 = 2AC^2$ ਹੈ।

5. ABC ਇੱਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ AC = BC ਹੈ। ਜੇਕਰ $AB^2 = 2\,AC^2$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ABC ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।

6. ਇੱਕ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀ ਭੁਜਾ $2a$ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਹਰੇਕ ਸਿਖਰ ਲੰਬ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਉਸਦੇ ਵਿਕਰਣਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

8. ਚਿੱਤਰ 6.54 ਵਿੱਚ, ΔABC ਦੇ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ O ਹੈ ਅਤੇ $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ ਅਤੇ $OF \perp AB$ ਹੈ। ਦਿਖਾਉ ਕਿ
   (i) $OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$
   (ii) $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$



ਚਿੱਤਰ 6.54

9. 10 m ਲੰਬੀ ਇੱਕ ਪੌੜੀ ਇੱਕ ਕੰਧ ਨਾਲ ਲਗਾਉਣ 'ਤੇ ਜ਼ਮੀਨ ਨਾਲੋਂ 8 m ਦੀ ਉੱਚਾਈ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਖਿੜਕੀ ਤੱਕ ਪਹੁੰਚਦੀ ਹੈ। ਕੰਧ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੋਂ ਪੌੜੀ ਦੇ ਹੇਠਲੇ ਸਿਰੇ ਦੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

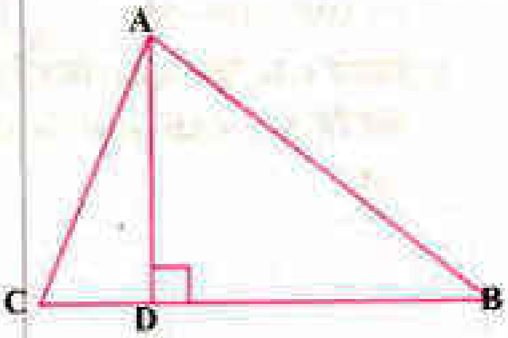
10. 18 m ਉੱਚੇ ਇੱਕ ਸਿੱਧੇ ਖੜੇ ਖੰਬੇ ਦੇ ਉਪਰਲੇ ਸਿਰੇ ਨਾਲ ਤਾਰ ਦਾ ਇੱਕ ਸਿਰਾ ਜੁੜਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ ਅਤੇ ਤਾਰ ਦਾ ਦੂਸਰਾ ਸਿਰਾ ਇੱਕ ਕਿੱਲੇ ਨਾਲ ਜੁੜਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਖੰਬੇ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੋਂ ਕਿੱਲੇ ਨੂੰ ਕਿੰਨੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਗੱਡਿਆ ਜਾਵੇ ਕਿ ਤਾਰ ਤਣੀ ਰਹੇ ਜਦੋਂ ਕਿ ਤਾਰ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 24 m ਹੈ।

11. ਇੱਕ ਹਵਾਈ ਜਹਾਜ਼ ਇੱਕ ਹਵਾਈ ਅੱਡੇ ਤੋਂ ਉੱਤਰ ਵੱਲ 1000 km/h ਦੀ ਚਾਲ ਨਾਲ ਉੱਡਦਾ ਹੈ। ਉਸੇ ਸਮੇਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਹਵਾਈ ਜਹਾਜ਼ ਉਸੇ ਹਵਾਈ ਅੱਡੇ ਤੋਂ ਪੱਛਮ ਵੱਲ 1200 km/h ਦੀ ਚਾਲ ਨਾਲ ਉੱਡਦਾ ਹੈ। $1\frac{1}{2}$ ਘੰਟੇ ਬਾਅਦ ਦੋਵਾਂ ਹਵਾਈ ਜਹਾਜ਼ਾਂ ਦੀ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ?

12. ਦੋ ਖੰਬੇ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਉੱਚਾਈਆਂ 6 m ਅਤੇ 11 m ਹਨ ਅਤੇ ਉਹ ਸਮਤਲ ਭੂਮੀ 'ਤੇ ਖੜ੍ਹੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਹੇਠਲੇ ਸਿਰਿਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ 12 m ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਉਪਰਲੇ ਸਿਰਿਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

13. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ C ਸਮਕੋਣ ਹੈ, ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ CA ਅਤੇ CB 'ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂ D ਅਤੇ E ਸਥਿਤ ਹਨ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$ ਹੈ।

14. ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਸਿਖਰ A ਤੋਂ BC 'ਤੇ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ ਲੰਬ BC ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ D 'ਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੱਟਦਾ ਹੈ ਕਿ DB = 3 CD ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.55)। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $2\,AB^2 = 2\,AC^2 + BC^2$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.55

15. ਕਿਸੇ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀ ਭੁਜਾ BC 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ D ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਿਤ ਹੈ ਕਿ $BD = \frac{1}{3}\,BC$ ਹੈ, ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $9\,AD^2 = 7\,AB^2$ ਹੈ।

16. ਕਿਸੇ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਵਿੱਚ, ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਉਸਦੀ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦੇ ਵਰਗ ਦਾ ਤਿਗੁਣਾ (ਤਿੰਨ ਗੁਣਾ) ਉਸਦੇ ਇੱਕ ਸਿਖ਼ਰ ਲੰਬ ਦੇ ਵਰਗ ਦੇ ਚਾਰ ਗੁਣਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

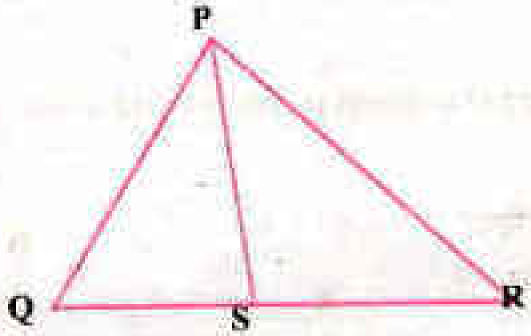
17. ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣ ਕੇ ਉਸਦਾ ਕਾਰਣ ਦੱਸੋ : ΔABC ਵਿੱਚ $AB = 6\sqrt{3}$ cm, AC = 12 cm ਅਤੇ BC = 6 cm ਹੈ। ਕੋਣ B ਹੈ :

(A) 120° (B) 60°

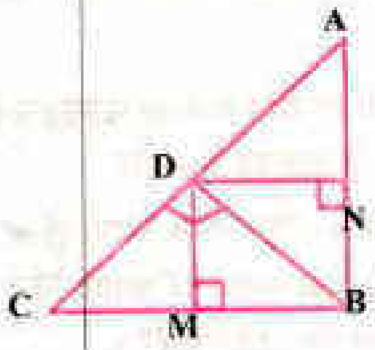
(C) 90° (D) 45°

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 6.6 (ਇੱਛਾ ਅਨੁਸਾਰ)*

1. ਚਿੱਤਰ 6.56 ਵਿੱਚ PS ਕੋਣ QPR ਦਾ ਸਮਦੋਭਾਜਕ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{PR}$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.56



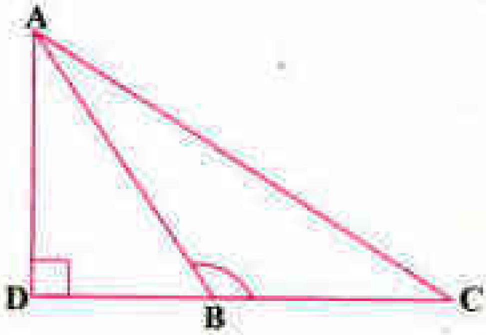
ਚਿੱਤਰ 6.57

2. ਚਿੱਤਰ 6.57 ਵਿੱਚ D ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਕਰਣ AC ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਜਦ ਕਿ $BD \perp AC$ ਅਤੇ $DM \perp BC$ ਅਤੇ $DN \perp AB$ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

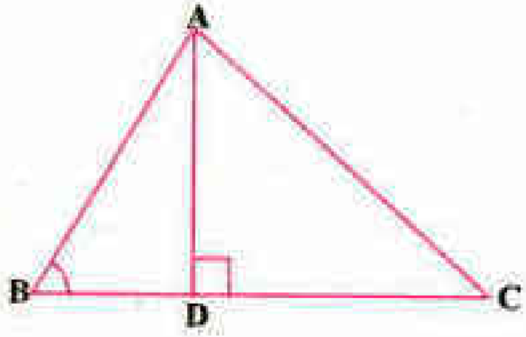
*ਇਹ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(i) $DM^2 = DN \cdot MC$ (ii) $DN^2 = DM \cdot AN$

3. ਚਿੱਤਰ 6.58 ਵਿੱਚ ABC ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $\angle ABC > 90°$ ਹੈ ਅਤੇ $AD \perp CB$ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\, BC \cdot BD$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.58



ਚਿੱਤਰ 6.59

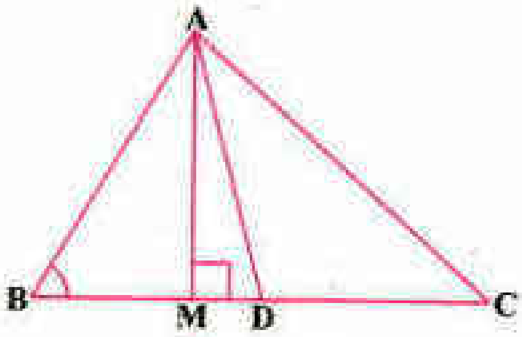
4. ਚਿੱਤਰ 6.59 ਵਿੱਚ ABC ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $\angle ABC < 90°$ ਹੈ ਅਤੇ $AD \perp BC$ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\, BC \cdot BD$ ਹੈ।

5. ਚਿੱਤਰ 6.60 ਵਿੱਚ AD ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀ ਇੱਕ ਮੱਧਿਕਾ ਹੈ ਅਤੇ $AM \perp BC$ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

(i) $AC^2 = AD^2 + BC \cdot DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

(ii) $AB^2 = AD^2 - BC \cdot DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

(iii) $AC^2 + AB^2 = 2\, AD^2 + \frac{1}{2} BC^2$



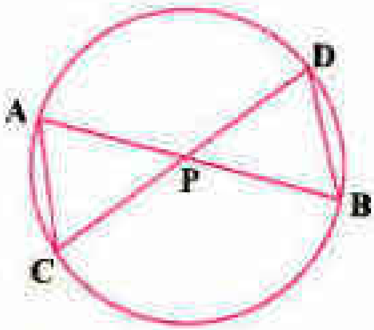
ਚਿੱਤਰ 6.60

6. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਉਸਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

7. ਚਿੱਤਰ 6.61 ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ ਦੋ ਜੀਵਾਵਾਂ (ਵਤਰਾਂ) AB ਅਤੇ CD ਆਪਸ ਵਿੱਚ P ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

(i) $\Delta APC \sim \Delta DPB$

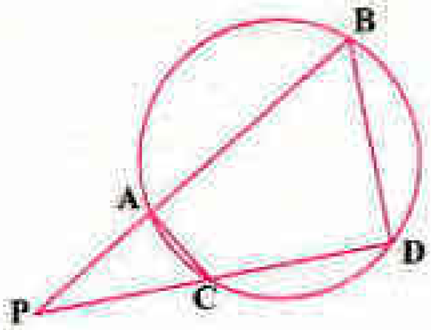
(ii) $AP \cdot PB = CP \cdot DP$



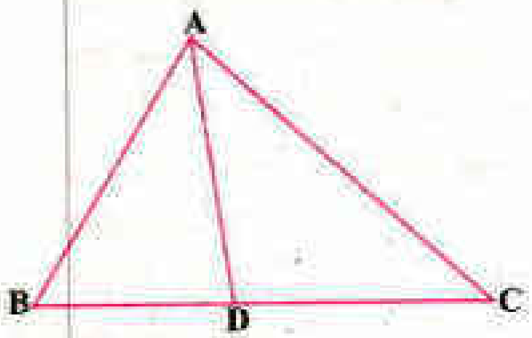
ਚਿੱਤਰ 6.61

8. ਚਿੱਤਰ 6.62 ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ ਦੋ ਵਤਰਾਂ AB ਅਤੇ CD ਵਧਾਉਣ 'ਤੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ P 'ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

(i) $\Delta PAC \sim \Delta PDB$ (ii) $PA \cdot PB = PC \cdot PD$



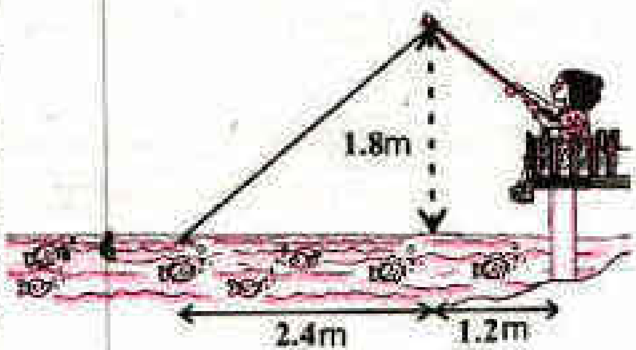
ਚਿੱਤਰ 6.62



ਚਿੱਤਰ 6.63

9. ਚਿੱਤਰ 6.63 ਵਿੱਚ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀ ਭੁਜਾ BC 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ D ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਿਤ ਹੈ ਕਿ $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ AD, ਕੋਣ BAC ਦਾ ਸਮਦੋਭਾਜਕ ਹੈ।

10. ਨਾਜ਼ਿਮਾ ਇੱਕ ਨਦੀ ਦੀ ਧਾਰਾ ਵਿੱਚ ਮੱਛੀਆਂ ਪਕੜ ਰਹੀ ਹੈ। ਉਸਦੀ ਮੱਛੀਆਂ ਫੜਨ ਵਾਲੀ ਛੜ ਦਾ ਸਿਰਾ ਪਾਣੀ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਤੋਂ 1.8 m ਉੱਪਰ ਹੈ ਅਤੇ ਡੋਰੀ ਦੇ ਹੇਠਲੇ ਸਿਰੇ ਤੇ ਲੱਗਿਆ ਕੁੰਡਾ ਪਾਣੀ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ 'ਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਿਤ ਹੈ ਕਿ ਉਸਦੀ ਨਾਜ਼ਿਮਾ ਤੋਂ ਦੂਰੀ 3.6 m ਹੈ ਅਤੇ ਛੜ ਦੇ ਸਿਰੇ ਦੇ ਠੀਕ ਹੇਠਾਂ ਪਾਣੀ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਉਸਦੀ ਦੂਰੀ 2.4 m ਹੈ। ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਉਸਦੀ ਡੋਰੀ (ਉਸਦੀ ਛੜ ਦੇ ਸਿਰੇ ਤੋਂ ਕੁੰਡੇ ਤੱਕ) ਤਣੀ ਹੋਈ ਹੈ, ਉਸਨੇ ਕਿੰਨੀ ਡੋਰੀ ਬਾਹਰ ਕੱਢੀ ਹੋਈ ਹੈ। (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.64)? ਜੇਕਰ ਉਹੀ ਡੋਰੀ ਨੂੰ 5 cm/s ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਅੰਦਰ ਖਿੱਚੇ ਤਾਂ 12 ਸੈਕਿੰਡਾਂ ਬਾਦ ਨਾਜ਼ਿਮਾ ਦੀ ਕੁੰਡੇ ਤੋਂ ਖਿਤਿਜੀ ਦੂਰੀ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ?



ਚਿੱਤਰ 6.64

6.7 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ :

1. ਦੋ ਚਿੱਤਰ ਜਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਆਕਾਰ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਹੋਣ ਪਰੰਤੂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਮਾਪ ਬਰਾਬਰ ਨਾ ਹੋਣ, ਸਮਰੂਪ ਚਿੱਤਰ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ।
2. ਸਾਰੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਚਿੱਤਰ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਪਰੰਤੂ ਇਸਦਾ ਉਲਟ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ।

3. ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਬਰਾਬਰ ਸੰਖਿਆ ਵਾਲੇ ਦੋ ਬਹੁਭੁਜ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ (i) ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਅਤੇ (ii) ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ (ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤੀ) ਹੋਣ।
4. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਬਾਕੀ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੀ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਇਹ ਬਾਕੀ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।
5. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡੇ, ਤਾਂ ਇਹ ਰੇਖਾ ਤੀਸਰੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
6. ਜੇਕਰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ (AAA ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ)।
7. ਜੇਕਰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਕੋਣ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਦੂਸਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ (AA ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ)।
8. ਜੇਕਰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ (SSS ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ)।
9. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਇੱਕ ਕੋਣ ਦੂਸਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਇੱਕ ਕੋਣ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ (SAS ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ)
10. ਦੋ ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਵਰਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
11. ਜੇਕਰ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਵਿੱਚ ਸਮਕੋਣ ਵਾਲੇ ਸਿਖਰ ਤੋਂ ਉਸਦੇ ਕਰਣ 'ਤੇ ਲੰਬ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਲੰਬ ਦੇ ਦੋਵਾਂ ਪਾਸੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸੰਪੂਰਨ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
12. ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਵਿੱਚ, ਕਰਣ ਦਾ ਵਰਗ ਬਾਕੀ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ)
13. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਵਿੱਚ, ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦਾ ਵਰਗ ਬਾਕੀ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪਹਿਲੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ ਸਮਕੋਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪਾਠਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼

ਜੇਕਰ ਦੋ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਕਰਣ ਅਤੇ ਇੱਕ ਭੁਜਾ, ਦੂਸਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕਰਣ ਅਤੇ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤੀ ਹੋਣ ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸਨੂੰ RHS ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ ਕਿਹਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਕਸੌਟੀ ਨੂੰ ਅਧਿਆਇ 8 ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ 2 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਸਬੂਤ ਹੋਰ ਵੀ ਸਰਲ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ।

ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਿਮਾਇਤੀ 7

7.1 ਭੂਮਿਕਾ

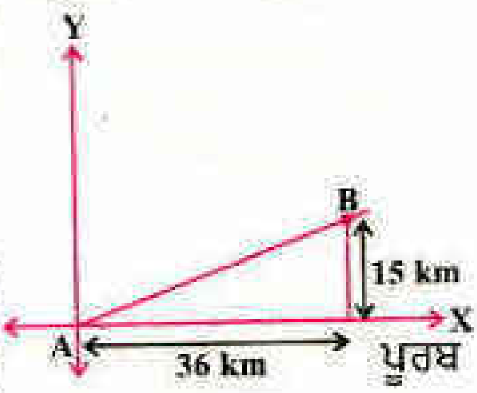
IX ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਇੱਕ ਤਲ 'ਤੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਸਾਨੂੰ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ y-ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦਾ **x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਾਂ ਭੁਜ** (abscissa) ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੀ x-ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦਾ **y-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਾਂ ਕੋਟੀ** (ordinate) ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। x-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(x,0)$ ਰੂਪ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(0,y)$ ਰੂਪ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਇਥੇ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇੱਕ ਖੇਡ ਦਿੱਤੀ ਜਾ ਰਹੀ ਹੈ। ਇੱਕ ਗ੍ਰਾਫ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਲੰਬ ਧੁਰਿਆਂ (perpendicular axes) ਦਾ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਖਿੱਚੋ। ਹੁਣ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਆਲੇਖਿਤ ਕਰੋ ਅਤੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਨਿਰਦੇਸ਼ਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉ। ਬਿੰਦੂ A(4, 8) ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ B(3, 9) ਨਾਲ, B ਨੂੰ C(3, 8) ਨਾਲ, C ਨੂੰ D(1, 6) ਨਾਲ, D ਨੂੰ E(1, 5) ਨਾਲ, E ਨੂੰ F(3, 3) ਨਾਲ, F ਨੂੰ G(6, 3) ਨਾਲ, G ਨੂੰ H(8, 5) ਨਾਲ, H ਨੂੰ I(8, 6) ਨਾਲ, I ਨੂੰ J(6, 8) ਨਾਲ, J ਨੂੰ K(6, 9) ਨਾਲ, K ਨੂੰ L(5, 8) ਨਾਲ ਅਤੇ L ਨੂੰ A ਨਾਲ ਮਿਲਾਉ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਦ ਬਿੰਦੂਆਂ P(3.5, 7), Q (3, 6) ਅਤੇ R(4, 6) ਨੂੰ ਜੋੜ ਕੇ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਬਣਾਉ। ਨਾਲ ਹੀ, ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਬਿੰਦੂਆਂ X(5.5, 7), Y(5, 6) ਅਤੇ Z(6, 6) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉ। ਹੁਣ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਬਿੰਦੂਆਂ S(4, 5), T(4.5, 4) ਅਤੇ U (5,5) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉ। ਅੰਤ ਵਿੱਚ, ਬਿੰਦੂ S ਨੂੰ ਬਿੰਦੂਆਂ (0,5) ਅਤੇ (0,6) ਨਾਲ ਮਿਲਾਉ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ U ਨੂੰ ਬਿੰਦੂਆਂ (9,5) ਅਤੇ (9,6) ਨਾਲ ਮਿਲਾਉ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਕਿਹੜਾ ਚਿੱਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ?

ਨਾਲ ਹੀ, ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ $ax + by + c = 0$ (ਜਿਥੇ a ਅਤੇ b ਇਕੱਠੇ ਸਿਫਰ ਨਾਂ ਹੋਣ) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਜਦੋਂ ਆਲੇਖੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਤੁਸੀਂ ਅਧਿਆਇ 2 ਵਿੱਚ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਇੱਕ ਪੈਰਾਬੋਲਾ (parabola) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ,

ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਿਮਾਇਤੀ (coordinate geometry) ਇੱਕ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਸਾਧਨ (algebraic tool) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਕਸਿਤ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ। ਇਹ ਬੀਜਗਣਿਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਬੀਜਗਣਿਤ ਨੂੰ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦੁਆਰਾ ਸਮਝਾਉਣ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸਹਾਇਕ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸੇ ਕਾਰਣ, ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਉਪਯੋਗ ਹਨ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਭੌਤਿਕੀ, ਇੰਜੀਨੀਰਿੰਗ, ਸਮੁੰਦਰੀ ਪਰਿਵਹਨ (navigation), ਭੂਚਾਲ ਸ਼ਾਸਤਰ ਸੰਬੰਧੀ (seismology) ਅਤੇ ਕਲਾ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਪੜ੍ਹੋਗੇ ਕਿ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ, ਜਿੰਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹੋਣ, ਦੀ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਬਣੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਪੜ੍ਹੋਗੇ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਤੋਂ ਬਣੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।



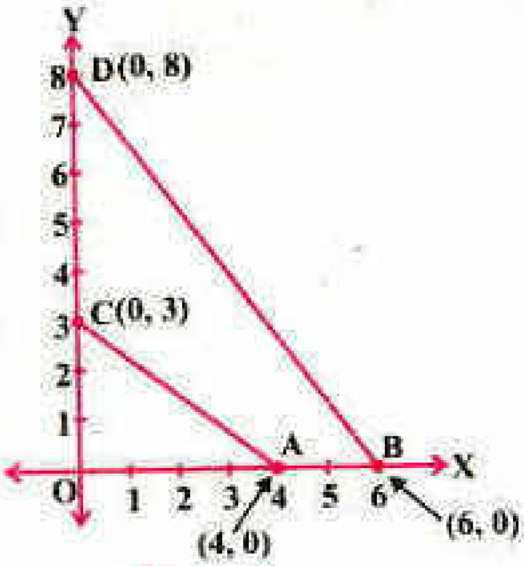
ਚਿੱਤਰ 7.1

7.2 ਦੂਰੀ ਸੂਤਰ

ਆਓ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਥਿਤੀ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ :

ਇਕ ਸ਼ਹਿਰ B ਇਕ ਹੋਰ ਸ਼ਹਿਰ A ਤੋਂ 36 km ਪੂਰਬ (east) ਅਤੇ 15 km ਉੱਤਰ (north) ਵੱਲ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਸ਼ਹਿਰ A ਦੀ ਸ਼ਹਿਰ B ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਬਿਨਾਂ ਅਸਲ ਮਾਪ ਕਰਨ ਤੋਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ? ਆਉ ਦੇਖੀਏ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਆਲੇਖੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਚਿੱਤਰ 7.1 ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਲੋੜੀਂਦੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ ਦੋ ਬਿੰਦੂ x ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਨ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ? ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ, ਚਿੱਤਰ 7.2 ਦੇ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ A (4,0) ਅਤੇ B (6,0) 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਬਿੰਦੂ A ਅਤੇ B, x ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 7.2

ਚਿੱਤਰ ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ OA = 4 ਇਕਾਈ ਅਤੇ OB = 6 ਇਕਾਈ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ A ਤੋਂ B ਦੀ ਦੂਰੀ AB = OB -OA = (6-4) ਇਕਾਈ =2 ਇਕਾਈ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਜੇਕਰ ਦੋ ਬਿੰਦੂ x ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਣ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

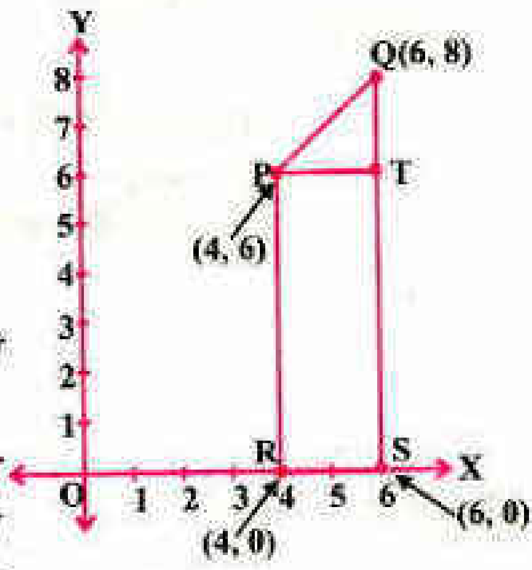
ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ ਅਸੀਂ y ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਕੋਈ ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਕੀ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ? ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ C (0,3) ਅਤੇ D (0,8) Y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਣ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਦੂਰੀ ਉੱਪਰ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਭਾਵ CD = (8–3) ਇਕਾਈਆਂ =5 ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.2)।

ਹੁਣ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 7.2 ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ C ਤੋਂ A ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਕਿਉਂਕਿ OA = 4 ਇਕਾਈਆਂ ਅਤੇ OC = 3 ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ C ਤੋਂ A ਦੀ ਦੂਰੀ AC = $\sqrt{3^2+4^2}$ =5 ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਤੁਸੀਂ D ਅਤੇ B ਦੀ ਦੂਰੀ BD = 10 ਇਕਾਈਆਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਹੁਣ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਦੋ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ, ਜੋ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਿਆਂ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਕੀ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ? ਹਾਂ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ। ਆਉ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈ ਕੇ ਦੇਖੀਏ।

ਚਿੱਤਰ 7.3 ਵਿੱਚ, ਬਿੰਦੂ P (4,6) ਅਤੇ Q (6,8) ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ (First Quadrant) ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ? ਆਉ P ਅਤੇ Q ਤੋਂ x-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਲੰਬ ਕ੍ਰਮਵਾਰ PR ਅਤੇ QS ਖਿੱਚੋ ਨਾਲ ਹੀ P ਤੋਂ QS 'ਤੇ ਇੱਕ ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ ਜੋ QS ਨੂੰ T 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੋਵੇ। ਹੁਣ R ਅਤੇ S ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ (4,0) ਅਤੇ (6,0) ਹਨ। ਇਸ ਲਈ RS = 2 ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ QS=8 ਇਕਾਈਆਂ ਅਤੇ TS = PR = 6 ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ।

ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ QT = 2 ਇਕਾਈਆਂ ਅਤੇ PT = RS = 2 ਇਕਾਈਆਂ



ਚਿੱਤਰ 7.3

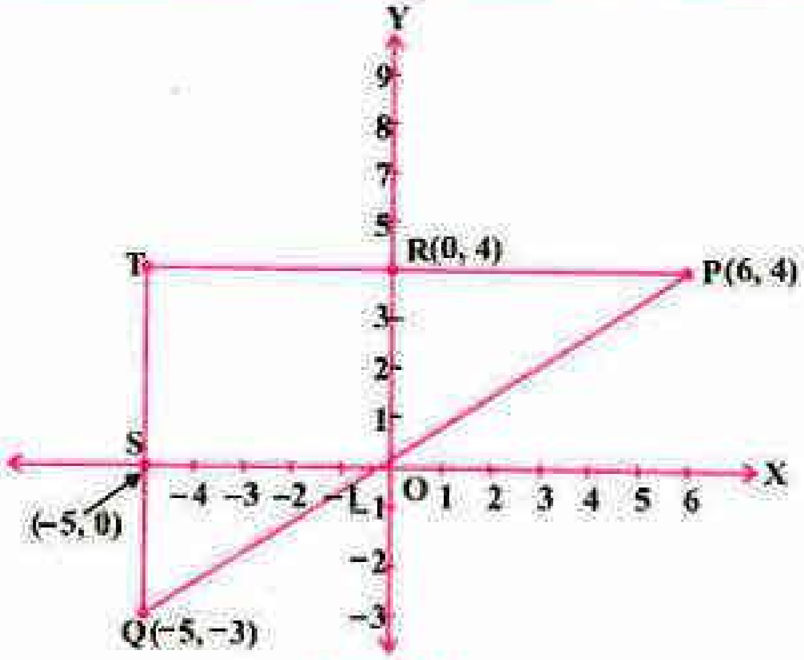
ਹੁਣ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

ਇਸ ਲਈ $\quad PQ = 2\sqrt{2}$ ਇਕਾਈਆਂ ਹੋਇਆ।

ਤੁਸੀਂ ਦੋ ਅਲੱਗ- ਅਲੱਗ ਚੌਥਾਈਆਂ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਦੂਰੀ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋਗੇ?

ਬਿੰਦੂਆਂ P (6, 4) ਅਤੇ Q (-5, -3) 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.4) x ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਲੰਬ QS ਖਿੱਚੋ। ਨਾਲ ਹੀ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਵਧਾਈ ਹੋਈ QS 'ਤੇ PT ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ ਜੋ y-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ R 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

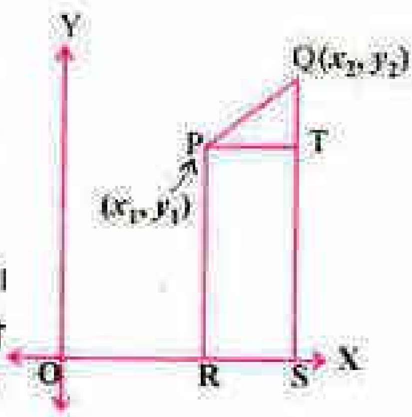


ਚਿੱਤਰ 7.4

ਹੁਣ PT = 11 ਇਕਾਈਆਂ ਅਤੇ QT=7 ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ (ਕਿਉਂ ?)

ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ PTQ ਵਿੱਚ, ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ: $PQ = \sqrt{11^2 + 7^2} = \sqrt{170}$ ਇਕਾਈਆਂ

ਆਉ ਹੁਣ ਕਿਸੇ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ P (x_1, y_1) ਅਤੇ Q (x_2, y_2) ਦੀ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੀਏ। x-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਲੰਬ PR ਅਤੇ QS ਖਿੱਚੋ। P ਤੋਂ QS 'ਤੇ ਇੱਕ ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ ਜੋ ਇਸਨੂੰ T 'ਤੇ ਕੱਟੇ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.5)।



ਚਿੱਤਰ 7.5

ਤਦ OR = x_1, OS = x_2 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ RS= x_2-x_1= PT ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ SQ = y_2 ਅਤੇ ST = PR = y_1 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ QT = y_2-y_1 ਹੈ। ਹੁਣ ΔPTQ ਵਿੱਚ, ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

ਇਸ ਲਈ $$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿਉਂਕਿ ਦੂਰੀ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਧਨਾਤਮਕ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕੇਵਲ ਧਨਾਤਮਕ ਵਰਗਮੂਲ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $P(x_1, y_1)$ ਅਤੇ $Q(x_2, y_2)$ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਹੈ :

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ਜੋ ਕਿ ਦੂਰੀ ਸੂਤਰ (distance formula) ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀਆਂ :

1. ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਨਾਲ, ਬਿੰਦੂ $P(x,y)$ ਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ $O(0,0)$ ਤੋਂ ਦੂਰੀ

$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

2. ਅਸੀਂ $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ਵੀ ਲਿੱਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। (ਕਿਉਂ ?)

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਕੀ ਬਿੰਦੂ (3,2), (–2,–3) ਅਤੇ (2,3) ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ ? ਜੇਕਰ ਹਾਂ ਤਾਂ ਦੱਸੋ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਬਣਦਾ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਆਓ PQ, QR ਅਤੇ PR ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਦੂਰੀ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੀਏ, ਜਿਥੇ P (3,2), Q (-2,-3) ਅਤੇ Q (2,3) ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਿੰਦੂ ਹਨ। ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$PQ = \sqrt{(3+2)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7.07 \text{ (ਲਗਭਗ)}$$

$$QR = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3\ -3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 7.21 \text{ (ਲਗਭਗ)}$$

$$PR = \sqrt{(3-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} = 1.41 \text{ (ਲਗਭਗ)}$$

ਕਿਉਂਕਿ ਇਹਨਾਂ ਤਿੰਨਾਂ ਦੂਰੀਆਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਦੋ ਦਾ ਜੋੜ ਤੀਸਰੀ ਦੂਰੀ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ P, Q ਅਤੇ R ਨਾਲ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਬਣਦਾ ਹੈ।

ਨਾਲ ਹੀ $PQ^2 + PR^2 = QR^2$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਉਲਟ ਤੋਂ, ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ $\angle P = 90^\circ$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, PQR ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (1, 7), (4, 2), (–1, –1) ਅਤੇ (– 4, 4) ਇੱਕ ਵਰਗ ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਿੰਦੂ A(1, 7), B(4, 2), C(–1, –1) ਅਤੇ D(– 4, 4) ਹਨ। ABCD ਨੂੰ ਵਰਗ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੀ ਇੱਕ ਵਿਧੀ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਉਸਦਾ ਗੁਣ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਵਰਗ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਅਤੇ ਦੋਵੇਂ ਵਿਕਰਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇ। ਹੁਣ,

$$AB = \sqrt{(1-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(4+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$CD = \sqrt{(-1+4)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$DA = \sqrt{(1+4)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

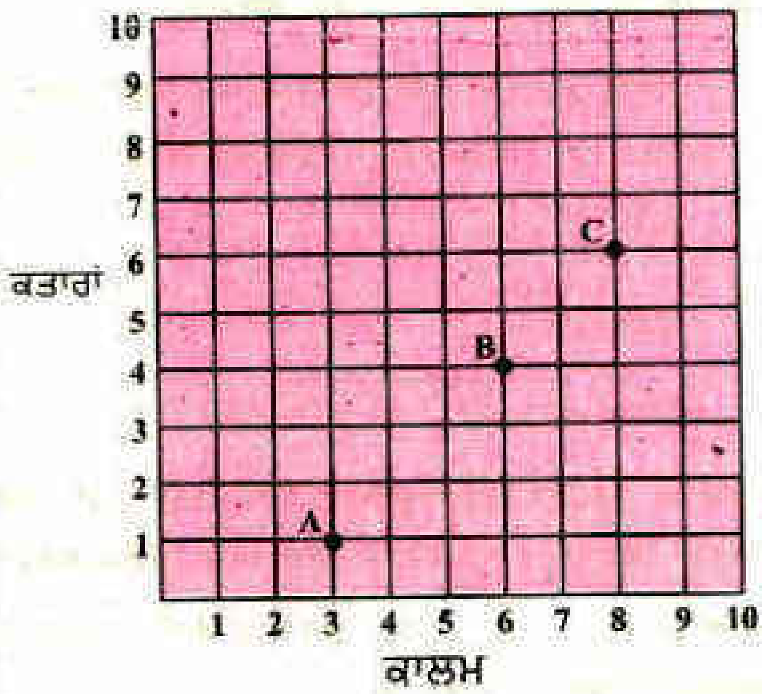
$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

$$BD = \sqrt{(4+4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$$

ਇਥੇ AB = BC = CD = DA ਹੈ ਅਤੇ AC = BD ਹੈ, ਭਾਵ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦੀਆ ਚਾਰੇ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹਨ ਅਤੇ ਦੋਨੋਂ ਵਿਕਰਣ ਬਰਾਬਰ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੈ।

ਬਦਲਵਾਂ ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਚਾਰੇ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਇੱਕ ਵਿਕਰਣ, ਮੰਨ ਲਉ AC ਉੱਪਰ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਥੇ $AD^2 + DC^2 = 34 + 34 = 68 = AC^2$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਦੇ ਉਲਟ ਦੁਆਰਾ $\angle D = 90°$ ਹੈ। ਚਾਰੇ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਅਤੇ ਇੱਕ ਕੋਣ ਸਮਕੋਣ ਹੋਣ ਨਾਲ ਚਤੁਰਭੁਜ ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ABCD ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਚਿੱਤਰ 7.6 ਕਿਸੇ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਰੱਖੇ ਬੈਂਚਾਂ (desks) ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਆਸ਼ੀਮਾ ਭਾਰਤੀ ਅਤੇ ਕੈਮਿਲਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ A(3, 1), B(6, 4) ਅਤੇ C(8, 6) 'ਤੇ ਬੈਠੀਆਂ ਹਨ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਸੋਚਦੇ ਹੋ ਕਿ ਉਹ ਇੱਕ ਹੀ ਰੇਖਾ (in a line) ਵਿੱਚ ਬੈਠੀਆਂ ਹਨ। ਕਾਰਣ ਸਹਿਤ ਉੱਤਰ ਦਿਉ।



ਚਿੱਤਰ 7.6

ਹੱਲ : ਦੂਰੀ ਸੂਤਰ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(8-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(8-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

ਕਿਉਂਕਿ $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ A, B ਅਤੇ C ਇੱਕ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਸਮਰੇਖੀ (collinear) ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਉਹ ਤਿੰਨੇ ਇੱਕ ਹੀ ਰੇਖਾ ਵਿੱਚ ਬੈਠੀਆਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : x ਅਤੇ y ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਬਿੰਦੂਆਂ $(7, 1)$ ਅਤੇ $(3, 5)$ ਤੋਂ ਬਰਾਬਰ ਦੂਰੀ (equidistant) 'ਤੇ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $P(x, y)$ ਬਿੰਦੂਆਂ $A(7, 1)$ ਅਤੇ $B(3, 5)$ ਤੋਂ ਬਰਾਬਰ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ। ਸਾਨੂੰ $AP = BP$ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $AP^2 = BP^2$ ਹੈ।

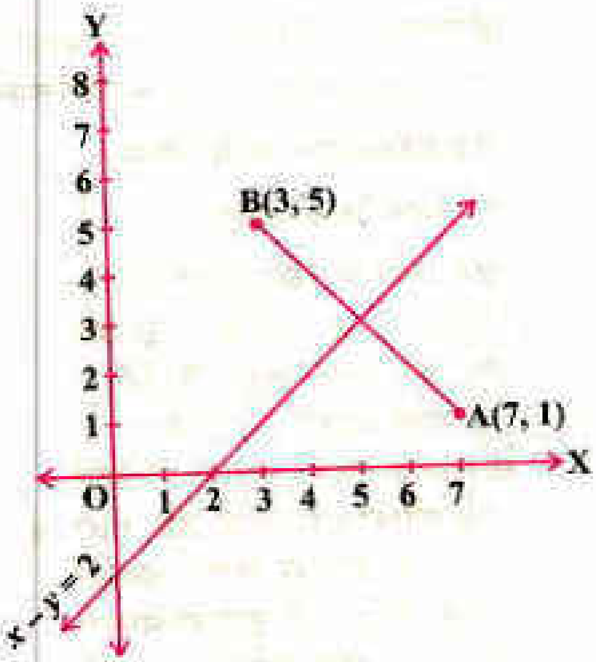
ਭਾਵ $\qquad (x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$

ਭਾਵ $\qquad x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$

ਭਾਵ $\qquad x - y = 2$

ਇਹ ਹੀ x ਅਤੇ y ਵਿੱਚ ਲੋੜੀਂਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ $x - y = 2$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੇ ਪਿਛਲੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਇਹ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਜੋ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ B ਤੋਂ ਬਰਾਬਰ ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਦੇ ਲੰਬ ਸਮ ਦੁਭਾਜਕ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $x - y = 2$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਦਾ ਲੰਬ ਸਮ ਦੁਭਾਜਕ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.7)।



ਚਿੱਤਰ 7.7

ਉਦਾਹਰਣ 5 : y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਬਿੰਦੂਆਂ $A(6, 5)$ ਅਤੇ $B(-4, 3)$ ਤੋਂ ਬਰਾਬਰ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਕੋਈ ਵੀ ਬਿੰਦੂ $(0, y)$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ $P(0, y)$ ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ B ਤੋਂ ਬਰਾਬਰ ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ। ਹੁਣ

$$(6-0)^2 + (5-y)^2 = (-4-0)^2 + (3-y)^2$$

ਜਾਂ $\qquad 36 + 25 + y^2 - 10y = 16 + 9 + y^2 - 6y$

ਜਾਂ $4y = 36$

ਜਾਂ $y = 9$

ਇਸ ਲਈ, (0, 9) ਲੋੜੀਂਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

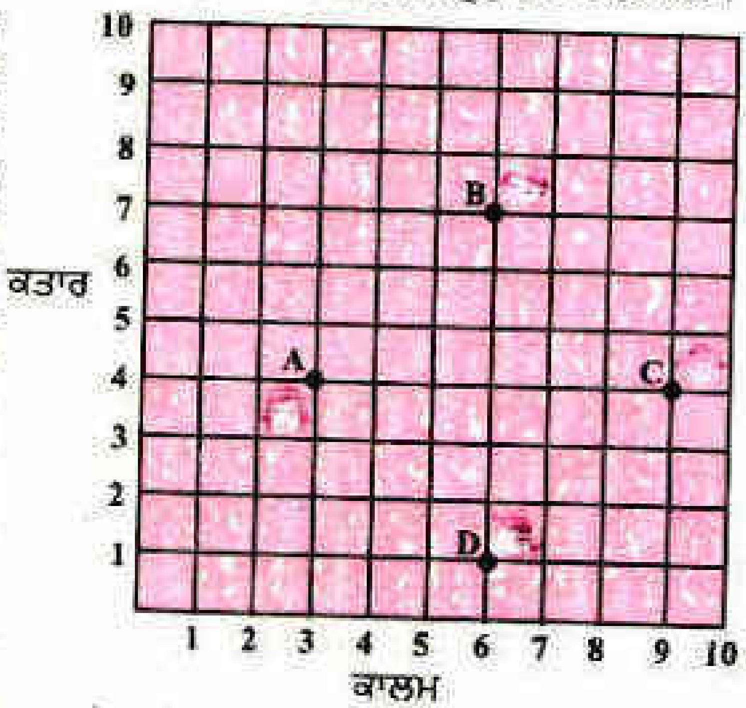
ਆਉ ਆਪਣੇ ਹੱਲ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੀਏ: $AP = \sqrt{(6-0)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$

$BP = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$

ਟਿੱਪਣੀ : ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਟਿੱਪਣੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ (0, 9), y-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਦੇ ਲੰਬ ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਦਾ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 7.1

1. ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਹੇਠ ਦਿੱਤਿਆਂ ਜੋੜਿਆਂ ਦੀ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ :
   (i) (2, 3), (4, 1) (ii) (– 5, 7), (– 1, 3) (iii) $(a, b), (-a, -b)$
2. ਬਿੰਦੂਆਂ (0, 0) ਅਤੇ (36, 15) ਦੀ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਹੁਣ ਭਾਗ 7.2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਦੋਹਾਂ ਸ਼ਹਿਰਾਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ?
3. ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਬਿੰਦੂ (1, 5), (2, 3) ਅਤੇ (– 2, – 11) ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।
4. ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਬਿੰਦੂ (5, – 2), (6, 4) ਅਤੇ (7, – 2) ਇੱਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ ਹਨ।
5. ਕਿਸੇ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਚਾਰ ਮਿੱਤਰ ਬਿੰਦੂਆਂ A, B, C ਅਤੇ D 'ਤੇ ਬੈਠੇ ਹੋਏ ਹਨ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 7.8 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਚੰਪਾ ਅਤੇ ਚਮੇਲੀ ਜਮਾਤ ਦੇ ਅੰਦਰ ਆਉਂਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਕੁਝ ਸਮਾਂ ਦੇਖਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਚੰਪਾ, ਚਮੇਲੀ ਨੂੰ ਪੁੱਛਦੀ ਹੈ, "ਕੀ ਤੂੰ ਨਹੀਂ ਸੋਚਦੀ ਕਿ ABCD ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੈ ? ਚਮੇਲੀ ਇਸ ਨਾਲ ਸਹਿਮਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਦੂਰੀ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਦੱਸੋ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੌਣ ਸਹੀ ਹੈ।
6. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੁਆਰਾ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਕਿਸਮ



ਚਿੱਤਰ 7.8

(ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਹੈ ਤਾਂ) ਦੱਸੋ ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦਾ ਕਾਰਣ ਵੀ ਦੱਸੋ:

(i) $(-1,-2), (1,0), (-1,2), (-3,0)$

(ii) $(-3,5), (3,1), (0,3), (-1,-4)$

(iii) $(4,5), (7,6), (4,3), (1,2)$

7. x-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ $(2,-5)$ ਅਤੇ $(-2,9)$ ਤੋਂ ਬਰਾਬਰ ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ।

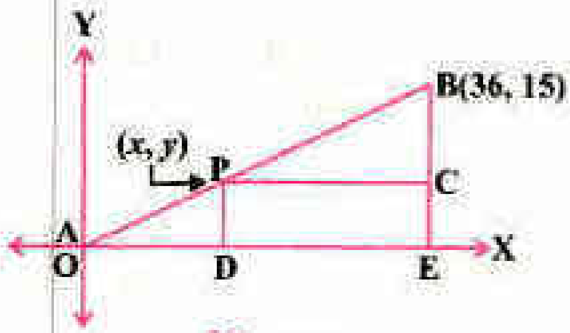
8. y ਦਾ ਉਹ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਲਈ ਬਿੰਦੂ $P(2,-3)$ ਅਤੇ $Q(10,y)$ ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ ਦੀ ਦੂਰੀ 10 ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ।

9. ਜੇਕਰ $Q(0,1)$ ਬਿੰਦੂਆਂ $P(5,-3)$ ਅਤੇ $R(x,6)$ ਤੋਂ ਬਰਾਬਰ ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ ਤਾਂ x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਦੂਰੀਆਂ QR ਅਤੇ PR ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. x ਅਤੇ y ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਸੰਬੰਧ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (x,y) ਬਿੰਦੂਆਂ $(3,6)$ ਅਤੇ $(-3,4)$ ਤੋਂ ਬਰਾਬਰ ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੋਵੇ।

7.3 ਵਿਭਾਜਨ ਸੂਤਰ (Section Formula)

ਆਉ ਭਾਗ 7.2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੀਏ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਟੈਲੀਫੋਨ ਕੰਪਨੀ ਸ਼ਹਿਰ A ਅਤੇ B ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਇੱਕ ਪ੍ਰਸਾਰਣ ਟਾਵਰ (relay tower) ਅਜਿਹੇ ਸਥਾਨ P 'ਤੇ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਟਾਵਰ ਦੀ B ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਉਸਦੀ A ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੋਂ ਦੁੱਗਣੀ ਹੋਵੇ। ਜੇਕਰ P ਰੇਖਾਖੰਡ AB 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਹ AB ਨੂੰ 1 : 2 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰੇ। (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.9)। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ A ਨੂੰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਮੰਨੀਏ ਅਤੇ 1 km ਨੂੰ ਦੋਹਾਂ ਧੁਰਿਆਂ 'ਤੇ 1 ਇਕਾਈ ਮੰਨੀਏ ਤਾਂ B ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (36, 15) ਹੋਣਗੇ। P ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਜਾਨਣ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰਨੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਅਸੀਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰੀਏ?



ਚਿੱਤਰ 7.9

ਮੰਨ ਲਉ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (x, y) ਹਨ। P ਅਤੇ B ਤੋਂ x- ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ ਜੋ ਇਸਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ D ਅਤੇ E 'ਤੇ ਮਿਲਣ। BE 'ਤੇ ਲੰਬ PC ਖਿੱਚੋ ਜੋ ਇਸਨੂੰ C 'ਤੇ ਮਿਲੇ। ਹੁਣ ਅਧਿਆਇ 6 ਵਿੱਚ, ਪੜੀ ਗਈ AA ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ, Δ POD ਅਤੇ Δ BPC ਸਮਰੂਪ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $\frac{OD}{PC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$ ਅਤੇ $\frac{PD}{BC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$ ਹੈ।

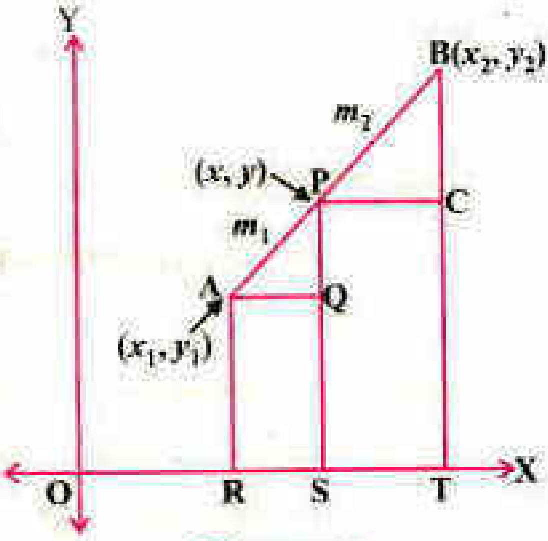
ਇਸ ਲਈ $\frac{x}{36-x} = \frac{1}{2}$ ਅਤੇ $\frac{y}{15-y} = \frac{1}{2}$ ਹੈ।

ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਤੋਂ $x = 12$ ਅਤੇ $y = 5$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਤੁਸੀਂ ਇਸਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ P(12, 5) ਸ਼ਰਤ OP : PB = 1 : 2 ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਗਈ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੇ ਆਧਾਰ 'ਤੇ ਵਿਭਾਜਨ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਸੂਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੀਏ।

ਕਿਸੇ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ $A(x_1, y_1)$ ਅਤੇ $B(x_2, y_2)$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਬਿੰਦੂ P (x, y) ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਨੂੰ $m_1 : m_2$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਅੰਦਰੂਨੀ (internally) ਤੌਰ ਤੇ ਵੰਡਦਾ ਹੈ,



ਚਿੱਤਰ 7.10

ਭਾਵ $\frac{PA}{PB} = \frac{m_1}{m_2}$ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.10)

x-ਧੁਰੇ 'ਤੇ AR, PS ਅਤੇ BT ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ। x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ AQ ਅਤੇ PC ਖਿੱਚੋ। ਹੁਣ AA ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ ਤੋਂ

$$\Delta PAQ \sim \Delta BPC$$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{PA}{BP} = \frac{AQ}{PC} = \frac{PQ}{BC} \qquad (1)$$

ਹੁਣ
$$AQ = RS = OS - OR = x - x_1$$
$$PC = ST = OT - OS = x_2 - x$$
$$PQ = PS - QS = PS - AR = y - y_1$$
$$BC = BT - CT = BT - PS = y_2 - y$$

ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ (1) ਵਿੱਚ ਭਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$ ਲੈਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{m_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$ ਲੈਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ $A(x_1, y_1)$ ਅਤੇ $B(x_2, y_2)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਨੂੰ $m_1 : m_2$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਅੰਦਰੂਨੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵੰਡਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ $P(x, y)$ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ :

$$\left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}\right) \qquad (2)$$

ਉਪਰੋਕਤ ਨੂੰ **ਵਿਭਾਜਨ ਸੂਤਰ** (section formula) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਸੂਤਰ ਨੂੰ A, P ਅਤੇ B ਤੋਂ y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਲੰਬ ਖਿੱਚ ਕੇ ਅਤੇ ਉੱਪਰ ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਕਰਕੇ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ P ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਨੂੰ $k : 1$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡੇ, ਤਾਂ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k+1}, \frac{ky_2 + y_1}{k+1}\right)$$ ਹੋਣਗੇ।

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਥਿਤੀ : ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਉਸਨੂੰ $1 : 1$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂਆਂ $A(x_1, y_1)$ ਅਤੇ $B(x_2, y_2)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ AB ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ

$$\left(\frac{1\cdot x_1 + 1\cdot x_2}{1+1}, \frac{1\cdot y_1 + 1\cdot y_2}{1+1}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$ ਹੋਣਗੇ।

ਆਉ ਹੁਣ ਵਿਭਾਜਨ ਸੂਤਰ 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਬਿੰਦੂਆਂ $(4, -3)$ ਅਤੇ $(8, 5)$ ਨੂੰ ਜੋੜਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ ਅੰਦਰੂਨੀ ਤੌਰ ਤੇ $3 : 1$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $P(x, y)$ ਲੋੜੀਂਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਵਿਭਾਜਨ ਸੂਤਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ

$$x = \frac{3(8) + 1(4)}{3+1} = 7, \quad y = \frac{3(5) + 1(-3)}{3+1} = 3$$

ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $(7, 3)$ ਹੀ ਲੋੜੀਂਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਬਿੰਦੂ $(-4, 6)$ ਬਿੰਦੂਆਂ $A(-6, 10)$ ਅਤੇ $B(3, -8)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ ਕਿਸ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ (– 4, 6) ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਨੂੰ ਅੰਦਰੂਨੀ ਤੌਰ 'ਤੇ $m_1 : m_2$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਵਿਭਾਜਨ ਸੂਤਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$(-4, 6) = \left(\frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}, \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}\right) \qquad (1)$$

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ $(x, y) = (a, b)$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $x = a$ ਅਤੇ $y = b$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ : $-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$ ਅਤੇ $6 = \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ $-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। :

$$-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$$

ਭਾਵ $$7m_1 = 2m_2$$

ਜਾਂ $$m_1 : m_2 = 2 : 7$$

ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਸਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰ ਲੈਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਅਨੁਪਾਤ y-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਸਤੁੰਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ $$\frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = \frac{-8\frac{m_1}{m_2} + 10}{\frac{m_1}{m_2} + 1}$$ (m_2 ਨਾਲ ਉੱਪਰ ਥੱਲੇ ਭਾਗ ਦੇਣ 'ਤੇ)

$$= \frac{-8 \times \frac{2}{7} + 10}{\frac{2}{7} + 1} = 6$$

ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ (– 4, 6), ਬਿੰਦੂਆਂ A(– 6, 10) ਅਤੇ B(3, – 8) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ 2 : 7 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ।

ਬਦਲਵਾਂ ਹੱਲ : ਅਨੁਪਾਤ $m_1 : m_2$ ਨੂੰ $\frac{m_1}{m_2} : 1$, ਜਾਂ $k : 1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਬਿੰਦੂ (– 4, 6) ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਨੂੰ ਅੰਦਰੂਨੀ ਤੌਰ 'ਤੇ $k : 1$ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਵਿਭਾਜਨ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$(-4, 6) = \left(\frac{3k-6}{k+1}, \frac{-8k+10}{k+1}\right) \qquad (2)$$

ਇਸ ਲਈ $-4 = \dfrac{3k-6}{k+1}$

ਜਾਂ $-4k - 4 = 3k - 6$

ਜਾਂ $7k = 2$

ਜਾਂ $k : 1 = 2 : 7$

ਤੁਸੀਂ y-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਇਸਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ $(-4, 6)$, ਬਿੰਦੂਆਂ $A(-6, 10)$ ਅਤੇ $B(3, -8)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ $2 : 7$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਅਨੁਪਾਤ ਨੂੰ ਦੂਰੀਆਂ PA ਅਤੇ PB ਪਤਾ ਕਰਕੇ ਅਤੇ ਫਿਰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਲੈ ਕੇ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਜਾਣਕਾਰੀ ਹੋਵੇ ਕਿ ਬਿੰਦੂ A, P ਅਤੇ B ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਬਿੰਦੂਆਂ $A(2, -2)$ ਅਤੇ $B(-7, 4)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਸਮਾਨ ਭਾਗ (Trisection) ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਸਮਾਨ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ P ਅਤੇ Q ਹਨ। ਭਾਵ AP = PQ = QB ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.11)।

ਚਿੱਤਰ 7.11

ਇਸ ਲਈ, P ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਨੂੰ ਅੰਦਰੂਨੀ ਤੌਰ 'ਤੇ $1 : 2$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਹਨ :

$$\left(\frac{1(-7)+2(2)}{1+2}, \frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right), \text{ ਭਾਵ } (-1, 0)$$

ਹੁਣ Q ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਨੂੰ ਅੰਦਰੂਨੀ ਤੌਰ 'ਤੇ $2 : 1$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ Q ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ

$$\left(\frac{2(-7)+1(2)}{2+1}, \frac{2(4)+1(-2)}{2+1}\right), \text{ ਭਾਵ } (-4, 2)$$

ਇਸ ਲਈ, ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ B ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਸਮਾਨ ਭਾਗ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(-1, 0)$ ਅਤੇ $(-4, 2)$ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਅਸੀਂ Q ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਉਸਨੂੰ PB ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਮੰਨ ਕੇ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਵਾਲੇ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨਾ ਪਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਬਿੰਦੂਆਂ $(5, -6)$ ਅਤੇ $(-1, -4)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ y-ਧੁਰਾ ਕਿਸ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਲੋੜੀਂਦਾ ਅਨੁਪਾਤ $k : 1$ ਹੈ। ਹੁਣ ਵਿਭਾਜਨ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ, ਇਸ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ $k : 1$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਣ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ :

$$\left(\frac{-k+5}{k+1}, \frac{-4k-6}{k+1}\right)$$

ਇਹ ਬਿੰਦੂ y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਭੁਜ (x ਦਾ ਮੁੱਲ) ਸਿਫ਼ਰ (0) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$\frac{-k+5}{k+1} = 0$$

ਇਸ ਲਈ $$k = 5 \text{ ਹੈ}$$

ਭਾਵ ਲੋੜੀਂਦਾ ਅਨੁਪਾਤ $5 : 1$ ਹੈ। k ਦਾ ਮੁੱਲ 5 ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ $\left(0, \frac{-13}{3}\right)$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ $A(6, 1)$, $B(8, 2)$, $C(9, 4)$ ਅਤੇ $D(p, 3)$ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ ਇਸੇ ਹੀ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਤਾਂ p ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, ਵਿਕਰਣ AC ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ = ਵਿਕਰਣ BD ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ

ਭਾਵ $$\left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{2+3}{2}\right)$$

ਜਾਂ $$\left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

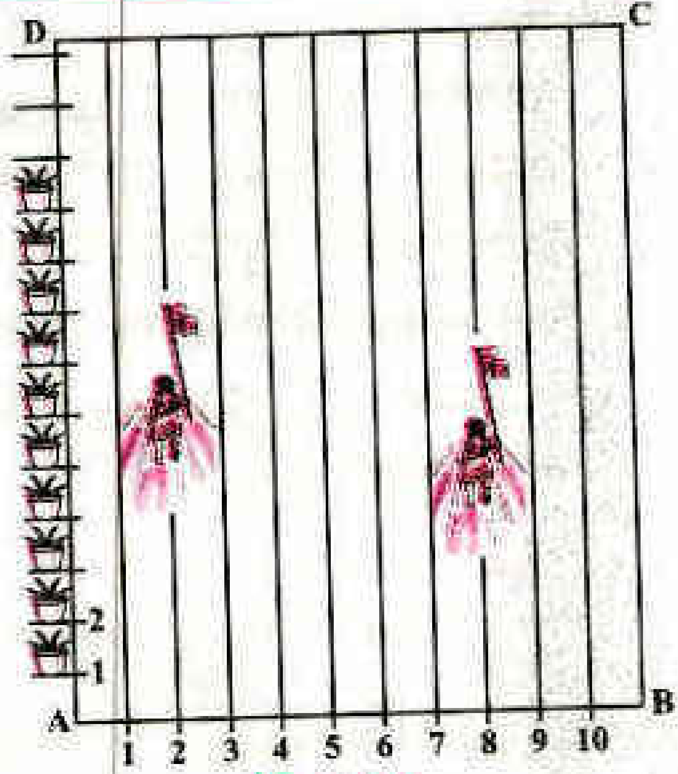
ਇਸ ਲਈ $$\frac{15}{2} = \frac{8+p}{2}$$

ਜਾਂ $$p = 7$$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 7.2

1. ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਬਿੰਦੂਆਂ $(-1, 7)$ ਅਤੇ $(4, -3)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ $2 : 3$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ।

2. ਬਿੰਦੂਆਂ (4, –1) ਅਤੇ (–2, –3) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਸਮਾਨ ਭਾਗ (Trisection) ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 7.12

3. ਤੁਹਾਡੇ ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ ਖੇਡਣ ਦੇ ਮੁਕਾਬਲੇ ਕਰਵਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਮੈਦਾਨ ABCD ਵਿੱਚ, ਚੂਨੇ ਦੇ ਨਾਲ 1m ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਕਤਾਰਾਂ ਬਣਾਈਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ। AD ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ 1m ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ 100 ਗਮਲੇ ਰੱਖੇ ਗਏ ਹਨ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 7.12 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਨਿਹਾਰਿਕਾ ਦੂਸਰੀ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ AD ਦੇ $\frac{1}{4}$ ਭਾਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੇ ਦੌੜਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਉਥੇ ਇੱਕ ਹਰਾ ਝੰਡਾ ਗੱਡ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। ਪ੍ਰੀਤ ਅੱਠਵੀਂ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ AD ਦੇ $\frac{1}{5}$ ਭਾਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੇ ਦੌੜਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਉਥੇ ਇੱਕ ਲਾਲ ਝੰਡਾ ਗੱਡ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। ਦੋਹਾਂ ਝੰਡਿਆਂ ਦੀ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਕੀ ਹੈ? ਜੇਕਰ ਰਸ਼ਿਮ ਨੂੰ ਇੱਕ ਨੀਲਾ ਝੰਡਾ ਇਹਨਾਂ ਦੋਹਾਂ ਝੰਡਿਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਦੇ ਠੀਕ ਅੱਧੀ ਦੂਰੀ (ਵਿਚਕਾਰ) 'ਤੇ ਗੱਡਣਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ ਆਪਣਾ ਝੰਡਾ ਕਿੱਥੇ ਗੱਡਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ?

4. ਬਿੰਦੂਆਂ (– 3, 10) ਅਤੇ (6, – 8) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ (– 1, 6) ਕਿਸ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ?

5. ਬਿੰਦੂਆਂ A(1, – 5) ਅਤੇ B(– 4, 5) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ x-ਧੁਰਾ ਕਿਸ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਵੰਡਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ (1, 2), (4, y), (x, 6) ਅਤੇ (3, 5) ਇਸੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲੈਣ 'ਤੇ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰ ਹੋਣ ਤਾਂ x ਅਤੇ y ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. ਬਿੰਦੂ A ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਥੇ AB ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦਾ ਵਿਆਸ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਕੇਂਦਰ (2, – 3) ਹੈ ਅਤੇ B ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (1, 4) ਹਨ।

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

8. ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਕ੍ਰਮਵਾਰ $(-2, -2)$ ਅਤੇ $(2, -4)$ ਹੋਣ ਤਾਂ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ $AP = \frac{3}{7} AB$ ਹੋਵੇ ਅਤੇ P ਰੇਖਾਖੰਡ AB 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਵੇ।

9. ਬਿੰਦੂਆਂ $A(-2, 2)$ ਅਤੇ $B(2, 8)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਨੂੰ ਚਾਰ ਬਰਾਬਰ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਇੱਕ ਸਮ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਸਿਖਰ ਇਸੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ $(3, 0)$, $(4, 5)$, $(-1, 4)$ ਅਤੇ $(-2, -1)$ ਹਨ। [ਸੰਕੇਤ : ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2}$ (ਉਸਦੇ ਵਿਕਰਣਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ)]

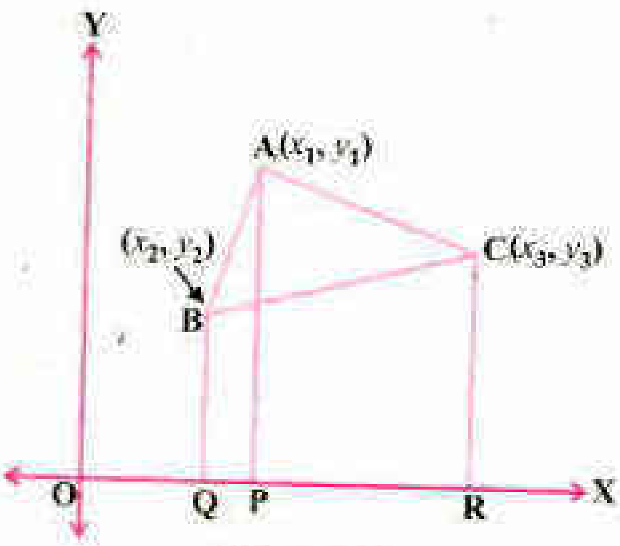
7.4 ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਆਧਾਰ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਸੰਗਤ ਸਿਖਰ ਲੰਬ (ਉੱਚਾਈ) ਦਿੱਤੇ ਹੋਣ 'ਤੇ, ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਸੀ :

ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2} \times$ **ਆਧਾਰ** $\times$ **ਸਿਖਰ ਲੰਬ**

IX ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਹੀਰੋਨ (Heron) ਦੇ ਸੂਤਰ ਦਾ ਵੀ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਹੁਣ ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਤਿੰਨੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ?

ਇੱਕ ਵਿਧੀ ਇਹ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਦੂਰੀ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਤਿੰਨੇ ਭੁਜਾਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਫਿਰ ਹੀਰੋ ਦੇ ਸੂਤਰ ਨਾਲ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰ ਲਉ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਵਿਧੀ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਤੇ ਉਸ ਵੇਲੇ ਜਦ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਣ। ਆਉ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਕੀ ਇਸਦੀ ਹੋਰ ਕੋਈ ਸਰਲ ਵਿਧੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 7.13

ਮੰਨ ਲਉ ABC ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ, ਇਸਦੇ ਲਈ ਸਿਖਰ $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ਅਤੇ $C(x_3, y_3)$ ਹਨ। ਬਿੰਦੂਆਂ A, B ਅਤੇ C ਤੋਂ x-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਲੰਬ AP, BQ ਅਤੇ CR ਖਿੱਚੋ। ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਚਤੁਰਭੁਜ ABQP, APRC ਅਤੇ BQRC ਸਮਲੰਬ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.13)।

ਹੁਣ ਚਿੱਤਰ 7.13 ਤੋਂ, ਇਹ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ Δ ABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਸਮਲੰਬ ABQP ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਸਮਲੰਬ APRC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ − ਸਮਲੰਬ BQRC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ

ਇੱਕ ਸਮਲੰਬ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $\frac{1}{2}$(ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ) × (ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ)

ਇਸ ਲਈ,

$$\Delta \text{ ABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ} = \frac{1}{2}(BQ + AP)\,QP + \frac{1}{2}(AP + CR)\,PR - \frac{1}{2}(BQ + CR)\,QR$$
$$= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$
$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

ਇਸ ਲਈ, Δ ABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵਿਅੰਜਕ $\frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$ ਦਾ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਮੁੱਲ ਹੈ।

ਆਉ ਇਸ ਸੂਤਰ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਦਰਸਾਉਣ ਦੇ ਲਈ, ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਉਸ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਸਿਖਰ (1, −1), (− 4, 6) ਅਤੇ (−3, −5) ਹਨ।

ਹੱਲ : ਸਿਖਰਾਂ A(1, −1), B(− 4, 6) ਅਤੇ C (−3, −5) ਵਾਲੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ, ਉਪਰੋਕਤ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

$$\frac{1}{2}[1(6 + 5) + (-4)(-5 + 1) + (-3)(-1 - 6)]$$
$$= \frac{1}{2}(11 + 16 + 21) = 24$$

ਇਸ ਲਈ, ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 24 ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 12: ਬਿੰਦੂਆਂ A(5, 2), B(4, 7) ਅਤੇ C (7, − 4) ਨਾਲ ਬਨਣ ਵਾਲੇ ΔABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਿਖਰਾਂ A(5, 2), B(4, 7) ਅਤੇ C (7, − 4) ਵਾਲੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ :

$$\frac{1}{2}[5(7 + 4) + 4(-4 - 2) + 7(2 - 7)]$$
$$= \frac{1}{2}(55 - 24 - 35) = \frac{-4}{2} = -2$$

ਕਿਉਂਕਿ ਖੇਤਰਫਲ ਇੱਕ ਮਾਪ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ। ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਰੂਪ − 2 ਦਾ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਮੁੱਲ 2 ਲਵਾਂਗੇ। ਇਸ ਲਈ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 2 ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਬਿੰਦੂਆਂ P(−1.5, 3), Q(6, −2) ਅਤੇ R(−3, 4) ਨਾਲ ਬਨਣ ਵਾਲੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨਾਲ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ :

$$\frac{1}{2}[-1.5(-2-4)+6(4-3)+(-3)(3+2)]$$

$$=\frac{1}{2}(9+6-15)=0$$

ਕੀ ਅਸੀਂ 0 ਵਰਗ ਇਕਾਈ ਖੇਤਰਫਲ ਵਾਲਾ ਕੋਈ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ? ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਕੀ ਹੈ ? ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 0 ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਸਿਖਰ ਸਮਰੇਖੀ ਹੋਣਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 14 : k ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ A(2, 3), B(4, k) ਅਤੇ C(6, –3) ਸਮਰੇਖੀ ਹੋਣ ?

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਤਿੰਨੇ ਬਿੰਦੂ ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਤੋਂ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 0 ਹੋਵੇਗਾ।

$$\frac{1}{2}[2(k+3)+4(-3-3)+6(3-k)]=0$$

ਭਾਵ $\frac{1}{2}(-4k)=0$

ਜਾਂ $k=0$

ਇਸ ਲਈ, k ਦਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਮੁੱਲ 0 ਹੈ।

ਆਉ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੀਏ

Δ ABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $=\frac{1}{2}[2(0+3)+4(-3-3)+6(3-0)]=0$

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਜੇਕਰ A(–5, 7), B(– 4, –5), C(–1, –6) ਅਤੇ D(4, 5) ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦੇ ਸਿਖਰ ਹਨ ਤਾਂ ਇਸ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : B ਅਤੇ D ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਤੇ, ਤੁਹਾਨੂੰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABD ਅਤੇ BCD ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਹੁਣ Δ ABD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $=\frac{1}{2}[-5(-5-5)+(-4)(5-7)+4(7+5)]$

$=\frac{1}{2}(50+8+48)=\frac{106}{2}=53$ ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ

ਨਾਲ ਹੀ, Δ BCD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $=\frac{1}{2}[-4(-6-5)-1(5+5)+4(-5+6)]$

$=\frac{1}{2}(44-10+4)=19$ ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ

ਇਸ ਲਈ, ABCD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = 53 + 19 = 72 ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ

ਟਿੱਪਣੀ : ਕਿਸੇ ਬਹੁਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਉਸਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਕੋਈ ਖੇਤਰ ਸਾਂਝਾ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਜੋੜ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 7.3

1. ਉਸ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਸਿਖਰ ਹਨ:

   (i) (2, 3), (–1, 0), (2, –4) (ii) (–5, –1), (3, –5), (5, 2)

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ 'k' ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ ਤਿੰਨੇ ਬਿੰਦੂ ਸਮਰੇਖੀ ਹੋਣ:

   (i) (7, –2), (5, 1), (3, k) (ii) (8, 1), (k, – 4), (2, –5)

3. ਸਿਖਰਾਂ (0, –1), (2, 1) ਅਤੇ (0, 3) ਵਾਲੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇਸ ਖੇਤਰਫਲ ਦਾ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨਾਲ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਉਸ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਸਿਖਰ, ਇਸੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ (– 4, – 2), (– 3, – 5), (3, –2) ਅਤੇ (2, 3) ਹਨ।

5. ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ (ਪਾਠ 9, ਉਦਾਹਰਣ 3) ਕਿ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਇੱਕ ਮੱਧਿਕਾ (Median) ਉਸਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਵਾਲੇ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਉਸ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਲਈ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਸਿਖਰ A(4, – 6), B(3, –2) ਅਤੇ C(5, 2) ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 7.4 (ਇੱਛਾ ਅਨੁਸਾਰ)*

1. ਬਿੰਦੂਆਂ A(2, – 2) ਅਤੇ B(3, 7) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ ਰੇਖਾ $2x + y - 4 = 0$ ਕਿਸ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੀ ਹੈ, ਉਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2. x ਅਤੇ y ਵਿੱਚਕਾਰ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ (x, y), (1, 2) ਅਤੇ (7, 0) ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

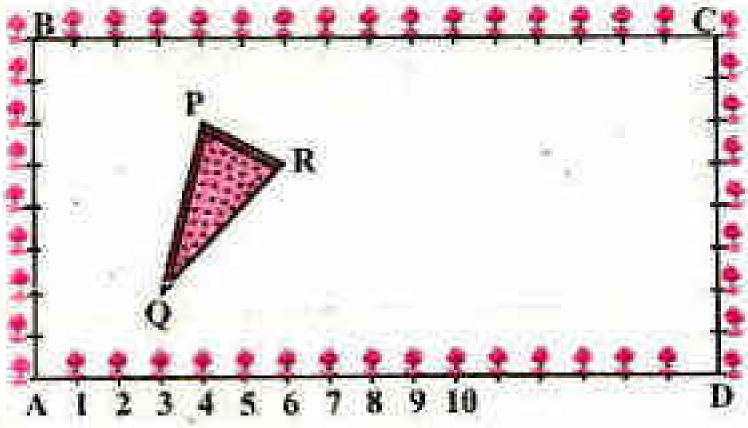
3. ਬਿੰਦੂਆਂ (6, – 6), (3, – 7) ਅਤੇ (3, 3) ਤੋਂ ਹੋਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਵਰਗ ਦੇ ਦੋ ਸਾਹਮਣੇ (Opposite) ਦੇ ਸਿਖਰ (–1, 2) ਅਤੇ (3, 2) ਹਨ ਤਾਂ ਵਰਗ ਦੇ ਬਾਕੀ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਸਿਖਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. ਕ੍ਰਿਸ਼ਨਾ ਨਗਰ ਦੇ ਇੱਕ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ ਦੀ X ਜਮਾਤ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਬਾਗਬਾਨੀ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਕਰਨ ਲਈ ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਜ਼ਮੀਨ ਦਾ ਟੁਕੜਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਗੁਲਮੋਹਰ

* ਇਹ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਦੇ ਪੌਦੇ (Sapling) ਇਸ ਦੀ ਸੀਮਾ (Boundary) 'ਤੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ 1m ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਲਗਾਏ ਗਏ ਹਨ। ਜ਼ਮੀਨ ਦੇ ਇਸ ਟੁੱਕੜੇ ਦੇ ਅੰਦਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਅਕਾਰ ਦਾ ਘਾਹ ਲੱਗਿਆ ਹੋਇਆ ਲਾੱਅਨ (lawn) ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 7.14 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ ਜ਼ਮੀਨ ਦੇ ਬਾਕੀ ਹਿੱਸੇ ਵਿੱਚ ਫੁੱਲਾਂ ਦੇ ਪੌਦਿਆਂ ਦੇ ਬੀਜ ਬੀਜਣੇ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 7.14

(i) A ਨੂੰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ, ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(ii) ਜੇਕਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ C ਹੋਵੇ ਤਾਂ ΔPQR ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕੀ ਹੋਣਗੇ ? ਨਾਲ ਹੀ, ਉਪਰੋਕਤ ਦੋਹਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ?

6. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਸਿਖਰ A(4, 6), B(1, 5) ਅਤੇ C(7, 2) ਹਨ। ਭੁਜਾਵਾਂ AB ਅਤੇ AC ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ D ਅਤੇ E 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਹੈ ਕਿ $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{4}$ ਹੈ। ΔADE ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਤੁਲਨਾ ΔABC ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨਾਲ ਕਰੋ (ਥਿਊਰਮ (ਪ੍ਰਮੇਯ) 6.2 ਅਤੇ ਥਿਊਰਮ (ਪ੍ਰਮੇਯ) 6.6 ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੋ)।

7. ਮੰਨ ਲਉ A (4, 2), B(6, 5) ਅਤੇ C(1, 4) ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਸਿਖਰ ਹਨ।

(i) A ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਮੱਧਿਕਾ BC ਨੂੰ D 'ਤੇ ਮਿਲਦੀ ਹੈ। ਬਿੰਦੂ D ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(ii) AD 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਅਜਿਹੇ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ AP : PD = 2 : 1 ਹੋਵੇ।

(iii) ਮੱਧਿਕਾਵਾਂ BE ਅਤੇ CF ਉੱਤੇ ਅਜਿਹੇ ਬਿੰਦੂਆਂ Q ਅਤੇ R ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ BQ : QE = 2:1 ਹੋਵੇ ਅਤੇ CR : RF = 2:1 ਹੋਵੇ।

(iv) ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ?

[ਨੋਟ : ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਜੋ ਤਿੰਨਾਂ ਮੱਧਿਕਾਵਾਂ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਹੋਵੇ, ਉਸ ਨੂੰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਕੇਂਦਰਕ *(centroid)* ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹ ਹਰ ਇੱਕ ਮੱਧਿਕਾ ਨੂੰ 2:1 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ।

(v) ਜੇਕਰ A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) ਅਤੇ C(x_3, y_3) ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਸਿਖਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਇਸ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕੇਂਦਰਕ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਬਿੰਦੂਆਂ A (-1,-1), B (-1,4), C (5,4) ਅਤੇ D (5,-1) ਤੋਂ ਇੱਕ ਆਇਤ ABCD ਬਣਦਾ ਹੈ। P,Q,R ਅਤੇ S ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਭੁਜਾਵਾਂ AB, BC, CD ਅਤੇ DA ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹਨ। ਕੀ ਚਤੁਰਭੁਜ PQRS ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੈ ? ਕੀ ਇਹ ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ ? ਕੀ ਇਹ ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ? ਕਾਰਣ ਸਹਿਤ ਉੱਤਰ ਦਿਉ।

7.5 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼ (Summary)

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ :

1. $P(x_1, y_1)$ ਅਤੇ $Q(x_2, y_2)$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਦੂਰੀ $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ ਹੈ।
2. ਬਿੰਦੂ $P(x, y)$ ਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ $\sqrt{x^2+y^2}$ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
3. ਉਸ ਬਿੰਦੂ $P(x, y)$ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜੋ ਬਿੰਦੂਆਂ $A(x_1, y_1)$ ਅਤੇ $B(x_2, y_2)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ $m_1 : m_2$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਅੰਦਰੂਨੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵੰਡਦਾ ਹੈ, ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ:

$$\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$$

4. ਬਿੰਦੂਆਂ $P(x_1, y_1)$ ਅਤੇ $Q(x_2, y_2)$ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ PQ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
5. ਬਿੰਦੂ (x_1, y_1), (x_2, y_2) ਅਤੇ (x_3, y_3) ਤੋਂ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵਿਅੰਜਕ $\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$ ਦਾ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਮੁੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪਾਠਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼

ਭਾਗ 7.3 ਵਿੱਚ, ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਲਈ ਜਿਸਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (x, y) ਹਨ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਕਿਸੇ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ $A(x_1, y_1)$ ਅਤੇ $B(x_2, y_2)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ ਅੰਦਰੂਨੀ ਤੌਰ 'ਤੇ $m_1 : m_2$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ ਤਾਂ

$$x = \frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \quad y = \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $PA : PB = m_1 : m_2$

ਪਰ ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ P ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਰੇਖਾਖੰਡ ਦੇ ਬਾਹਰ ਰੇਖਾ AB ਉੱਪਰ ਸਥਿਤ ਹੈ ਜਿਥੇ $PA : PB = m_1 : m_2$ ਹੈ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ P ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ B ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ ਬਾਹਰੀ ਤੌਰ (externally) 'ਤੇ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਵਿਭਾਜਨ ਸੂਤਰ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਤੁਸੀਂ ਵੱਡੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਪੜੋਗੇ।

ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਬਾਰੇ ਜਾਣ ਪਛਾਣ 8

There is perhaps nothing which so occupies the middle position of mathematics as trigonometry.

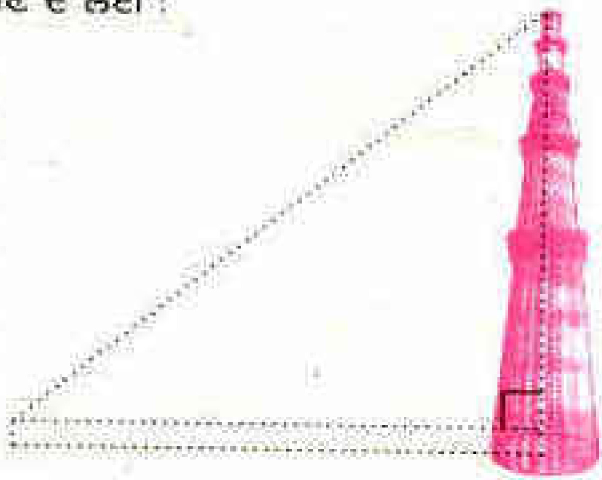
(ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਸ਼ਾਇਦ ਹੀ ਗਣਿਤ ਦੀ ਕੋਈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸ਼ਾਖਾ ਹੈ, ਜੋ ਉਸਦੀ ਮੱਧ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਸਥਾਨ ਲੈ ਸਕੇ)

– J.F. Herbart (1890)

8.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੀਆਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ, ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਆਉ ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਆਲੇ ਦੁਆਲੇ ਤੋਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ, ਜਿਥੇ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਬਣਨ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ :

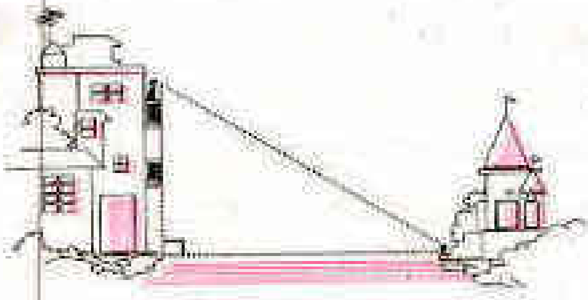
1. ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਸਕੂਲ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਕੁਤੁਬ -ਮੀਨਾਰ ਦੇਖਣ ਗਏ। ਹੁਣ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ ਨੂੰ ਦੇਖ ਰਿਹਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਬਣਨ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.1 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਕੀ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਮਿਣਤੀ (Measure) ਬਗੈਰ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ?



ਚਿੱਤਰ 8.1

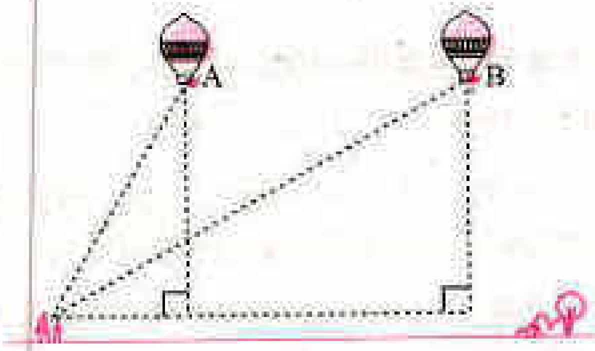
2. ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਲੜਕੀ ਨਦੀ ਦੇ ਕਿਨਾਰੇ ਸਥਿਤ ਆਪਣੇ ਮਕਾਨ ਦੀ ਬਾਲਕੋਨੀ 'ਤੇ ਬੈਠੀ ਹੋਈ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹ ਇਸ ਨਦੀ ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਕਿਨਾਰੇ 'ਤੇ

ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਮੰਦਰ ਦੀ ਇੱਕ ਹੇਠਲੀ ਪੌੜੀ 'ਤੇ ਰੱਖੇ ਗਮਲੇ ਨੂੰ ਦੇਖ ਰਹੀ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਬਣਨ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.2 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਹੋਵੇ, ਜਿਸ 'ਤੇ ਇਹ ਲੜਕੀ ਬੈਠੀ ਹੈ ਤਾਂ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਨਦੀ ਦੀ ਚੌੜਾਈ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ?



ਚਿੱਤਰ 8.2

3. ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਗਰਮ ਹਵਾ ਦਾ ਗੁਬਾਰਾ ਹਵਾ ਵਿੱਚ ਉੱਡ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਅਸਮਾਨ ਵਿੱਚ ਉੱਡਣ ਵਾਲੇ ਇਸ ਗੁਬਾਰੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਲੜਕੀ ਦੇਖ ਲੈਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਦੱਸਣ ਲਈ ਆਪਣੀ ਮਾਂ ਕੋਲ ਭੱਜ ਕੇ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਗੁਬਾਰੇ ਨੂੰ ਦੇਖਣ ਦੇ ਲਈ ਉਸਦੀ ਮਾਂ ਤੁਰੰਤ ਘਰ ਦੇ ਬਾਹਰ ਨਿਕਲ ਆਉਂਦੀ ਹੈ। ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਜਦੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਤੋਂ ਲੜਕੀ ਗੁਬਾਰੇ ਨੂੰ ਦੇਖਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਗੁਬਾਰਾ ਬਿੰਦੂ A 'ਤੇ ਸੀ। ਜਦ ਮਾਂ ਬੇਟੀ ਦੋਵੇਂ ਗੁਬਾਰੇ ਨੂੰ ਦੇਖਣ ਲਈ ਬਾਹਰ ਆਉਂਦੀਆਂ ਹਨ ਤਾਂ ਇਹ ਗੁਬਾਰਾ ਇੱਕ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂ B ਤੱਕ ਆ ਚੁੱਕਿਆ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਮੀਨ ਦੇ ਉਸ ਸਥਾਨ ਤੋਂ, ਜਿਥੇ ਮਾਂ ਬੇਟੀ ਦੋਵੇਂ ਖੜੀਆਂ ਹਨ, B ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ?



ਚਿੱਤਰ 8.3

ਉੱਪਰ ਦੱਸੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀਆਂ ਜਾਂ ਉੱਚਾਈਆਂ ਕੁਝ ਗਣਿਤ ਦੀਆਂ ਤਕਨੀਕਾਂ ਵਰਤ ਕੇ ਪਤਾ ਕੀਤੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਹ ਤਕਨੀਕਾਂ ਗਣਿਤ ਦੀ ਸ਼ਾਖਾ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦੇ ਅੰਦਰ ਆਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਅੰਗ੍ਰੇਜ਼ੀ ਸ਼ਬਦ 'trigonometry' ਗ੍ਰੀਕ ਸ਼ਬਦ 'tri' (ਜਿਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਤਿੰਨ) 'gon' (ਜਿਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਭੁਜਾ) ਅਤੇ 'metron' (ਜਿਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਮਾਪ) ਤੋਂ ਮਿਲਕੇ ਬਣਿਆ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ **ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ** ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰਾਚੀਨ ਕਾਲ ਵਿੱਚ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਉੱਪਰ ਕੀਤੇ ਗਏ ਕੰਮ ਦਾ ਜ਼ਿਕਰ ਮਿਸਰ ਅਤੇ ਬੇਬੀਲਾਨ ਵਿੱਚ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰਾਚੀਨ ਕਾਲ ਵਿੱਚ ਖਗੋਲ ਵਿਗਿਆਨੀ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਪ੍ਰਿਥਵੀ ਦੀ ਤਾਰਿਆਂ ਅਤੇ ਗ੍ਰਿਹਾਂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਮਾਪਣ ਲਈ ਕਰਦੇ ਸਨ। ਅੱਜ ਵੀ **ਇੰਜੀਨੀਅਰਿੰਗ** ਅਤੇ ਭੌਤਿਕ ਵਿਗਿਆਨ ਵਿੱਚ ਵਰਤੀਆਂ ਜਾ ਰਹੀਆਂ ਵਿਕਸਿਤ ਵਿਧੀਆਂ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦੇ ਸੰਕਲਪਾਂ 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹਨ।

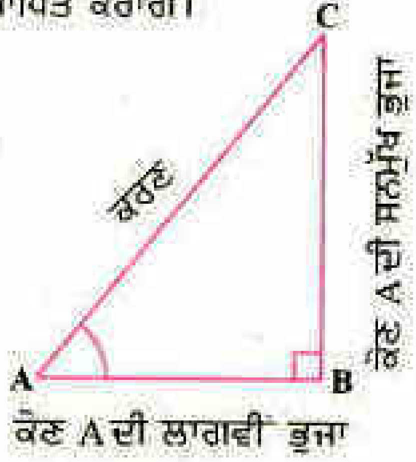
ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦਾ ਉਸਦੇ

ਨਿਊਣ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ (Trigonometric) ਅਨੁਪਾਤ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਥੇ ਅਸੀਂ ਆਪਣੀ ਚਰਚਾ ਨਿਊਣ ਕੋਣਾਂ ਤੱਕ ਹੀ ਸੀਮਿਤ ਰੱਖਾਂਗੇ। ਭਾਵੇਂ ਇਹਨਾਂ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਦੂਸਰੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਥੇ ਅਸੀਂ 0° ਅਤੇ 90° ਦੇ ਮਾਪ ਵਾਲੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਨੂੰ ਵੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕੁਝ **ਤਤਸਮਕਾਂ** **(identities)**, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ **ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਤਤਸਮਕ** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਾਂਗੇ।

8.2 ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ

ਭਾਗ 8.1 ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਬਣੇ ਕੁਝ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ।

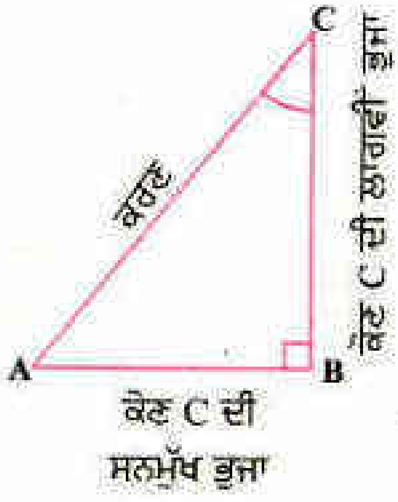
ਆਉ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਲਈਏ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.4 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 8.4

ਇੱਥੇ $\angle CAB$ (ਜਾਂ ਸੰਖੇਪ ਵਿੱਚ ਕੋਣ A) ਇੱਕ ਨਿਊਣ ਕੋਣ ਹੈ। ਕੋਣ A ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਭੁਜਾ BC ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਦੇਖੋ ਇਹ ਭੁਜਾ ਕੋਣ A ਦੇ ਸਾਹਮਣੇ ਹੈ। ਇਸ ਭੁਜਾ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਕੋਣ A ਦੀ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ, ਭੁਜਾ AC ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਕਰਣ ਹੈ ਅਤੇ ਭੁਜਾ AB, $\angle A$ ਦਾ ਇੱਕ ਭਾਗ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਕੋਣ A ਦੀ ਲਾਗਵੀਂ ਭੁਜਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਕੋਣ A ਦੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਕੋਣ C ਲੈਣ 'ਤੇ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਬਦਲ ਜਾਵੇਗੀ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.5)।



ਚਿੱਤਰ 8.5

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ 'ਅਨੁਪਾਤ' ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਇਥੇ ਅਸੀਂ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕੁਝ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਨੂੰ, ਜਿੰਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ **ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ** ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਾਂਗੇ।

ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.4) ਦੇ ਕੋਣ A ਦੇ **ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ** ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ:

$$\angle A \text{ ਦਾ sine} = \frac{\text{ਕੋਣ A ਦੀ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾ}}{\text{ਕਰਣ}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\angle A \text{ ਦਾ cosine} = \frac{\text{ਕੋਣ A ਦੀ ਲਾਗਵੀਂ ਭੁਜਾ}}{\text{ਕਰਣ}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\angle A \text{ ਦਾ tangent} = \frac{\text{ਕੋਣ A ਦੀ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾ}}{\text{ਕੋਣ A ਦੀ ਲਾਗਵੀਂ ਭੁਜਾ}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\angle A \text{ ਦਾ cosecant} = \frac{1}{\angle A \text{ ਦਾ sine}} = \frac{\text{ਕਰਣ}}{\text{ਕੋਣ A ਦੀ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾ}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\angle A \text{ ਦਾ secant} = \frac{1}{\angle A \text{ ਦਾ cosine}} = \frac{\text{ਕਰਣ}}{\text{ਕੋਣ A ਦੀ ਲਾਗਵੀਂ ਭੁਜਾ}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\angle A \text{ ਦਾ cotangent} = \frac{1}{\angle A \text{ ਦਾ tangent}} = \frac{\text{ਕੋਣ A ਦੀ ਲਾਗਵੀਂ ਭੁਜਾ}}{\text{ਕੋਣ A ਦੀ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾ}} = \frac{AB}{BC}$$

ਉੱਪਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਖੇਪ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : sin A, cos A, tan A, cosec A, sec A ਅਤੇ cot A ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਅਨੁਪਾਤ **cosec A, sec A** ਅਤੇ **cot A** ਅਨੁਪਾਤਾਂ sin A, cos A ਅਤੇ tan A ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਉਲਟ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਤੁਸੀਂ ਇਥੇ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ $\tan A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ ਅਤੇ $\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਇੱਕ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਦੇ **ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ** ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕੋਣ ਅਤੇ ਉਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਹੁਣ ਇੱਥੇ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕੋਣ C ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.5)?

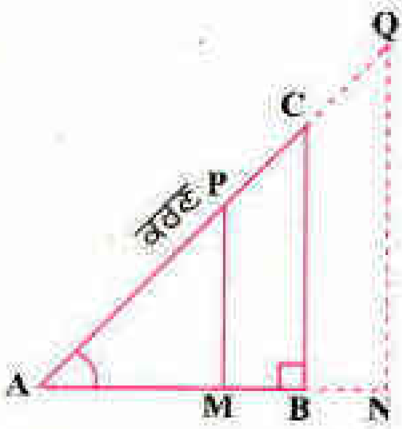
ਸ਼ਬਦ "**sine**" ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗ, ਜਿਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਉਸਦਾ ਉਲੇਖ 500 ਈ: ਵਿੱਚ ਆਰਿਆਭੱਟ ਦੁਆਰਾ ਲਿਖੀ ਗਈ ਪੁਸਤਕ ਆਰਿਆਭਟੀਯਮ ਵਿੱਚ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। ਆਰਿਆ ਭੱਟ ਨੇ ਸ਼ਬਦ **ਅਰਧ- ਜਯਾ** ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਅਰਧ ਜੀਵਾ ਦੇ ਲਈ ਕੀਤਾ ਸੀ ਜਿਸਨੇ ਸਮੇਂ ਦੇ ਅੰਤਰਾਲ ਨਾਲ **ਜਯਾ** ਜਾਂ **ਜੀਵਾ** ਦਾ ਸੰਖਿਪ ਰੂਪ ਲੈ ਲਿਆ। ਜਦੋਂ ਪੁਸਤਕ ਆਰਿਆਭਟੀਯਮ ਦਾ ਅਨੁਵਾਦ ਅਰਬੀ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਤਾਂ ਸ਼ਬਦ ਜੀਵਾ ਨੂੰ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਰੱਖ ਲਿਆ ਗਿਆ। ਸ਼ਬਦ ਜੀਵਾ ਨੂੰ ਸਾਇਨਸ (sinus) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੁਵਾਦ ਕੀਤਾ ਗਿਆ, ਜਿਸਦਾ ਅਰਥ ਵਕਰ ਹੈ, ਜਦਕਿ ਅਰਬੀ ਰੂਪਾਂਤਰ ਨੂੰ ਲੈਟਿਨ ਵਿੱਚ ਅਨੁਵਾਦ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਇਸ ਦੇ ਤਰੁੰਤ ਬਾਦ sinus ਸ਼ਬਦ

ਆਰਿਆਭੱਟ
476 – 550 ਈ:

ਨੂੰ sine ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪੂਰੇ ਯੂਰਪ ਦੇ ਗਣਿਤੀ ਪਾਠਾਂ ਵਿੱਚ ਵਰਤਿਆ ਜਾਣ ਲੱਗ ਪਿਆ। ਖਗੋਲ ਵਿਗਿਆਨ ਦੇ ਇੱਕ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਦੇ ਪ੍ਰੋਫੈਸਰ ਏਡਮੰਡ ਗੁੰਟਰ (1581-1626) ਨੇ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਸੰਖੇਪ ਸੰਕੇਤ *'sin'* ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਸੀ।

ਸ਼ਬਦਾਂ **'cosine** ਅਤੇ **'tangent'** ਦਾ ਪਤਾ ਇਸ ਤੋਂ ਕਾਫੀ ਦੇਰ ਬਾਦ ਲੱਗਿਆ। ਫਲਨ **cosine** ਦੀ ਖੋਜ ਦਾ ਪੂਰਕ ਕੋਣ ਦਾ **sine** ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਹੋਈ। ਆਰਿਆਭੱਟ ਨੇ ਇਸ ਨੂੰ (Kotijya) **ਕੋਟਿਜਯਾ** ਦਾ ਨਾਮ ਦਿੱਤਾ ਸੀ। ***cosinus*** ਨਾਮ ਦੀ ਸ਼ੁਰੂਆਤ ਇਡਮੰਡ ਗੁੰਟਰ ਦੇ ਨਾਲ ਹੀ ਹੋਈ ਸੀ। 1674 ਵਿੱਚ ਅੰਗ੍ਰੇਜ਼ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸਤਰੀ ਸਰ ਜੋਨਾਸ ਮੂਰੇ ਨੇ, ਪਹਿਲਾਂ ਸੰਖੇਪ ਸੰਕੇਤ ***'cos'*** ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਸੀ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਚਿੰਨ੍ਹ sin A ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੋਣ A' ਦੇ sin ਦੇ ਸੰਖੇਪ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਥੇ sinA, sin ਅਤੇ A ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਨਹੀਂ ਹੈ। A ਤੋਂ ਅਲੱਗ ਹੋ ਕੇ 'sin' ਦਾ ਕੋਈ ਅਰਥ ਹੀ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ cosA, 'cos' ਅਤੇ A ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਹੋਰ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਵੀ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 8.6

ਹੁਣ, ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਕਰਣ AC 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P ਲਈਏ ਜਾਂ ਵਧਾਈ ਹੋਈ ਭੁਜਾ AC 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ Q ਲਈਏ ਅਤੇ AB 'ਤੇ ਲੰਬ PM ਸੁੱਟੀਏ ਅਤੇ ਵਧੀ ਹੋਈ ਭੁਜਾ AB ਤੇ ਲੰਬ QN ਸੁੱਟੀਏ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.6) ਤਾਂ Δ PAM ਦੇ $\angle$A ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਅਤੇ Δ QAN ਦੇ $\angle$A ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਕੀ ਅੰਤਰ ਹੋਵੇਗਾ?

ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਆਉ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖੀਏ। ਕੀ Δ PAM ਅਤੇ Δ CAB ਸਮਰੂਪ ਹਨ? ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਅਧਿਆਇ 6 ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ AA ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਇਸ ਕਸੌਟੀ ਨੂੰ ਲਾਗੂ ਕਰਨ 'ਤੇ ਤੁਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋਗੇ ਕਿ Δ PAM ਅਤੇ Δ CAB ਸਮਰੂਪ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਗੁਣ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਇਹਨਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੋਣਗੀਆਂ।

ਇਸ ਲਈ $$\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC} = \frac{MP}{BC}$$

ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $$\frac{MP}{AP} = \frac{BC}{AC} = \sin A$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{AM}{AP} = \frac{AB}{AC} = \cos A$, $\frac{MP}{AM} = \frac{BC}{AB} = \tan A$ ਆਦਿ -ਆਦਿ

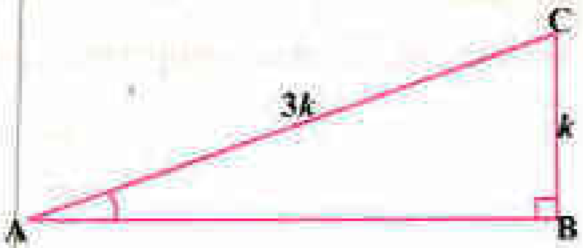
ਇਸਤੋਂ ਇਹ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ΔPAM ਦੇ ਕੋਣ A ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਅਤੇ ΔCAB ਦੇ ਕੋਣ A ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਅੰਤਰ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਪੜਤਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ΔQAN ਵਿੱਚ ਵੀ sinA ਦਾ ਮੁੱਲ (ਅਤੇ ਹੋਰ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ) ਬਰਾਬਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।

ਆਪਣੇ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਤੋਂ ਹੁਣ ਇਹ ਸਪਸ਼ਟ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਕੋਣ ਉਨ੍ਹਾਂ ਹੀ ਰਹੇ ਤਾਂ ਇੱਕ ਕੋਣ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਵਿੱਚ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਦੇ ਨਾਲ ਕੋਈ ਪਰਿਵਰਤਨ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਸੌਖ ਦੇ ਲਈ $(\sin A)^2$, $(\cos A)^2$, ਆਦਿ ਦੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ: $\sin^2 A$, $\cos^2 A$ ਆਦਿ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਪ੍ਰੰਤੂ $\text{cosec } A = (\sin A)^{-1} \neq \sin^{-1} A$ (ਇਸ ਨੂੰ ਸਾਇਨ ਦਾ ਇਨਵਰਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ) $\sin^{-1} A$ ਦਾ ਅਲਗ ਅਰਥ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ 'ਤੇ ਚਰਚਾ ਅਸੀਂ ਵੱਡੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਪ੍ਰੰਪਰਾਵਾਂ ਹੋਰ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ 'ਤੇ ਵੀ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਕਦੇ-ਕਦੇ ਗ੍ਰੀਕ ਅੱਖਰ θ (ਥੀਟਾ) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੋਣ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਦੇ ਛੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਸਾਨੂੰ ਕੋਈ ਇੱਕ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕੀ ਅਸੀਂ ਬਾਕੀ ਅਨੁਪਾਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ? ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਸ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।


ਚਿੱਤਰ 8.7

ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਵਿੱਚ $\sin A = \frac{1}{3}$, ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{3}$, ਭਾਵ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ BC ਅਤੇ AC ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ 1 : 3 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.7)। ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ BC, k ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ AC, $3k$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗੀ, ਜਿਥੇ k ਇੱਕ ਧਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਕੋਣ A ਦੇ ਬਾਕੀ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਤੀਸਰੀ ਭੁਜਾ AB ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਪਵੇਗੀ। ਕੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ (ਪ੍ਰਮੇਯ) ਯਾਦ ਹੈ? ਆਉ ਅਸੀਂ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ (ਪ੍ਰਮੇਯ) ਦੀ ਮਦਦ ਨਾਲ AB ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੀਏ।

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = (3k)^2 - (k)^2 = 8k^2 = (2\sqrt{2}\,k)^2$$

ਇਸ ਲਈ $AB = \pm 2\sqrt{2}\,k$

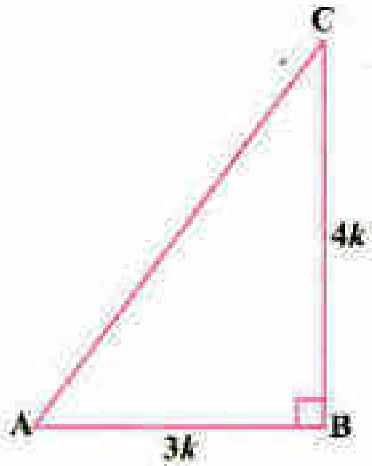
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $AB = 2\sqrt{2}\,k$ ($AB = -2\sqrt{2}\,k$ ਕਿਉਂ ਨਹੀਂ ਹੈ?)

ਹੁਣ $$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{2\sqrt{2}k}{3k} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਸੀਂ ਕੋਣ A ਦੇ ਬਾਕੀ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਕਿਉਂਕਿ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਕਰਣ, ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਲੰਬੀ ਭੁਜਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ sin A ਜਾਂ cos A ਦਾ ਮੁੱਲ ਹਮੇਸ਼ਾ ਹੀ 1 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਜਾਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ 1 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ)। ਆਉ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਜੇਕਰ $\tan A = \frac{4}{3}$, ਤਾਂ ਕੋਣ A ਦੇ ਬਾਕੀ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 8.8

ਹੱਲ : ਆਉ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ΔABC ਬਣਾਈਏ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.8)।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}$

ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ $BC = 4k$, ਤਾਂ $AB = 3k$, ਜਿਥੇ k ਕੋਈ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੁਣ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ (ਪ੍ਰਮੇਯ) ਲਾਗੂ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (4k)^2 + (3k)^2 = 25k^2$$

ਇਸ ਲਈ $$AC = 5k$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਤੋਂ ਬਾਕੀ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

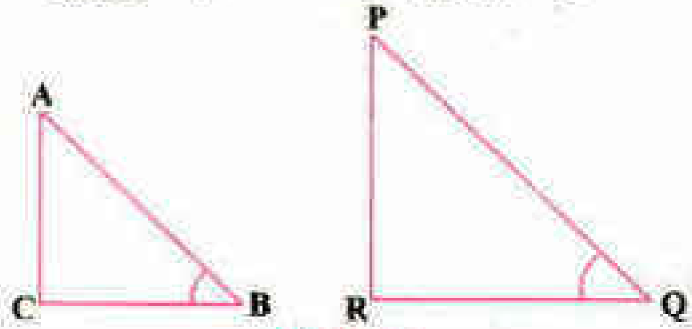
$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$$

ਇਸ ਲਈ : $\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{3}{4}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{4}$ ਅਤੇ $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{3}$

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਜੇਕਰ $\angle B$ ਅਤੇ $\angle Q$ ਅਜਿਹੇ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਹੋਣ ਜਿਸ ਨਾਲ ਕਿ $\sin B = \sin Q$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\angle B = \angle Q$

ਹੱਲ : ਆਉ ਅਸੀਂ ਦੋ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਅਤੇ PQR ਲਈਏ, ਜਿਥੇ $\sin B = \sin Q$ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.9)



ਚਿੱਤਰ 8.9

ਇਥੇ $\sin B = \frac{AC}{AB}$

ਅਤੇ $\sin Q = \frac{PR}{PQ}$

ਹੁਣ $\frac{AC}{AB} = \frac{PR}{PQ}$

ਇਸ ਲਈ $\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = k$ (ਮੰਨ ਲਉ) (1)

ਹੁਣ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਲਾਗੂ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$$

$$QR = \sqrt{PQ^2 - PR^2}$$

ਇਸ ਲਈ $\frac{BC}{QR} = \frac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = \frac{\sqrt{k^2PQ^2 - k^2PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = \frac{k\sqrt{PQ^2 - PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = k$ (2)

(1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

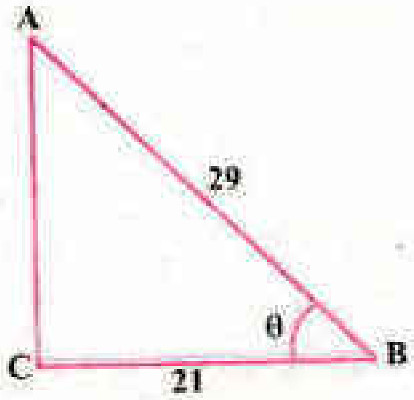
$$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

ਹੁਣ ਪ੍ਰਮੇਯ 6.4 ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ $\Delta ACB \sim \Delta PRQ$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\angle B = \angle Q$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ΔACB ਲਉ ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ C ਸਮਕੋਣ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ AB = 29 ਇਕਾਈਆਂ, BC = 21 ਇਕਾਈਆਂ ਅਤੇ $\angle ABC = \theta$ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.10) ਹੈ ਤਾਂ ਹੇਠਾ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta$

(ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$



ਚਿੱਤਰ 8.10

ਹੱਲ : ΔACB ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(29)^2 - (21)^2}$$

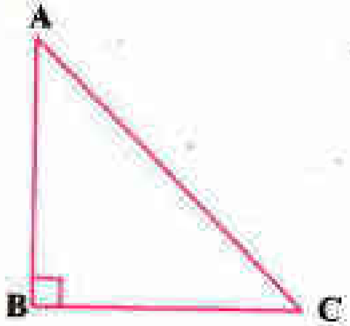
$$= \sqrt{(29-21)(29+21)} = \sqrt{(8)(50)} = \sqrt{400} = 20 \text{ ਇਕਾਈਆਂ}$$

ਇਸ ਲਈ $\sin\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{20}{29}$, $\cos\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{21}{29}$

ਹੁਣ, (i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 + \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{20^2+21^2}{29^2} = \frac{400+441}{841} = 1$

ਅਤੇ (ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 - \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{(21+20)(21-20)}{29^2} = \frac{41}{841}$

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਵਿੱਚ, ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ B ਸਮਕੋਣ ਹੈ, ਜੇਕਰ $\tan A = 1$ ਤਾਂ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ $2\sin A\cos A = 1$



ਚਿੱਤਰ 8.11

ਹੱਲ : ΔABC ਵਿੱਚ $\tan A = \frac{BC}{AB} = 1$ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.11)

ਭਾਵ $BC = AB$

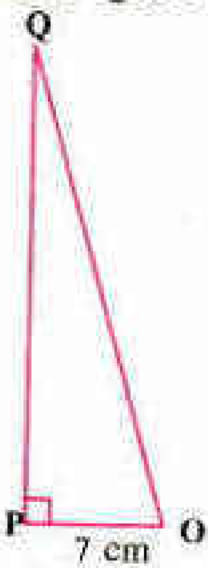
ਮੰਨ ਲਓ $AB = BC = k$, ਜਿਥੇ k ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੁਣ $$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$
$$= \sqrt{(k)^2 + (k)^2} = k\sqrt{2}$$

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ਅਤੇ} \quad \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ਇਸ ਲਈ $2\sin A\cos A = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$, ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ΔOPQ ਵਿੱਚ, ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ P ਸਮਕੋਣ ਹੈ, OP = 7 cm ਅਤੇ OQ – PQ = 1 cm (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.12), sin Q ਅਤੇ cos Q ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 8.12

ਹੱਲ : ΔOPQ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$OQ^2 = OP^2 + PQ^2$$

ਭਾਵ $(1 + PQ)^2 = OP^2 + PQ^2$ (ਕਿਉਂ?)

ਭਾਵ $1 + PQ^2 + 2PQ = OP^2 + PQ^2$

ਭਾਵ $1 + 2PQ = 7^2$ (ਕਿਉਂ?)

ਭਾਵ $PQ = 24$ cm ਅਤੇ $OQ = 1 + PQ = 25$ cm

ਇਸ ਲਈ $\sin Q = \frac{7}{25}$ ਅਤੇ $\cos Q = \frac{24}{25}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 8.1

1. ΔABC ਵਿੱਚ, ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ B ਸਮਕੋਣ ਹੈ, $AB = 24$ cm ਅਤੇ $BC = 7$ cm ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :
   (i) $\sin A, \cos A$
   (ii) $\sin C, \cos C$

ਚਿੱਤਰ 8.13

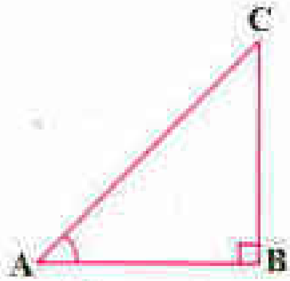
2. ਚਿੱਤਰ 8.13 ਵਿੱਚ, $\tan P - \cot R$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਜੇਕਰ $\sin A = \frac{3}{4}$ ਤਾਂ $\cos A$ ਅਤੇ $\tan A$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਜੇਕਰ $15 \cot A = 8$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $\sin A$ ਅਤੇ $\sec A$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. ਜੇਕਰ $\sec \theta = \frac{13}{12}$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਸਾਰੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਜੇਕਰ $\angle A$ ਅਤੇ $\angle B$ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਹੋਣ, ਜਿਥੇ $\cos A = \cos B$ ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $\angle A = \angle B$
7. ਜੇਕਰ $\cot \theta = \frac{7}{8}$, ਤਾਂ (i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$, (ii) $\cot^2\theta$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. ਜੇਕਰ $3 \cot A = 4$ ਤਾਂ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।
9. Δ ABC ਵਿੱਚ, ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ B ਸਮਕੋਣ ਹੈ, ਜੇਕਰ $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, ਤਾਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿਤੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ:
   (i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$ (ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C$
10. ΔPQR ਵਿੱਚ, ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ Q ਸਮਕੋਣ ਹੈ, $PR + QR = 25$ cm ਅਤੇ $PQ = 5$ cm ਹੈ। $\sin P, \cos P$ ਅਤੇ $\tan P$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
11. ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਠੀਕ ਹਨ ਜਾਂ ਗਲਤ। ਕਾਰਣ ਸਹਿਤ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰੋ।
   (i) $\tan A$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹਮੇਸ਼ਾ 1 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
   (ii) ਕੋਣ A ਦੇ ਕਿਸੇ ਮੁੱਲ ਲਈ $\sec A = \frac{12}{5}$
   (iii) $\cos A$, ਕੋਣ A ਦੇ cosecant ਦਾ ਸੰਖੇਪ ਰੂਪ ਹੈ।
   (iv) $\cot A$, cot ਅਤੇ A ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
   (v) ਕਿਸੇ ਵੀ ਕੋਣ θ ਦੇ ਲਈ $\sin \theta = \frac{4}{3}$

8.3 ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ

ਜਿਮਾਇਤੀ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਨਾਲ ਤੁਸੀਂ $30°$, $45°$, $60°$ ਅਤੇ $90°$ ਦੇ ਕੋਣਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ ਤੋਂ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਾਣੂੰ ਹੋ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਕੋਣਾਂ ਅਤੇ ਨਾਲ ਹੀ $0°$ ਵਾਲੇ ਕੋਣ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

$45°$ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ

ΔABC ਵਿੱਚ, ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ B ਸਮਕੋਣ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਕੋਣ $45°$ ਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਦੂਸਰਾ ਕੋਣ ਵੀ $45°$ ਦਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਭਾਵ $\angle A = \angle C = 45°$ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.14)।



ਚਿੱਤਰ 8.14

ਇਸ ਲਈ $\quad BC = AB \quad$ (ਕਿਉਂ?)

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਓ $BC = AB = a$

ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ(ਪ੍ਰਮੇਯ) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

ਇਸ ਲਈ $\quad AC = a\sqrt{2}$

ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੀਆਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਨੂੰ ਲਾਗੂ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\sin 45° = \frac{45° \text{ ਦੇ ਕੋਣ ਦੀ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾ}}{\text{ਕਰਣ}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

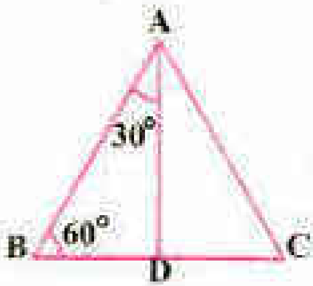
$$\cos 45° = \frac{45° \text{ ਦੇ ਕੋਣ ਦੀ ਲਾਗਵੀਂ ਭੁਜਾ}}{\text{ਕਰਣ}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45° = \frac{45° \text{ ਦੇ ਕੋਣ ਦੀ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾ}}{45° \text{ ਦੇ ਕੋਣ ਦੀ ਲਾਗਵੀਂ ਭੁਜਾ}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

ਅਤੇ $\quad \operatorname{cosec} 45° = \frac{1}{\sin 45°} = \sqrt{2}$, $\sec 45° = \frac{1}{\cos 45°} = \sqrt{2}$, $\cot 45° = \frac{1}{\tan 45°} = 1$

$30°$ ਅਤੇ $60°$ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ

ਆਓ ਹੁਣ ਅਸੀਂ $30°$ ਅਤੇ $60°$ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੀਏ। ਇੱਕ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਕਿਉਂਕਿ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਕੋਣ $60°$ ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$



ਚਿੱਤਰ 8.15

A ਤੋਂ ਭੁਜਾ BC 'ਤੇ ਲੰਬ AD ਖਿੱਚੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.15)।

ਹੁਣ $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ $BD = DC$

ਅਤੇ $\angle BAD = \angle CAD$ (CPCT)

ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ :

ΔABD ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ D ਸਮਕੋਣ ਹੈ ਅਤੇ ਇਥੇ $\angle BAD = 30^\circ$ ਅਤੇ $\angle ABD = 60^\circ$ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.15)। ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ $AB = 2a$

ਤਾਂ $BD = \frac{1}{2} BC = a$

ਅਤੇ $AD^2 = AB^2 - BD^2 = (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2$

ਇਸ ਲਈ $AD = a\sqrt{3}$

ਹੁਣ $\sin 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$; $\cos 30^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\tan 30^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ਅਤੇ $\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2$, $\sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$$\cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}$$

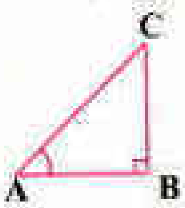
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\sin 60^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

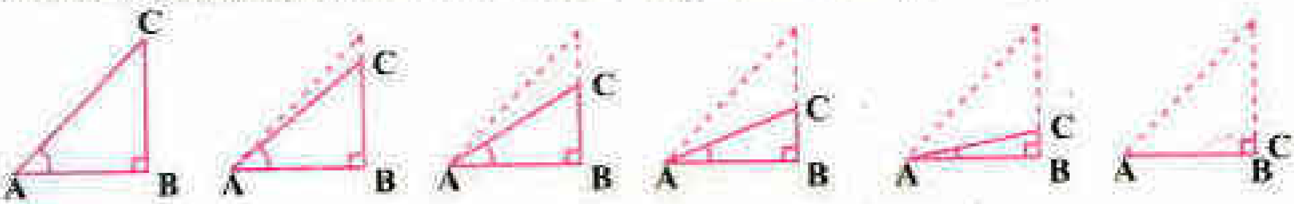
$$\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}, \sec 60^\circ = 2 \text{ ਅਤੇ } \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

0° ਅਤੇ 90° ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ

ਆਉ ਅਸੀਂ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਜੇਕਰ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਕੋਣ A ਨੂੰ ਉਦੋਂ ਤੱਕ ਛੋਟਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕਿ ਇਹ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹੋ ਜਾਂਦਾ, ਤਾਂ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਕੋਣ A ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ 'ਤੇ ਕੀ ਪ੍ਰਭਾਵ ਪੈਂਦਾ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.16) ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ ਕੋਣ A ਛੋਟਾ ਹੁੰਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਭੁਜਾ BC ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਘੱਟ ਹੁੰਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਬਿੰਦੂ C, ਬਿੰਦੂ B ਦੇ ਨਜਦੀਕ ਆਉਂਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ $\angle A$, 0° ਦੇ ਕਾਫੀ ਨਜਦੀਕ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ AC ਲਗਭਗ AB ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.17)।



ਚਿੱਤਰ 8.16



ਚਿੱਤਰ 8.17

ਜਦੋਂ $\angle A$, 0° ਦੇ ਬਹੁਤ ਜਿਆਦਾ ਨਜਦੀਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਉਸ ਵੇਲੇ BC, 0 ਦੇ ਬਹੁਤ ਨਜਦੀਕ ਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਸ ਵਕਤ $\sin A = \frac{BC}{AC}$ ਦਾ ਮੁੱਲ 0 ਦੇ ਬਹੁਤ ਨਜਦੀਕ ਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਦੋਂ $\angle A$, 0° ਦੇ ਬਹੁਤ ਜ਼ਿਆਦਾ ਨਜਦੀਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ AC ਲਗਭਗ ਉਹ ਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਕਿ AB ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\cos A = \frac{AB}{AC}$ ਦਾ ਮੁੱਲ 1 ਦੇ ਬਹੁਤ ਨਜਦੀਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ sin A ਅਤੇ cos A ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਕਿ $A = 0°$ ਅਸੀਂ $\mathbf{\sin 0° = 0}$ ਅਤੇ $\mathbf{\cos 0° = 1}$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

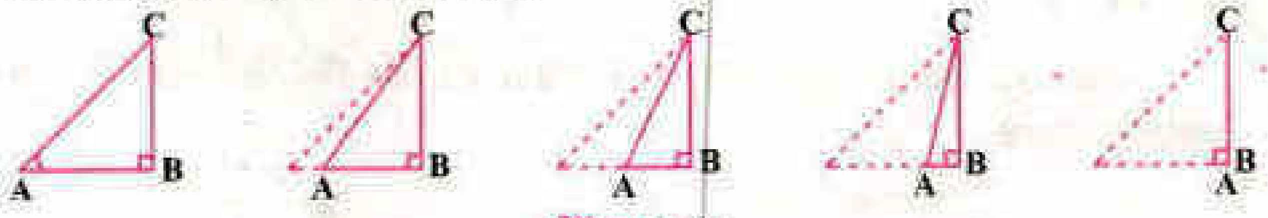
ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$\tan 0° = \frac{\sin 0°}{\cos 0°} = 0$, $\cot 0° = \frac{1}{\tan 0°}$, ਜੋ ਕਿ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। (ਕਿਉਂ?)

$\sec 0° = \frac{1}{\cos 0°} = 1$ ਅਤੇ $\operatorname{cosec} 0° = \frac{1}{\sin 0°}$, ਅਤੇ ਇਹ ਵੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। (ਕਿਉਂ?)

ਆਉ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਦੇਖੀਏ ਕਿ $\angle A$ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਕੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ ΔABC ਦੇ ਇਸ ਕੋਣ ਨੂੰ ਉਦੋਂ ਤੱਕ ਵੱਡਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕਿ ਇਹ 90° ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੋ ਜਾਂਦਾ। $\angle A$ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ ਵੱਡਾ ਹੋਵੇਗਾ, $\angle C$ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਛੋਟਾ ਹੁੰਦਾ ਜਾਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ ਉੱਪਰ ਵਾਲੀ ਸਥਿਤੀ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਭੁਜਾ AB ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਘੱਟ ਹੁੰਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਬਿੰਦੂ A, ਬਿੰਦੂ B ਦੇ ਨਜਦੀਕ ਹੁੰਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ $\angle A$, 90° ਦਾ ਬਹੁਤ ਜ਼ਿਆਦਾ ਨੇੜੇ ਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ,

ਤਾਂ $\angle C$, $0°$ ਦੇ ਬਹੁਤ ਜਿਆਦਾ ਨੇੜੇ ਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਭੁਜਾ AC ਭੁਜਾ BC ਦੇ ਨਾਲ ਲੱਗਭਗ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.18)।



ਚਿੱਤਰ 8.18

ਜਦੋਂ $\angle C$, $0°$ ਦੇ ਬਹੁਤ ਜਿਆਦਾ ਨਜਦੀਕ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ $\angle A$, $90°$ ਦੇ ਬਹੁਤ ਜਿਆਦਾ ਨਜਦੀਕ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਭੁਜਾ AC ਲਗਭਗ ਭੁਜਾ BC ਵਰਗੀ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ sin A, 1 ਦੇ ਬਹੁਤ ਜਿਆਦਾ ਨਜਦੀਕ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਦੋਂ $\angle A$, $90°$ ਦੇ ਬਹੁਤ ਜਿਆਦਾ ਨਜਦੀਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ $\angle C$, $0°$ ਦੇ ਬਹੁਤ ਜਿਆਦਾ ਨਜਦੀਕ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਭੁਜਾ AB ਲਗਭਗ ਜ਼ਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ cos A, 0 ਦੇ ਬਹੁਤ ਜਿਆਦਾ ਨਜਦੀਕ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ : $\sin 90° = 1$ ਅਤੇ $\cos 90° = 0$

ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਕਿਉਂ ਨਹੀਂ $90°$ ਦੇ ਬਾਕੀ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰਦੇ?

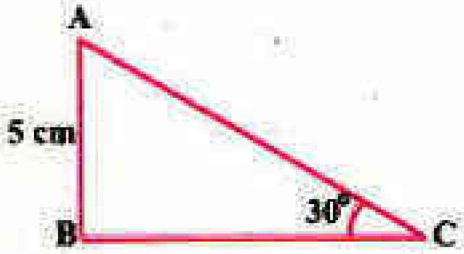
ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸਾਰਣੀ 8.1 ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $0°$, $30°$, $45°$, $60°$ ਅਤੇ $90°$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦਰਸਾਵਾਂਗੇ।

ਸਾਰਣੀ 8.1

$\angle A$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos A	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan A	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ
cosec A	ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec A	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ
cot A	ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

ਟਿੱਪਣੀ : ਸਾਰਣੀ 8.1 ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਜਿਵੇਂ -ਜਿਵੇਂ $\angle A$ ਦਾ ਮੁੱਲ 0° ਤੋਂ 90° ਤੱਕ ਵਧਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, $\sin A$ ਦਾ ਮੁੱਲ 0 ਤੋਂ ਵੱਧ ਕੇ 1 ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\cos A$ ਦਾ ਮੁੱਲ 1 ਤੋਂ ਘੱਟ ਕੇ 0 ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲੈ ਕੇ ਸਾਰਣੀ 8.1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰੀਏ।



ਚਿੱਤਰ 8.19

ਉਦਾਹਰਣ 6 : Δ ABC ਵਿੱਚ ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ B ਸਮਕੋਣ, ਹੈ AB = 5 cm ਅਤੇ $\angle ACB = 30^\circ$ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.19) ਹੈ। ਭੁਜਾਵਾਂ BC ਅਤੇ AC ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਭੁਜਾ BC ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਉਸ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਨੂੰ ਲਵਾਂਗੇ ਜਿਸ ਵਿੱਚ BC ਅਤੇ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਭੁਜਾ AB ਹੋਵੇ। ਕਿਉਂਕਿ BC, ਕੋਣ C ਦੀ ਲਾਗਵੀਂ ਭੁਜਾ ਹੈ, ਅਤੇ AB ਕੋਣ C ਦੀ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ

$$\frac{AB}{BC} = \tan C$$

ਭਾਵ $$\frac{5}{BC} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ਜਿਸ ਤੋਂ $BC = 5\sqrt{3}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਭੁਜਾ AC ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ

$\sin 30^\circ = \frac{AB}{AC}$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ (ਕਿਉਂ?)

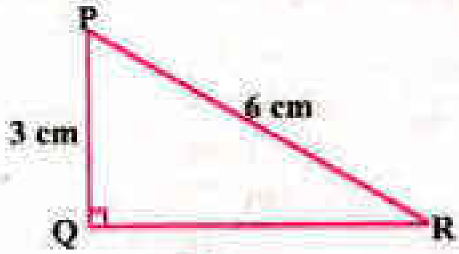
ਭਾਵ $$\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$$

ਭਾਵ $$AC = 10 \text{ cm}$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਉੱਪਰ ਦੀ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਤੀਸਰੀ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਬਦਲਵੇਂ ਰੂਪ ਵਜੋਂ ਅਸੀਂ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ (ਪ੍ਰਮੇਯ) ਵੀ ਲਾਗੂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਸੀ,

ਭਾਵ $$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2} \text{ cm} = 10 \text{cm}$$

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ΔPQR ਵਿੱਚ, ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ Q ਸਮਕੋਣ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.20), PQ = 3 cm ਅਤੇ PR = 6 cm ਹੈ। $\angle QPR$ ਅਤੇ $\angle PRQ$ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 8.20

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ PQ = 3 cm ਅਤੇ PR = 6 cm

ਇਸ ਲਈ $$\frac{PQ}{PR} = \sin R$$

ਜਾਂ $$\sin R = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ਇਸ ਲਈ $$\angle PRQ = 30^\circ$$

ਅਤੇ $$\angle QPR = 60^\circ \quad \text{(ਕਿਉਂ?)}$$

ਤੁਸੀਂ ਇਥੇ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਕੋਈ ਹੋਰ ਭਾਗ (ਜੋ ਜਾਂ ਤਾਂ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਹੋਵੇ, ਜਾਂ ਕੋਈ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਹੋਵੇ) ਪਤਾ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਬਾਕੀ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਜੇਕਰ $\sin(A-B) = \frac{1}{2}$, $\cos(A+B) = \frac{1}{2}$, $0^\circ < A + B \le 90^\circ$, $A > B$, ਤਾਂ A ਅਤੇ B ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $\sin(A-B) = \frac{1}{2}$, ਇਸ ਲਈ $A - B = 30^\circ$ (ਕਿਉਂ?) (1)

ਅਤੇ, ਕਿਉਂਕਿ $\cos(A+B) = \frac{1}{2}$, ਇਸ ਲਈ $A + B = 60^\circ$ (ਕਿਉਂ?) (2)

(1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $A = 45^\circ$ ਅਤੇ $B = 15^\circ$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 8.2

1. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

   (ii) $2\tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

   (iii) $\dfrac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ}$

   (iv) $\dfrac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$

   (v) $\dfrac{5\cos^2 60^\circ + 4\sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$

2. ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਕਾਰਣ ਦੱਸੋ

(i) $\dfrac{2\tan 30°}{1+\tan^2 30°} =$

(A) $\sin 60°$ (B) $\cos 60°$ (C) $\tan 60°$ (D) $\sin 30°$

(ii) $\dfrac{1-\tan^2 45°}{1+\tan^2 45°} =$

(A) $\tan 90°$ (B) 1 (C) $\sin 45°$ (D) 0

(iii) $\sin 2A = 2\sin A$ ਉਦੋਂ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ A ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $0°$ (B) $30°$ (C) $45°$ (D) $60°$

(iv) $\dfrac{2\tan 30°}{1-\tan^2 30°}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\cos 60°$ (B) $\sin 60°$ (C) $\tan 60°$ (D) $\sin 30°$

3. ਜੇਕਰ $\tan(A+B)=\sqrt{3}$ ਅਤੇ $\tan(A-B)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $0° < A+B \le 90°$; $A > B$ ਤਾਂ A ਅਤੇ B ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਦੱਸੋ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਸਹੀ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਹੜਾ ਗਲਤ। ਕਾਰਣ ਸਹਿਤ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰੋ।

(i) $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$.

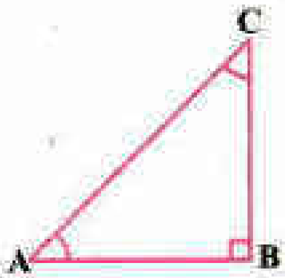
(ii) θ ਦੇ ਵੱਧਣ ਨਾਲ $\sin\theta$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੀ ਵਧਦਾ ਹੈ।

(iii) θ ਦੇ ਵੱਧਣ ਨਾਲ $\cos\theta$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੀ ਵਧਦਾ ਹੈ।

(iv) θ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ $\sin\theta = \cos\theta$

(v) $A = 0°$ ਤੇ $\cot A$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

8.4 ਪੂਰਕ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ



ਚਿੱਤਰ 8.21

ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਦੋ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰਕ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $90°$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ΔABC ਵਿੱਚ, ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ B ਸਮਕੋਣ ਹੈ, ਕੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਪੂਰਕ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਕੋਈ ਜੋੜਾ ਦਿਖਾਈ ਦਿੰਦਾ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.21)।

ਕਿਉਂਕਿ $\angle A + \angle C = 90°$ ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਤੋਂ ਪੂਰਕ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਬਣਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\left.\begin{array}{lll} \sin A = \dfrac{BC}{AC} & \cos A = \dfrac{AB}{AC} & \tan A = \dfrac{BC}{AB} \\[2ex] \operatorname{cosec} A = \dfrac{AC}{BC} & \sec A = \dfrac{AC}{AB} & \cot A = \dfrac{AB}{BC} \end{array}\right\} \quad (1)$$

ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ $\angle C = 90° - \angle A$ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਲਿਖੀਏ।

ਸੌਖ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ $90° - \angle A$ ਦੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ $90° - A$ ਲਿਖਾਂਗੇ।

ਕੋਣ $90° - A$ ਦੀ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾ ਅਤੇ ਲਾਗਵੀਂ ਭੁਜਾ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ?

ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ AB ਕੋਣ $90° - A$ ਦੀ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾ ਹੈ ਅਤੇ BC ਲਾਗਵੀਂ ਭੁਜਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$\left.\begin{array}{l} \sin(90° - A) = \dfrac{AB}{AC},\ \cos(90° - A) = \dfrac{BC}{AC},\ \tan(90° - A) = \dfrac{AB}{BC} \\[2ex] \operatorname{cosec}(90° - A) = \dfrac{AC}{AB},\ \sec(90° - A) = \dfrac{AC}{BC},\ \cot(90° - A) = \dfrac{BC}{AB} \end{array}\right\} \quad (2)$$

ਹੁਣ (1) ਅਤੇ (2) ਦੇ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾਂ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\sin(90° - A) = \frac{AB}{AC} = \cos A \text{ ਅਤੇ } \cos(90° - A) = \frac{BC}{AC} = \sin A.$$

ਅਤੇ $$\tan(90° - A) = \frac{AB}{BC} = \cot A, \cot(90° - A) = \frac{BC}{AB} = \tan A$$

$$\sec(90° - A) = \frac{AC}{BC} = \operatorname{cosec} A, \quad \operatorname{cosec}(90° - A) = \frac{AC}{AB} = \sec A$$

ਇਸ ਲਈ
$$\begin{array}{ll} \mathbf{\sin(90° - A) = \cos A,} & \mathbf{\cos(90° - A) = \sin A} \\ \mathbf{\tan(90° - A) = \cot A,} & \mathbf{\cot(90° - A) = \tan A} \\ \mathbf{\sec(90° - A) = \operatorname{cosec} A,} & \mathbf{\operatorname{cosec}(90° - A) = \sec A} \end{array}$$

ਇਥੇ ਕੋਣ A ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲ 0° ਅਤੇ 90° ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹਨ। ਦੱਸੋ ਕਿ ਇਹ $A = 0°$ ਜਾਂ $A = 90°$ 'ਤੇ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

ਟਿੱਪਣੀ : $\tan 0° = 0 = \cot 90°$, $\sec 0° = 1 = \operatorname{cosec} 90°$ ਅਤੇ $\sec 90°$, $\operatorname{cosec} 0°$, $\tan 90°$ ਅਤੇ $\cot 0°$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਆਉ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : $\dfrac{\tan 65°}{\cot 25°}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\cot A = \tan(90° - A)$

ਇਸ ਲਈ $$\cot 25° = \tan(90° - 25°) = \tan 65°$$

ਭਾਵ $$\frac{\tan 65°}{\cot 25°} = \frac{\tan 65°}{\tan 65°} = 1$$

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਜੇਕਰ $\sin 3A = \cos (A - 26^\circ)$ ਹੋਵੇ, ਜਿਥੇ, 3A ਇੱਕ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਹੈ ਤਾਂ A ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇਥੇ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $\sin 3A = \cos (A - 26^\circ)$ (1)

ਕਿਉਂਕਿ $\sin 3A = \cos (90^\circ - 3A)$, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ (1) ਨੂੰ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

$$\cos (90^\circ - 3A) = \cos (A - 26^\circ)$$

ਕਿਉਂਕਿ $90^\circ - 3A$ ਅਤੇ $A - 26^\circ$ ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ

$$90^\circ - 3A = A - 26^\circ$$

ਜਿਸ ਤੋਂ $A = 29^\circ$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : $\cot 85^\circ + \cos 75^\circ$ ਨੂੰ 0° ਅਤੇ 45° ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

ਹੱਲ :

$$\cot 85^\circ + \cos 75^\circ = \cot (90^\circ - 5^\circ) + \cos (90^\circ - 15^\circ)$$
$$= \tan 5^\circ + \sin 15^\circ$$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 8.3

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) $\dfrac{\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ}$ (ii) $\dfrac{\tan 26^\circ}{\cot 64^\circ}$ (iii) $\cos 48^\circ - \sin 42^\circ$ (iv) $\operatorname{cosec} 31^\circ - \sec 59^\circ$

2. ਦਿਖਾਉ ਕਿ

   (i) $\tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ = 1$

   (ii) $\cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ = 0$

3. ਜੇਕਰ $\tan 2A = \cot (A - 18^\circ)$, ਜਿਥੇ 2A ਇੱਕ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਹੈ, ਤਾਂ A ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਜੇਕਰ $\tan A = \cot B$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $A + B = 90^\circ$

5. ਜੇਕਰ $\sec 4A = \operatorname{cosec} (A - 20^\circ)$, ਜਿਥੇ 4A ਇੱਕ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਹੈ ਤਾਂ A ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

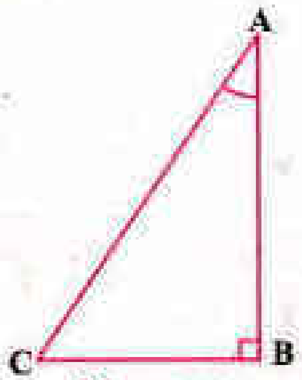
6. ਜੇਕਰ A, B ਅਤੇ C ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਅੰਦਰੂਨੀ ਕੋਣ ਹਨ ਤਾਂ ਦਿਖਾਓ ਕਿ

$$\sin \left(\frac{B + C}{2}\right) = \cos \frac{A}{2}$$

7. $\sin 67^\circ + \cos 75^\circ$ ਨੂੰ 0° ਅਤੇ 45° ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

8.5 ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਤਤਸਮਕ(ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ)

ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਤਤਸਮਕ (ਸਰਬਸਮਤਾ) ਉਦੋਂ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਹ ਸੰਬੰਧਤ ਚਲ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੋਵੇ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕ ਕੋਣ ਦੇ **ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ** ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਇਹ ਸੰਬੰਧਤ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੋਵੇ।



ਚਿੱਤਰ 8.22

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਸਰਬਸਮਤਾ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੋਰ ਉਪਯੋਗੀ ਤਿਕੋਣਤਿਮਈ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਕਰਾਂਗੇ।

ΔABC ਵਿੱਚ, ਜੋ B 'ਤੇ ਸਮਕੋਣ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 8.22) ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ : $AB^2 + BC^2 = AC^2$ (1)

(1) ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਨੂੰ AC^2 ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

ਜਾਂ $$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AC}\right)^2$$

ਭਾਵ $$(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1$$

ਭਾਵ $$\cos^2 A + \sin^2 A = 1 \qquad (2)$$

ਇਹ ਸਾਰੇ A ਦੇ ਲਈ, ਜਿਥੇ $0^\circ \le A \le 90^\circ$, ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਇਹ ਇੱਕ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਸਰਬਸਮਤਾ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ (1) ਨੂੰ AB^2 ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਈਏ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰਨ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$\frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AB^2}$$

ਜਾਂ $$\left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

ਭਾਵ $$1 + \tan^2 A = \sec^2 A \qquad (3)$$

ਕੀ ਇਹ ਸਮੀਕਰਣ $A = 0^\circ$ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ? ਹਾਂ, ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ। ਕੀ ਇਹ $A = 90^\circ$ ਦੇ ਲਈ

ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ? $A = 90°$ ਦੇ ਲਈ tan A ਅਤੇ sec A ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, (3) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ A ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਥੇ $0° \le A < 90°$

ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖੀਏ ਕਿ (1) ਨੂੰ BC^2 ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਕੀ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{BC^2}{BC^2} = \frac{AC^2}{BC^2}$$

ਭਾਵ $$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

ਭਾਵ $$\cot^2 A + 1 = \operatorname{cosec}^2 A \qquad (4)$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $A = 0°$ ਦੇ ਲਈ cosec A ਅਤੇ cot A ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, (4) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ A ਲਈ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਥੇ $0° < A \le 90°$

ਇਹਨਾਂ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਹਰ ਇੱਕ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਨੂੰ ਹੋਰ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਭਾਵ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਇੱਕ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਬਾਕੀ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਮੰਨ ਲਉ ਅਸੀਂ $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ਪਤਾ ਹੈ ਤਾਂ $\cot A = \sqrt{3}$

ਕਿਉਂਕਿ $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, $\sec A = \frac{2}{\sqrt{3}}$, ਅਤੇ $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ਅਤੇ ਕਿਉਂਕਿ $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$ ਇਸ ਲਈ $\operatorname{cosec} A = 2$

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਅਨੁਪਾਤਾਂ cos A, tan A ਅਤੇ sec A ਨੂੰ sin A ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$, ਇਸ ਲਈ

$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$, ਭਾਵ $\cos A = \pm\sqrt{1 - \sin^2 A}$

ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ : $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$ ਅਤੇ $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\sec A(1-\sin A)(\sec A+\tan A)=1$

ਹੱਲ :

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $=\sec A(1-\sin A)(\sec A+\tan A)=\left(\frac{1}{\cos A}\right)(1-\sin A)\left(\frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A}\right)$

$$=\frac{(1-\sin A)(1+\sin A)}{\cos^2 A}=\frac{1-\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$=\frac{\cos^2 A}{\cos^2 A}=1=$$ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{\cot A-\cos A}{\cot A+\cos A}=\frac{\operatorname{cosec} A-1}{\operatorname{cosec} A+1}$

ਹੱਲ : ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $=\frac{\cot A-\cos A}{\cot A+\cos A}=\frac{\frac{\cos A}{\sin A}-\cos A}{\frac{\cos A}{\sin A}+\cos A}$

$$\frac{\cos A\left(\frac{1}{\sin A}-1\right)}{\cos A\left(\frac{1}{\sin A}+1\right)}=\frac{\left(\frac{1}{\sin A}-1\right)}{\left(\frac{1}{\sin A}+1\right)}=\frac{\operatorname{cosec} A-1}{\operatorname{cosec} A+1}=$$ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਤਤਸਮਕ $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\frac{\sin\theta-\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta-1}=\frac{1}{\sec\theta-\tan\theta}$$

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ $\sec\theta$ ਅਤੇ $\tan\theta$ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਤਤਸਮਕ ਵਰਤਣੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਆਉ ਪਹਿਲੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਨੂੰ $\cos\theta$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਕੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਨੂੰ $\sec\theta$ ਅਤੇ $\tan\theta$ ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲਈਏ

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $=\frac{\sin\theta-\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta-1}=\frac{\tan\theta-1+\sec\theta}{\tan\theta+1-\sec\theta}$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - 1}{(\tan\theta - \sec\theta) + 1} = \frac{\{(\tan\theta + \sec\theta) - 1\}\,(\tan\theta - \sec\theta)}{\{(\tan\theta - \sec\theta) + 1\}\,(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{(\tan^2\theta - \sec^2\theta) - (\tan\theta - \sec\theta)}{\{\tan\theta - \sec\theta + 1\}\,(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1 - \tan\theta + \sec\theta}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)\,(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1}{\tan\theta - \sec\theta} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta},$$

ਜੋ ਸਿੱਧ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਲੋੜੀਦੀ ਤਤਸਮਕ ਦਾ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 8.4

1. ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ sin A, sec A ਅਤੇ tan A ਨੂੰ cot A ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।
2. $\angle A$ ਦੇ ਬਾਕੀ ਸਾਰੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਨੂੰ sec A ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।
3. ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ

   (i) $\dfrac{\sin^2 63^\circ + \sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ + \cos^2 73^\circ}$

   (ii) $\sin 25^\circ \cos 65^\circ + \cos 25^\circ \sin 65^\circ$

4. ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਵਿਕਲਪ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰੋ :

   (i) $9\sec^2 A - 9\tan^2 A$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

   (A) 1 (B) 9 (C) 8 (D) 0

   (ii) $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta)$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

   (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) –1

   (iii) $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A)$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

   (A) sec A (B) sin A (C) cosec A (D) cos A

   (iv) $\dfrac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

   (A) $\sec^2 A$ (B) –1 (C) $\cot^2 A$ (D) $\tan^2 A$

5. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਰਬਸਮਤਾਵਾਂ (ਤਤਸਮਕਾਂ) ਸਿੱਧ ਕਰੋ, ਜਿਥੇ ਉਹ ਕੋਣ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਲਈ ਵਿਅੰਜਕਾਂ

ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ, ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਹਨ :

(i) $(\text{cosec}\,\theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

(ii) $\dfrac{\cos A}{1+\sin A} + \dfrac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A$

(iii) $\dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1+\sec\theta\,\text{cosec}\,\theta$

[ਸੰਕੇਤ : ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ $\sin\theta$ ਅਤੇ $\cos\theta$ ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ]

(iv) $\dfrac{1+\sec A}{\sec A} = \dfrac{\sin^2 A}{1-\cos A}$

[ਸੰਕੇਤ : ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ ਅਤੇ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ ਨੂੰ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸਰਲ ਕਰੋ]

(v) ਤਤਸਮਕ $\text{cosec}^2 A = 1+\cot^2 A$ ਨੂੰ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ, ਸਿੱਧ ਕਰੋ

$\dfrac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \text{cosec}\,A + \cot A$

(vi) $\sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$

(vii) $\dfrac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

(viii) $(\sin A + \text{cosec}\,A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

(ix) $(\text{cosec}\,A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \dfrac{1}{\tan A + \cot A}$

[ਸੰਕੇਤ : ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸਰਲ ਕਰੋ]

(x) $\left(\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\dfrac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

8.6 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ :

1. ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਵਿੱਚ, ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ B ਸਮਕੋਣ ਹੈ :

$$\sin A = \frac{\text{ਕੋਣ A ਦੀ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾ}}{\text{ਕਰਣ}}, \cos A = \frac{\text{ਕੋਣ A ਦੀ ਲਾਗਵੀਂ ਭੁਜਾ}}{\text{ਕਰਣ}}$$

$$\tan A = \frac{\text{ਕੋਣ A ਦੀ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾ}}{\text{ਕੋਣ A ਦੀ ਲਾਗਵੀਂ ਭੁਜਾ}}$$

2. $\operatorname{cosec} A = \dfrac{1}{\sin A}$; $\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$; $\tan A = \dfrac{1}{\cot A}$, $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$

3. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਦਾ ਇੱਕ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕੋਣ ਦੇ ਬਾਕੀ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

4. $0°, 30°, 45°, 60°$ ਅਤੇ $90°$ ਦੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲ।

5. $\sin A$ ਜਾਂ $\cos A$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਕਦੇ ਵੀ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਜਦੋਂ ਕਿ $\sec A$ ਜਾਂ $\operatorname{cosec} A$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇੱਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

6. $\sin(90° - A) = \cos A$, $\cos(90° - A) = \sin A$

   $\tan(90° - A) = \cot A$, $\cot(90° - A) = \tan A$

   $\sec(90° - A) = \operatorname{cosec} A$, $\operatorname{cosec}(90° - A) = \sec A$

7. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

   $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$ ਜਿੱਥੇ $0° \le A < 90°$

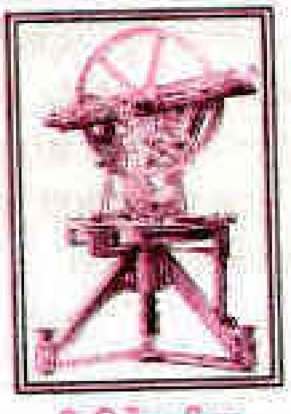
   $\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ ਜਿੱਥੇ $0° < A \le 90°$

ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦੇ ਕੁਝ ਉਪਯੋਗ 9

9.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਪਿਛਲੇ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੁਝ ਉਹਨਾਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋਗੇ ਜਿੰਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੁਹਾਡੇ ਆਸ ਪਾਸ ਦੇ ਜੀਵਨ ਨਾਲ ਜੁੜਿਆ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਇੱਕ ਪੁਰਾਨਾ ਵਿਸ਼ਾ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਅਧਿਐਨ ਪੂਰੇ ਜਗਤ ਦੇ ਵਿਦਵਾਨ ਕਰਦੇ ਆਏ ਹਨ। ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਅਧਿਆਇ 8 ਵਿੱਚ ਦੱਸ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦੀ ਖੋਜ ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖਕੇ ਕੀਤੀ ਗਈ ਸੀ ਕਿ ਇਸਦੀ ਖਗੋਲਕੀ (astronomy) ਵਿੱਚ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਸੀ। ਉਸ ਵੇਲੇ ਤੋਂ ਹੁਣ ਤੱਕ ਖਗੋਲ ਵਿਗਿਆਨੀ ਇਸਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਪ੍ਰਿਥਵੀ (ਧਰਤੀ) ਤੋਂ ਗ੍ਰਹਿ ਅਤੇ ਤਾਰਿਆਂ ਦੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕਰਦੇ ਆਏ ਹਨ। ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਭੂਗੋਲ ਅਤੇ ਨੌਚਾਲਣ (navigation) ਵਿੱਚ ਵੀ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦੇ ਗਿਆਨ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਕਸ਼ੇ ਬਣਾਉਣ ਅਤੇ ਲੰਬਕਾਰ (longitude) ਅਤੇ ਵਿੱਥਕਾਰ (latitude) ਨਾਲ ਸਬੰਧਿਤ ਇੱਕ ਦੀਪ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਵੀ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਸਰਵੇ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਸਦੀਆਂ ਤੋਂ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਆ ਰਹੇ ਹਨ। ਉਨਵੀਂ ਸਦੀ ਦਾ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਵਿਸ਼ਾਲ ਸਰਵੇਖਣ "ਵੱਡਾ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਸਰਵੇ" ਬਰਤਾਨੀ ਭਾਰਤ ਦੀ ਪਰਿਯੋਜਨਾ ਸੀ। ਜਿਸਦੇ ਲਈ ਦੋ ਬਹੁਤ ਵੱਡੇ ਥਿਉਡੋਲਾਇਟ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸੀ। 1852 ਵਿੱਚ ਸਰਵੇਖਣ ਕਰਨ ਦੇ ਦੌਰਾਨ ਵਿਸ਼ਵ ਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਪਹਾੜ ਦੀ ਖੋਜ ਕੀਤੀ ਗਈ ਸੀ। ਲਗਭਗ 160 km ਤੋਂ ਵੀ ਵੱਧ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ 6 ਕੇਂਦਰਾਂ ਤੋਂ ਇਸ ਪਹਾੜ ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ ਦਾ ਪ੍ਰੇਖਣ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। 1856 ਵਿੱਚ ਇਸ ਚੋਟੀ ਦਾ ਨਾਮਕਰਣ ਸਰ ਜਾਰਜ ਐਵਰੈਸਟ ਦੇ ਨਾਮ 'ਤੇ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਜਿਸ ਨੇ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਵਿਸ਼ਾਲ ਥਿਉਡੋਲਾਇਟ ਨੂੰ ਵਰਤਿਆ (ਸਾਹਮਣੇ ਵਾਲਾ ਚਿੱਤਰ ਦੇਖੋ) ਹੁਣ ਇਹ ਥਿਉਡੋਲਾਇਟ ਦੇਹਰਾਦੂਨ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਭਾਰਤ ਸਰਵੇਖਣ ਦੇ ਸੰਗ੍ਰਿਹਘਰ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨ ਦੇ ਲਈ ਰੱਖੇ ਗਏ ਹਨ।



ਥਿਉਡੋਲਾਇਟ

ਇੱਕ ਸਰਵੇਖਣ ਯੰਤਰ ਜੋ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦੇ ਨਿਯਮਾਂ 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ, ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਇੱਕ ਘੁੰਮਣ ਵਾਲੀ ਦੂਰਬੀਨ ਨਾਲ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਮਾਪਣ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖਾਂਗੇ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਮਾਪ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਹੀ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀਆਂ ਉੱਚਾਈਆਂ ਅਤੇ ਦੂਰੀਆਂ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

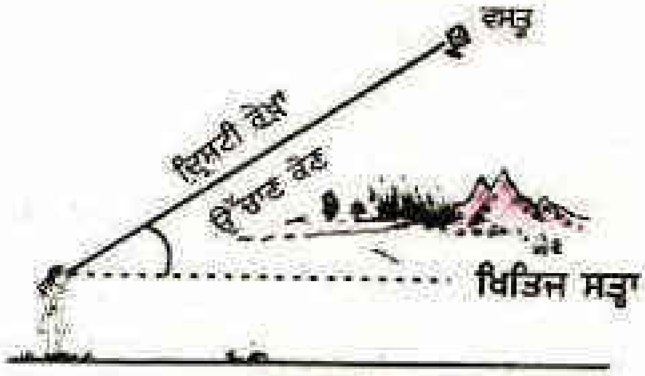
9.2 ਉੱਚਾਈਆਂ ਅਤੇ ਦੂਰੀਆਂ

ਆਉ ਅਸੀਂ ਅਧਿਆਇ 8 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਚਿੱਤਰ 8.1 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ, ਜਿਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਚਿੱਤਰ 9.1 ਵਿੱਚ ਦੁਬਾਰਾ ਖਿੱਚ ਰਹੇ ਹਾਂ।

ਚਿੱਤਰ 9.1

ਇਸ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ, ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੀ ਅੱਖ ਤੋਂ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਸਿਖਰ ਤੱਕ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਰੇਖਾ AC ਨੂੰ **ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਰੇਖਾ (line of sight)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਸਿਖਰ ਵਾਲੇ ਪਾਸੇ ਦੇਖ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਰੇਖਾ ਅਤੇ **ਖਿਤਿਜ ਰੇਖਾ** (Horizontal Line) ਨਾਲ ਬਣੇ ਕੋਣ BAC ਨੂੰ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੀ ਅੱਖ ਦੁਆਰਾ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦਾ **ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ (angle of elevation)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

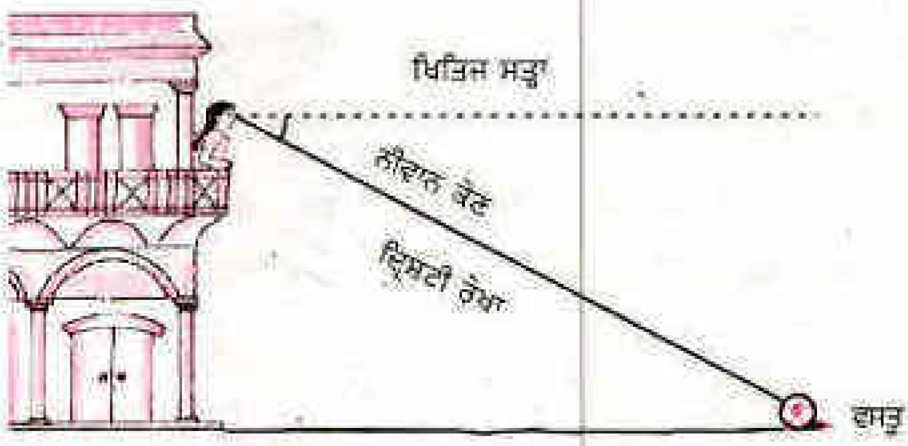
ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, **ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਰੇਖਾ** ਪ੍ਰੇਖਕ ਦੀ ਅੱਖ ਨੂੰ ਉਸ ਵਸਤੂ ਨਾਲ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰੇਖਕ ਦੇਖਦਾ ਹੈ। ਦੇਖੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਉਚਾਣ ਕੋਣ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਖਿਤਿਜ ਰੇਖਾ ਨਾਲ ਬਣਿਆ ਕੋਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਰਿਹਾ ਬਿੰਦੂ ਸਤ੍ਹਾ ਤੋਂ ਉੱਪਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ; ਭਾਵ ਉਹ ਸਥਿਤੀ ਜਦੋਂ ਵਸਤੂ ਨੂੰ ਦੇਖਣ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਆਪਣਾ ਸਿਰ ਉੱਪਰ ਚੁਕਣਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.2)।



ਚਿੱਤਰ 9.2

ਆਓ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 8.2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਥਿਤੀ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਬਾਲਕੋਨੀ ਵਿੱਚ ਬੈਠੀ ਲੜਕੀ ਮੰਦਰ ਦੀ ਪੌੜੀ 'ਤੇ ਰੱਖੇ ਗਮਲੇ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਵੱਲ ਦੇਖ ਰਹੀ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਰੇਖਾ ਖਿਤਿਜ ਸਤ੍ਹਾ ਤੋਂ ਹੇਠਾਂ ਹੈ। ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਖਿਤਿਜ ਰੇਖਾ ਨਾਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣੇ ਕੋਣ ਨੂੰ **ਨੀਵਾਨ ਕੋਣ (angle of depression)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਦੇਖੀ ਜਾ ਰਹੀ ਵਸਤੂ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ ਦਾ **ਨੀਵਾਨ ਕੋਣ** ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਖਿਤਿਜ ਰੇਖਾ ਨਾਲ ਬਣਿਆ ਕੋਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਬਿੰਦੂ ਖਿਤਿਜ ਰੇਖਾ ਤੋਂ ਹੇਠਾਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ ਉਹ ਸਥਿਤੀ ਜਦੋਂ ਕਿ ਦੇਖੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਦੇਖਣ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਆਪਣਾ ਸਿਰ ਹੇਠਾਂ ਝੁਕਾਉਣਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.3)।



ਚਿੱਤਰ 9.3

ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 8.3 ਵਿੱਚ ਬਣੀਆਂ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣੇ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਇਹ ਕੋਣ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ ਹਨ ਜਾਂ ਨੀਵਾਨ ਕੋਣ?

ਆਓ ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 9.1 ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਦੇਖੀਏ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਸਹੀ ਮਤਲੱਬ ਵਿੱਚ ਬਿਨਾਂ ਮਾਪੇ ਹੀ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ CD ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਇਸਦੇ ਲਈ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕਿਸ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ? ਇਸਦੇ ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਤੱਥਾਂ ਦਾ ਗਿਆਨ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

(i) ਦੂਰੀ DE ਜਿਥੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਆਧਾਰ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਇਸ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਖੜਾ ਹੈ।

(ii) ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦਾ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ $\angle BAC$

(iii) ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੀ ਉੱਚਾਈ AE

ਇਹ ਮੰਨਕੇ ਕਿ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਤਿੰਨੇ ਜਾਣਕਾਰੀਆਂ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ?

ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ $CD = CB + BD$ ਜਿੱਥੇ $BD = AE$ ਜੋ ਕਿ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਹੈ।

BC ਪਤਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $\angle BAC$ ਜਾਂ $\angle A$ ਦੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨਾ ਪਵੇਗਾ।

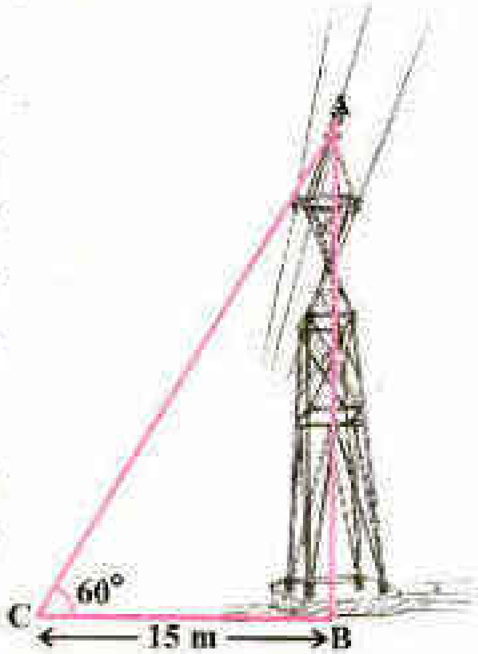
ΔABC ਵਿੱਚ, ਭੁਜਾ BC ਕੋਣ A (ਜੋ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ) ਦੀ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇੱਥੇ ਕਿਹੜੇ-ਕਿਹੜੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ? ਇਹਨਾ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਦੋ ਮੁੱਲ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹਨ ਅਤੇ ਸਾਨੂੰ ਕਿਸਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ? tan A ਜਾਂ cot A ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਨਾਲ ਸਾਡੀ ਖੋਜ ਦਾ ਘੇਰਾ ਘੱਟ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹਨਾਂ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਵਿੱਚ AB ਅਤੇ BC ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\tan A = \frac{BC}{AB}$ ਜਾਂ $\cot A = \frac{AB}{BC}$, ਜਿਸ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ BC ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ।

BC ਅਤੇ AE ਜੋੜਨ ਨਾਲ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਲੱਗ ਜਾਵੇਗੀ।

ਆਉ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਨਾਲ ਹੁਣੇ-ਹੁਣੇ ਦੱਸੇ ਗਏ ਤਰੀਕੇ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਧਰਤੀ 'ਤੇ ਇੱਕ ਮੀਨਾਰ ਸਿੱਧੀ (Vertically) ਖੜੀ ਹੈ। ਧਰਤੀ ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ, ਜੋ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਆਧਾਰ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ 15 m ਦੂਰ ਹੈ, ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦਾ ਉਚਾਣ ਕੋਣ 60° ਹੈ, ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਆਉ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਇੱਕ ਸਰਲ ਚਿੱਤਰ ਬਣਾਈਏ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.4)। ਇੱਥੇ AB ਇੱਕ ਮੀਨਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, CB ਮੀਨਾਰ ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਦੂਰੀ ਹੈ ਅਤੇ $\angle ACB$ ਉਚਾਣ ਕੋਣ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਭਾਵ AB ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇੱਥੇ ACB ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਜੋ B 'ਤੇ ਸਮਕੋਣ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 9.4

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਅਨੁਪਾਤ tan 60° (ਜਾਂ cot 60°) ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ AB ਅਤੇ BC ਦੋਵੇਂ ਹਨ।

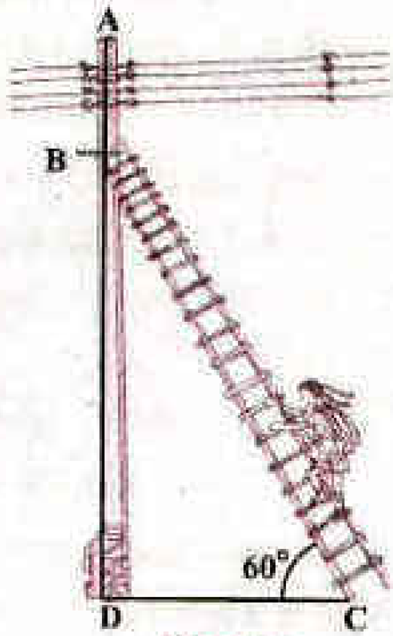
ਹੁਣ $\tan 60° = \frac{AB}{BC}$

ਭਾਵ $\sqrt{3} = \frac{AB}{15}$

ਭਾਵ $AB = 15\sqrt{3}$

ਇਸ ਲਈ, ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ $15\sqrt{3}$ m ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਇੱਕ ਬਿਜਲੀ ਦੇ ਮਿਸਤਰੀ ਨੂੰ 5 m ਉੱਚੇ ਖੰਬੇ 'ਤੇ ਆ ਗਈ ਖਰਾਬੀ ਨੂੰ ਠੀਕ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਮੁਰੰਮਤ ਦਾ ਕੰਮ ਕਰਨ ਲਈ ਉਸਨੂੰ ਖੰਬੇ ਦੇ ਸਿਖਰ ਤੋਂ 1.3 m ਥੱਲੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੱਕ ਪਹੁੰਚਣਾ ਹੈ (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.5)। ਇਥੋਂ ਤੱਕ ਪਹੁੰਚਣ ਦੇ ਲਈ ਉੱਚਿਤ ਪੌੜੀ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਕਿੰਨੀ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ, ਜਿਸਨੂੰ ਕਿ ਖਿਤਿਜ 'ਤੇ 60° ਦੇ ਕੋਣ 'ਤੇ ਝੁਕਾਉਣ ਨਾਲ ਇਹ ਉੱਚਿਤ (ਲੋੜੀਂਦੀ) ਸਥਿਤੀ ਤੱਕ ਪਹੁੰਚ ਜਾਏ? ਇਹ ਵੀ ਦੱਸੋ ਕੀ ਖੰਬੇ ਦਾ ਪੈਰ ਬਿੰਦੂ ਪੌੜੀ ਦੇ ਆਧਾਰ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਕਿੰਨੀ ਦੂਰ 'ਤੇ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ? (ਇਥੇ ਤੁਸੀਂ $\sqrt{3} = 1.73$ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹੋ)।



ਚਿੱਤਰ 9.5

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 9.5 ਵਿੱਚ, ਬਿਜਲੀ ਮਿਸਤਰੀ ਨੂੰ ਖੰਬੇ AD 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ B ਤੱਕ ਪਹੁੰਚਣਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\quad BD = AD - AB = (5 - 1.3)\text{ m} = 3.7\text{ m}$

ਇਥੇ BC, ਪੌੜੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਸਾਨੂੰ ਇਸਦੀ ਲੰਬਾਈ ਭਾਵ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ BDC ਦਾ ਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਦਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਕਿਸ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਨੁਪਾਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ?

ਇਹ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਨੁਪਾਤ sin 60° ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\quad \frac{BD}{BC} = \sin 60^\circ$ ਜਾਂ $\frac{3.7}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ਇਸ ਲਈ $\quad BC = \frac{3.7 \times 2}{\sqrt{3}} = 4.28\text{ m}$ (ਲਗਭਗ)

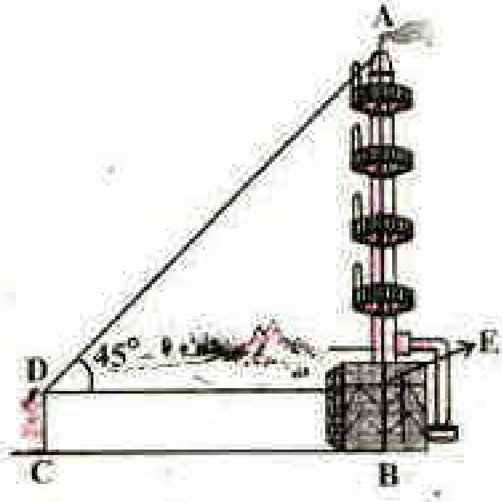
ਭਾਵ ਪੌੜੀ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 4.28 m ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ।

ਹੁਣ $\quad \frac{DC}{BD} = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ਭਾਵ $\quad DC = \frac{3.7}{\sqrt{3}} = 2.14\text{ m}$ (ਲਗਭਗ)

ਇਸ ਲਈ, ਇਸ ਪੌੜੀ ਦੇ ਪੈਰ ਨੂੰ ਖੰਬੇ ਦੇ ਪੈਰ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ 2.14 m ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਰੱਖਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : 1.5 m ਲੰਬਾ ਇੱਕ ਪ੍ਰੇਖਕ ਚਿਮਨੀ ਤੋਂ 28.5 m ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ। ਉਸਦੀ ਅੱਖਾਂ ਨਾਲ ਚਿਮਨੀ ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ ਦਾ ਉਚਾਣ ਕੋਣ 45° ਹੈ। ਚਿਮਨੀ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 9.6

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ AB ਚਿਮਨੀ ਹੈ, CD ਪ੍ਰੇਖਕ ਹੈ ਅਤੇ $\angle ADE$ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.6)। ਇੱਥੇ ADE ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ E ਸਮਕੋਣ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਚਿਮਨੀ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ।

ਇੱਥੇ $AB = AE + BE = (AE + 1.5)$ m

ਅਤੇ $DE = CB = 28.5$ m

AE ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦਾ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਨੁਪਾਤ ਲੈਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ AE ਅਤੇ DE ਦੋਵੇਂ ਹੋਣ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਆਉ ਅਸੀਂ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ ਦਾ tangent ਲਈਏ।

ਹੁਣ $$\tan 45^\circ = \frac{AE}{DE}$$

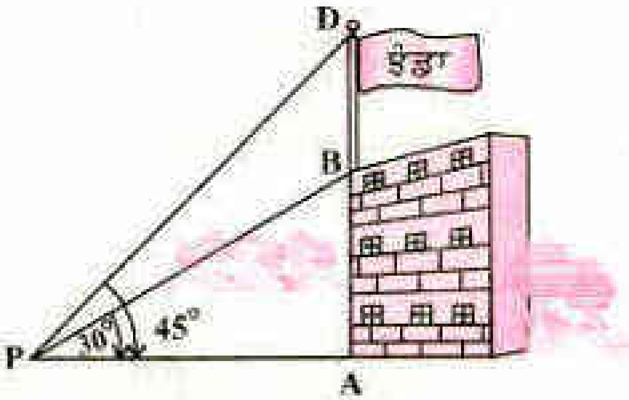
ਭਾਵ $$1 = \frac{AE}{28.5}$$

ਇਸ ਲਈ $AE = 28.5$

ਇਸ ਲਈ, ਚਿਮਨੀ ਦੀ ਉੱਚਾਈ $(AB) = (28.5 + 1.5)$ m $= 30$ m

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਧਰਤੀ 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਇੱਕ 10 m ਉੱਚੇ ਭਵਨ (ਮਕਾਨ) ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ ਦਾ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ 30° ਹੈ। ਭਵਨ ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਝੰਡਾ ਲਹਿਰਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ P ਤੋਂ ਝੰਡੇ ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ ਦਾ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ 45° ਹੈ। ਝੰਡੇ ਦੇ ਡੰਡੇ (flagstaff) ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਭਵਨ ਦੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ (ਇਥੇ ਤੁਸੀਂ $\sqrt{3} = 1.73$ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹੋ)।

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 9.7 ਵਿੱਚ, AB ਭਵਨ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, BD ਝੰਡੇ ਦੇ ਡੰਡੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ P ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇੱਥੇ ਦੋ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ PAB ਅਤੇ PAD ਹਨ। ਅਸੀਂ ਝੰਡੇ ਦੇ ਡੰਡੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਭਾਵ DB ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਭਵਨ ਦੀ ਦੂਰੀ ਭਾਵ PA ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 9.7

ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਭਵਨ ਦੀ ਉੱਚਾਈ AB ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਸਮਕੋਣ ΔPAB ਲਵਾਂਗੇ।

ਇੱਥੇ $\tan 30° = \dfrac{AB}{AP}$

ਭਾਵ $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{10}{AP}$

ਇਸ ਲਈ $AP = 10\sqrt{3}$

ਭਾਵ P ਤੋਂ ਭਵਨ ਦੀ ਦੂਰੀ $10\sqrt{3}$ m = 17.32 m

ਆਓ ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਓ DB = x m ਹੈ। ਹੁਣ AD = $(10 + x)$ m

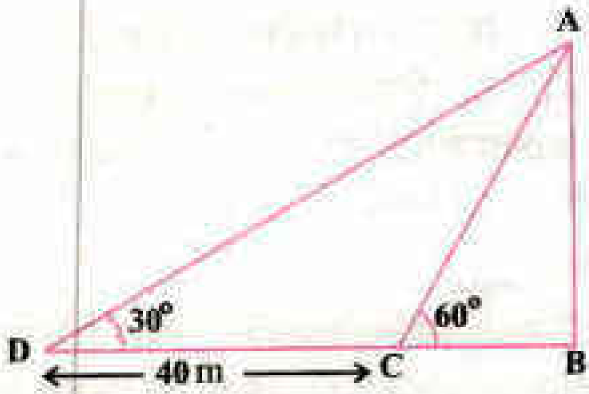
ਹੁਣ ਸਮਕੋਣ ΔPAD ਵਿੱਚ $\tan 45° = \dfrac{AD}{AP} = \dfrac{10+x}{10\sqrt{3}}$

ਇਸ ਲਈ $1 = \dfrac{10+x}{10\sqrt{3}}$

ਭਾਵ $x = 10\left(\sqrt{3}-1\right) = 7.32$

ਇਸ ਲਈ, ਝੰਡੇ ਦੇ ਡੰਡੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 7.32 m ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਜ਼ਮੀਨ 'ਤੇ ਖੜੀ ਮੀਨਾਰ ਦਾ ਪਰਛਾਵਾਂ ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ 40 m ਵੱਧ ਲੰਬਾ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਸੂਰਜ ਦਾ ਸਿਖ਼ਰ ਲੰਬ (altitude) 60° ਤੋਂ ਘੱਟ ਕੇ 30° ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਪਰਛਾਵੇਂ ਦੇ ਇੱਕ ਸਿਰੇ ਤੋਂ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ ਦਾ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ 60° ਹੈ ਅਤੇ DB ਪਰਛਾਵੇਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ 30° ਹੈ। ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 9.8

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ AB = h m ਹੈ ਅਤੇ BC, x m ਹੈ। ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ DB, BC ਤੋਂ 40 m ਵੱਧ ਲੰਬਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $DB = (40 + x)$ m

ਇਥੇ ਦੋ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ABC ਅਤੇ ABD ਹਨ।

Δ ABC ਵਿੱਚ $\tan 60° = \frac{AB}{BC}$

ਜਾਂ $\sqrt{3} = \frac{h}{x}$ (1)

Δ ABD ਵਿੱਚ $\tan 30° = \frac{AB}{BD}$

ਭਾਵ $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+40}$ (2)

(1) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$h = x\sqrt{3}$$

ਇਸ ਮੁੱਲ ਨੂੰ (2)ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$(x\sqrt{3})\sqrt{3} = x + 40$, ਭਾਵ $3x = x + 40$

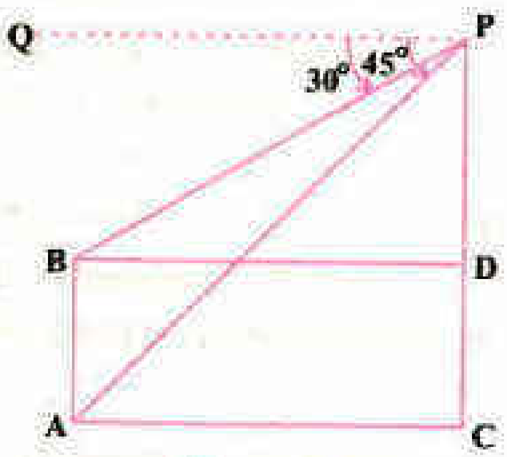
ਇਸ ਲਈ $x = 20$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $h = 20\sqrt{3}$ [(1) ਤੋਂ]

ਇਸ ਲਈ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ $20\sqrt{3}$ m ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਇੱਕ ਬਹੁਮੰਜ਼ਲੀ ਇਮਾਰਤ ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ ਤੋਂ ਦੇਖਣ 'ਤੇ ਇੱਕ 8 m ਉੱਚੀ ਇਮਾਰਤ ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ ਅਤੇ ਤਲ ਦੇ ਨੀਵਾਨ ਕੋਣ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 30° ਅਤੇ 45° ਹਨ। ਬਹੁਮੰਜ਼ਲੀ ਇਮਾਰਤ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਅਤੇ ਦੋਹਾਂ ਇਮਾਰਤਾਂ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 9.9 ਵਿੱਚ PC ਬਹੁਮੰਜ਼ਿਲ ਇਮਾਰਤ ਅਤੇ AB, 8 m ਉੱਚੀ ਇਮਾਰਤ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਬਹੁਮੰਜ਼ਿਲ ਇਮਾਰਤ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਭਾਵ PC ਅਤੇ ਦੋਵਾਂ ਇਮਾਰਤਾਂ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਭਾਵ AC ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 9.9

ਚਿੱਤਰ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਦੇਖੋ। ਤੁਸੀਂ ਇੱਥੇ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ PQ ਅਤੇ BD ਨੂੰ ਤਿਰਛੀ ਰੇਖਾ PB ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\angle QPB$ ਅਤੇ $\angle PBD$ ਇਕਾਂਤਰ ਕੋਣ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਬਰਾਬਰ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ $\angle PBD = 30°$, ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $\angle PAC = 45°$

ਸਮਕੋਣ Δ PBD ਵਿੱਚ

$$\frac{PD}{BD} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ਜਾਂ } BD = PD\sqrt{3}$$

ਸਮਕੋਣ Δ PAC ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$\frac{PC}{AC} = \tan 45° = 1$$

ਭਾਵ $PC = AC$

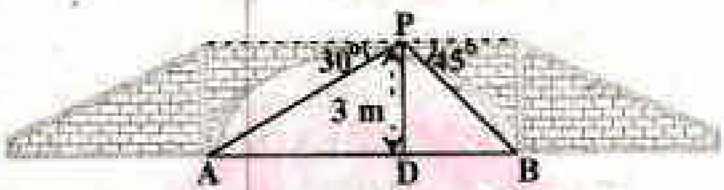
ਅਤੇ $PC = PD + DC$ ਇਸ ਲਈ $PD + DC = AC$

ਕਿਉਂਕਿ $AC = BD$ ਅਤੇ $DC = AB = 8$ m, ਇਸ ਲਈ $PD + 8 = BD = PD\sqrt{3}$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ: $PD = \dfrac{8}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{8\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)} = 4\left(\sqrt{3}+1\right)$ m

ਇਸ ਲਈ, ਬਹੁਮੰਜਿਲ ਇਮਾਰਤ ਦੀ ਉੱਚਾਈ $\left\{4\left(\sqrt{3}+1\right)+8\right\}$m $= 4\left(3+\sqrt{3}\right)$m ਹੈ ਅਤੇ ਦੋਵਾਂ ਇਮਾਰਤਾਂ ਦੀ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ $4\left(3+\sqrt{3}\right)$m ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਇੱਕ ਨਦੀ ਦੇ ਪੁਲ ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਨਦੀ ਦੇ ਸਨਮੁੱਖ ਕਿਨਾਰਿਆਂ ਦੇ ਨੀਵਾਨ ਕੋਣ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 30° ਅਤੇ 45° ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪੁਲ, ਕਿਨਾਰਿਆਂ ਤੋਂ 3 m ਦੀ ਉੱਚਾਈ 'ਤੇ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਨਦੀ ਦੀ ਚੌੜਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 9.10

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 9.10 ਵਿੱਚ A ਅਤੇ B ਨਦੀ ਦੇ ਸਨਮੁੱਖ ਕਿਨਾਰਿਆਂ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨਾਲ AB ਨਦੀ ਦੀ ਚੌੜਾਈ ਹੈ। 3 m ਦੀ ਉੱਚਾਈ 'ਤੇ ਬਣੇ ਪੁਲ 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P ਹੈ ਭਾਵ DP = 3 m ਹੈ। ਅਸੀਂ ਨਦੀ ਦੀ ਚੌੜਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਕਿ Δ APB ਦੀ ਭੁਜਾ AB ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਹੈ।

ਹੁਣ $AB = AD + DB$

ਸਮਕੋਣ Δ APD ਵਿੱਚ $\angle A = 30°$

ਇਸ ਲਈ $\tan 30° = \dfrac{PD}{AD}$

ਭਾਵ $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{3}{AD}$ ਜਾਂ $AD = 3\sqrt{3}$ m

ਇਸ ਲਈ, ਸਮਕੋਣ Δ PBD ਵਿੱਚ, $\angle B = 45°$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ BD = PD = 3 m

ਹੁਣ $AB = BD + AD = 3 + 3\sqrt{3} = 3(1 + \sqrt{3})$ m

ਇਸ ਲਈ, ਨਦੀ ਦੀ ਚੌੜਾਈ $3\left(\sqrt{3}+1\right)$ m ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 9.1

1. ਸਰਕਸ ਦਾ ਇੱਕ ਕਲਾਕਾਰ ਇੱਕ 20 m ਲੰਬੀ ਰੱਸੀ 'ਤੇ ਚੜ੍ਹ ਰਿਹਾ ਹੈ ਜੋ ਪੂਰੀ ਤਰਾਂ ਨਾਲ ਤਣੀ (ਕਸੀ) ਹੋਈ ਹੈ ਅਤੇ ਧਰਤੀ 'ਤੇ ਸਿੱਧੇ ਖੜੇ ਖੰਬੇ ਦੇ ਸਿਖਰ ਨਾਲ ਬੰਨੀ ਹੋਈ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਰੱਸੀ ਧਰਤੀ ਦੇ ਤਲ ਨਾਲ 30° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਖੰਬੇ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.11)।

ਚਿੱਤਰ 9.11

2. ਹਨੇਰੀ ਆਉਣ ਨਾਲ ਇੱਕ ਦਰੱਖਤ ਟੁੱਟ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਟੁੱਟਿਆ ਹੋਇਆ ਭਾਗ ਇਸ ਤਰਾਂ ਨਾਲ ਮੁੜ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਦਰੱਖਤ ਦਾ ਸਿਖਰ ਜਮੀਨ ਨੂੰ ਛੂਹਣ (touch) ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਨਾਲ 30° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਦਰੱਖਤ ਦੇ ਆਧਾਰ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਦੂਰੀ, ਜਿੱਥੇ ਦਰੱਖਤ ਦਾ ਸਿਖਰ ਜਮੀਨ ਨੂੰ ਛੂਹੰਦਾ ਹੈ, 8 m ਹੈ। ਦਰੱਖਤ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਇੱਕ ਠੇਕੇਦਾਰ ਬੱਚਿਆਂ ਦੇ ਖੇਡਣ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਪਾਰਕ ਵਿੱਚ ਦੋ ਤਿਲਕਣ ਪੱਟੀਆਂ (Slides) ਲਗਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ। 5 ਸਾਲ ਤੋਂ ਘੱਟ ਉਮਰ ਦੇ ਬੱਚਿਆਂ ਲਈ ਉਹ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੀ ਤਿਲਕਣਪੱਟੀ ਲਗਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਸਿਖਰ 1.5 m ਉੱਚਾਈ 'ਤੇ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਉਹ ਜਮੀਨ ਨਾਲ 30° ਕੋਣ 'ਤੇ ਝੁਕੀ ਹੋਵੇ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਇਸ ਤੋਂ ਵੱਧ ਉਮਰ ਦੇ ਬੱਚਿਆਂ ਲਈ ਉਹ 3 m ਦੀ ਉੱਚਾਈ 'ਤੇ ਇੱਕ ਵੱਧ ਢਾਲ ਦੀ ਤਿਲਕਣਪੱਟੀ ਲਗਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਜਮੀਨ ਨਾਲ 60° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੋਵੇ। ਹਰ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਤਿਲਕਣਪੱਟੀ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਕਿੰਨੀ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ?
4. ਜਮੀਨ ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਜੋ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਆਧਾਰ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ 30 m ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ, ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦਾ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ 30° ਹੈ। ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. ਜਮੀਨ ਤੋਂ 60 m ਉੱਚਾਈ 'ਤੇ ਇੱਕ ਪਤੰਗ ਉੱਡ ਰਹੀ ਹੈ। ਪਤੰਗ ਨਾਲ ਲੱਗੇ ਧਾਗੇ ਨੂੰ ਅਸਥਾਈ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਮੀਨ 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਨਾਲ ਬੰਨ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਜਮੀਨ ਨਾਲ ਧਾਗੇ ਦਾ ਝੁਕਾਅ 60° ਹੈ। ਇਹ ਮੰਨਕੇ ਕਿ ਧਾਗੇ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਢਿਲ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਧਾਗੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. 1.5 m ਲੰਬਾ ਲੜਕਾ 30 ਮੀਟਰ ਉੱਚੀ ਇੱਕ ਇਮਾਰਤ ਤੋਂ ਕੁਝ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਖੜਾ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਉਹ ਇਮਾਰਤ ਵੱਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ (ਚਲਦਾ ਹੈ) ਤਾਂ ਉਸਦੀ ਅੱਖ ਨਾਲ ਇਮਾਰਤ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦਾ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ 30° ਤੋਂ 60° ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਦੱਸੋ ਕਿ ਉਹ ਇਮਾਰਤ ਵੱਲ ਕਿੰਨੀ ਦੂਰੀ ਤੱਕ ਚਲ ਕੇ ਗਿਆ।

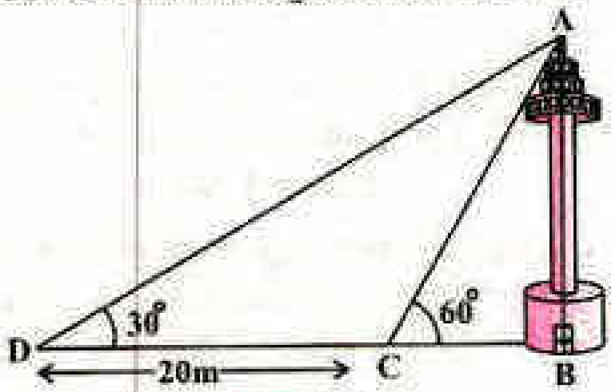
7. ਜ਼ਮੀਨ ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਇੱਕ 20 m ਉੱਚੀ ਇਮਾਰਤ ਦੇ ਸਿਖਰ 'ਤੇ ਲੱਗੇ ਸੰਚਾਰ ਮੀਨਾਰ (transmission tower) ਦੇ ਤਲ ਅਤੇ ਸਿਖਰ ਦਾ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 45° ਅਤੇ 60° ਹੈ। ਸੰਚਾਰ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਇੱਕ ਪੈਡਸਟਲ (Pedestal) ਦੇ ਸਿਖਰ 'ਤੇ ਇੱਕ 1.6 m ਉੱਚੀ ਮੂਰਤੀ ਲੱਗੀ ਹੋਈ ਹੈ। ਜ਼ਮੀਨ ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਮੂਰਤੀ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦਾ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ 60° ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਹੀ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਪੈਡਸਟਲ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦਾ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ 45° ਹੈ। ਪੈਡਸਟਲ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9. ਇੱਕ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਆਧਾਰ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਇੱਕ ਇਮਾਰਤ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦਾ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ 30° ਹੈ ਅਤੇ ਇਮਾਰਤ ਦੇ ਆਧਾਰ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦਾ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ 60° ਹੈ। ਜੇਕਰ ਮੀਨਾਰ 50 ਮੀਟਰ ਉੱਚੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਮਾਰਤ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਇੱਕ 80 ਮੀਟਰ ਚੌੜੀ ਸੜਕ ਦੇ ਦੋਵਾਂ ਪਾਸਿਆਂ 'ਤੇ ਆਹਮਣੇ ਸਾਹਮਣੇ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੇ ਦੋ ਖੰਬੇ ਲੱਗੇ ਹੋਏ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦੋਹਾਂ ਖੰਬਿਆਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਸੜਕ 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਖੰਬਿਆਂ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦਾ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 60° ਅਤੇ 30° ਹੈ। ਖੰਬਿਆਂ ਦੀ ਉਚਾਈ ਅਤੇ ਖੰਬਿਆਂ ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. ਇੱਕ ਨਹਿਰ ਦੇ ਇੱਕ ਤਟ 'ਤੇ ਇੱਕ ਟੀ.ਵੀ ਟਾਵਰ ਸਿੱਧਾ ਖੜਾ ਹੈ। ਟਾਵਰ ਦੇ ਠੀਕ ਸਾਹਮਣੇ ਦੂਸਰੇ ਤੱਟ 'ਤੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਟਾਵਰ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦਾ ਉਚਾਣ ਕੋਣ 60° ਹੈ। ਇਸੇ ਤਟ ਤੋਂ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ 20 m ਦੂਰ ਅਤੇ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਆਧਾਰ ਬਿੰਦੂ ਨਾਲ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਟਾਵਰ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦਾ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ 30° ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.12)। ਟਾਵਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਅਤੇ ਨਹਿਰ ਦੀ ਚੌੜਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

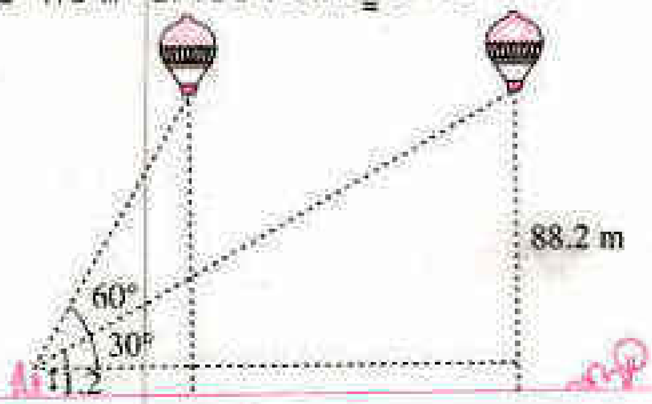


ਚਿੱਤਰ 9.12

12. 7 m ਉੱਚੀ ਇਮਾਰਤ ਦੇ ਸਿਖਰ ਤੋਂ ਇੱਕ ਕੇਬਲ ਟਾਵਰ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦਾ ਉਚਾਣ ਕੋਣ 60° ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਪੈਰ ਦਾ ਨੀਵਾਨ ਕੋਣ 45° ਹੈ। ਟਾਵਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

13. ਸਮੁੰਦਰ ਤਲ ਤੋਂ 75 m ਉੱਚੇ ਲਾਈਟ ਹਾਊਸ ਦੇ ਸਿਖਰ ਤੋਂ ਦੇਖਣ ਨਾਲ ਦੋ ਸਮੁੰਦਰੀ ਜਹਾਜਾਂ ਦੇ ਨੀਵਾਨ ਕੋਣ 30° ਅਤੇ 45° ਹਨ। ਜੇਕਰ ਲਾਈਟ ਹਾਊਸ ਦੇ ਇੱਕ ਹੀ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਇੱਕ ਜਹਾਜ ਦੂਸਰੇ ਜਹਾਜ ਦੇ ਬਿਲਕੁਲ ਪਿਛੇ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਜਹਾਜਾਂ ਦੀ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

14. 1.2 m ਲੰਬੀ ਇੱਕ ਲੜਕੀ ਜ਼ਮੀਨ ਤੋਂ 88.2 m ਦੀ ਉੱਚਾਈ 'ਤੇ ਇੱਕ ਖਿਤਿਜ ਰੇਖਾ ਵਿੱਚ ਉੱਡ ਰਹੇ ਗੁਬਾਰੇ ਨੂੰ ਦੇਖਦੀ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਮੇਂ ਲੜਕੀ ਦੀ ਅੱਖ ਨਾਲ ਗੁਬਾਰੇ ਦਾ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ 60° ਹੈ। ਕੁਝ ਸਮੇਂ ਬਾਦ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ ਘੱਟ ਕੇ 30° ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 9.13)। ਇਸ ਅੰਤਰਾਲ ਦੌਰਾਨ ਗੁਬਾਰੇ ਦੁਆਰਾ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 9.13

15. ਇੱਕ ਸਿੱਧਾ ਰਾਜ ਮਾਰਗ ਇੱਕ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੱਕ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਸਿਖਰ 'ਤੇ ਖੜਾ ਇੱਕ ਆਦਮੀ ਇੱਕ ਕਾਰ ਨੂੰ 30° ਦੇ ਨੀਵਾਨ ਕੋਣ 'ਤੇ ਦੇਖਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਆਧਾਰ ਵੱਲ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਚਾਲ ਨਾਲ ਆ ਰਹੀ ਹੈ। ਛੇ ਸੈਕਿੰਡ ਬਾਦ ਕਾਰ ਦਾ ਨੀਵਾਨ ਕੋਣ 60° ਹੋ ਗਿਆ। ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੱਕ ਪਹੁੰਚਣ ਲਈ ਕਾਰ ਦੁਆਰਾ ਲਿਆ ਗਿਆ ਸਮਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

16. ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਆਧਾਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ 4 m ਅਤੇ 9 m ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦੇ ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ ਪੂਰਕ ਕੋਣ ਹਨ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ 6 m ਹੈ।

9.3 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ:

1. (i) **ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਰੇਖਾ** ਪ੍ਰੇਖਕ ਦੀ ਅੱਖ ਤੋਂ ਪ੍ਰੇਖਕ ਦੁਆਰਾ ਦੇਖੀ ਗਈ ਵਸਤੂ ਦੇ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

   (ii) ਦੇਖੀ ਗਈ ਵਸਤੂ ਦਾ **ਉੱਚਾਣ ਕੋਣ** ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਖਿਤਿਜ ਰੇਖਾ ਨਾਲ ਬਣਿਆ ਕੋਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਇਹ ਖਿਤਿਜ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਉੱਪਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਉਹ ਸਥਿਤੀ ਜਦੋਂ ਕਿ ਵਸਤੂ ਨੂੰ ਦੇਖਣ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਆਪਣੇ ਸਿਰ ਨੂੰ ਉੱਪਰ ਚੁਕਣਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ।

   (iii) ਦੇਖੀ ਗਈ ਵਸਤੂ ਦਾ **ਨੀਵਾਨ ਕੋਣ** ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਖਿਤਿਜ ਰੇਖਾ ਨਾਲ ਬਣਿਆ ਕੋਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਖਿਤਿਜ ਰੇਖਾ ਖਿਤਿਜ ਸਤ੍ਹਾ ਤੋਂ ਹੇਠਾਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਭਾਵ ਉਹ ਸਥਿਤੀ ਜਦੋਂ ਵਸਤੂ ਨੂੰ ਦੇਖਣ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਸਿਰ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਝੁਕਾਉਣਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ।

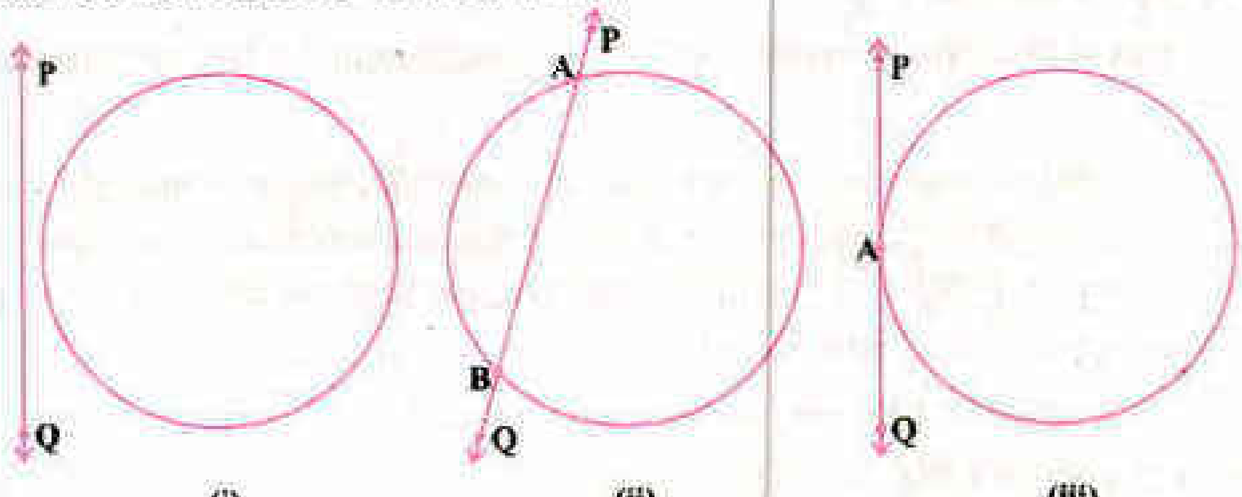
2. ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਕਿਸੇ ਵਸਤੂ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਜਾਂ ਲੰਬਾਈ ਜਾਂ ਦੋ ਦੂਰ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਚੱਕਰ 10

10.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਤੁਸੀਂ IX ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ ਕਿ ਚੱਕਰ ਇੱਕ ਤਲ ਦੇ ਉਨ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਿੰਦੂ (ਕੇਂਦਰ) ਤੋਂ ਅਚਲ ਦੂਰੀ (ਅਰਧ ਵਿਆਸ) 'ਤੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਤੁਸੀਂ ਚੱਕਰ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਜਿਵੇਂ ਜੀਵਾ (ਵਤਰ), ਚੱਕਰ ਖੰਡ, ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ, ਚਾਪ ਆਦਿ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ। ਆਓ ਹੁਣ ਇੱਕ ਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਅਤੇ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੀਆਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸਥਿਤੀਆਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

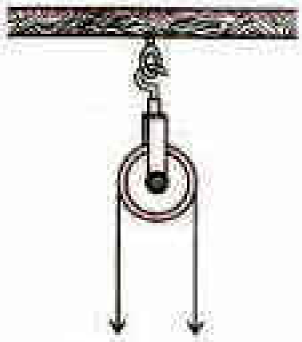
ਆਓ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਅਤੇ ਇੱਕ ਰੇਖਾ PQ 'ਤੇ ਧਿਆਨ ਦੇਈਏ। ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਚਿੱਤਰ 10.1 ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 10.1

ਚਿੱਤਰ 10.1 (i) ਵਿੱਚ, ਰੇਖਾ PQ ਅਤੇ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ PQ ਚੱਕਰ ਦੀ ਨਾ **ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ** ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 10.1 (ii) ਵਿੱਚ ਰੇਖਾ PQ ਅਤੇ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚ ਦੋ ਸਾਂਝੇ ਬਿੰਦੂ A ਅਤੇ B ਹਨ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਰੇਖਾ PQ ਨੂੰ ਚੱਕਰ ਦੀ **ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ** ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਚਿੱਤਰ 10.1 (iii) ਵਿੱਚ ਰੇਖਾ PQ ਅਤੇ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ A ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਰੇਖਾ ਚੱਕਰ ਦੀ **ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ** ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਤੁਸੀਂ ਖੂਹ 'ਤੇ ਲੱਗੀ ਘਿਰਨੀ ਨੂੰ ਦੇਖਿਆ ਹੋਵੇਗਾ। ਜਿਸਦਾ ਉਪਯੋਗ ਖੂਹ ਵਿੱਚੋਂ ਪਾਣੀ ਕੱਢਣ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 10.2 ਨੂੰ ਦੇਖੋ। ਇਥੇ ਘਿਰਨੀ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੀ ਰੱਸੀ ਨੂੰ ਜੇਕਰ ਕਿਰਨ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮਝਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਹ ਘਿਰਨੀ ਦੁਆਰਾ ਬਣੇ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਵੇਗਾ।



ਚਿੱਤਰ 10.2

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਕਿ ਚੱਕਰ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਰੇਖਾ ਦੀ ਕੋਈ ਹੋਰ ਸਥਿਤੀ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ? ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਰੇਖਾ ਦੀ ਚੱਕਰ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕੋਈ ਹੋਰ ਸਥਿਤੀ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ ਅਤੇ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਗੁਣਾਂ ਦਾ ਵੀ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

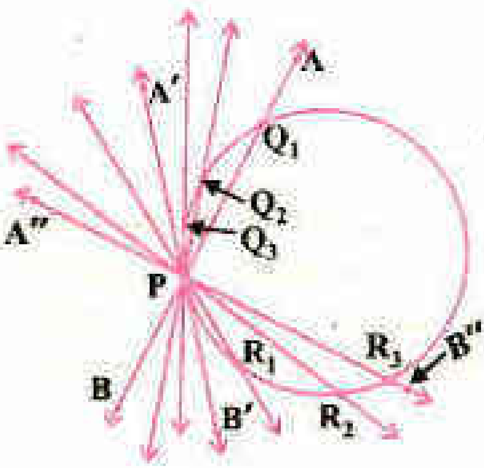
10.2 ਚੱਕਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ **ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਉਹ ਰੇਖਾ ਹੈ ਜੋ ਚੱਕਰ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ।**

ਚੱਕਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਕਰੋ।

ਕਿਰਿਆ 1: ਇੱਕ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਤਾਰ ਲਓ ਅਤੇ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਤਾਰ ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P 'ਤੇ ਇੱਕ ਸਿੱਧਾ ਤਾਰ AB ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਜੋੜੋ ਕਿ ਉਹ ਬਿੰਦੂ P 'ਤੇ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਘੁੰਮ ਸਕੇ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਮੇਜ 'ਤੇ ਰੱਖੋ ਅਤੇ ਤਾਰ AB ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ P 'ਤੇ ਹੌਲੀ ਹੌਲੀ ਘੁਮਾਉ ਜਿਸ ਨਾਲ ਸਿੱਧੇ ਤਾਰ ਦੀਆਂ ਅਲੱਗ ਅਲੱਗ ਸਥਿਤੀਆਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਸਕਣ। [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.3(i)]।

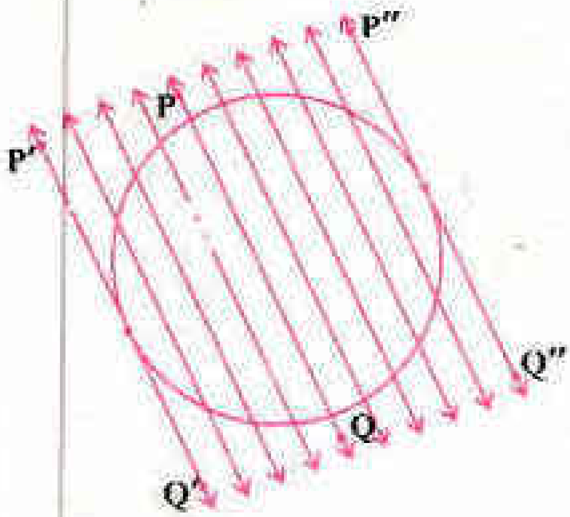
ਅਲੱਗ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਤਾਰ, ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਤਾਰ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ P ਅਤੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂ Q_1 ਜਾਂ Q_2 ਜਾਂ Q_3 ਆਦਿ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਉਹ ਚੱਕਰ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P 'ਤੇ ਹੀ ਕੱਟੇਗਾ (AB ਦੀ ਸਥਿਤੀ A'B' ਨੂੰ ਦੇਖੋ)। ਇਹ, ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਚੱਕਰ ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਇੱਕ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ। ਫਿਰ ਘੁਮਾਉਣ ਤੇ ਤੁਸੀਂ ਪਰਖ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ AB ਦੀਆਂ ਹੋਰ ਸਾਰੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਉਹ ਚੱਕਰ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ P ਅਤੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂ R_1 ਜਾਂ R_2 ਜਾਂ R_3 ਆਦਿ 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ **ਚੱਕਰ ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਇੱਕ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।**



ਚਿੱਤਰ 10.3 (i)

ਉਪਰੋਕਤ ਕਿਰਿਆ ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਜ਼ਰੂਰ ਦੇਖਿਆ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ ਸਥਿਤੀ AB ਤੋਂ ਸਥਿਤੀ A′ B′ ਵੱਲ ਵੱਧਦੀ ਹੈ, ਰੇਖਾ AB ਅਤੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ Q_1, ਸਾਂਝੇ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਨੇੜੇ ਆਉਂਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅੰਤ ਵਿੱਚ AB ਦੀ ਸਥਿਤੀ A′B′ 'ਤੇ ਉਹ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਫਿਰ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਕੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ A″B″, P ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਘੁਮਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ? ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ R_1 ਹੋਲੀ ਹੋਲੀ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਵੱਲ ਵੱਧਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ P ਨਾਲ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ:

ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਥਿਤੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਸੰਗਤ ਜੀਵਾ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਸਿਰੇ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋ ਜਾਣ।

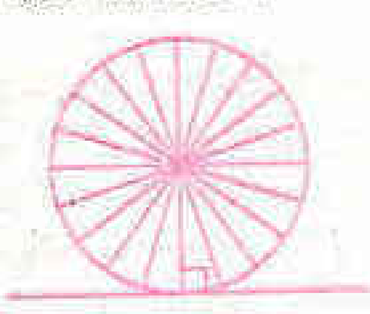


ਚਿੱਤਰ 10.3(ii)

ਕਿਰਿਆ 2 : ਇੱਕ ਕਾਗਜ਼ 'ਤੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਅਤੇ ਚੱਕਰ ਦੀ ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ PQ ਖਿਚੋ। ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ 'ਤੇ ਅਨੇਕ ਰੇਖਾਵਾਂ ਖਿੱਚੋ। ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਕੁਝ ਪਗਾਂ ਦੇ ਬਾਦ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੁਆਰਾ ਕੱਟੀ ਗਈ ਜੀਵਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਹੋਲੀ-ਹੋਲੀ ਘੱਟ ਹੋ ਰਹੀ ਹੈ। ਭਾਵ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਚੱਕਰ ਦੋਵੇਂ ਕਾਟਵੇਂ ਬਿੰਦੂ ਨੇੜੇ ਆ ਰਹੇ ਹਨ [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.3(ii)]। ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇਹ ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਇਹ ਸਿਫ਼ਰ ਅਤੇ ਦੂਸਰੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇਹ ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ ਦੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ P′Q′ ਅਤੇ P″Q″ ਦੇ ਚਿੱਤਰ 10.3 (ii) ਵਿੱਚ ਦੇਖੋ। ਇਹ ਦੋਨੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ PQ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਦੋ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ ਇਸ ਤੋਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਜਾਨਣ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਮਿਲਦੀ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਤੋਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਥਿਤੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਸਦੀ ਸੰਗਤ ਜੀਵਾ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਸਿਰੇ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋ ਜਾਣ।

ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ **ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ** [ਚਿੱਤਰ 10.1 (iii) ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ A] ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਚੱਕਰ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ **ਸਪਰਸ਼ ਕਰਨਾ** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।


ਚਿੱਤਰ 10.4

ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੇ ਚਾਰੇ ਪਾਸੇ ਦੇਖੋ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਸਾਇਕਲ ਜਾਂ ਇੱਕ ਬੈਲ ਗੱਡੀ ਨੂੰ ਚੱਲਦੇ ਦੇਖਿਆ ਹੈ? ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪਹੀਆਂ ਵੱਲ ਦੇਖੋ। ਇੱਕ ਪਹੀਏ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਤੀਲੀਆਂ ਉਸਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਅਨੁਰੂਪ ਹਨ। ਹੁਣ ਪਹੀਏ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਧਰਤੀ 'ਤੇ ਗਤੀ ਕਰਨ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ। ਕੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕੋਈ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦਿਖਦੀ ਹੈ? (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.4)।

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਪਹੀਆ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਗਤੀ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਪਹੀਏ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਹੈ। ਇਹ ਵੀ ਵੇਖੋ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤਰ 10.4 ਧਰਤੀ ਦੇ ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਲੰਬ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਈ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੇ ਇਸ ਗੁਣ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ।

ਥਿਊਰਮ : 10.1 : ਚੱਕਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ, ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

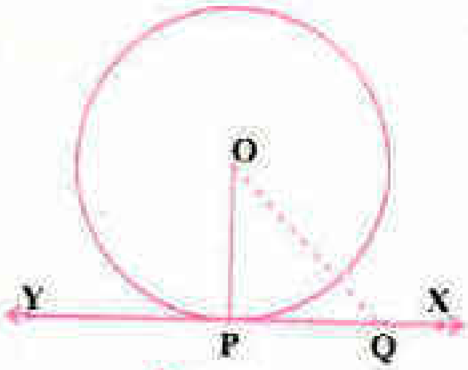
ਸਬੂਤ : ਸਾਨੂੰ ਕੇਂਦਰ O ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ XY ਦਿੱਤੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ OP, XY 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।

XY 'ਤੇ P ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ Q ਲਓ ਅਤੇ OQ ਨੂੰ ਮਿਲਾਓ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.5)।

ਬਿੰਦੂ Q ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਾਹਰ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ (ਕਿਉਂ? ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਜੇਕਰ Q ਚੱਕਰ ਦੇ ਅੰਦਰ ਹੈ ਤਾਂ XY ਚੱਕਰ ਦੀ ਇੱਕ ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ ਅਤੇ ਉਹ ਚੱਕਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗੀ।) ਇਸ ਲਈ OQ, ਅਰਧ ਵਿਆਸ OP ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਹੈ। ਭਾਵ

$$OQ > OP$$

ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਇਲਾਵਾ XY ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ, OP ਬਿੰਦੂ O ਤੋਂ XY ਦੇ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ OP, XY 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ (ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਥਿਊਰਮ A 1.2 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ)।



ਚਿੱਤਰ 10.5

ਟਿੱਪਣੀ :

1. ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਇੱਕ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
2. ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਕਦੇ ਕਦੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਉਸ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ 'ਅਭਿਲੰਬ' (Normal) ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 10.1

1. ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ?
2. ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਨੂੰ ਭਰੋ:
   (i) ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਉਸਨੂੰ ———— ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ।
   (ii) ਚੱਕਰ ਨੂੰ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਕੱਟਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ———— ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
   (iii) ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ ———— ਸਮਾਂਤਰ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ।
   (iv) ਚੱਕਰ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ———— ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

3. 5 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਿੰਦੂ P 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ PQ ਕੇਂਦਰ O ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਬਿੰਦੂ Q 'ਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮਿਲਦੀ ਹੈ ਕਿ OQ = 12 cm। PQ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਹੈ:

   (A) 12 cm (B) 13 cm (C) 8.5 cm (D) $\sqrt{119}$ cm

4. ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ ਇੱਕ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਦੋ ਅਜਿਹੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਖਿੱਚੋ ਕਿ ਉਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਦੂਸਰੀ ਚੱਕਰ ਦੀ ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ ਹੋਵੇ।

10.3 ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਇੱਕ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ

ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਜਾਣਨ ਦੇ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਕਿਰਿਆ ਕਰੋ:

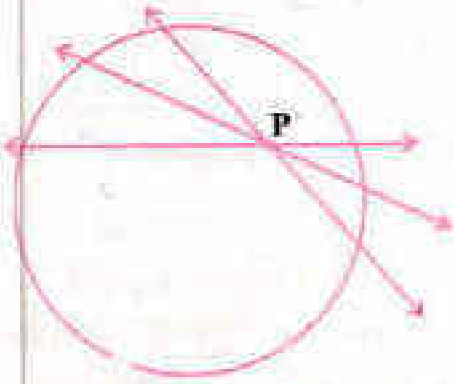
ਕਿਰਿਆ 3 : ਇੱਕ ਕਾਗਜ਼ 'ਤੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚੋ। ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P ਇਸ ਦੇ ਅੰਦਰ ਲਓ। ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚਣ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੋ। ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਦੇਖਦੇ ਹੋ? ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ਕਿ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਹਰੇਕ ਰੇਖਾ ਚੱਕਰ ਨੂੰ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਨ੍ਹਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.6 (i)]।

ਦੁਬਾਰਾ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P ਲਓ ਅਤੇ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਖਿੱਚੋ। ਤੁਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਮਹਿਸੂਸ ਕੀਤਾ ਹੈ ਕਿ ਚੱਕਰ ਦੇ ਇਸ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਇੱਕ ਹੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.6 (ii)]।

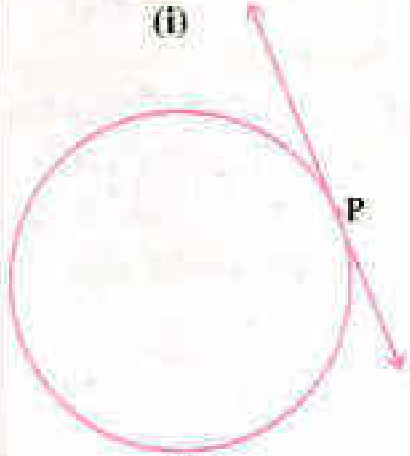
ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਾਹਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P ਲਓ ਅਤੇ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਖਿੱਚਣ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੋ। ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਮਹਿਸੂਸ ਕਰਦੇ ਹੋ? ਤੁਸੀਂ ਪਾਓਗੇ ਕਿ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਦੋ ਪਾਸਿਆਂ ਤੋਂ ਕੇਵਲ ਦੋ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਖਿੱਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.6 (iii)]।

ਸੰਖੇਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਤੱਥਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

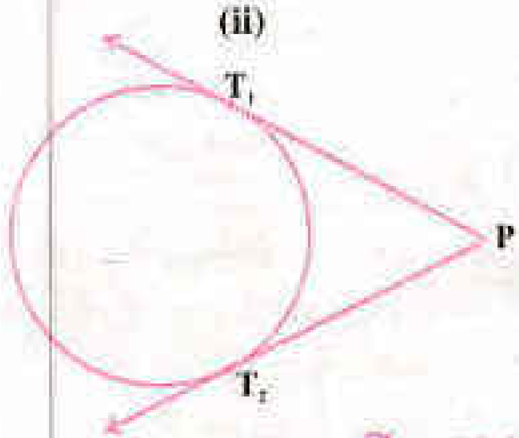
ਸਥਿਤੀ 1 : ਚੱਕਰ ਦੇ ਅੰਦਰ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਕੋਈ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਨਹੀਂ ਹੈ।



(i)



(ii)



(iii)

ਚਿੱਤਰ 10.6

ਸਥਿਤੀ 2 : ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਹੈ।

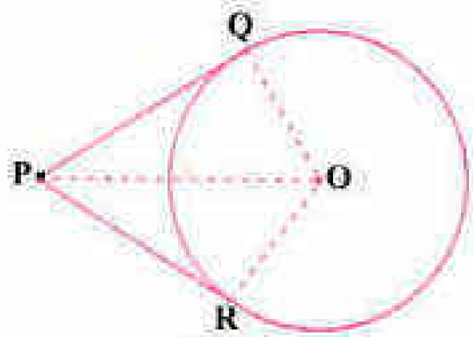
ਸਥਿਤੀ 3 : ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਾਹਰ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀਆਂ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਦੋ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਦੋ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ।

ਚਿੱਤਰ 10.6 (iii) ਵਿੱਚ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ PT_1 ਅਤੇ PT_2 ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ T_1 ਅਤੇ T_2 ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ ਹਨ। ਬਾਹਰੀ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਚੱਕਰ ਦੇ ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ ਤੱਕ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਚੱਕਰ 'ਤੇ **ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 10.6 (iii) ਵਿੱਚ PT_1 ਅਤੇ PT_2 ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਹਨ। ਲੰਬਾਈਆਂ PT_1 ਅਤੇ PT_2 ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ? PT_1 ਅਤੇ PT_2 ਨੂੰ ਮਾਪੋ। ਕੀ ਇਹ ਬਰਾਬਰ ਹਨ? ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਹਮੇਸ਼ਾ ਅਜਿਹਾ ਹੀ ਹੈ। ਆਓ ਇਸ ਤੱਥ ਦਾ ਸਬੂਤ ਹੇਠਾਂ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) ਵਿੱਚ ਦੇਈਏ।

ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) 10.2 : *ਬਾਹਰੀ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਖਿੱਚੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।*

ਸਬੂਤ : ਸਾਨੂੰ ਕੇਂਦਰ O ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ, ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਾਹਰ ਦਾ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P ਅਤੇ P ਤੋਂ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਦੋ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ PQ, PR ਦਿੱਤੀਆਂ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.7)। ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ PQ = PR



ਚਿੱਤਰ 10.7

ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ OP, OQ ਅਤੇ OR ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ $\angle OQP$ ਅਤੇ $\angle ORP$ ਸਮਕੋਣ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਅਰਧ-ਵਿਆਸ ਅਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਲੇ ਕੋਣ ਹਨ ਅਤੇ ਪ੍ਰਮੇਯ 10.1 ਤੋਂ ਇਹ ਸਮਕੋਣ ਹਨ। ਹੁਣ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ OQP ਅਤੇ ORP ਵਿੱਚ,

	OQ = OR	(ਇੱਕ ਹੀ ਚੱਕਰ ਦੇ ਅਰਧ-ਵਿਆਸ)
	OP = OP	(ਸਾਂਝਾ)
ਇਸ ਲਈ	$\Delta OQP \cong \Delta ORP$	(RHS ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਦੁਆਰਾ)
ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ	PQ = PR	(CPCT)

ਟਿੱਪਣੀ :

1. ਥਿਊਰਮ ਨੂੰ ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਵੀ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ:

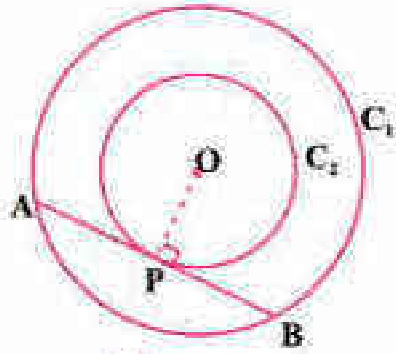
   $PQ^2 = OP^2 - OQ^2 = OP^2 - OR^2 = PR^2$ (ਕਿਉਂਕਿ OQ = OR)

   ਜਿਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ PQ = PR

2. ਇਹ ਵੀ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $\angle OPQ = \angle OPR$ । ਇਸ ਲਈ OP ਕੋਣ QPR ਦਾ ਦੁਭਾਜਕ ਹੈ, ਭਾਵ ਚੱਕਰ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਦੋ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਕੋਣ-ਦੁਭਾਜਕ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋ ਸਮਕੇਂਦਰੀ (concentric) ਚੱਕਰਾਂ ਵਿੱਚ ਵੱਡੇ ਚੱਕਰ ਦੀ ਜੀਵਾ ਜੋ ਛੋਟੇ ਚੱਕਰ ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਦੀ ਹੈ, ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10.8

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕੇਂਦਰ O ਵਾਲੇ ਦੋ ਸਮਕੇਂਦਰੀ ਚੱਕਰ C_1 ਅਤੇ C_2 ਅਤੇ ਵੱਡੇ ਚੱਕਰ C_1 ਦੀ ਜੀਵਾ AB, ਜੋ ਛੋਟੇ ਚੱਕਰ C_2 ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ P 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਦੀ ਹੈ, (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.8)।

ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ AP = BP

ਆਓ OP ਨੂੰ ਮਿਲਾਈਏ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ AB, C_2 ਦੇ ਬਿੰਦੂ P 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਹੈ ਅਤੇ OP ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੈ।

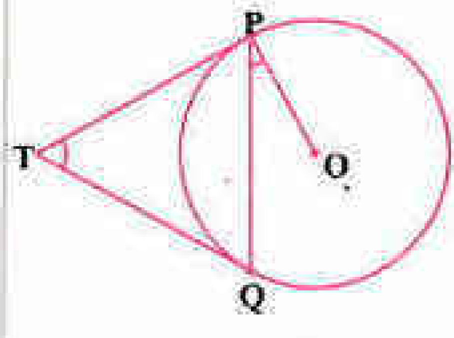
ਇਸ ਲਈ : ਪ੍ਰਮੇਯ 10.1 ਤੋਂ

$$OP \perp AB$$

ਹੁਣ AB ਚੱਕਰ C_1 ਦੀ ਇੱਕ ਜੀਵਾ ਹੈ ਅਤੇ $OP \perp AB$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰਾਂ, OP ਜੀਵਾ AB ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰੇਗੀ ਕਿਉਂਕਿ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਜੀਵਾ 'ਤੇ ਖਿੱਚਿਆ ਗਿਆ ਲੰਬ ਉਸਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ,

ਭਾਵ $\qquad AP = BP$

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਕੇਂਦਰ O ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਬਾਹਰੀ ਬਿੰਦੂ T ਤੋਂ ਦੋ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ TP ਅਤੇ TQ ਖਿੱਚੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\angle PTQ = 2\angle OPQ$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10.9

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਕੇਂਦਰ O ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ, ਇੱਕ ਬਾਹਰੀ ਬਿੰਦੂ T ਅਤੇ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਦੋ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ TP ਅਤੇ TQ, ਜਿਥੇ P, Q ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਦਿੱਤੇ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.9)। ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ:

$$\angle PTQ = 2\angle OPQ$$

ਮੰਨ ਲਉ $\qquad \angle PTQ = \theta$

ਹੁਣ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) 10.2 ਤੋਂ TP = TQ । ਇਸ ਲਈ TPQ ਇੱਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।

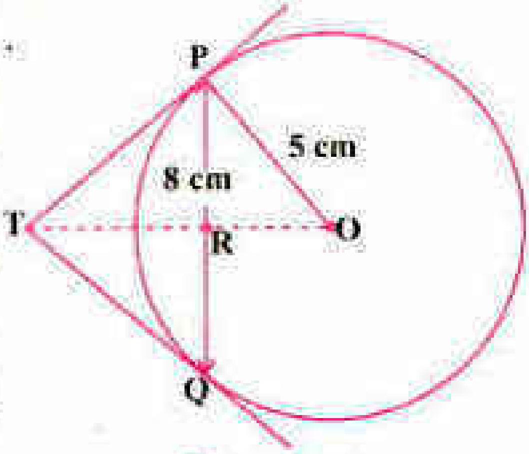
ਇਸ ਲਈ $\qquad \angle TPQ = \angle TQP = \frac{1}{2}(180° - \theta) = 90° - \frac{1}{2}\theta$

ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) 10.1 ਤੋਂ $\angle OPT = 90°$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\angle OPQ = \angle OPT - \angle TPQ = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\theta\right) = \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\angle PTQ$

ਇਸ ਤੋਂ $\angle PTQ = 2\angle OPQ$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : 5 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੀ 8 cm ਲੰਬੀ ਇੱਕ ਜੀਵਾ PQ ਹੈ। P ਅਤੇ Q 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ T 'ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ। (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.10) TP ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 10.10

ਹੱਲ : OT ਨੂੰ ਮਿਲਾਓ। ਮੰਨ ਲਓ ਇਹ PQ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ R 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ Δ TPQ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਹੈ ਅਤੇ TO, $\angle PTQ$ ਦਾ ਕੋਣ ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $OT \perp PQ$ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰਾਂ OT, PQ ਦਾ ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਹੈ ਜਿਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ PR = RQ = 4 cm

ਨਾਲ ਹੀ $OR = \sqrt{OP^2 - PR^2} = \sqrt{5^2 - 4^2}$ cm = 3 cm

ਹੁਣ $\angle TPR + \angle RPO = 90^\circ = \angle TPR + \angle PTR$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ $\angle RPO = \angle PTR$

ਇਸ ਲਈ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ TRP ਅਤੇ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ PRO, AA ਸਮਰੂਪਤਾ ਦੁਆਰਾ ਸਮਰੂਪ ਹਨ। ਇਸ ਨਾਲ $\frac{TP}{PO} = \frac{RP}{RO}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ $\frac{TP}{5} = \frac{4}{3}$ ਭਾਵ $TP = \frac{20}{3}$ cm

ਟਿੱਪਣੀ : TP ਨੂੰ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) ਦੁਆਰਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ:

ਮੰਨ ਲਓ TP = x ਅਤੇ TR = y ਤਾਂ

$$x^2 = y^2 + 16 \quad \text{(ਸਮਕੋਣ } \Delta \text{ PRT ਲੈ ਕੇ)} \qquad (1)$$

$$x^2 + 5^2 = (y+3)^2 \quad \text{(ਸਮਕੋਣ } \Delta \text{ OPT ਲੈ ਕੇ)} \qquad (2)$$

(1) ਨੂੰ (2) ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਉਣ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$25 = 6y - 7 \quad \text{ਜਾਂ} \quad y = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$$

ਇਸ ਲਈ $$x^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 16 = \frac{16}{9}(16+9) = \frac{16 \times 25}{9} \quad [(1) \text{ ਤੋਂ}]$$

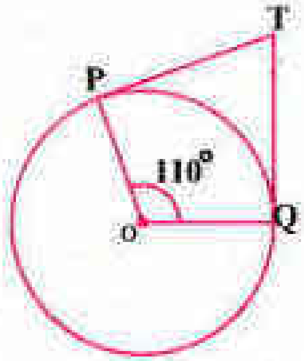
ਜਾਂ $$x = \frac{20}{3} \text{ cm}$$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 10.2

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਨੰ: 1, 2, 3 ਵਿੱਚੋਂ ਸਹੀ ਵਿਕਲਪ ਚੁਣੋ ਅਤੇ ਉੱਚਿਤ ਕਾਰਣ ਦਿਓ।

1. ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ Q ਤੋਂ ਇੱਕ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 24cm ਅਤੇ Q ਦੀ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਦੂਰੀ 25cm ਹੈ। ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੈ:

   (A) 7 cm (B) 12 cm
   (C) 15 cm (D) 24.5 cm



ਚਿੱਤਰ 10.11

2. ਚਿੱਤਰ 10.11 ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ TP, TQ ਕੇਂਦਰ O ਵਾਲੇ ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਦੋ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇਸ ਤਰਾਂ ਹਨ ਕਿ $\angle POQ = 110°$, ਤਾਂ $\angle PTQ$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ:

   (A) 60° (B) 70°
   (C) 80° (D) 90°

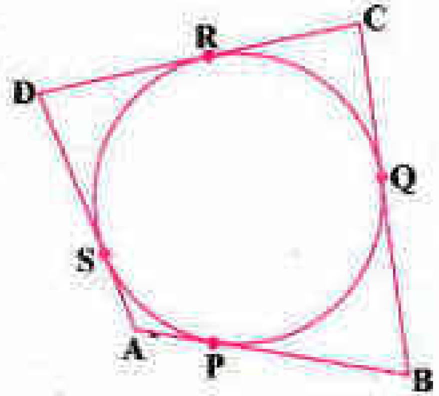
3. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ O ਕੇਂਦਰ ਵਾਲੇ ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ 'ਤੇ PA, PB ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ 80° ਦੇ ਕੋਣ 'ਤੇ ਝੁਕੀਆਂ ਹੋਣ ਤਾਂ $\angle POA$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ:

   (A) 50° (B) 60° (C) 70° (D) 80°

4. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵਿਆਸ ਦੇ ਸਿਰਿਆਂ 'ਤੇ ਖਿੱਚੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
5. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਖਿੱਚਿਆ ਗਿਆ ਲੰਬ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
6. ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ A ਤੋਂ, ਜੋ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ 5 cm ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ, ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 4 cm ਹੈ। ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. ਦੋ ਸਮ ਕੇਂਦਰੀ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 5 cm ਤੇ 3 cm ਹਨ। ਵੱਡੇ ਚੱਕਰ ਦੀ ਉਸ ਜੀਵਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਛੋਟੇ ਚੱਕਰ ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਦੀ ਹੋਵੇ।

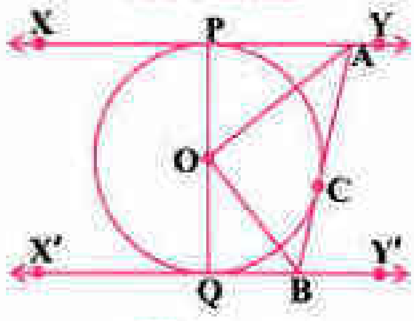
8. ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਨੂੰ ਬਾਹਰਲੇ ਪਾਸਿਆਂ ਤੋਂ ਛੂੰਹਦਾ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਖਿੱਚਿਆ ਗਿਆ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.12)। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ:

$$AB + CD = AD + BC$$



ਚਿੱਤਰ 10.12

9. ਚਿੱਤਰ 10.13 ਵਿੱਚ XY ਅਤੇ X′Y′, O ਕੇਂਦਰ ਵਾਲੇ ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ C 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ AB, XY ਨੂੰ A ਅਤੇ X′Y′ ਨੂੰ B 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ∠AOB = 90° ਹੈ।

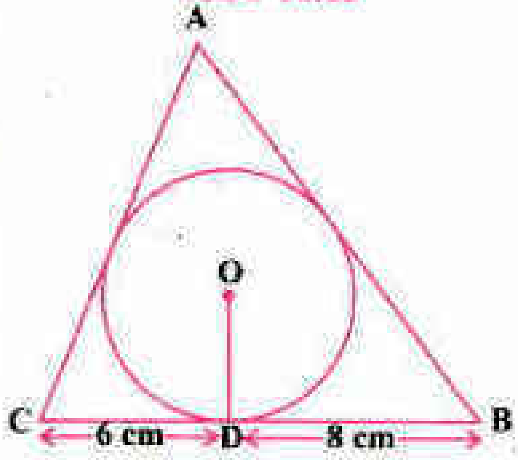


ਚਿੱਤਰ 10.13

10. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਬਾਹਰੀ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਖਿੱਚੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਵਿਚਕਾਰਲਾ ਕੋਣ ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਦੁਆਰਾ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਬਣੇ ਕੋਣ ਦਾ ਸੰਪੂਰਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

11. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਾਹਰਲੇ ਪਾਸੇ ਛੂੰਹਦਾ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ, ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

12. 4 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਾਹਰਲੇ ਪਾਸੇ ਛੂੰਹਦਾ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਇਸ ਤਰਾਂ ਖਿੱਚਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਰੇਖਾਖੰਡ BD ਅਤੇ DC (ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ D ਦੁਆਰਾ BC ਵਿਭਾਜਿਤ ਹੈ) ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 8 cm ਅਤੇ 6 cm ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.14)। ਭੁਜਾਵਾਂ AB ਅਤੇ AC ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 10.14

13. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਾਹਰਲੇ ਪਾਸੇ ਛੂੰਹਦੀ ਹੋਈ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਆਹਮਣੇ-ਸਾਹਮਣੇ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਸੰਪੂਰਕ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ।

10.4 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ:

1. ਚੱਕਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦਾ ਅਰਥ।
2. ਚੱਕਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
3. ਬਾਹਰੀ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਖਿੱਚੀਆਂ ਗਈਆਂ ਦੋਨੋਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਰਚਨਾਵਾਂ 11

11.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਨੌਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਫੁੱਟੇ ਅਤੇ ਪਰਕਾਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਕੁੱਝ ਰਚਨਾਵਾਂ ਬਣਾਈਆਂ ਸਨ, ਜਿਵੇਂ ਕਿਸੇ ਕੋਣ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਨਾ, ਕਿਸੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਦਾ ਲੰਬ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਖਿੱਚਣਾ, ਕੁੱਝ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀਆਂ ਰਚਨਾਵਾਂ ਕਰਨਾ ਆਦਿ ਅਤੇ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣ ਵੀ ਦਿੱਤਾ ਸੀ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਰਚਨਾਵਾਂ ਦੇ ਗਿਆਨ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਰਚਨਾਵਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਹ ਰਚਨਾਵਾਂ ਕਿਉਂ ਹੋ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ, ਇਸ ਨਾਲ ਸਬੰਧਿਤ ਕੁੱਝ ਗਣਿਤਿਕ ਵਿਆਖਿਆ (ਪ੍ਰਮਾਣ) ਵੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਦੇਣੇ ਹੋਣਗੇ।

11.2 ਰੇਖਾਖੰਡ ਦੀ ਵੰਡ (ਵਿਭਾਜਨ)

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਇੱਕ ਰੇਖਾਖੰਡ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਅਤੇ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅਨੁਪਾਤ, ਮੰਨਿਆ 3 : 2 ਵਿੱਚ ਵੰਡਣਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਮਾਪ ਕੇ ਅਤੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ, ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਚੁਣ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਪਰੰਤੂ ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ ਇਸ ਨੂੰ ਸਹੀ-ਸਹੀ ਮਾਪਣ ਦੀ ਕੋਈ ਵਿਧੀ ਨਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਕਿਵੇਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋਗੇ? ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਦੋ ਵਿਧੀਆਂ ਦੇ ਰਹੇ ਹਾਂ :

ਰਚਨਾ 11.1 : *ਇੱਕ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਣਾ।*

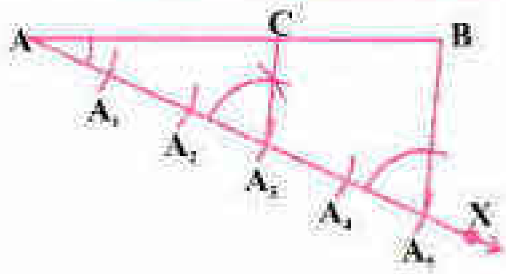
ਇੱਕ ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਦਿੱਤਾ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ $m : n$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ $m = 3$ ਅਤੇ $n = 2$ ਲਵਾਂਗੇ।

ਰਚਨਾ ਦੇ ਪਗ :

1. AB ਤੋਂ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਕੋਈ ਕਿਰਨ AX ਖਿੱਚੋ।
2. AX 'ਤੇ 5 $(= m + n)$ ਬਿੰਦੂ A_1, A_2, A_3, A_4 ਅਤੇ A_5 ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ ਕਿ $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$ ਹੋਵੇ।
3. BA_5 ਨੂੰ ਮਿਲਾਓ।

4. ਬਿੰਦੂ A_3 $(m = 3)$ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ A_5B ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ (A_3 'ਤੇ $\angle AA_5B$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਕੋਣ ਬਣਾ ਕੇ) AB ਨੂੰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ C 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੋਈ ਖਿੱਚੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 11.1)।

ਹੁਣ AC : CB = 3 : 2 ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 11.1

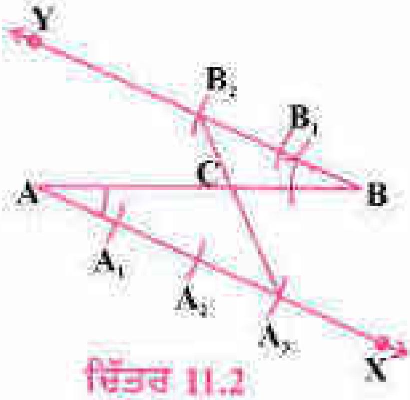
ਆਓ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਇਹ ਵਿਧੀ ਕਿਵੇਂ ਸਾਨੂੰ ਲੋੜੀਂਦਾ ਵਿਭਾਜਨ ਦਿੰਦੀ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ A_3C, A_5B ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ,

ਇਸ ਲਈ $\dfrac{AA_3}{A_3A_5} = \dfrac{AC}{CB}$ (ਮੂਲ ਭੂਤ ਸਮਾਨ–ਅਨੁਪਾਤਿਕਤਾ ਥਿਊਰਮ ਦੁਆਰਾ)

ਰਚਨਾ ਤੋਂ, $\dfrac{AA_3}{A_3A_5} = \dfrac{3}{2}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{3}{2}$ ਹੈ।

ਇਸ ਤੋਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਬਿੰਦੂ C, AB ਨੂੰ 3 : 2 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 11.2

ਵੈਕਲਪਿਕ ਜਾਂ ਦੂਜੀ ਵਿਧੀ

ਰਚਨਾ ਦੇ ਪਗ :

1. AB ਤੋਂ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੋਈ ਕੋਈ ਕਿਰਣ AX ਖਿੱਚੋ।
2. $\angle BAX$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ $\angle ABY$ ਬਣਾ ਕੇ AX ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਕਿਰਣ BY ਖਿੱਚੋ।
3. AX 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ A_1, A_2, A_3 $(m = 3)$ ਅਤੇ BY 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ B_1, B_2 $(n = 2)$ ਇਸ ਤਰਾਂ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ ਕਿ $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = BB_1 = B_1B_2$ ਹੋਵੇ।
4. A_3B_2 ਨੂੰ ਮਿਲਾਓ। ਮੰਨਿਆ ਇਹ AB ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ C 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 11.2)।

ਤਾਂ AC : CB = 3 : 2 ਹੈ।

ਆਓ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਇਸ ਵਿਧੀ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਲੋੜੀਂਦੀ ਰਚਨਾ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ?

ਇੱਥੇ $\Delta AA_3C \sim \Delta BB_2C$ (ਕਿਉਂ?)

ਤਾਂ $$\frac{AA_3}{BB_2} = \frac{AC}{BC}$$

ਪਰੰਤੂ ਰਚਨਾ ਦੁਆਰਾ $\dfrac{AA_3}{BB_2} = \dfrac{3}{2}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{3}{2}$

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰਚਨਾ ਨੂੰ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਇੱਕ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਨੁਪਾਤ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ।

ਰਚਨਾ 11.2 : *ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਕੇਲ ਗੁਣਾਂਕ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨਾ।*

ਇਸ ਰਚਨਾ ਦੀਆਂ ਦੋ ਸਥਿਤੀਆਂ ਹਨ। ਇੱਕ ਵਿੱਚ, ਜਿਸ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨੀ ਹੈ, ਉਹ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਦੂਸਰੀ ਵਿੱਚ ਉਹ ਵੱਡਾ ਹੋਵੇ। ਇੱਥੇ **ਸਕੇਲ ਗੁਣਾਂਕ** ਦਾ ਅਰਥ ਰਚਨਾ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਤੋਂ ਹੈ। (ਅਧਿਆਇ 6 ਵੀ ਦੇਖੋ) ਇਨ੍ਹਾਂ ਰਚਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੇ ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਓ।

ਇਹੀ ਵਿਧੀ ਆਮ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਵੀ ਲਾਗੂ ਹੋਵੇਗੀ।

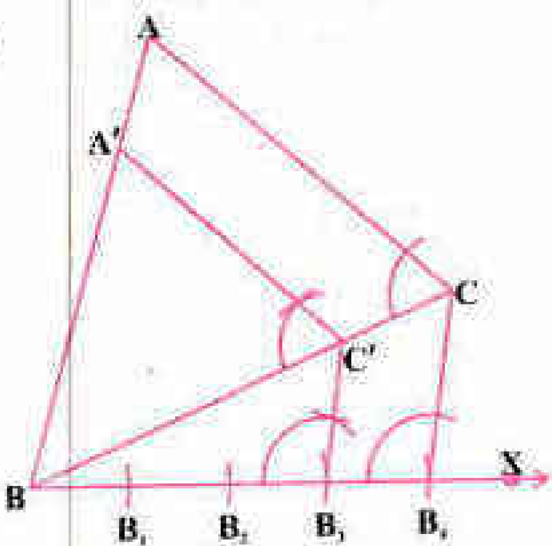
ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ $\frac{3}{4}$ ਹੋਵੇ (ਭਾਵ ਸਕੇਲ ਗੁਣਾਂਕ $\frac{3}{4}$ ਹੈ)।

ਹੱਲ : ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ $\frac{3}{4}$ ਹੋਵੇ।

ਰਚਨਾ ਦੇ ਪਗ :

1. BC ਤੋਂ ਸਿਖਰ A ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੋਈ ਇੱਕ ਕਿਰਨ BX ਖਿੱਚੋ।
2. BX 'ਤੇ 4 ਬਿੰਦੂ ($\frac{3}{4}$ ਵਿੱਚ 3 ਅਤੇ 4 ਵਿੱਚੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ) B_1, B_2, B_3 ਅਤੇ B_4, ਇਸ ਤਰਾਂ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ ਕਿ $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$ ਹੋਵੇ।
3. B_4C ਮਿਲਾਓ ਅਤੇ B_3 (ਤੀਸਰੇ ਬਿੰਦੂ, ਇੱਥੇ $\frac{3}{4}$ ਵਿੱਚ 3 ਅਤੇ 4 ਵਿੱਚੋਂ 3 ਛੋਟੀ ਹੈ) ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ B_4C ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ BC ਨੂੰ C' 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੋਵੇ ਖਿੱਚੋ।
4. C' ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ CA ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ BA ਨੂੰ A' 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੋਵੇ ਖਿੱਚੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 11.3)।

ਤਾਂ, Δ A'BC' ਲੋੜੀਂਦਾ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 11.3

ਆਓ ਵੇਖੀਏ ਕਿ ਇਸ ਰਚਨਾ ਤੋਂ ਕਿਵੇਂ ਲੋੜੀਂਦਾ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਰਚਨਾ 11.1 ਤੋਂ, $\frac{BC'}{C'C} = \frac{3}{1}$

ਇਸ ਲਈ, $\frac{BC}{BC'} = \frac{BC' + C'C}{BC'} = 1 + \frac{C'C}{BC'} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, ਭਾਵ $\frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4}$ ਹੈ।

ਨਾਲ ਹੀ, $C'A'$, CA ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\Delta A'BC' \sim \Delta ABC$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ $\frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4}$

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ $\frac{5}{3}$ ਹੋਵੇ (ਭਾਵ ਸਕੇਲ ਗੁਣਾਂਕ $\frac{5}{3}$ ਹੈ)।

ਹੱਲ : ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ΔABC ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ $\frac{5}{3}$ ਹੋਵੇ।

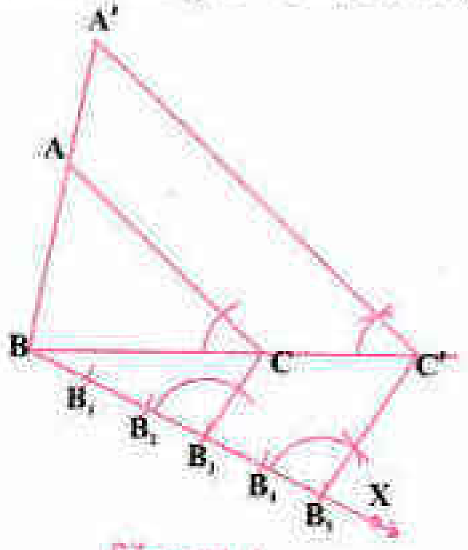
ਰਚਨਾ ਦੇ ਪਗ :

1. BC ਤੋਂ ਸਿਖ਼ਰ A ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੋਈ ਇੱਕ ਕਿਰਨ BX ਖਿੱਚੋ।
2. 5 ($\frac{5}{3}$ ਵਿੱਚ 5 ਅਤੇ 3 ਵਿੱਚੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ) ਬਿੰਦੂ B_1, B_2, B_3, B_4 ਅਤੇ B_5, BX 'ਤੇ ਇਸ ਤਰਾਂ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ ਕਿ $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5$ ਹੋਵੇ।
3. B_3 (ਤੀਸਰਾ ਬਿੰਦੂ, $\frac{5}{3}$ ਵਿੱਚੋਂ 5 ਅਤੇ 3 ਵਿੱਚੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ) ਨੂੰ C ਨਾਲ ਮਿਲਾਓ ਅਤੇ B_5 ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ B_3C ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ, ਵਧਾਏ ਗਏ ਰੇਖਾਖੰਡ BC ਨੂੰ C' 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੋਈ ਖਿੱਚੋ।
4. C' ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ CA ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ, ਵਧਾਉਣ 'ਤੇ ਰੇਖਾਖੰਡ BA ਨੂੰ A' 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੋਈ ਖਿੱਚੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 11.4)।

ਤਾਂ, A'BC' ਲੋੜੀਂਦਾ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।

ਰਚਨਾ ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਧਿਆਨ ਦਿਓ $\Delta ABC \sim \Delta A'BC'$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ $\frac{AB}{A'B} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{BC'}$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 11.4

ਪਰੰਤੂ $\frac{BC}{BC'} = \frac{BB_3}{BB_5} = \frac{3}{5}$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\frac{BC'}{BC} = \frac{5}{3}$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $\frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{5}{3}$ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਉਦਾਹਰਣ 1 ਅਤੇ 2 ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ AB ਜਾਂ AC 'ਤੇ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੋਈ ਕਿਰਣ ਵੀ ਲੈ ਸਕਦੇ ਸੀ ਅਤੇ ਉਸੇ ਤਰਾਂ ਅੱਗੇ ਵੱਧ ਸਕਦੇ ਸੀ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 11.1

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਲਈ ਰਚਨਾ ਦਾ ਸਪਸ਼ਟੀਕਰਣ ਵੀ ਦਿਓ :

1. 7.6 cm ਲੰਬਾ ਇੱਕ ਰੇਖਾਖੰਡ ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ 5 : 8 ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡੋ। ਦੋਨਾਂ ਭਾਗਾਂ ਨੂੰ ਮਾਪੋ।
2. 4 cm, 5 cm ਅਤੇ 6 cm ਭੁਜਾਵਾਂ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਇੱਕ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ $\frac{2}{3}$ ਗੁਣਾ ਹੋਣ।
3. 5 cm, 6 cm ਅਤੇ 7 cm ਭੁਜਾਵਾਂ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇੱਕ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ $\frac{7}{5}$ ਗੁਣਾ ਹੋਣ।
4. ਆਧਾਰ 8 cm ਅਤੇ ਉੱਚਾਈ 4 cm ਦੇ ਇੱਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇੱਕ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ, ਜਿਸਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇਸ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ $1\frac{1}{2}$ ਗੁਣਾ ਹੋਣ।
5. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਬਣਾਓ ਜਿਸ ਵਿੱਚ BC = 6 cm, AB = 5 cm ਅਤੇ $\angle ABC = 60^\circ$ ਹੋਵੇ। ਫਿਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ΔABC ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ $\frac{3}{4}$ ਗੁਣਾ ਹੋਣ।
6. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਬਣਾਓ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ BC = 7 cm, $\angle B = 45^\circ$, $\angle A = 105^\circ$ ਹੋਵੇ। ਫਿਰ ਇੱਕ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ΔABC ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ $\frac{4}{3}$ ਗੁਣਾ ਹੋਣ।
7. ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ (ਕਰਣ ਦੇ ਇਲਾਵਾ) 4 cm ਅਤੇ 3 cm ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੀਆਂ ਹੋਣ। ਫਿਰ ਇੱਕ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ $\frac{5}{3}$ ਗੁਣਾ ਹੋਣ।

11.3 ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ :

ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੇ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਚੱਕਰ ਦੇ ਅੰਦਰ ਸਥਿਤ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਚੱਕਰ ਦੀ ਕੋਈ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਚੱਕਰ ਦੀ ਇੱਕ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜੋ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਕੇਵਲ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਨੂੰ ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ ਉਸੇ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਇਸ ਦੀ ਲੰਬ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੋ। ਤਦ ਇਹੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਹੋਵੇਗੀ।

ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਵੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਾਹਰ ਸਥਿਤ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਦੋ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵੇਖਾਂਗੇ ਕਿ ਕਿਵੇਂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਖਿੱਚਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

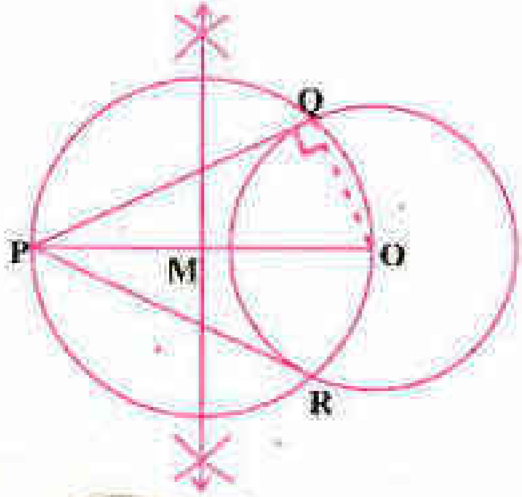
ਰਚਨਾ 11.3 : *ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਾਹਰ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਉਸ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨਾ।*

ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਜਿਸਦਾ ਕੇਂਦਰ O ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਬਾਹਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ P ਤੋਂ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਦੋ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਖਿੱਚਣੀਆਂ ਹਨ।

ਰਚਨਾ ਦੇ ਪਗ :

1. PO ਨੂੰ ਮਿਲਾਓ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰੋ। ਮੰਨ ਲਓ PO ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ M ਹੈ।
2. M ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਮੰਨ ਕੇ ਅਤੇ MO ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਲੈ ਕੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚੋ। ਮੰਨ ਲਓ ਇਹ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਚੱਕਰ ਨੂੰ Q ਅਤੇ R 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।
3. P ਨੂੰ Q ਅਤੇ R ਨਾਲ ਮਿਲਾਓ।

ਤਾਂ, PQ ਅਤੇ PR ਲੋੜੀਂਦੀਆਂ ਦੋ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 11.1)।



ਚਿੱਤਰ 11.5

ਆਓ ਹੁਣ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਇਸ ਰਚਨਾ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ। OQ ਨੂੰ ਮਿਲਾਓ।

ਤਾਂ, $\angle PQO$ ਅਰਧ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚ ਬਣਿਆ ਇੱਕ ਕੋਣ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ

$$\angle PQO = 90^\circ \text{ ਹੈ।}$$

ਕੀ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $PQ \perp OQ$ ਹੈ?

ਕਿਉਂਕਿ, OQ ਦਿੱਤੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ PQ ਚੱਕਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਹੀ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸੇ ਤਰਾਂ, PR ਵੀ ਚੱਕਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਜੇਕਰ ਚੱਕਰ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਨਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਕੋਈ ਦੋ ਅਸਮਾਂਤਰ ਜੀਵਾਵਾਂ ਲੈ ਕੇ ਅਤੇ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਲੰਬ ਸਮਦੁਭਾਜਕਾਂ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੇਂਦਰ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਇਸ ਦੇ ਬਾਦ, ਤੁਸੀਂ ਉਪਰੋਕਤ ਅਨੁਸਾਰ ਅੱਗੇ ਵੱਧ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 11.2

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹਰੇਕ ਰਚਨਾ ਦੇ ਲਈ ਸਪਸ਼ਟੀਕਰਨ ਵੀ ਦਿਓ :

1. 6 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚੋ। ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ 10 cm ਦੂਰ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਮਾਪੋ।
2. 4 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ 'ਤੇ 6 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਇੱਕ ਸਮ ਕੇਂਦਰੀ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਇੱਕ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉਸ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਮਾਪੋ। ਗਣਨਾ ਕਰਕੇ ਇਸ ਮਾਪ ਦੀ ਜਾਂਚ ਵੀ ਕਰੋ।
3. 3 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚੋ। ਇਸ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵਧਾਏ ਗਏ ਵਿਆਸ 'ਤੇ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ 7 cm ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਦੋ ਬਿੰਦੂ P ਅਤੇ Q ਲਓ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੋਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਖਿੱਚੋ।
4. 5 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਅਜਿਹੀਆਂ ਦੋ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਖਿੱਚੋ, ਜੋ ਆਪਸ ਵਿੱਚ $60°$ ਦੇ ਕੋਣ 'ਤੇ ਝੁਕੀਆਂ ਹੋਣ।
5. 8 cm ਲੰਬਾ ਇੱਕ ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਖਿੱਚੋ। A ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਮੰਨ ਕੇ 4 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਅਤੇ B ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਲੈ ਕੇ 3 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦਾ ਇੱਕ ਹੋਰ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚੋ। ਹਰੇਕ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਦੂਸਰੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ।
6. ਮੰਨ ਲਓ ABC ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ, ਜਿਸ ਤੋਂ $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm ਅਤੇ $\angle B = 90°$ ਹੈ। B ਤੋਂ AC 'ਤੇ BD ਲੰਬ ਹੈ। ਬਿੰਦੂਆਂ B, C, D ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। A ਤੋਂ ਇਸ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ।
7. ਕਿਸੇ ਵੰਗ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚੋ। ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਾਹਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਲਓ। ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ।

11.4 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਵੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਰਚਨਾਵਾਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ :

1. ਇੱਕ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਣਾ।
2. ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨਾ ਜਦੋਂ ਕਿ ਸਕੇਲ ਗੁਣਾਂਕ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ। (ਸਕੇਲ ਗੁਣਾਂਕ ਇੱਕ ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ)।
3. ਕਿਸੇ ਬਾਹਰੀ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਕਿਸੇ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਜੋੜੇ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨਾ।

ਪਾਠਕਾਂ ਲਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼

ਰਚਨਾ 11.2 ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 1 ਅਤੇ 2 ਦੇ ਪਗਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਚਤੁਰਭੁਜ (ਜਾਂ ਬਹੁਭੁਜ) ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਹੋਰ ਚਤੁਰਭੁਜ (ਜਾਂ ਬਹੁਭੁਜ) ਦੀ, ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਕੇਲ ਗੁਣਾਂਕ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ, ਰਚਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਚੱਕਰ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਖੇਤਰਫਲ 12

12.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਤੁਸੀਂ, ਆਪਣੀਆਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਸਰਲ ਸਮਤਲ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਜਿਵੇਂ ਆਇਤ, ਵਰਗ, ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ, ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਅਤੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਪਰਿਮਾਪਾਂ ਅਤੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਕੁੱਝ ਵਿਧੀਆਂ ਨਾਲ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਜਾਣੂੰ ਹੋ। ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਜੋ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇਖਣ ਨੂੰ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ, ਉਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਅਨੇਕ ਇੱਕ ਨਾ ਇੱਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਆਕਾਰ ਨਾਲ ਸਬੰਧਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਸਾਇਕਲ ਦੇ ਪਹੀਏ, ਠੇਲਾ, ਡਾਰਟਬੋਰਡ (dartboard) (ਅਜਿਹਾ ਬੋਰਡ ਜਿਸ 'ਤੇ ਤੀਰ ਸੁੱਟ ਕੇ ਖੇਡ ਸਕਦੇ ਹਾਂ), ਗੋਲ ਕੇਕ (cake), ਪਾਪੜ, ਨਾਲੀ ਦੇ ਢੱਕਣ, ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਬਨਾਵਟ ਦੀਆਂ ਵੰਗਾਂ, ਬਰੂਚ (brooches), ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਰਸਤਾ, ਵਾਸ਼ਰ, ਫੁੱਲਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿਆਰੀਆਂ ਆਦਿ ਅਜਿਹੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਣ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 12.1)। ਇਸ ਲਈ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਮਾਪਾਂ ਅਤੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵਿਵਹਾਰਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹਨ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਆਪਣੀ ਚਰਚਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਪਰਿਮਾਪ (ਘੇਰਾ) ਅਤੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੀਆਂ ਸੰਕਲਪਨਾਵਾਂ ਦੀ ਸਮੀਖਿਆ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਸ ਗਿਆਨ ਦਾ ਚੱਕਰੀ ਖੇਤਰ (ਸੰਖੇਪ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਚੱਕਰ) ਦੇ ਦੋ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ 'ਭਾਗਾਂ' ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕਰਾਂਗੇ। ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ *ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ (sector)* ਅਤੇ *ਚੱਕਰ ਖੰਡ (segment of a circle)* ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖਾਂਗੇ ਕਿ ਚੱਕਰਾਂ ਜਾਂ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਭਾਗਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸਮਤਲ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਦੇ ਕੁੱਝ ਸੰਯੋਜਨਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾਣ।

ਚਿੱਤਰ 12.1

12.2 ਚੱਕਰ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ ਅਤੇ ਖੇਤਰਫਲ - ਇੱਕ ਸਮੀਖਿਆ

ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਇੱਕ ਚਿੱਤਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਚੱਲਣ ਵਿੱਚ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਦੂਰੀ ਉਸਦਾ ਪਰਿਮਾਪ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ *ਘੇਰਾ (circumference)* ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਤੋਂ ਇਹ ਵੀ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਚੱਕਰ ਦੇ ਘੇਰੇ ਦਾ ਉਸਦੇ ਵਿਆਸ ਦੇ ਨਾਲ ਇੱਕ ਅਚਲ ਅਨੁਪਾਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਅਚਲ ਅਨੁਪਾਤ ਨੂੰ ਇੱਕ ਯੂਨਾਨੀ ਅੱਖਰ π (ਜਿਸ ਨੂੰ 'ਪਾਈ' ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ) ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ,

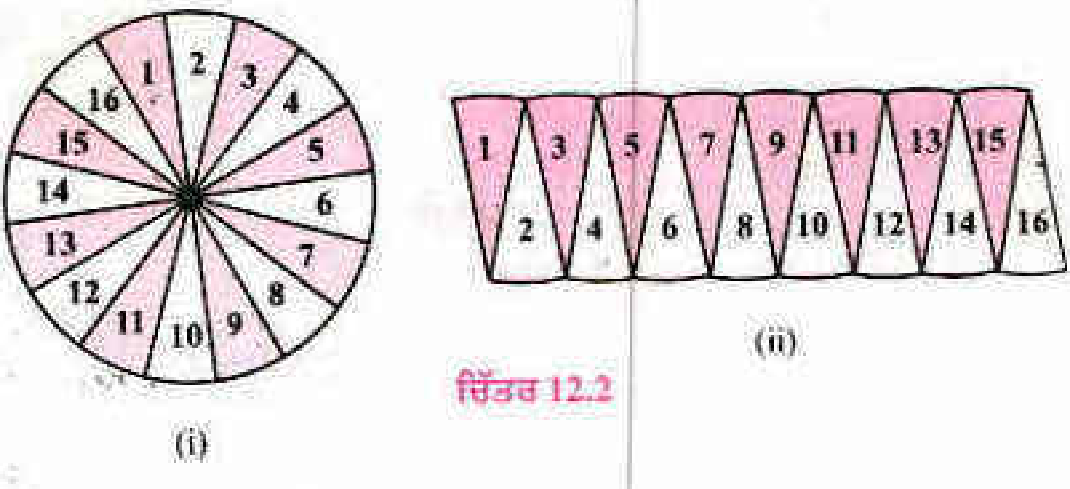
$$\frac{\text{ਘੇਰਾ}}{\text{ਵਿਆਸ}} = \pi$$

ਜਾਂ

$$\text{ਘੇਰਾ} = \pi \times \text{ਵਿਆਸ}$$
$$= \pi \times 2r \qquad (\text{ਜਿੱਥੇ } r \text{ ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੈ})$$
$$= 2\pi r$$

ਇੱਕ ਮਹਾਨ ਭਾਰਤੀ ਗਣਿਤਕ ਆਰਿਆਭੱਟ (476 – 550 ਈ.ਪੂ.) ਨੇ π ਦਾ ਇੱਕ ਨਜ਼ਦੀਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ਦਿੱਤਾ। ਉਨ੍ਹਾਂ ਨੇ ਕਿਹਾ ਕਿ $\pi = \frac{62832}{20000}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਲਗਭਗ 3.1416 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇਸ ਗੱਲ ਵੱਲ ਧਿਆਨ ਦੇਣਾ ਵੀ ਰੋਚਕ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਮਹਾਨ ਪ੍ਰਤਿਭਾਸ਼ਾਲੀ ਭਾਰਤੀ ਗਣਿਤਕ ਸ੍ਰੀਨਿਵਾਸ ਰਾਮਾਨੁਜਨ (1887–1920) ਦੀ ਇੱਕ ਸਰਵਸਮਤਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਗਣਿਤਕ π ਦਾ ਮੁੱਲ ਦਸ਼ਮਲਵ ਦੇ ਲੱਖਾਂ ਸਥਾਨਾਂ ਤੱਕ ਪਰਿਕਲਨ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਮਰੱਥ ਹੋ ਚੁੱਕੇ ਹਨ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਜਮਾਤ IX ਦੇ ਅਧਿਆਇ 1 ਤੋਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ π ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ (irrational) ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਥਾਰ ਅਸ਼ਾਂਤ ਅਤੇ ਨਾ-ਦੁਹਰਾਉਂਦੇ (non-terminating and non-repeating) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਵਿਵਹਾਰਿਕ ਕੰਮਾਂ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੁੱਲ ਲਗਭੱਗ $\frac{22}{7}$ ਜਾਂ 3.14 ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਚੱਕਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ πr^2 ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਜਮਾਤ VII ਵਿੱਚ ਇਸਦੀ ਜਾਂਚ, ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਨੂੰ ਅਨੇਕ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡਾਂ ਵਿੱਚ ਕੱਟ ਕੇ ਅਤੇ ਫਿਰ ਉਸ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 12.2 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਫਿਰ ਤੋਂ ਜੋੜ ਕੇ ਕੀਤੀ ਸੀ।



(i) (ii)

ਚਿੱਤਰ 12.2

ਤੁਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 12.2 (ii) ਵਿੱਚ ਆਕਾਰ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ, ਇੱਕ ਆਇਤ ਦੀ ਲਗਭਗ ਲੰਬਾਈ $\frac{1}{2} \times 2\pi r$ ਹੈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ r ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸੁਝਾਅ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਚੱਕਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$ ਹੈ। ਆਓ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹੀਆਂ ਗਈਆਂ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਯਾਦ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਇੱਕ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਖੇਤ 'ਤੇ ₹ 24 ਪ੍ਰਤਿ ਮੀਟਰ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵਾੜ ਲਗਾਉਣ ਦਾ ਖਰਚ ₹ 5280 ਹੈ। ਇਸ ਖੇਤ ਦੀ ₹ 0.50 ਪ੍ਰਤਿ ਵਰਗ ਮੀਟਰ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵਹਾਈ ਕਰਵਾਈ ਜਾਣੀ ਹੈ। ਖੇਤ ਦੀ ਵਹਾਈ ਕਰਾਉਣ ਦਾ ਖਰਚ ਪਤਾ ਕਰੋ ($\pi = \frac{22}{7}$ ਲਓ)।

ਹੱਲ : ਵਾੜ ਦੀ ਲੰਬਾਈ (ਮੀਟਰਾਂ ਵਿੱਚ) $= \frac{\text{ਪੂਰਾ ਖਰਚ}}{\text{ਦਰ}} = \frac{5280}{24} = 220$

ਇਸ ਲਈ, ਖੇਤ ਦਾ ਘੇਰਾ $= 220$ m

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ ਖੇਤ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਮੀਟਰ ਹੈ, ਤਾਂ

$$2\pi r = 220$$

ਜਾਂ
$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 220$$

ਜਾਂ
$$r = \frac{220 \times 7}{2 \times 22} = 35$$

ਭਾਵ ਖੇਤ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 35 ਮੀਟਰ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਖੇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 35 \times 35 \text{ m}^2 = 22 \times 5 \times 35 \text{ m}^2$

ਹੁਣ 1 m^2 ਖੇਤ ਦੀ ਵਹਾਈ ਦਾ ਖਰਚ $=$ ₹ 0.50

ਇਸ ਲਈ ਖੇਤ ਦੀ ਵਹਾਈ ਕਰਨ ਦਾ ਕੁੱਲ ਖਰਚ $= 22 \times 5 \times 35 \times$ ₹ 0.50 $=$ ₹ 1925

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 12.1

(ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਹੋਰ ਕੁੱਝ ਨਾ ਕਿਹਾ ਜਾਵੇ, $\pi = \frac{22}{7}$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ)

1. ਦੋ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 19 cm ਅਤੇ 9 cm ਹਨ। ਉਸ ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ ਘੇਰਾ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੋਨਾਂ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਘੇਰਿਆਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।
2. ਦੋ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 8 cm ਅਤੇ 6 cm ਹਨ। ਉਸ ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੋਨਾਂ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 12.3

3. ਚਿੱਤਰ 12.3 ਇੱਕ ਤੀਰ ਅੰਦਾਜ਼ੀ ਨਿਸ਼ਾਨੇ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਵੱਲ ਪੰਜ ਖੇਤਰ PINK, RED, GREY, BLACK ਅਤੇ WHITE ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ 'ਤੇ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ। PINK ਅੰਕ ਵਾਲੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਵਿਆਸ 21 cm ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਹੋਰ ਪੱਟੀ 10.5 cm

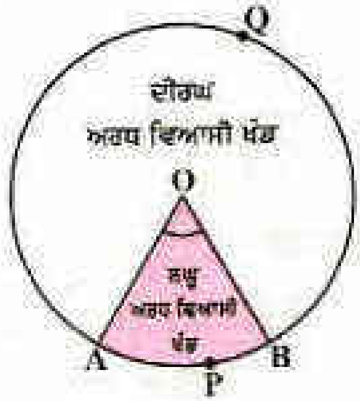
ਚੋੜੀ ਹੈ। ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਾਉਣ ਵਾਲੇ ਇਨ੍ਹਾਂ ਪੰਜਾਂ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਕਿਸੇ ਕਾਰ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਹੀਏ ਦਾ ਵਿਆਸ 80 cm ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਕਾਰ 66 km/h ਦੀ ਚਾਲ ਨਾਲ ਚੱਲ ਰਹੀ ਹੈ, ਤਾਂ 10 ਮਿੰਟ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪਹੀਆ ਕਿੰਨੇ ਚੱਕਰ ਲਗਾਉਂਦਾ ਹੈ?

5. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦਾ ਸਪਸ਼ਟੀਕਰਨ ਦਿਓ :
ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ ਅਤੇ ਖੇਤਰਫਲ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸ ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੈ :
(A) 2 ਇਕਾਈਆਂ (B) π ਇਕਾਈਆਂ (C) 4 ਇਕਾਈਆਂ (D) 7 ਇਕਾਈਆਂ

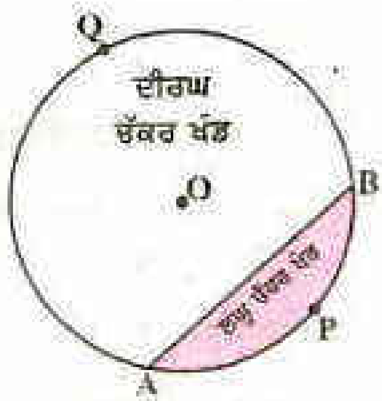
12.3 ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਅਤੇ ਚੱਕਰ ਖੰਡ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ

ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ *(sector)* ਅਤੇ ਚੱਕਰ ਖੰਡ *(segment of a circle)* ਤੋਂ ਜਾਣੂੰ ਹੋ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਇੱਕ ਚੱਕਰੀ ਖੇਤਰ ਦਾ ਉਹ ਭਾਗ ਜੋ ਦੋ ਅਰਧ ਵਿਆਸਾਂ ਅਤੇ ਸੰਗਤ ਚਾਪ ਨਾਲ ਘਿਰਿਆ ਹੋਵੇ, ਉਸ ਚੱਕਰ ਦਾ ਇੱਕ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਚੱਕਰੀ ਖੇਤਰ ਦਾ ਉਹ ਭਾਗ ਜੋ ਇੱਕ ਜੀਵਾ ਅਤੇ ਸੰਗਤ ਚਾਪ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਘਿਰਿਆ ਹੋਵੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰਖੰਡ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਚਿੱਤਰ 12.4 ਵਿੱਚ, ਰੰਗੀਨ ਭਾਗ OAPB ਕੇਂਦਰ O ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਇੱਕ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਹੈ। $\angle AOB$ ਇਸ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਕੋਣ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਇਸ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਬਗੈਰ ਰੰਗੀਨ ਭਾਗ OAQB ਵੀ ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਹੈ। ਸਪਸ਼ਟ ਕਾਰਨਾਂ ਤੋਂ OAPB ਇੱਕ ਲਘੂ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ *(minor sector)* ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ OAQB ਇੱਕ ਦੀਰਘ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ (major sector) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਸ ਦੀਰਘ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਕੋਣ $360^\circ - \angle AOB$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 12.4

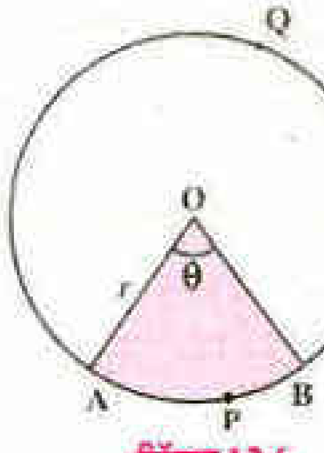
ਹੁਣ ਚਿੱਤਰ 12.5 ਨੂੰ ਦੇਖੋ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ AB ਕੇਂਦਰ ਚਿੱਤਰ O ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦੀ ਇੱਕ ਜੀਵਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਰੰਗੀਨ ਭਾਗ APB ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਖੰਡ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਬਗੈਰ ਰੰਗੀਨ ਭਾਗ AQB ਵੀ ਜੀਵਾ AB ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਇਆ ਇੱਕ ਹੋਰ ਚੱਕਰ ਖੰਡ ਹੈ। ਸਪਸ਼ਟ ਕਾਰਨਾਂ ਤੋਂ, APB ਲਘੂ ਚੱਕਰ ਖੰਡ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ AQB ਦੀਰਘ ਚੱਕਰ ਖੰਡ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 12.5

ਟਿੱਪਣੀ : ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਨਾ ਕਿਹਾ ਜਾਵੇ, ਚੱਕਰ ਖੰਡ ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਲਿਖਣ ਨਾਲ ਸਾਡਾ ਭਾਵ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਲਘੂ ਚੱਕਰ ਖੰਡ ਅਤੇ ਲਘੂ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਨਾਲ ਹੋਵੇਗਾ।

ਆਓ ਉਪਰੋਕਤ ਗਿਆਨ ਦੇ ਆਧਾਰ 'ਤੇ, ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦੇ ਪਰਿਕਲਨ ਕਰਨ ਦੇ ਕੁੱਝ ਸਬੰਧ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੀਏ।



ਚਿੱਤਰ 12.6

ਮੰਨ ਲਓ OAPB ਕੇਂਦਰ O ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਇੱਕ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਹੈ(ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 12.6)। ਮੰਨ ਲਓ $\angle AOB$ ਦਾ ਦਰਜਾ (ਅੰਸ਼) (degree) ਮਾਪ θ ਹੈ।

ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇੱਕ ਚੱਕਰ [ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਚੱਕਰੀ ਖੇਤਰਫਲ ਜਾਂ ਡਿਸਕ (disc)] ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ πr^2 ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇੱਕ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਚੱਕਰੀ ਖੇਤਰ ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ O 'ਤੇ 360° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲਾ (ਭਾਵ ਦਰਜਾ ਮਾਪ 360°) ਦਾ ਇੱਕ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਮੰਨ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਫਿਰ ਇਕਾਈ ਵਿਧੀ (Unitary Method) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਅਸੀਂ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ OAPB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

ਜਦੋਂ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਬਣੇ ਕੋਣ ਦਾ ਦਰਜਾ (degree) ਮਾਪ 360 ਹੈ, ਤਾਂ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \pi r^2$

ਇਸ ਲਈ, ਜਦੋਂ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਬਣੇ ਕੋਣ ਦਾ ਦਰਜਾ (degree) ਮਾਪ 1 ਹੈ ਤਾਂ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \dfrac{\pi r^2}{360}$

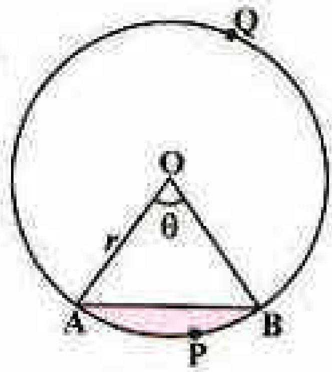
ਇਸ ਲਈ, ਜਦੋਂ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਬਣੇ ਕੋਣ ਦਾ ਦਰਜਾ (degree) ਮਾਪ θ ਹੈ, ਤਾਂ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \dfrac{\pi r^2}{360} \times \theta = \dfrac{\theta}{360} \times \pi r^2$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਸਾਨੂੰ ਚੱਕਰ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਲਈ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਸਬੰਧ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ : -

ਕੋਣ θ ਵਾਲੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \dfrac{\theta}{360} \times \pi r^2$,

ਜਿਥੇ r ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਅਤੇ θ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਦਰਜੇ (degree) ਵਿੱਚ ਕੋਣ ਹੈ।

ਹੁਣ ਇੱਕ ਸੁਭਾਵਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਉੱਠਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇਸ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦੀ ਸੰਗਤ ਚਾਪ APB ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਅਜਿਹਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਦੁਬਾਰਾ ਇਕਾਈ ਵਿਧੀ (unitary method) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਅਤੇ ਸੰਪੂਰਨ ਚੱਕਰ (360° ਕੋਣ ਵਾਲੇ) ਦੀ ਲੰਬਾਈ $2\pi r$ ਲੈਣ 'ਤੇ, ਅਸੀਂ ਚਾਪ APB ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਲੰਬਾਈ $\dfrac{\theta}{360} \times 2\pi r$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 12.7

ਇਸ ਲਈ, ਕੋਣ θ ਵਾਲੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦੇ ਸੰਗਤ ਚਾਪ ਦੀ ਲੰਬਾਈ $= \dfrac{\theta}{360} \times 2\pi r$

ਆਓ ਹੁਣ ਕੇਂਦਰ O ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਵਾਲੇ ਚੱਕਰਖੰਡ APB ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 12.7)। ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ

ਚੱਕਰਖੰਡ APB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ OAPB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ – Δ OAB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \Delta OAB \text{ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ}$$

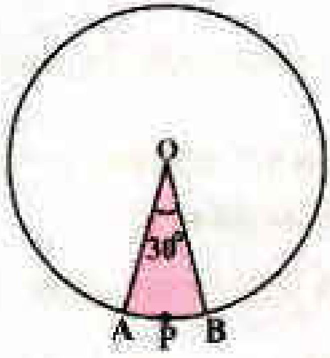
ਟਿੱਪਣੀ : ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਚਿੱਤਰ 12.6 ਅਤੇ ਚਿੱਤਰ 12.7 ਤੋਂ, ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ

ਦੀਰਘ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ OAQB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = πr^2 – ਲਘੂ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ OAPB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

ਅਤੇ ਦੀਰਘ ਚੱਕਰਖੰਡ AQB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = πr^2 – ਲਘੂ ਚੱਕਰਖੰਡ APB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

ਹੁਣ ਆਓ ਇਨ੍ਹਾਂ ਧਾਰਨਾਵਾਂ (ਜਾਂ ਪਰਿਣਾਮਾਂ) ਨੂੰ ਸਮਝਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ:

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਅਰਧ ਵਿਆਸ 4 ਸੈ.ਮੀ. ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ 30° ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ, ਸੰਗਤ ਦੀਰਘ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ। (π = 3.14 ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ)।



ਚਿੱਤਰ 12.8

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ OAPB ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 12.8)।

$$\text{ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$= \frac{30}{360} \times 3.14 \times 4 \times 4 \text{ cm}^2$$

$$= \frac{12.56}{3} \text{ cm}^2 = 4.19 \text{ cm}^2 \text{ (ਲਗਭਗ)}$$

ਸੰਗਤ ਦੀਰਘ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \pi r^2 - \text{ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ OAPB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ}$$

$$= (3.14 \times 16 - 4.19) \text{ cm}^2$$

$$= 46.05 \text{ cm}^2 = 46.1 \text{ cm}^2 \text{ (ਲਗਭਗ)}$$

ਬਦਲਵੇਂ ਰੂਪ ਵਿੱਚ,

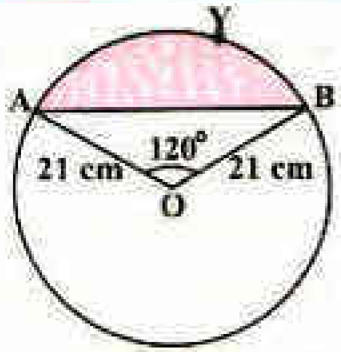
$$\text{ਦੀਰਘ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ} = \frac{(360 - \theta)}{360} \times \pi r^2$$

$$= \left(\frac{360 - 30}{360}\right) \times 3.14 \times 16 \text{ cm}^2$$

$$= \frac{330}{360} \times 3.14 \times 16 \text{cm}^2 = 46.05 \text{ cm}^2$$

$$= 46.1 \text{ cm}^2 \text{ (ਲਗਭਗ)}$$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਚਿੱਤਰ 12.9 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਚੱਕਰ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 21cm ਹੈ ਅਤੇ $\angle AOB = 120°$ ਹੈ $[\pi = \frac{22}{7}$ ਲਓ]।



ਚਿੱਤਰ 12.9

ਹੱਲ : ਚੱਕਰ ਖੰਡ AYB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

= ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ OAYB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ – Δ OAB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ (1)

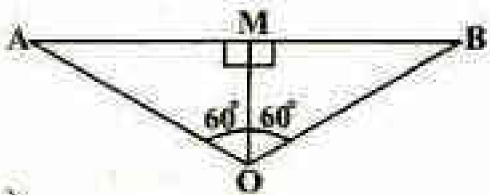
ਹੁਣ, ਅਰਧਵਿਆਸੀ ਖੰਡ OAYB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 462 \text{ cm}^2$ (2)

Δ OAB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ OM $\perp$ AB ਖਿੱਚੋ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 12.10 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ OA = OB ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, RHS ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਤੋਂ, $\Delta AMO \cong \Delta BMO$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, M ਜੀਵਾ AB ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ $\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \times 120° = 60°$ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ $\quad OM = x$ cm ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 12.10

ਇਸ ਲਈ Δ OMA ਤੋਂ, $\quad \frac{OM}{OA} = \cos 60°$

ਜਾਂ $\quad \frac{x}{21} = \frac{1}{2} \quad \left(\cos 60° = \frac{1}{2}\right)$

ਜਾਂ $\quad x = \frac{21}{2}$

ਇਸ ਲਈ $\quad OM = \frac{21}{2}$ cm

ਨਾਲ ਹੀ $\quad \frac{AM}{OA} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ਇਸ ਲਈ $\quad AM = \frac{21\sqrt{3}}{2}$ cm

ਇਸ ਲਈ $\quad AB = 2\,AM = \frac{2 \times 21\sqrt{3}}{2} \text{ cm} = 21\sqrt{3} \text{ cm}$

ਇਸ ਲਈ Δ OAB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2} AB \times OM = \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2}$ cm^2

$$= \frac{441}{4}\sqrt{3}\text{cm}^2 \quad (3)$$

ਇਸ ਲਈ ਚੱਕਰਖੰਡ AYB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \left(462 - \frac{441}{4}\sqrt{3}\right)$cm^2 [(1), (2) ਅਤੇ (3) ਤੋਂ]

$$= \frac{21}{4}(88 - 21\sqrt{3})\text{ cm}^2$$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 12.2

(ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਨਾ ਕਿਹਾ ਜਾਵੇ, $\pi = \frac{22}{7}$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ)

1. 6 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਇੱਕ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ 60° ਹੈ।
2. ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਚੌਥੇ ਭਾਗ (quadrant) ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸਦਾ ਘੇਰਾ 22 cm ਹੈ।
3. ਇੱਕ ਘੜੀ ਦੀ ਮਿੰਟਾਂ ਵਾਲੀ ਸੂਈ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 14 cm ਹੈ। ਇਸ ਸੂਈ ਦੁਆਰਾ 5 ਮਿੰਟ ਵਿੱਚ ਤੈਅ ਕੀਤੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. 10 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੀ ਕੋਈ ਜੀਵਾ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

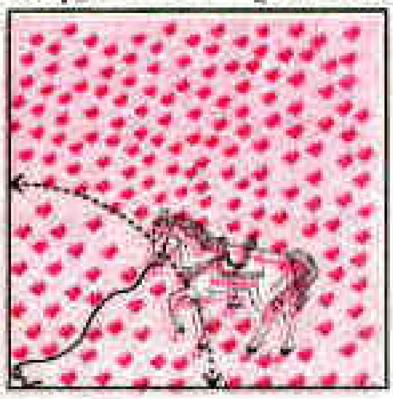
   (i) ਸੰਗਤ ਲਘੂ ਚੱਕਰਖੰਡ (ii) ਸੰਗਤ ਦੀਰਘ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ($\pi = 3.14$ ਲਓ)।
5. ਅਰਧ ਵਿਆਸ 21cm ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਇੱਕ ਚਾਪ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ 60° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) ਚਾਪ ਦੀ ਲੰਬਾਈ (ii) ਚਾਪ ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਏ ਗਏ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

   (iii) ਸੰਗਤ ਜੀਵਾ ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਏ ਗਏ ਚੱਕਰਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ
6. 15 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੀ ਕੋਈ ਜੀਵਾ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ 60° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਸੰਗਤ ਲਘੂ ਅਤੇ ਦੀਰਘ ਚੱਕਰ ਖੰਡਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ($\pi = 3.14$ ਅਤੇ $\sqrt{3} = 1.73$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ)।
7. 12 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੀ ਕੋਈ ਜੀਵਾ ਕੇਂਦਰ 'ਤੇ 120° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਸੰਗਤ ਚੱਕਰਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   ($\pi = 3.14$ ਅਤੇ $\sqrt{3} = 1.73$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ)
8. 15 cm ਭੁਜਾ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਵਰਗਾਕਾਰ ਘਾਹ ਦੇ ਮੈਦਾਨ ਦੇ ਇੱਕ ਕੋਨੇ 'ਤੇ ਲੱਗੇ ਕਿੱਲੇ ਨਾਲ ਘੋੜੇ ਨੂੰ 5 m ਲੰਬੀ ਰੱਸੀ ਨਾਲ ਬੰਨ੍ਹਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 12.11)। ਪਤਾ ਕਰੋ:

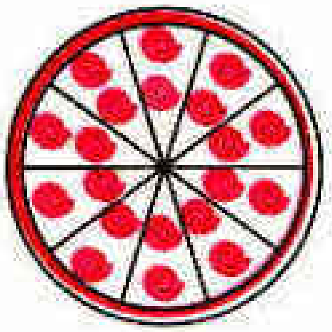
   (i) ਮੈਦਾਨ ਦੇ ਉਸ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਜਿੱਥੇ ਘੋੜਾ ਘਾਹ ਚਰ ਸਕਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 12.11

(ii) ਚਰੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਖੇਤਰਫਲ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਜੇਕਰ ਘੋੜੇ ਨੂੰ 5 m ਲੰਬੀ ਰੱਸੀ ਦੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ 10 m ਲੰਬੀ ਰੱਸੀ ਨਾਲ ਬੰਨ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ($\pi = 3.14$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ)।

9. ਇੱਕ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਬਰੂਚ (brooch) ਨੂੰ ਚਾਂਦੀ ਦੇ ਤਾਰ ਨਾਲ ਬਣਾਇਆ ਜਾਣਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਵਿਆਸ 35 mm ਹੈ। ਤਾਰ ਨੂੰ ਚੱਕਰ ਦੇ 5 ਵਿਆਸਾਂ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਵਿੱਚ ਵਰਤਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਜੋ ਉਸ ਨੂੰ 10 ਬਰਾਬਰ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੀ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 12.12 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ :
   (i) ਕੁੱਲ ਲੋੜੀਂਦੀ ਚਾਂਦੀ ਦੇ ਤਾਰ ਦੀ ਲੰਬਾਈ
   (ii) ਬਰੂਚ ਦੇ ਹਰੇਕ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ



ਚਿੱਤਰ 12.12

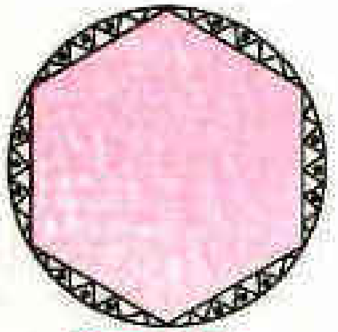
10. ਇੱਕ ਛੱਤਰੀ ਵਿੱਚ ਅੱਠ ਤਾਰਾਂ ਹਨ, ਜੋ ਬਰਾਬਰ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਲੱਗੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 12.13)। ਛੱਤਰੀ ਨੂੰ 45 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਸਪਾਟ ਚੱਕਰ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਇਸ ਦੀਆਂ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਤਾਰਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਚਿੱਤਰ 12.13

11. ਕਿਸੇ ਕਾਰ ਦੇ ਦੋ ਵਾਇਪਰ (wipers) ਹਨ, ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਕਦੇ ਵੀ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਛੂੰਹਦੇ ਨਹੀਂ। ਹਰੇਕ ਵਾਇਪਰ, ਜਿਸ ਦੀ ਪੱਤੀ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 25 cm ਹੈ ਅਤੇ $115°$ ਦੇ ਕੋਣ ਤੱਕ ਘੁੰਮ ਕੇ ਸਫਾਈ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਵਾਇਪਰਾਂ ਦੇ ਹਰੇਕ ਗੇੜੇ ਨਾਲ ਜਿੰਨਾ ਖੇਤਰਫਲ ਸਾਫ਼ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਉਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।

12. ਜਹਾਜ਼ਾਂ ਨੂੰ ਸਮੁੰਦਰ ਵਿੱਚ ਜਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਸਥਿਤ ਚੱਟਾਨਾਂ ਦੀ ਚੇਤਾਵਨੀ ਦੇਣ ਦੇ ਲਈ, ਇੱਕ ਲਾਈਟ ਹਾਊਸ (lighthouse) $80°$ ਕੋਣ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਵਿੱਚ 16.5 km ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੱਕ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦਾ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ ਫੈਲਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਸਮੁੰਦਰ ਦੇ ਉਸ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਨਾਲ ਜਹਾਜ਼ਾਂ ਨੂੰ ਚੇਤਾਵਨੀ ਦਿੱਤੀ ਜਾ ਸਕੇ ($\pi = 3.14$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ)।

13. ਇੱਕ ਗੋਲ ਮੇਜ਼ਪੋਸ਼ 'ਤੇ ਛੇ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ (ਸਮਾਨ) ਡਿਜ਼ਾਈਨ ਬਣੇ ਹੋਏ ਹਨ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 12.14 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਮੇਜ਼ਪੋਸ਼ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 28 cm ਹੈ ਤਾਂ ₹ 0.35 ਪ੍ਰਤਿ ਵਰਗ ਸੈਂਟੀਮੀਟਰ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਇਨ੍ਹਾਂ ਡਿਜ਼ਾਈਨਾਂ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਦੀ ਲਾਗਤ ਪਤਾ ਕਰੋ। ($\sqrt{3} = 1.7$ ਲਓ)



ਚਿੱਤਰ 12.14

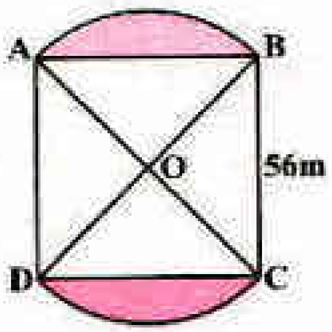
14. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ :
   ਅਰਧ ਵਿਆਸ R ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਉਸ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ $p°$ ਹੈ, ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ:

(A) $\frac{p}{180} \times 2\pi R$ (B) $\frac{p}{180} \times \pi R^2$ (C) $\frac{p}{360} \times 2\pi R$ (D) $\frac{p}{720} \times 2\pi R^2$

12.4 ਸਮਤਲ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ

ਹੁਣ ਤੱਕ ਅਸੀਂ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਹਨ। ਆਓ ਹੁਣ ਸਮਤਲ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੇ ਕੁੱਝ ਸੰਯੋਜਨਾਂ (combinations) ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੀਏ। ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਿੱਤਰ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਅਤੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਰੋਚਕ ਡਿਜ਼ਾਈਨਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੇਖਣ ਨੂੰ ਮਿਲਦੇ ਹਨ। ਫੁੱਲਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿਆਰੀਆਂ, ਨਾਲੀਆਂ ਦੇ ਢੱਕਣ, ਖਿੜਕੀਆਂ ਦੇ ਡਿਜ਼ਾਈਨ, ਮੇਜ਼ਪੋਸ਼ਾਂ 'ਤੇ ਬਣੇ ਡਿਜ਼ਾਈਨ ਆਦਿ ਅਜਿਹੇ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੇ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਣ ਹਨ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੁਆਰਾ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਚਿੱਤਰ 12.15 ਵਿੱਚ, 56 m ਭੁਜਾ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਵਰਗਾਕਾਰ ਲਾਅਨ (lawn) ABCD ਦੇ ਦੋ ਪਾਸੇ ਬਣੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਦੋ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਫੁੱਲਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿਆਰੀਆਂ ਦਿਖਾਈਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਕਿਆਰੀ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਲਾਅਨ ਦੇ ਵਿਕਰਣਾਂ ਦਾ ਕਾਟਵਾਂ ਬਿੰਦੂ O ਹੈ, ਤਾਂ ਵਰਗਾਕਾਰ ਲਾਅਨ ਅਤੇ ਫੁੱਲਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿਆਰੀਆਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ। ($\pi = \frac{22}{7}$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ)।



ਚਿੱਤਰ 12.15

ਹੱਲ : ਵਰਗਾਕਾਰ ਲਾਅਨ ABCD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 56 \times 56 \text{ m}^2$ (1)

ਮੰਨ ਲਓ $OA = OB = x$ m ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $x^2 + x^2 = 56^2$

ਜਾਂ $2x^2 = 56 \times 56$

ਜਾਂ $x^2 = 28 \times 56$ (2)

ਹੁਣ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ OAB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{90}{360} \times \pi x^2 = \frac{1}{4} \times \pi x^2$

$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 \text{ m}^2$ [(2) ਤੋਂ] (3)

ਨਾਲ ਹੀ Δ OAB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{4} \times 56 \times 56 \text{ m}^2$ ($\angle AOB = 90°$) (4)

ਇਸ ਲਈ, ਕਿਆਰੀ AB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \left(\frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 - \frac{1}{4} \times 56 \times 56\right) \text{m}^2$

[(3) ਅਤੇ (4) ਤੋਂ]

$$= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \left(\frac{22}{7} - 2\right) m^2$$

$$= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7} m^2 \qquad (5)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਦੂਸਰੀ ਕਿਆਰੀ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7} m^2$ (6)

ਇਸ ਲਈ ਸੰਪੂਰਨ ਖੇਤਰਫਲ $= \left(56 \times 56 + \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7} + \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7}\right) m^2$ [(1), (5) ਅਤੇ (6) ਤੋਂ]

$$= 28 \times 56 \left(2 + \frac{2}{7} + \frac{2}{7}\right) m^2$$

$$= 28 \times 56 \times \frac{18}{7} m^2 = 4032 m^2$$

ਬਦਲਵੀਂ ਵਿਧੀ :

ਸੰਪੂਰਨ ਖੇਤਰਫਲ = ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ OAB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ ODC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + Δ OAD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + Δ OBC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

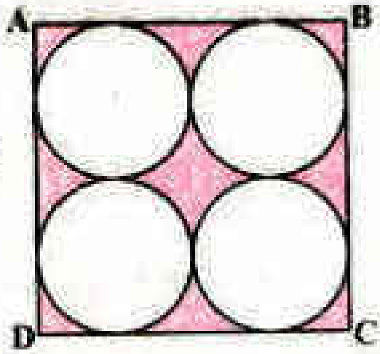
$$= \left(\frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 + \frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 + \frac{1}{4} \times 56 \times 56 + \frac{1}{4} \times 56 \times 56\right) m^2$$

$$= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \left(\frac{22}{7} + \frac{22}{7} + 2 + 2\right) m^2$$

$$= \frac{7 \times 56}{7} (22 + 22 + 14 + 14) m^2$$

$$= 56 \times 72 \, m^2 = 4032 \, m^2$$

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਚਿੱਤਰ 12.16 ਵਿੱਚ ਰੰਗੀਨ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ ABCD ਭੁਜਾ 14 cm ਦਾ ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 12.16

ਹੱਲ : ਵਰਗ ABCD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $=14 \times 14 \text{ cm}^2 = 196 \text{ cm}^2$

ਹਰੇਕ ਚੱਕਰ ਦਾ ਵਿਆਸ $= \frac{14}{2} \text{cm}^2 = 7\text{cm}^2$

ਇਸ ਲਈ, ਹਰੇਕ ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ $= \frac{7}{2}\text{cm}$

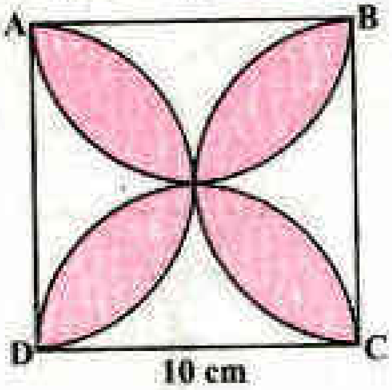
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \text{cm}^2$

$$= \frac{154}{4} cm^2 = \frac{77}{2} \text{cm}^2$$

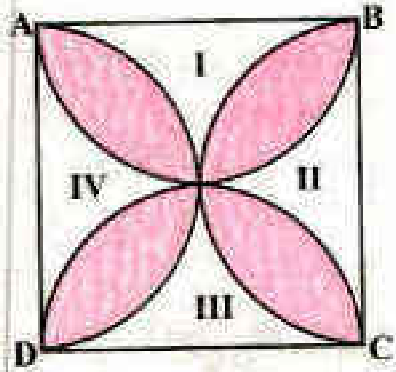
ਇਸ ਲਈ ਚਾਰੇ ਚੱਕਰਾਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 4 \times \frac{77}{2} \text{cm}^2 = 154 \text{ cm}^2$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਰੰਗੀਨ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= (196 - 154) \text{ cm}^2 = 42 \text{ cm}^2$

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਚਿੱਤਰ 12.17 ਵਿੱਚ, ਰੰਗੀਨ ਡਿਜਾਈਨ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਥੇ ABCD ਭੁਜਾ 10 cm ਦਾ ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਵਰਗ ਦੀ ਹਰੇਕ ਭੁਜਾ ਨੂੰ ਵਿਆਸ ਮੰਨ ਕੇ ਅਰਧ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਹਨ ($\pi = 3.14$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ)।



ਚਿੱਤਰ 12.17



ਚਿੱਤਰ 12.18

ਹੱਲ : ਆਓ ਚਾਰ ਅਣ–ਰੰਗੇ ਖੇਤਰਾਂ ਨੂੰ I, II, III ਅਤੇ IV ਨਾਲ ਅੰਕਿਤ ਕਰੀਏ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 12.18)।

I ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + III ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

= ABCD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ – ਦੋਨਾਂ ਅਰਧ ਚੱਕਰਾਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ, ਜਿਸ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ $5\ cm^2$ ਹੈ।

$$= \left(10 \times 10 - 2 \times \frac{1}{2} \times \pi \times 5^2\right) cm^2 = (100 - 3.14 \times 25)\ cm^2$$

$$= (100 - 78.5)\ cm^2 = 21.5\ cm^2$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, II ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + IV ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 21.5\ cm^2$

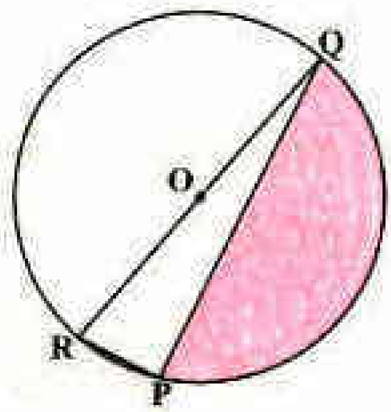
ਇਸ ਲਈ ਰੰਗੀਨ ਡਿਜ਼ਾਇਨ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ABCD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ – (I + II + III + IV) ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= (100 - 2 \times 21.5)\ cm^2 = (100 - 43)\ cm^2 = 57\ cm^2$$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 12.3

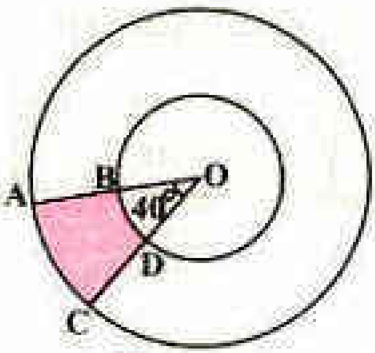
(ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਨਾ ਕਿਹਾ ਜਾਵੇ, $\pi = \frac{22}{7}$ ਦਾ ਹੀ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ।)

1. ਚਿੱਤਰ 12.19 ਵਿੱਚ, ਰੰਗੀਨ, ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ PQ = 24 cm, PR = 7 cm ਅਤੇ O ਚੱਕਰ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਹੈ।

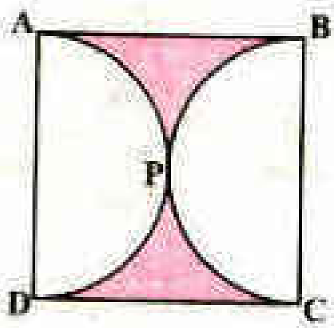


ਚਿੱਤਰ 12.19

2. ਚਿੱਤਰ 12.20 ਵਿੱਚ, ਰੰਗੀਨ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਕੇਂਦਰ O ਵਾਲੇ ਦੋਵਾਂ ਸਮਕੇਂਦਰੀ ਚੱਕਰਾਂ (concentric) ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 7 cm ਅਤੇ 14 cm ਹਨ ਅਤੇ $\angle AOC = 40°$ ਹੈ।



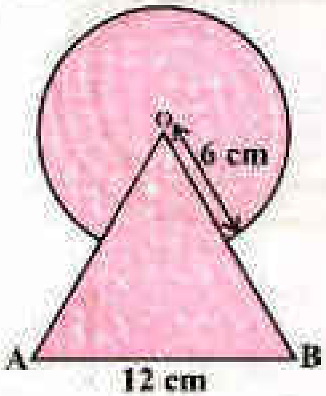
ਚਿੱਤਰ 12.20



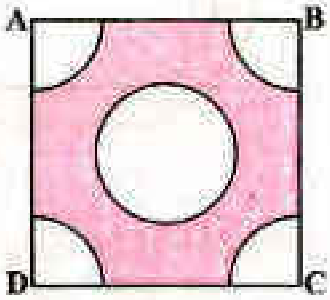
ਚਿੱਤਰ 12.21

3. ਚਿੱਤਰ 12.21 ਵਿੱਚ, ਰੰਗੀਨ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ABCD ਭੁਜਾ 14 cm ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੈ ਅਤੇ APD ਅਤੇ BPC ਦੇ ਅਰਧ ਚੱਕਰ ਹਨ।

4. ਚਿੱਤਰ 12.22 ਵਿੱਚ, ਰੰਗੀਨ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਥੇ ਭੁਜਾ 12 cm ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ OAB ਦੇ ਸਿਖਰ O ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਮੰਨ ਕੇ 6 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰੀ ਚਾਪ ਖਿੱਚਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।



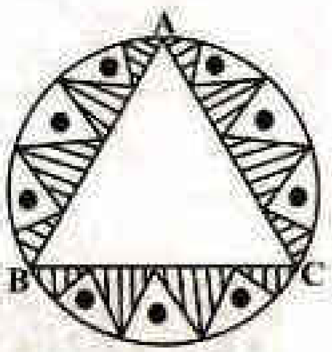
ਚਿੱਤਰ 12.22



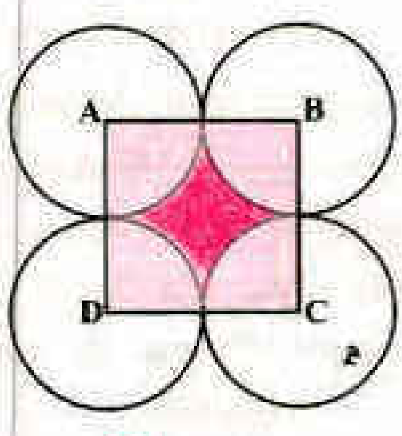
ਚਿੱਤਰ 12.23

5. ਭੁਜਾ 4 cm ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਵਰਗ ਦੇ ਹਰੇਕ ਕੋਨੇ ਤੋਂ 1 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਇੱਕ ਚੌਥਾਈ ਕੱਟਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਚਾਲੇ 2 cm ਵਿਆਸ ਦਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਵੀ ਕੱਟਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 12.23 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਵਰਗ ਦੇ ਬਾਕੀ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਇੱਕ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਮੇਜਪੋਸ, ਜਿਸਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 32 cm ਹੈ, ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਛੱਡਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਡਿਜ਼ਾਇਨ ਬਣਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 12.24 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਡਿਜ਼ਾਇਨ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



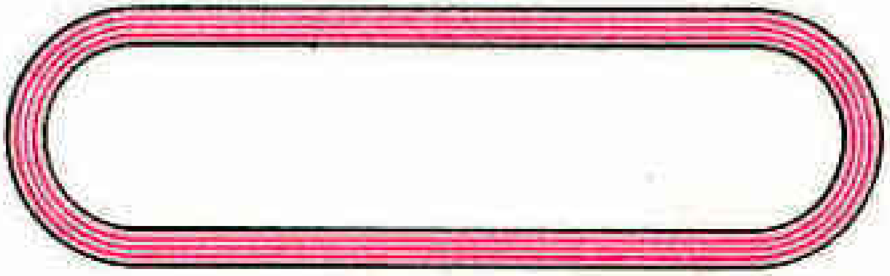
ਚਿੱਤਰ 12.24



ਚਿੱਤਰ 12.25

7. ਚਿੱਤਰ 12.25 ਵਿੱਚ, ABCD ਭੁਜਾ 14 cm ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੈ। A, B, C ਅਤੇ D ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਮੰਨ ਕੇ, ਚਾਰ ਚੱਕਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਹਨ ਕਿ ਹਰੇਕ ਚੱਕਰ ਤਿੰਨ ਬਾਕੀ ਚੱਕਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਦੋ ਚੱਕਰਾਂ ਨੂੰ ਬਾਹਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਰੰਗੀਨ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਚਿੱਤਰ 12.26 ਇੱਕ ਦੌੜਨ ਦਾ ਰਸਤਾ (racing track) ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਸੱਜੇ ਅਤੇ ਖੱਬੇ ਸਿਰੇ ਅਰਧ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਹਨ।

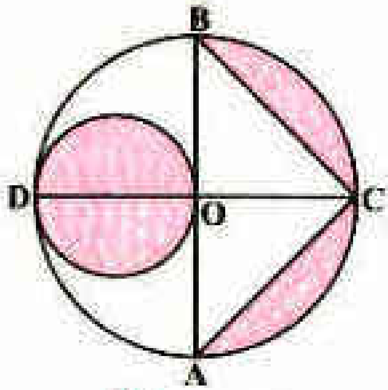


ਚਿੱਤਰ 12.26

ਦੋਨਾਂ ਅੰਦਰੂਨੀ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਖੰਡਾਂ ਦੇ ਵਿਚਾਲੇ ਦੀ ਦੂਰੀ 60 m ਹੈ ਉਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਰੇਖਾਖੰਡ 106 m ਲੰਬਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਰਸਤਾ 10 m ਚੌੜਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

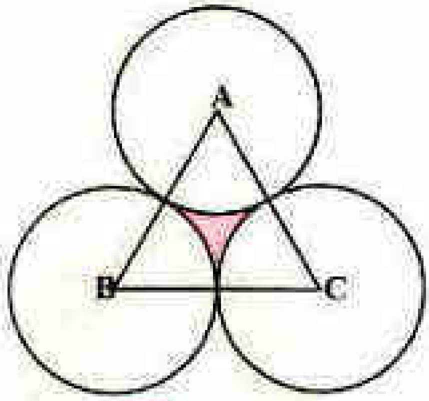
(i) ਰਸਤੇ ਦੇ ਅੰਦਰੂਨੀ ਕਿਨਾਰਿਆਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਪੂਰਾ ਚੱਕਰ ਲਗਾਉਣ ਵਿੱਚ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਦੂਰੀ

(ii) ਰਸਤੇ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ



ਚਿੱਤਰ 12.27

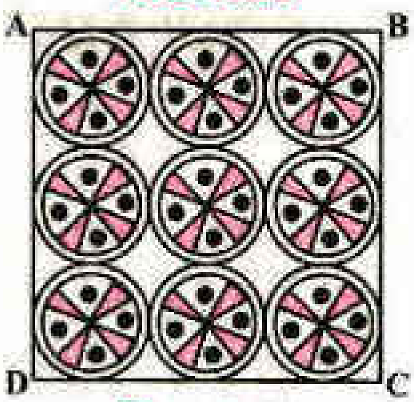
9. ਚਿੱਤਰ 12.27 ਵਿੱਚ, AB ਅਤੇ CD ਕੇਂਦਰ O ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਦੋ ਪਰਸਪਰ (ਆਪਸ ਵਿੱਚ) ਲੰਬ ਵਿਆਸ ਹਨ ਅਤੇ OD ਛੋਟੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਵਿਆਸ ਹੈ। ਜੇਕਰ OA = 7 cm ਹੈ, ਤਾਂ ਰੰਗੀਨ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 12.28

10. ਇੱਕ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 17320.5 cm^2 ਹੈ। ਇਸ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਹਰੇਕ ਸਿਖ਼ਰ ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਮੰਨ ਕੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਅੱਧ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਲੈ ਕੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 12.28)। ਰੰਗੀਨ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ($\pi = 3.14$ ਅਤੇ $\sqrt{3} = 1.73205$ ਲਓ)।

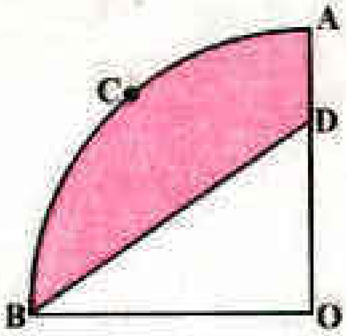
11. ਇੱਕ ਵਰਗਾਕਾਰ ਰੁਮਾਲ 'ਤੇ, ਨੌਂ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਡਿਜ਼ਾਇਨ ਬਣੇ ਹਨ, ਜਿਸ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 7 cm ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 12.29)। ਰੁਮਾਲ ਦੇ ਬਾਕੀ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



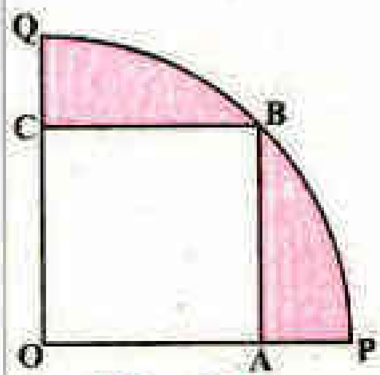
ਚਿੱਤਰ 12.29

12. ਚਿੱਤਰ 12.30 ਵਿੱਚ, OACB ਕੇਂਦਰ O ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 3.5 cm ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦਾ ਚੌਥਾ ਭਾਗ ਹੈ। ਜੇਕਰ OD = 2 cm ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) ਚੌਥਾਈ OACB (ii) ਰੰਗੀਨ ਭਾਗ



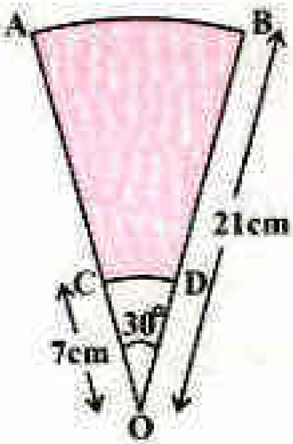
ਚਿੱਤਰ 12.30



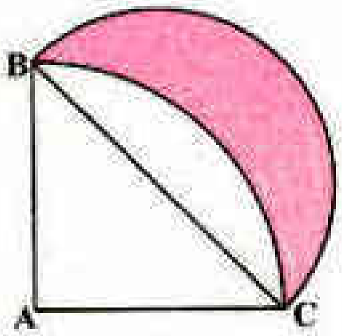
ਚਿੱਤਰ 12.31

13. ਚਿੱਤਰ 12.31 ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਚੌਥਾਈ OPBQ ਦੇ ਅੰਦਰ ਇੱਕ ਵਰਗ OABC ਬਣਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ OA = 20 cm ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਰੰਗੀਨ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ($\pi = 3.14$ ਲਓ)।

14. AB ਅਤੇ CD ਕੇਂਦਰ O ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸਾਂ 21 cm ਅਤੇ 7 cm ਵਾਲੇ ਦੋ ਸਮ ਕੇਂਦਰੀ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਦੋ ਚਾਪ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 12.32)। ਜੇਕਰ $\angle AOB = 30^\circ$ ਹੈ, ਤਾਂ ਰੰਗੀਨ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



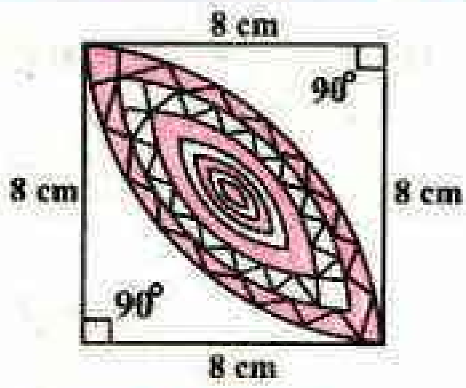
ਚਿੱਤਰ 12.32



ਚਿੱਤਰ 12.33

15. ਚਿੱਤਰ 12.33 ਵਿੱਚ, ABC ਅਰਧ ਵਿਆਸ 14 cm ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦਾ ਚੌਥਾਈ ਹਿੱਸਾ ਹੈ ਅਤੇ BC ਨੂੰ ਵਿਆਸ ਮੰਨ ਕੇ ਇੱਕ ਅਰਧ ਚੱਕਰ ਖਿੱਚਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਰੰਗੀਨ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

*16. ਚਿੱਤਰ 12.34 ਵਿੱਚ, ਰੰਗੀਨ ਡਿਜ਼ਾਇਨ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੋ 8 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸਾਂ ਵਾਲੇ ਦੋ ਚੱਕਰਾਂ ਦੀਆਂ ਚੌਥਾਈਆਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਸਾਂਝਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 12.34

12.5 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

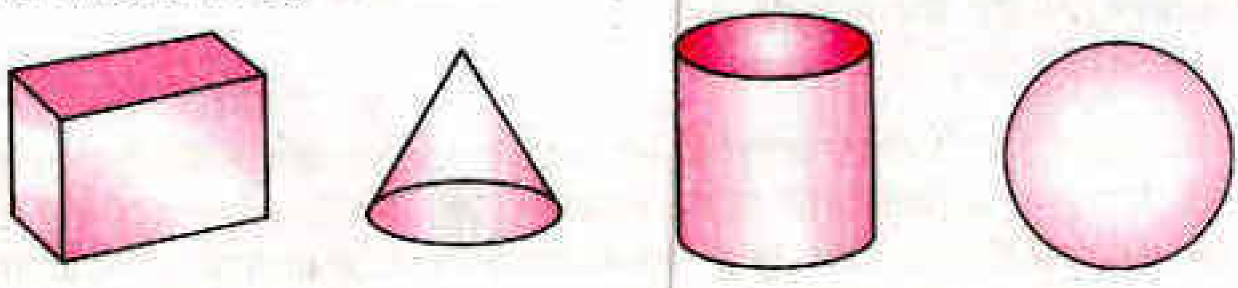
ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ :

1. ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਘੇਰਾ $= 2\pi r$
2. ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \pi r^2$
3. ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਇੱਕ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ, ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ ਦਰਜੇ(Degree) ਵਿੱਚ θ ਹੈ, ਦੇ ਸੰਗਤ ਚਾਪ ਦੀ ਲੰਬਾਈ $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
4. ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਇੱਕ ਅਰਧ ਵਿਆਸੀ ਖੰਡ, ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ ਦਰਜੇ (ਅੰਸ਼)(Degree) ਵਿੱਚ θ ਹੈ, ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
5. ਇੱਕ ਚੱਕਰਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਸੰਗਤ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਖੰਡ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ – ਸੰਗਤ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਆਇਤਨ 13

13.1 ਭੂਮਿਕਾ

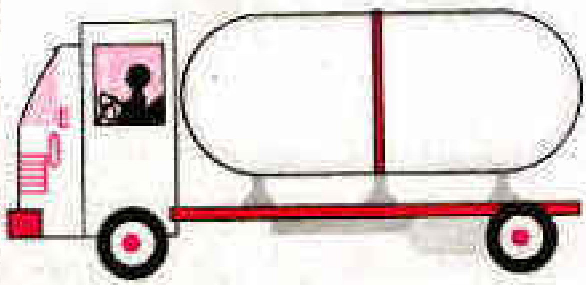
ਨੌਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੁੱਝ ਠੋਸ ਚਿੱਤਰਾਂ ਜਿਵੇਂ ਘਣਾਵ, ਸ਼ੰਕੂ, ਬੇਲਨ ਅਤੇ ਗੋਲੇ ਨਾਲ ਜਾਣੂੰ ਹੋ ਚੁੱਕੇ ਹੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.1)। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਇਨ੍ਹਾਂ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੇ ਤਲ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਆਇਤਨ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 13.1

ਆਪਣੇ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਅਜਿਹੇ ਅਨੇਕ ਠੋਸ ਦੇਖਣ ਨੂੰ ਮਿਲਦੇ ਹਨ ਜੋ ਉਪਰੋਕਤ ਦੋ ਜਾਂ ਵੱਧ ਅਧਾਰਭੂਤ ਠੋਸਾਂ ਦੇ ਸੰਜੋਜਕਾਂ ਤੋਂ (ਭਾਵ ਉਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਕੇ) ਬਣਦੇ ਹਨ।

ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਟਰੱਕ ਦੇ ਪਿੱਛੇ ਰੱਖੇ ਵੱਡੇ ਕੰਟੇਨਰ (Container) ਨੂੰ ਜਰੂਰ ਹੀ ਦੇਖਿਆ ਹੋਵੇਗਾ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.2) ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਥਾਨ ਤੋਂ ਦੂਸਰੇ ਸਥਾਨ ਤੱਕ ਤੇਲ ਜਾਂ ਪਾਣੀ ਲੈ ਕੇ ਜਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਇਸਦਾ ਆਕਾਰ ਉਪਰੋਕਤ ਚਾਰ ਠੋਸਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸਿ ਇੱਕ ਦੇ ਆਕਾਰ ਜਿਹਾ ਹੈ? ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਹ ਠੋਸ ਇੱਕ ਵੇਲਣ ਅਤੇ



ਚਿੱਤਰ 13.2

ਉਸਦੇ ਦੋਨਾਂ ਸਿਰਿਆਂ 'ਤੇ ਦੋ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਲਗਾਉਣ ਨਾਲ ਬਣਿਆ ਹੈ। ਫਿਰ ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਅਜਿਹੀ ਵਸਤੂ ਵੀ ਜ਼ਰੂਰ ਵੇਖੀ ਹੋਵੇਗੀ ਜੋ ਚਿੱਤਰ 13.3 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸਦਾ ਨਾਂ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੀ ਇੱਕ ਪਰਖ ਨਲੀ (test tube) ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਆਪਣੀ ਵਿਗਿਆਨ ਦੀ ਪ੍ਰਯੋਗਸ਼ਾਲਾ ਵਿੱਚ ਵਰਤਿਆ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਹ ਪਰਖ ਨਲੀ ਵੀ ਇੱਕ ਵੇਲਣ ਅਤੇ ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਨਾਲ ਮਿਲਾ ਕੇ ਬਣੀ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰਾਂ, ਯਾਤਰਾ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਵੀ ਉਪਰੋਕਤ ਠੋਸਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨਾਂ ਨਾਲ ਬਣੀਆਂ ਅਨੇਕਾਂ ਵੱਡੀਆ ਅਤੇ ਸੁੰਦਰ ਇਮਾਰਤਾਂ ਅਤੇ ਸਮਾਰਕਾਂ ਨੂੰ ਵੀ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਹੋਵੇਗਾ।

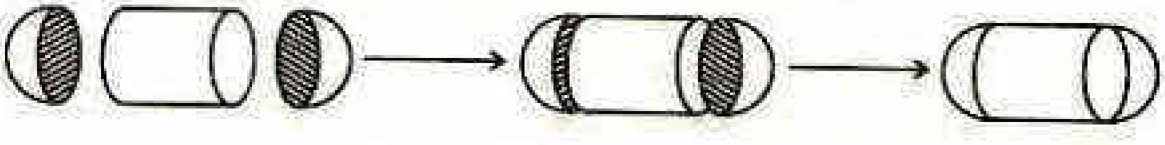
ਚਿੱਤਰ 13.3

ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਕਾਰਨ, ਤੁਸੀਂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਠੋਸਾਂ ਦੇ ਤਲ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਜਾਂ ਆਇਤਨ ਜਾਂ ਧਾਰਨ ਸਮਰੱਥਾ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੋ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਅਜਿਹਾ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਕਰੋਗੇ? ਤੁਸੀਂ ਅਜਿਹੇ ਠੋਸਾਂ ਨੂੰ ਹੁਣ ਤੱਕ ਪੜ੍ਹੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਚਾਰ ਠੋਸ ਰਚਨਾਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਰਗੀਕਿਰਤ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹਨਾਂ ਠੋਸਾਂ ਦੇ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ?

13.2 ਠੋਸਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨਾਂ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

ਆਓ ਉਸ ਕੰਟੇਨਰ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਜੋ ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 13.2 ਵਿੱਚ ਦੇਖਿਆ ਸੀ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਠੋਸਾਂ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਸੀਂ ਕਿਵੇਂ ਪਤਾ ਕਰੀਏ? ਹੁਣ, ਜਦੋਂ ਵੀ ਸਾਡੇ ਸਾਹਮਣੇ ਕੋਈ ਨਵੀਂ ਸਮੱਸਿਆ ਆਉਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇਹ ਦੇਖਣ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੀ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਅਜਿਹੀਆਂ ਛੋਟੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਤੋੜ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੱਲ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ, ਠੋਸ ਇੱਕ ਵੇਲਣ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਸਿਰਿਆਂ ਤੇ ਇੱਕ ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲਾ ਲਗਾਉਣ ਨਾਲ ਬਣਿਆ ਹੈ। ਇਹ ਚਿੱਤਰ 13.4 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਠੋਸ ਵਰਗਾ ਲੱਗੇਗਾ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਸਾਰੇ ਟੁੱਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 13.4

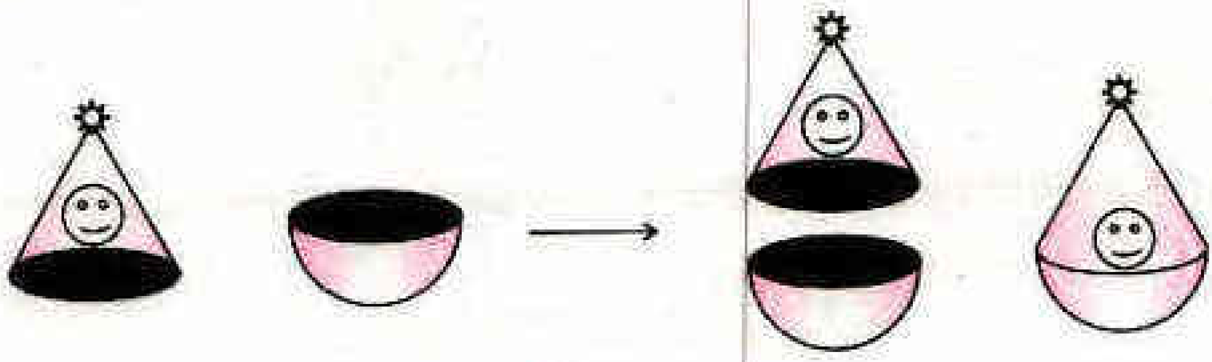
ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਨਵੀਂ ਬਣੀ ਹੋਈ ਵਸਤੂ ਨੂੰ ਦੇਖੀਏ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਕੇਵਲ ਦੋਨਾਂ ਅਰਧ ਗੋਲਿਆਂ ਅਤੇ ਵੇਲਣ ਦੇ ਕੇਵਲ ਵਕਰ ਤਲ ਹੀ ਦਿਖਾਈ ਦੇਣਗੇ।

ਇਸ ਲਈ, ਇਸ ਠੋਸ ਦੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਤਿੰਨਾਂ ਭਾਗਾਂ ਦੇ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

ਠੋਸ ਦੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ (TSA) = ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ (CSA)
+ ਵੇਲਣ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ
+ ਦੂਸਰੇ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

ਆਓ ਇੱਕ ਹੋਰ ਸਥਿਤੀ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਮੰਨ ਲਓ ਅਸੀਂ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਨੂੰ ਜੋੜ ਕੇ ਇੱਕ ਖਿਡੌਣਾ ਬਣਾ ਰਹੇ ਹਾਂ। ਆਓ ਅਸੀਂ ਉਨ੍ਹਾਂ ਪਗਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖੀਏ ਜਿਨਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਅਸੀਂ ਕੰਮ ਕਰਾਂਗੇ।

ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਅਤੇ ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲਾ ਲਵਾਂਗੇ ਅਤੇ ਫਿਰ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮਤਲ (ਸਪਾਟ) ਤਲਾਂ ਨੂੰ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਲਿਆਉਣ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਸ਼ੱਕ ਨਹੀਂ, ਖਿਡੌਣੇ ਦੇ ਤਲ ਨੂੰ ਚਿੱਕਣਾ ਰੱਖਣ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ, ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਲਵਾਂਗੇ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਖਿਡੌਣਿਆਂ ਦੇ ਬਣਾਉਣ ਵਿੱਚ ਲੜੀਵਾਰ ਪਗ ਚਿੱਤਰ 13.5 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਣਗੇ :



ਚਿੱਤਰ 13.5

ਆਪਣੇ ਯਤਨ ਦੇ ਫਲਸਰੂਪ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਗੋਲ ਆਧਾਰ ਵਾਲਾ ਸੁੰਦਰ ਖਿਡੌਣਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਜਾਨਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਖਿਡੌਣੇ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ (ਤਲ) 'ਤੇ ਰੰਗ ਕਰਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਕਿੰਨੇ ਰੰਗ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਕੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ? ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਖਿਡੌਣੇ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ (ਤਲ) ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ, ਜੋ ਅਰਧ-ਗੋਲੇ ਦੇ CSA ਅਤੇ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ CSA ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਕੇ ਬਣਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

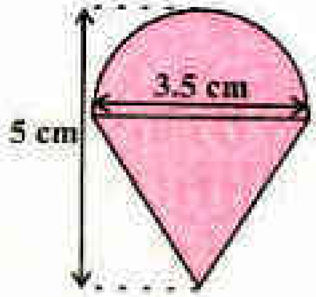
ਖਿਡੌਣੇ ਦੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸਤ੍ਹਾ (ਤਲ) ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦਾ CSA + ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ CSA

ਹੁਣ ਆਓ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਰਸ਼ੀਦ ਨੂੰ ਜਨਮ ਦਿਨ ਤੇ ਤੋਹਫੇ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਲਾਟੂ ਮਿਲਿਆ ਜਿਸ 'ਤੇ ਰੰਗ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸੀ। ਉਹ ਇਸ 'ਤੇ ਆਪਣੇ ਮੋਮ ਦੇ ਰੰਗਾਂ (Crayons) ਨਾਲ ਰੰਗ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਲਾਟੂ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਉੱਪਰ ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲਾ ਬਣਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ।

(ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.6)। ਲਾਟੂ ਦੀ ਪੂਰੀ ਉੱਚਾਈ 5 cm ਹੈ ਇਸਦਾ ਵਿਆਸ 3.5 cm ਹੈ। ਉਸਦੇ ਦੁਆਰਾ ਰੰਗ ਕੀਤਾ ਜਾਣ ਵਾਲਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

($\pi = \frac{22}{7}$ ਲਓ।)



ਚਿੱਤਰ 13.6

ਹੱਲ : ਇਹ ਲਾਟੂ ਬਿਲਕੁਲ ਉਸ ਵਸਤੂ ਵਰਗਾ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਚਰਚਾ ਅਸੀਂ 13.5 ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਉੱਥੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਪਰਿਣਾਮ ਨੂੰ ਸੁਵਿਧਾ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇਥੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਭਾਵ

ਲਾਟੂ ਦਾ TSA = ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦਾ CSA + ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ CSA

ਹੁਣ, ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2\pi r^2$

$$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right) \text{cm}^2$$

ਨਾਲ ਹੀ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉੱਚਾਈ = ਲਾਟੂ ਦੀ ਉੱਚਾਈ – ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਭਾਗ ਦੀ ਉੱਚਾਈ (ਅਰਧ ਵਿਆਸ)

$$= \left(5 - \frac{3.5}{2}\right) \text{cm} = 3.25 \text{ cm}$$

ਇਸ ਲਈ, ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਤਿਰਛੀ ਉੱਚਾਈ $(l) = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2 + (3.25)^2} \text{ cm} = 3.7 \text{ cm}$

ਇਸ ਲਈ, ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \pi r l = \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right) \text{cm}^2$

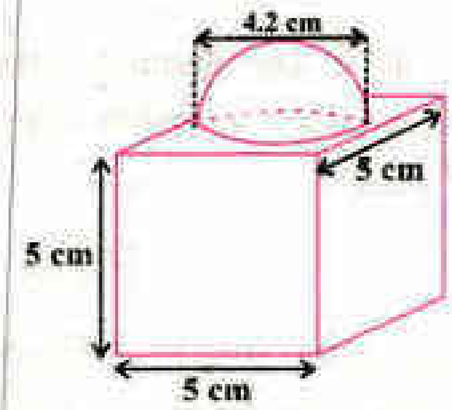
ਇਸ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਲਾਟੂ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਇਸ ਤਰਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ

$$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right) \text{cm}^2 + \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right) \text{cm}^2$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} (3.5 + 3.7) \text{ cm}^2 = \frac{11}{2} \times (3.5 + 3.7) \text{ cm}^2 = 39.6 \text{ cm}^2 \text{ (ਲਗਭਗ)}$$

ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਲਾਟੂ ਦੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਅਤੇ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਸੰਪੂਰਨ ਤਲ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਚਿੱਤਰ 13.7 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਸਜਾਵਟ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੋਣ ਵਾਲਾ ਬਲਾਕ ਦੋ ਠੋਸਾਂ ਨਾਲ ਮਿਲ ਕੇ ਬਣਿਆ ਹੈ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਘਣ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਸਰਾ ਅਰਧ ਗੋਲਾ ਹੈ। ਇਸ ਬਲਾਕ (block) ਦਾ ਆਧਾਰ 5 cm ਭੁਜਾ ਜਾਂ ਕਿਨਾਰੇ (edge) ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਘਣ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਉੱਪਰ ਲੱਗੇ ਹੋਏ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦਾ ਵਿਆਸ 4.2 cm ਹੈ। ਇਸ ਬਲਾਕ ਦੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ($\pi = \frac{22}{7}$ ਲਓ।)



ਚਿੱਤਰ 13.7

ਹੱਲ : ਘਣ ਦੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 6 \times (\text{ਕਿਨਾਰੇ})^2 = 6 \times 5 \times 5\ cm^2 = 150\ cm^2$

ਹੁਣ, ਘਣ ਦਾ ਉਹ ਭਾਗ ਜਿਸ ਤੇ ਅਰਧ ਗੋਲਾ ਲੱਗਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ।

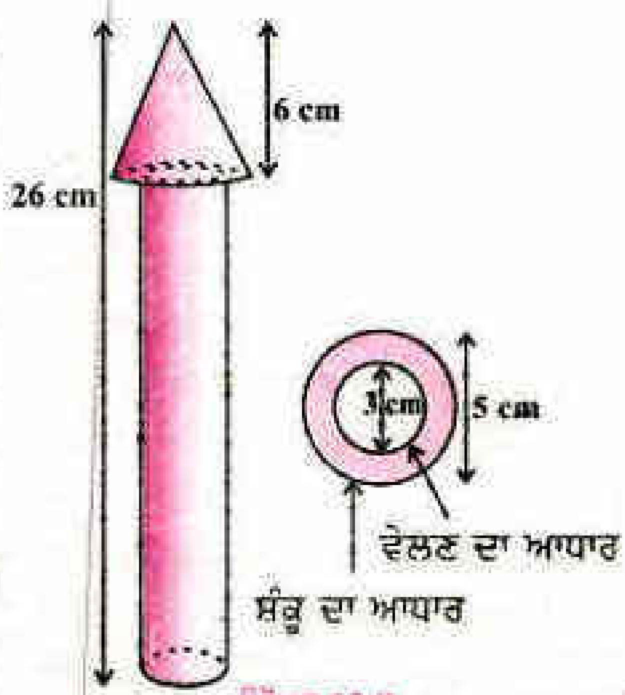
ਇਸ ਲਈ, ਬਲਾਕ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਘਣ ਦਾ TSA – ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦਾ CSA

$$= 150 - \pi r^2 + 2\pi r^2 = (150 + \pi r^2)\ cm^2$$

$$= 150\ cm^2 + \left(\frac{22}{7} \times \frac{4.2}{2} \times \frac{4.2}{2}\right) cm^2$$

$$= 150\ cm^2 + 13.86\ cm^2 = 163.86\ cm^2$$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਲੱਕੜੀ ਦਾ ਇੱਕ ਖਿਡੌਣਾ ਰਾਕੇਟ (rocket) ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਵੇਲਣ 'ਤੇ ਰੱਖਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 13.8 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਸੰਪੂਰਨ ਰਾਕੇਟ ਦੀ ਉੱਚਾਈ 26 cm ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਸ਼ੰਕੂ ਆਕਾਰ ਭਾਗ ਦੀ ਉੱਚਾਈ 6 cm ਹੈ। ਸ਼ੰਕੂ ਆਕਾਰ ਭਾਗ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਵਿਆਸ 5 cm ਅਤੇ ਵੇਲਣਕਾਰ ਭਾਗ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਵਿਆਸ 3 cm ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸ਼ੰਕੂ ਆਕਾਰ ਭਾਗ 'ਤੇ ਨਾਰੰਗੀ ਰੰਗ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਹੈ, ਅਤੇ ਵੇਲਣਾਕਾਰ ਭਾਗ 'ਤੇ ਪੀਲਾ ਰੰਗ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਰੰਗ ਦੁਆਰਾ ਰਾਕੇਟ ਦਾ ਰੰਗੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ($\pi = 3.14$ ਲਓ।)



ਚਿੱਤਰ 13.8

ਹੱਲ : ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਨੂੰ r ਨਾਲ, ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਤਿਰਛੀ ਉੱਚਾਈ ਨੂੰ l ਨਾਲ, ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਨੂੰ h ਨਾਲ, ਵੇਲਣ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਨੂੰ r' ਨਾਲ, ਵੇਲਣ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਨੂੰ h' ਨਾਲ ਦਰਸਾਉ। ਇਸ ਲਈ $r = 2.5$ cm, $h = 6$ cm, $r' = 1.5$ cm, $h' = 26 - 6 = 20$ cm ਅਤੇ

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2.5^2 + 6^2} \text{ cm} = 6.5 \text{ cm}$$

ਇੱਥੇ, ਸ਼ੰਕੂ ਆਕਾਰ ਭਾਗ ਦਾ ਚੱਕਰੀ ਆਧਾਰ ਵੇਲਣ ਦੇ ਆਧਾਰ 'ਤੇ ਟਿਕਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਆਧਾਰ ਵੇਲਣ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦੇ ਇੱਕ ਭਾਗ [ਛੱਲੇ(ring)] ਨੂੰ ਵੀ ਰੰਗਿਆ ਜਾਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ, ਨਾਰੰਗੀ ਰੰਗ ਨਾਲ ਰੰਗੇ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ CSA + ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ – ਵੇਲਣ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \pi r l + \pi r^2 - \pi (r')^2$$

$$= \pi[(2.5 \times 6.5) + (2.5)^2 - (1.5)^2] \text{ cm}^2$$

$$= \pi[20.25] \text{ cm}^2 = 3.14 \times 20.25 \text{ cm}^2$$

$$= 63.585 \text{ cm}^2$$

ਹੁਣ, ਪੀਲੇ ਰੰਗ ਨਾਲ ਰੰਗੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਵੇਲਣ ਦਾ CSA + ਵੇਲਣ ਦੇ ਇੱਕ ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= 2\pi r' h' + \pi (r')^2$$

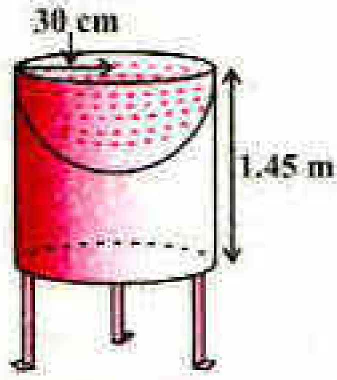
$$= \pi r' (2h' + r')$$

$$= 3.14 \times 1.5 [2 \times 20 + 1.5] \text{ cm}^2$$

$$= 4.71 \times 41.5 \text{ cm}^2$$

$$= 195.465 \text{ cm}^2$$

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਰਾਹੁਲ ਨੇ ਆਪਣੇ ਬਗੀਚੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪੰਛੀ ਇਸ਼ਨਾਨਘਰ(bird-bath) ਬਣਵਾਇਆ ਜਿਸਦਾ ਆਕਾਰ ਇੱਕ ਖੋਖਲੇ ਵੇਲਣ ਵਰਗਾ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਇੱਕ ਸਿਰੇ ਤੇ ਅਰਧ ਗੋਲਾਕਾਰ ਬਰਤਨ ਬਣਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.9)। ਵੇਲਣ ਦੀ ਉਚਾਈ 1.45 m ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 30 cm ਹੈ। ਇਸ ਪੰਛੀ ਇਸ਼ਨਾਨਘਰ ਦੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 13.9

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਵੇਲਣ ਦੀ ਉਚਾਈ h ਹੈ ਅਤੇ ਵੇਲਣ ਅਤੇ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਹੈ।

ਹੁਣ ਪੰਛੀ ਇਸ਼ਨਾਨਘਰ ਦੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਵੇਲਣ ਦਾ CSA + ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦਾ CSA

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

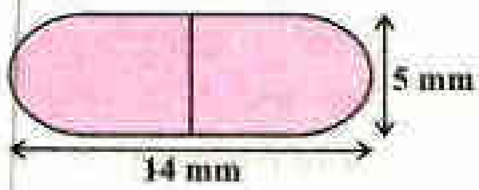
$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 30(145 + 30)\ \text{cm}^2$$

$$= 33000\ \text{cm}^2 = 3.3\ \text{m}^2$$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 13.1

ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਨਾ ਕਿਹਾ ਜਾਵੇ, $\pi = \frac{22}{7}$ ਲਓ।

1. ਦੋ ਘਣ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਆਇਤਨ $64\ \text{cm}^3$ ਹੈ, ਦੇ ਸਮਾਨ ਫਲਕਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਕੇ ਇੱਕ ਠੋਸ ਬਣਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਘਣਾਵ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਕੋਈ ਬਰਤਨ ਇੱਕ ਖੋਖਲੇ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦੇ ਉਪਰ ਇੱਕ ਖੋਖਲਾ ਵੇਲਣ ਲੱਗਿਆ ਹੈ। ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦਾ ਵਿਆਸ 14 cm ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਬਰਤਨ ਦੀ ਕੁਲ ਉਚਾਈ 13 cm ਹੈ। ਇਸ ਬਰਤਨ ਦਾ ਅੰਦਰੂਨੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਇੱਕ ਖਿਡੌਣਾ, ਅਰਧ ਵਿਆਸ 3.5 cm ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਉਸੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲੇ 'ਤੇ ਟਿਕਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਖਿਡੌਣੇ ਦੀ ਕੁੱਲ ਉਚਾਈ 15.5 cm ਹੈ। ਇਸ ਖਿਡੌਣੇ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਭੁਜਾ 7 cm ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਘਣਾਕਾਰ ਬਲਾਕ ਦੇ ਉੱਪਰ ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲਾ ਰੱਖਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵਿਆਸ ਕੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ? ਇਸ ਤਰਾਂ ਬਣੇ ਠੋਸ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. ਇੱਕ ਘਣਾਕਾਰ ਲੱਕੜ ਦੇ ਬਲਾਕ ਦੇ ਇੱਕ ਫਲਕ ਨੂੰ ਅੰਦਰ ਵੱਲ ਕੱਟ ਕੇ ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲਾਕਾਰ ਖੱਡਾ ਇਸ ਤਰਾਂ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦਾ ਵਿਆਸ ਘਣ ਦੇ ਇੱਕ ਕਿਨਾਰੇ l ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਬਾਕੀ ਬਚੇ ਠੋਸ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਦਵਾਈ ਦਾ ਇੱਕ ਕੈਪਸੂਲ (capsule) ਇੱਕ ਵੇਲਣ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਸਿਰਿਆਂ 'ਤੇ ਇੱਕ ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲਾ ਲੱਗਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.10) ਪੂਰੇ ਕੈਪਸੂਲ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 14 mm ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਵਿਆਸ 5 mm ਹੈ। ਇਸ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

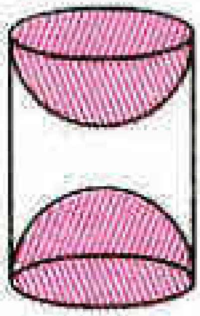


ਚਿੱਤਰ 13.10

7. ਕੋਈ ਤੰਬੂ ਇੱਕ ਵੇਲਣ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਤੇ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਬਣਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਵੇਲਣਾਕਾਰ ਭਾਗ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਅਤੇ ਵਿਆਸ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 2.1 m ਅਤੇ 4 m ਹਨ ਅਤੇ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਤਿਰਛੀ ਉੱਚਾਈ 2.8 m ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਤੰਬੂ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਵਰਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਕੈਨਵਸ (canvas) ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਨਾਲ ਹੀ, ₹ 500 ਪ੍ਰਤੀ m^2 ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਇਸ ਵਿੱਚ ਵਰਤੋਂ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਕੈਨਵਸ ਦੀ ਲਾਗਤ ਪਤਾ ਕਰੋ। (ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਤੰਬੂ ਦੇ ਆਧਾਰ ਨੂੰ ਕੈਨਵਸ ਨਾਲ ਨਹੀਂ ਢੱਕਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।)

8. ਉੱਚਾਈ 2.4 cm ਅਤੇ ਵਿਆਸ 1.4 cm ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਠੋਸ ਵੇਲਣ ਵਿੱਚੋਂ ਇਸੇ ਉੱਚਾਈ ਅਤੇ ਇਸੇ ਵਿਆਸ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਆਕਾਰ ਖੋਲ (cavity) ਕੱਟ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਬਾਕੀ ਬਚੇ ਠੋਸ ਦਾ ਨੇੜੇ ਤੋਂ ਨੇੜੇ ਵਰਗ ਸੈਂਟੀਮੀਟਰ (cm^2) ਤੱਕ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9. ਲੱਕੜੀ ਦੇ ਇੱਕ ਠੋਸ ਬੇਲਣ ਦੇ ਹਰੇਕ ਸਿਰੇ 'ਤੇ ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲਾ ਖੋਦ ਕੇ ਕੱਢਦੇ ਹੋਏ, ਇੱਕ ਵਸਤੂ ਬਣਾਈ ਗਈ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 13.11 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਬੇਲਣ ਦੀ ਉੱਚਾਈ 10 cm ਹੈ ਅਤੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 3.5 cm ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

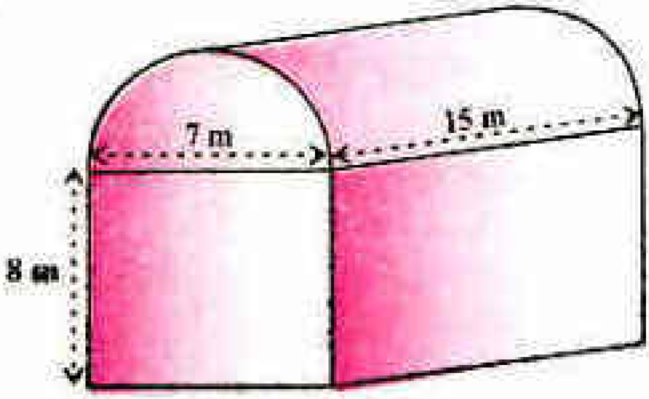


ਚਿੱਤਰ 13.11

13.3 ਠੋਸਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨਾਂ ਦਾ ਆਇਤਨ

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਹੈ ਕਿ ਦੋ ਆਧਾਰ ਭੂਤ ਠੋਸਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਨਾਲ ਬਣੇ ਠੋਸਾਂ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੇਖਾਂਗੇ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਇਹਨਾਂ ਠੋਸਾਂ ਦੇ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋਨਾਂ ਘਟਕਾਂ (ਠੋਸਾਂ) ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਿਆ ਨਹੀਂ ਸੀ ਕਿਉਂਕਿ ਇਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਵਿੱਚ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦਾ ਕੁੱਝ ਭਾਗ ਲੁਪਤ ਹੋ ਗਿਆ ਸੀ। ਪਰੰਤੂ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਜਿਹਾ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਦੋ ਆਧਾਰਭੂਤ ਠੋਸਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਨਾਲ ਬਣੇ ਠੋਸ ਦਾ ਆਇਤਨ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਦੋਨਾਂ ਘਟਕਾਂ (ਠੋਸਾਂ) ਦੇ ਆਇਤਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਦੇਖਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਸ਼ਾਂਤੀ ਕਿਸੇ ਸ਼ੈੱਡ (shed) ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਉਦਯੋਗ ਚਲਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਸ਼ੈੱਡ ਇੱਕ ਘਣਾਵ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦੇ ਉੱਪਰ ਇੱਕ ਅਰਧ ਵੇਲਣ ਬਣਿਆ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.12)। ਜੇਕਰ ਇਸ ਸ਼ੈੱਡ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦੀਆਂ ਪਸਾਰਾਂ 7 m × 15 m ਹਨ ਅਤੇ ਘਣਾਵ ਆਕਾਰ ਭਾਗ ਦੀ ਉੱਚਾਈ 8 m ਹੈ ਤਾਂ ਸ਼ੈੱਡ ਵਿੱਚ ਮੌਜੂਦ ਹਵਾ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 13.12

ਹੁਣ ਜੇਕਰ ਇਹ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ ਸ਼ੈੱਡ ਵਿੱਚ ਰੱਖੀ ਮਸ਼ੀਨਰੀ 300 m^3 ਸਥਾਨ ਘੇਰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਸ਼ੈੱਡ ਦੇ ਅੰਦਰ 20 ਮਜ਼ਦੂਰ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ 0.08 m^3 ਦੇ ਔਸਤ ਨਾਲ ਸਥਾਨ ਘੇਰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਸ਼ੈੱਡ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀ ਹਵਾ ਹੋਵੇਗੀ? ($\pi = \frac{22}{7}$ ਲਓ)

ਹੱਲ : ਸ਼ੈੱਡ ਦੇ ਅੰਦਰ ਹਵਾ ਦਾ ਆਇਤਨ (ਜਦੋਂ ਇਸ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵਿਅਕਤੀ ਜਾਂ ਮਸ਼ੀਨਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ) ਘਣਾਵ ਦੇ ਅੰਦਰ ਦੀ ਹਵਾ ਅਤੇ ਅਰਧ ਬੇਲਨ ਦੇ ਅੰਦਰ ਦੀ ਹਵਾ ਦੇ ਆਇਤਨਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ।

ਹੁਣ ਘਣਾਵ ਦੀ ਲੰਬਾਈ, ਚੌੜਾਈ ਅਤੇ ਉੱਚਾਈ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 15 m, 7 m ਅਤੇ 8 m ਹੈ।

ਨਾਲ ਹੀ, ਅਰਧ ਵੇਲਨ ਦਾ ਵਿਆਸ 7 m ਅਤੇ ਉੱਚਾਈ 15 m ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਲੋੜੀਂਦਾ ਆਇਤਨ = ਘਣਾਵ ਦਾ ਆਇਤਨ + $\frac{1}{2}$ ਵੇਲਣ ਦਾ ਆਇਤਨ

$$= \left[15 \times 7 \times 8 + \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 15\right] \text{m}^3 = 1128.75 \text{ m}^3$$

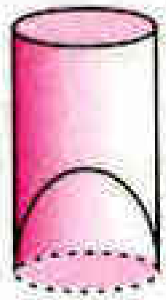
ਅੱਗੇ, ਮਸ਼ੀਨਰੀ ਦੁਆਰਾ ਘੇਰਿਆ ਗਿਆ ਸਥਾਨ = 300 m³

ਅਤੇ 20 ਮਜਦੂਰਾਂ ਦੁਆਰਾ ਘੇਰਿਆ ਗਿਆ ਸਥਾਨ = 20×0.08 m³ = 1.6 m³

ਇਸ ਲਈ, ਸ਼ੈੱਡ ਵਿੱਚ ਉਸ ਸਮੇਂ ਹਵਾ ਦਾ ਆਇਤਨ, ਜਦੋਂ ਉਸ ਵਿੱਚ ਮਸ਼ੀਨਰੀ ਅਤੇ ਮਜਦੂਰ ਹਨ

$$= 13128.75 - (300.00 + 1.60) = 827.15 \text{ m}^3$$

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਇੱਕ ਜੂਸ (juice) ਵੇਚਣ ਵਾਲਾ ਆਪਣੇ ਗ੍ਰਾਹਕਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 13.13 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਗਿਲਾਸਾਂ ਨਾਲ ਜੂਸ ਦਿੰਦਾ ਸੀ। ਵੇਲਣਾਕਾਰ ਗਿਲਾਸ ਦਾ ਅੰਦਰੂਨੀ ਵਿਆਸ 5 cm ਸੀ, ਪਰੰਤੂ ਗਿਲਾਸ ਦੇ ਹੇਠਲੇ ਆਧਾਰ (ਤਲ) ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਉਭਰਿਆ ਹੋਇਆ ਅਰਧ ਗੋਲਾ ਸੀ, ਜਿਸ ਨਾਲ ਗਿਲਾਸ ਦੀ ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ ਘੱਟ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਸੀ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਗਿਲਾਸ ਦੀ ਉੱਚਾਈ 10 cm ਸੀ, ਤਾਂ ਗਿਲਾਸ ਦੀ ਆਭਾਸੀ (apparent) ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਅਸਲ ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ($\pi = 3.14$ ਲਓ।)।



ਚਿੱਤਰ 13.13

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਗਿਲਾਸ ਦਾ ਅੰਦਰੂਨੀ ਵਿਆਸ = 5 cm ਹੈ ਅਤੇ ਉੱਚਾਈ = 10 cm ਹੈ,

ਇਸ ਲਈ ਗਿਲਾਸ ਦੀ ਆਭਾਸੀ ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ = $\pi r^2 h$

$$= 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 10 \text{ cm}^3 = 196.25 \text{ cm}^3$$

ਪਰੰਤੂ ਇਸ ਦੀ ਅਸਲ ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ ਉਪਰੋਕਤ ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ ਨਾਲ ਆਧਾਰ ਵਿੱਚ ਬਣੇ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦੇ ਆਇਤਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਘੱਟ ਹੈ।

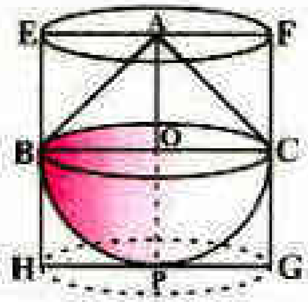
ਭਾਵ ਘਾਟ ਬਰਾਬਰ ਹੈ $\frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} \times 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 2.5 \text{ cm}^3 = 32.71 \text{ cm}^3$

ਇਸ ਲਈ, ਗਿਲਾਸ ਦੀ ਅਸਲ ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ = ਆਭਾਸੀ ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ − ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਦਾ ਆਇਤਨ

$$= (196.25 - 32.71) \text{ cm}^3$$

$$= 163.54 \text{ cm}^3$$

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਇੱਕ ਠੋਸ ਖਿਡੌਣਾ ਇੱਕ ਅਰਧਗੋਲੇ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ ਜਿਸ 'ਤੇ ਇੱਕ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੂ ਬਣਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉੱਚਾਈ 2 cm ਹੈ ਅਤੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਵਿਆਸ 4 cm ਹੈ। ਇਸ ਖਿਡੌਣੇ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਵੇਲਣ ਇਸ ਖਿਡੌਣੇ ਦੇ ਪੂਰਾ-ਪੂਰਾ ਉੱਪਰ (circumscribes) ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਵੇਲਣ ਅਤੇ ਖਿਡੌਣੇ ਦੇ ਆਇਤਨਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ। ($\pi = 3.14$ ਲਓ।)



ਚਿੱਤਰ 13.14

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ BPC ਅਰਧਗੋਲਾ ਹੈ ਅਤੇ ABC ਅਰਧਗੋਲੇ ਦੇ ਆਧਾਰ 'ਤੇ ਖੜ੍ਹਾ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.14)। ਅਰਧਗੋਲੇ (ਅਤੇ ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਵੀ) ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ $= \frac{1}{2} \times 4 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$

ਇਸ ਲਈ ਖਿਡੌਣੇ ਦਾ ਆਇਤਨ $= \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \left[\frac{2}{3} \times 3.14 \times (2)^3 + \frac{1}{3} \times 3.14 \times (2)^2 \times 2\right] \text{cm}^3 = 25.12 \text{ cm}^3$$

ਹੁਣ, ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਠੋਸ ਦੇ ਪੂਰਾ-ਪੂਰਾ ਉੱਪਰ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਵੇਲਣ EFGH ਹੈ। ਇਸ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਵੇਲਣ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ = HP = BO = 2 cm ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਉੱਚਾਈ

$$EH = AO + OP = (2 + 2) \text{ cm} = 4 \text{ cm ਹੈ।}$$

ਇਸ ਲਈ, ਲੋੜੀਂਦਾ ਆਇਤਨ = ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਬੇਲਣ ਦਾ ਆਇਤਨ – ਖਿਡੌਣੇ ਦਾ ਆਇਤਨ

$$= (3.14 \times 2^2 \times 4 - 25.12) \text{ cm}^3$$

$$= 25.12 \text{ cm}^3$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਦੋਨਾਂ ਆਇਤਨਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ $= 25.12 \text{ cm}^3$ ਹੈ।

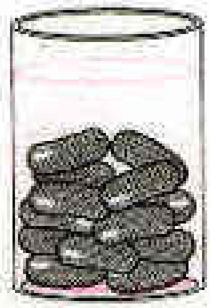
ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 13.2

(ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਨਾ ਕਿਹਾ ਜਾਵੇ, $\pi = \frac{22}{7}$ ਲਓ।)

1. ਇੱਕ ਠੋਸ ਇੱਕ ਅਰਧਗੋਲੇ 'ਤੇ ਖੜੇ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ। ਦੋਹਾਂ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 1 cm ਹੈ ਅਤੇ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਉਸਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇਸ ਠੋਸ ਦਾ ਆਇਤਨ π ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਕਰੋ।

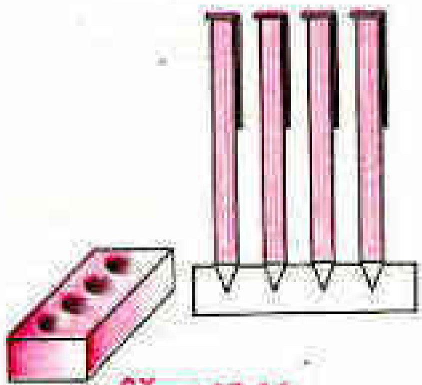
2. ਇੱਕ ਇੰਜੀਨਿਅਰਿੰਗ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਮਨੋਹਰ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪਤਲੀ ਐਲੂਮੀਨੀਅਮ ਦੀ ਸ਼ੀਟ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਮਾਡਲ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਕਿਹਾ ਗਿਆ ਜੋ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਬੇਲਣ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੋਵੇ ਜਿਸਦੇ ਦੋਨੋਂ ਸਿਰਿਆਂ 'ਤੇ ਦੋ ਸ਼ੰਕੂ ਜੁੜੇ ਹੋਏ ਹੋਣ। ਇਸ ਮਾਡਲ ਦਾ ਵਿਆਸ 3 cm ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਲੰਬਾਈ 12 cm ਹੈ। ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉੱਚਾਈ 2 cm ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਮਨੋਹਰ ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਏ ਗਏ ਮਾਡਲ ਵਿੱਚ ਮੌਜੂਦ ਹਵਾ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। (ਇਹ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਮਾਡਲ ਦੀਆਂ ਅੰਦਰੂਨੀ ਅਤੇ ਬਾਹਰੀ ਪਸਾਰਾਂ ਲਗਭਗ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।)

3. ਇੱਕ ਗੁਲਾਬਜਾਮਣ ਵਿੱਚ ਉਸਦੇ ਆਇਤਨ ਦੀ ਲਗਭਗ 30% ਖੰਡ ਦੀ ਚਾਸਣੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। 45 ਗੁਲਾਬ ਜਾਮਣਾਂ ਵਿੱਚ ਲਗਭਗ ਕਿੰਨੀ ਚਾਸਣੀ ਹੋਵੇਗੀ, ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਗੁਲਾਬਜਾਮਣ ਇੱਕ ਬੇਲਣ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਦੋਨੋਂ ਸਿਰੇ ਅਰਧਗੋਲਾਕਾਰ ਹਨ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਲੰਬਾਈ 5 cm ਅਤੇ ਵਿਆਸ 2.8 cm ਹੈ (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.15)।



ਚਿੱਤਰ 13.15

4. ਇੱਕ ਕਲਮਦਾਨ ਘਣਾਵ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੀ ਇੱਕ ਲੱਕੜੀ ਨਾਲ ਬਣਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕਲਮ ਰੱਖਣ ਦੇ ਲਈ ਚਾਰ ਸ਼ੰਕੂ ਆਕਾਰ ਖੱਡੇ ਬਣੇ ਹੋਏ ਹਨ। ਘਣਾਵ ਦੀਆਂ ਪ੍ਰਮਾਣਾਂ (dimensions) 15 cm × 10 cm × 3.5 cm ਹਨ। ਹਰੇਕ ਖੱਡੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 0.5 cm ਅਤੇ ਗਹਿਰਾਈ 1.4 cm ਹੈ। ਪੂਰੇ ਕਲਮਦਾਨ ਵਿੱਚ ਲੱਕੜੀ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.16)।

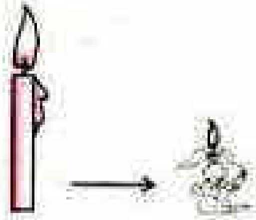


ਚਿੱਤਰ 13.16

5. ਇੱਕ ਬਰਤਨ ਇੱਕ ਉਲਟੇ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਉੱਚਾਈ 8 cm ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਉਪਰੀ ਸਿਰੇ (ਜੋ ਖੁਲਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ) ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 5 cm ਹੈ। ਇਹ ਉੱਪਰ ਤੱਕ ਪਾਣੀ ਨਾਲ ਭਰਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਇਸ ਬਰਤਨ ਵਿੱਚ ਸਿੱਕੇ ਦੀਆਂ ਕੁੱਝ ਗੋਲੀਆਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ 0.5 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਗੋਲਾ ਹੈ, ਪਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਵਿੱਚੋਂ ਭਰੇ ਹੋਏ ਪਾਣੀ ਦਾ ਇੱਕ ਚੌਥਾਈ ਭਾਗ ਬਾਹਰ ਨਿਕਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਬਰਤਨ ਵਿੱਚ ਪਾਈਆਂ ਗਈਆਂ ਸਿੱਕੇ ਦੀਆਂ ਗੋਲੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਉੱਚਾਈ 220 cm ਅਤੇ ਆਧਾਰ ਵਿਆਸ 24 cm ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਵੇਲਣ ਜਿਸ ਤੇ ਉੱਚਾਈ 60 cm ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 8 cm ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵੇਲਣ ਰੱਖਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਨਾਲ ਲੋਹੇ ਦਾ ਇੱਕ ਖੰਬਾ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਖੰਬੇ ਦਾ ਦ੍ਰਵਮਾਨ (ਭਾਰ) ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਹੈ 1 cm^3 ਲੋਹੇ ਦਾ ਦ੍ਰਵਮਾਨ (ਭਾਰ) 8 g ਹੁੰਦਾ ਹੈ ($\pi = 3.14$ ਲਓ)।
7. ਇੱਕ ਠੋਸ ਵਿੱਚ, ਉੱਚਾਈ 120 cm ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 60 cm ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ ਜੋ 60 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲੇ 'ਤੇ ਬਣਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਠੋਸ ਨੂੰ ਪਾਣੀ ਨਾਲ ਭਰੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਵੇਲਣ ਵਿੱਚ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਸਿੱਧਾ ਪਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਵੇਲਣ ਦੇ ਤਲ ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਕਰੇ। ਜੇਕਰ ਵੇਲਣ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 60 cm ਹੈ ਅਤੇ ਉੱਚਾਈ 180 cm ਹੈ ਤਾਂ ਬੇਲਣ ਵਿੱਚ ਬਾਕੀ ਬਚੇ ਪਾਣੀ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. ਇੱਕ ਗੋਲਾਕਾਰ ਕੱਚ ਦੇ ਬਰਤਨ ਦੀ ਇੱਕ ਬੇਲਣ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੀ ਗਰਦਨ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਲੰਬਾਈ 8 cm ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਆਸ 2 cm ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਗੋਲਾਕਾਰ ਭਾਗ ਦਾ ਵਿਆਸ 8.5 cm ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਭਰੇ ਜਾ ਸਕਣ ਵਾਲੇ ਪਾਣੀ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਮਾਪ ਕੇ, ਇੱਕ ਬੱਚੇ ਨੇ ਇਹ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਕਿ ਇਸ ਬਰਤਨ ਦਾ ਆਇਤਨ 345 cm^3 ਹੈ। ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਉਸ ਬੱਚੇ ਦਾ ਉੱਤਰ ਸਹੀ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ, ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਮਾਪਣ ਅੰਦਰੂਨੀ ਮਾਪਣ ਹੈ ਅਤੇ $\pi = 3.14$।

13.4 ਇੱਕ ਠੋਸ ਦਾ ਇੱਕ ਆਕਾਰ ਤੋਂ ਦੂਸਰੇ ਆਕਾਰ ਵਿੱਚ ਰੂਪਾਂਤਰ

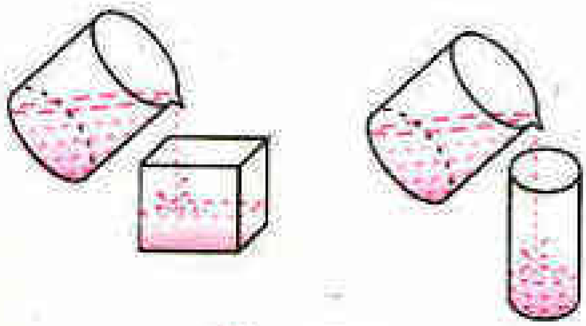
ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੂਪ ਨਾਲ, ਤੁਸੀਂ ਮੋਮਬੱਤੀਆਂ ਜ਼ਰੂਰ ਦੇਖੀਆਂ ਹੋਣਗੀਆਂ। ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ, ਇਹ ਵੇਲਣ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਤੁਸੀਂ ਪਸ਼ੂਆਂ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੀਆਂ ਵੀ ਕੁੱਝ ਮੋਮਬੱਤੀਆਂ ਵੀ ਦੇਖੀਆਂ ਹੋਣਗੀਆਂ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.17)।



ਚਿੱਤਰ 13.17

ਇਹ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣਾਈਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ? ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਕਿਸੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਮੋਮਬੱਤੀ ਬਣਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹੋ, ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇੱਕ ਧਾਤੂ ਦੇ ਬਰਤਨ ਵਿੱਚ ਮੋਮ ਨੂੰ ਉਦੋਂ ਤੱਕ ਗਰਮ ਕਰਨਾ ਪਵੇਗਾ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਪੂਰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦ੍ਰਵ ਵਿੱਚ ਨਾ ਬਦਲ ਜਾਵੇ। ਫਿਰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਇੱਕ ਹੋਰ ਅਜਿਹੇ ਬਰਤਨ ਜਾਂ ਭਾਂਡੇ ਵਿੱਚ (ਸਾਂਚੇ ਵਿੱਚ) ਪਾਵਾਂਗੇ ਜਿਸ ਦਾ ਆਕਾਰ ਉਹੀ ਹੋਵੇਗਾ ਜਿਸ ਆਕਾਰ ਦੀ ਤੁਸੀਂ ਮੋਮਬੱਤੀ ਬਣਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹੋ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ : ਇੱਕ ਠੋਸ ਬੇਲਣ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੀ ਮੋਮਬੱਤੀ ਲਓ, ਇਸ ਨੂੰ ਪਿਘਲਾਓ ਅਤੇ ਪਿਘਲੀ ਹੋਈ ਪੂਰੀ ਮੋਮ ਨੂੰ ਖਰਗੋਸ਼ ਦੇ ਆਕਾਰ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਸਾਂਚੇ ਵਿੱਚ ਪਾਓ। ਠੰਡਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਤੁਹਾਨੂੰ ਖਰਗੋਸ਼ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੀ ਮੋਮਬੱਤੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ। ਨਵੀਂ ਮੋਮਬੱਤੀ ਦਾ ਆਇਤਨ ਉਹੀ ਹੋਵੇਗਾ ਜੋ ਪਹਿਲੀ ਮੋਮਬੱਤੀ ਦਾ ਸੀ। ਇਹੀ ਗੱਲ ਸਾਨੂੰ ਉਦੋਂ ਵੀ ਯਾਦ ਰੱਖਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਠੋਸ ਨੂੰ ਹੋਰ ਆਕਾਰ ਦੇ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਠੋਸ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹੋਏ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਜਦੋਂ ਕੋਈ ਦ੍ਰਵ ਪਦਾਰਥ ਇੱਕ ਆਕਾਰ ਦੇ ਬਰਤਨ ਤੋਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਆਕਾਰ ਦੇ ਬਰਤਨ ਵਿੱਚ ਪਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਤੁਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 13.18 ਵਿੱਚ ਦੇਖਦੇ ਹੋ।



ਚਿੱਤਰ 13.18

ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਨੂੰ ਸਮਝਾਉਣ ਦੇ ਲਈ, ਆਓ ਅਸੀਂ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਮਾਡਲ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲੀ ਮਿੱਟੀ ਨਾਲ ਉੱਚਾਈ 24 cm ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 6 cm ਆਧਾਰ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਕ ਬੱਚੇ ਨੇ ਇਸਨੂੰ ਗੋਲੇ ਦੇ ਆਕਾਰ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ। ਗੋਲੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਆਇਤਨ $= \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24 \text{ cm}^3$

ਜੇਕਰ ਗੋਲੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦਾ ਆਇਤਨ $\frac{4}{3}\pi r^3$ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਤੇ ਗੋਲੇ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਮਿੱਟੀ ਦੇ ਆਇਤਨ ਬਰਾਬਰ ਹੈ,

ਭਾਵ $\frac{4}{3} \times \pi \times r^3 = \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$

ਭਾਵ $r^3 = 3 \times 3 \times 24 = 3^3 \times 2^3$

ਇਸ ਲਈ $r = 3 \times 2 = 6$

ਇਸ ਲਈ, ਗੋਲੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 6 cm ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਸਿਲਵੀ ਦੇ ਘਰ ਦੀ ਛੱਤ 'ਤੇ ਬੇਲਣ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੀ ਇੱਕ ਟੈਂਕੀ ਹੈ। ਇਸ ਟੈਂਕੀ ਨੂੰ ਇੱਕ ਧਰਤੀ ਵਿੱਚ ਬਣੀ ਟੈਂਕੀ ਵਿੱਚ ਭਰੇ ਪਾਣੀ ਨੂੰ ਪੰਪ ਦੁਆਰਾ ਪਹੁੰਚਾ ਕੇ ਭਰਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਧਰਤੀ ਵਿੱਚ ਬਣੀ ਟੈਂਕੀ ਇੱਕ ਘਣਾਵ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਦੇ ਪਸਾਰ 1.57 m × 1.44 m × 95 cm ਹਨ। ਛੱਤ ਦੀ ਟੈਂਕੀ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 60 cm ਹੈ ਅਤੇ ਉੱਚਾਈ 95 cm ਹੈ। ਜੇਕਰ ਧਰਤੀ ਵਿੱਚ ਬਣੀ ਟੈਂਕੀ ਪਾਣੀ ਨਾਲ ਪੂਰੀ ਭਰੀ ਹੋਈ ਸੀ, ਤਾਂ ਉਸ ਨਾਲ ਛੱਤ ਦੀ ਟੈਂਕੀ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਭਰਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਧਰਤੀ ਵਿੱਚ ਬਣੀ ਟੈਂਕੀ ਵਿੱਚ ਪਾਣੀ ਕਿੰਨੀ ਉੱਚਾਈ ਤੱਕ ਰਹਿ ਜਾਵੇਗਾ? ਛੱਤ ਦੀ ਟੈਂਕੀ ਦੀ ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ ਦਾ ਧਰਤੀ ਵਿੱਚ ਬਣੀ ਟੈਂਕੀ ਦੀ ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ ਨਾਲ ਤੁਲਣਾ ਕਰੋ। ($\pi = 3.14$ ਲਓ।)

ਹੱਲ : ਛੱਤ ਦੀ ਟੈਂਕੀ ਦਾ ਆਇਤਨ = ਧਰਤੀ ਵਿੱਚ ਬਣੀ ਟੈਂਕੀ ਤੋਂ ਕੱਢੇ ਗਏ ਪਾਣੀ ਦਾ ਆਇਤਨ

ਹੁਣ, ਛੱਤ ਦੀ ਟੈਂਕੀ (ਵੇਲਣ) ਦਾ ਆਇਤਨ $= \pi r^2 h$

$= 3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95 \text{ m}^3$

ਧਰਤੀ ਵਿੱਚ ਬਣੀ ਟੈਂਕੀ ਦੇ ਪਾਣੀ ਨਾਲ ਪੂਰੀ ਭਰੀ ਹੋਣ ਤੇ ਪਾਣੀ ਦਾ ਆਇਤਨ

$= l \times b \times h = 1.57 \times 1.44 \times 0.95 \text{ m}^3$

ਛੱਤ ਦੀ ਟੈਂਕੀ ਨੂੰ ਪਾਣੀ ਨਾਲ ਪੂਰਾ ਭਰਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਧਰਤੀ ਵਿੱਚ ਬਣੀ ਟੈਂਕੀ ਵਿੱਚ ਬਾਕੀ ਬਚੇ ਪਾਣੀ ਦਾ ਆਇਤਨ

$= [(1.57 \times 1.44 \times 0.95) - (3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95)]\text{m}^3 = (1.57 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95 \times 2)\text{m}^3$

ਇਸ ਲਈ, ਧਰਤੀ ਵਿੱਚ ਬਣੀ ਟੈਂਕੀ ਵਿੱਚ ਬਾਕੀ ਬਚੇ ਪਾਣੀ ਦੀ ਉੱਚਾਈ $= \frac{\text{ਉਸ ਵਿੱਚ ਬਚੇ ਪਾਣੀ ਦਾ ਆਇਤਨ}}{l \times b}$

$= \frac{1.57 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95 \times 2}{1.57 \times 1.44} \text{ m}$

$= 0.475 \text{ m} = 47.5 \text{cm}.$

ਨਾਲ ਹੀ, $\frac{\text{ਛੱਤ ਦੀ ਟੈਂਕੀ ਦੀ ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ}}{\text{ਧਰਤੀ ਵਿੱਚ ਬਣੀ ਟੈਂਕੀ ਦੀ ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ}} = \frac{3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95}{1.57 \times 1.44 \times 0.95} = \frac{1}{2}$

ਇਸ ਲਈ, ਛੱਤ ਦੀ ਟੈਂਕੀ ਦੀ ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ ਧਰਤੀ ਵਿੱਚ ਬਣੀ ਟੈਂਕੀ ਦੀ ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ ਦੀ ਅੱਧੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : 1 cm ਵਿਆਸ ਵਾਲੀ 8 cm ਲੰਬੀ ਤਾਂਬੇ ਦੀ ਇੱਕ ਛੜ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਚੌੜਾਈ ਵਾਲੇ 18 m ਲੰਬੇ ਇੱਕ ਤਾਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਖਿੱਚਿਆ ਜਾਂਦਾ (ਬਦਲਿਆ ਜਾਂਦਾ) ਹੈ। ਤਾਰ ਦੀ ਮੋਟਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਛੜ ਦਾ ਆਇਤਨ $= \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 8 \text{ cm}^3 = 2\pi \text{cm}^3$

ਬਰਾਬਰ ਆਇਤਨ ਵਾਲੇ ਤਾਰ ਦੀ ਲੰਬਾਈ = 18 m = 1800 cm

ਜੇਕਰ ਤਾਰ ਦੇ ਦੁਸਾਰ ਕਾਟ (cross-section) ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਹੈ, ਤਾਂ ਤਾਰ ਦਾ ਆਇਤਨ $= \pi \times r^2 \times 1800 \text{ cm}^3$

ਇਸ ਲਈ $\quad \pi \times r^2 \times 1800 = 2\pi$

ਭਾਵ $\quad r^2 = \frac{1}{900}$

ਭਾਵ $\quad r = \frac{1}{30}$ cm

ਇਸ ਲਈ, ਤਾਰ ਦੇ ਦੁਸਾਰ ਕਾਟ ਦਾ ਵਿਆਸ, ਤਾਰ ਦੀ ਚੌੜਾਈ $\frac{1}{15}$ cm ਭਾਵ 0.67 mm (ਲਗਭਗ) ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਪਾਣੀ ਨਾਲ ਪੂਰੀ ਭਰੀ ਹੋਈ ਇੱਕ ਅਰਧ ਗੋਲਾਕਾਰ ਟੈਂਕੀ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪਾਇਪ ਦੁਆਰਾ $3\frac{4}{7}$ ਲੀਟਰ ਪ੍ਰਤਿ ਸੈਕਿੰਡ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਖਾਲੀ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਟੈਂਕੀ ਦਾ ਵਿਆਸ 3 m ਹੈ, ਤਾਂ ਉਹ ਕਿੰਨੇ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਅੱਧੀ ਖਾਲੀ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ? ($\pi = \frac{22}{7}$ ਲਓ)

ਹੱਲ : ਅਰਧ ਗੋਲਾਕਾਰ ਟੈਂਕੀ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ $= \frac{3}{2}$ m

ਇਸ ਲਈ, ਟੈਂਕੀ ਦਾ ਆਇਤਨ $= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 \text{ m}^3 = \frac{99}{14}\text{m}^3$

ਉਸ ਪਾਣੀ ਦਾ ਆਇਤਨ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਖਾਲੀ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਹੈ

$$= \frac{1}{2} \times \frac{99}{14} \text{ m}^3$$

$$= \frac{99}{28} \times 1000 = \frac{99000}{28} \text{ ਲਿਟਰ}$$

ਹੁਣ, $\frac{25}{7}$ ਲਿਟਰ ਪਾਣੀ ਖਾਲੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ 1 ਸੈਕਿੰਡ ਵਿੱਚ, ਇਸ ਲਈ $\frac{99000}{28}$ ਲਿਟਰ ਪਾਣੀ ਖਾਲੀ ਹੋਵੇਗਾ $\frac{99000}{28} \times \frac{7}{25}$ ਸੈਕਿੰਡ ਵਿੱਚ, ਭਾਵ 16.5 ਮਿੰਟ ਵਿੱਚ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 13.3

(ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕਿਹਾ ਨਾ ਜਾਵੇ, $\pi = \frac{22}{7}$ ਲਓ)

1. ਅਰਧ ਵਿਆਸ 4.2 cm ਵਾਲੇ ਧਾਤੂ ਦੇ ਇੱਕ ਗੋਲੇ ਨੂੰ ਪਿਘਲਾ ਕੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 6 cm ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਬੇਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਢਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਬੇਲਨ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 6 cm, 8 cm ਅਤੇ 10 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸਾਂ ਵਾਲੇ ਧਾਤੂ ਦੇ ਤਿੰਨ ਠੋਸ ਗੋਲਿਆਂ ਨੂੰ ਪਿਘਲਾ ਕੇ ਇੱਕ ਵੱਡਾ ਠੋਸ ਗੋਲਾ ਬਣਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਗੋਲੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਵਿਆਸ 7 m ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਖੂਹ 20 m ਡੂੰਘਾ ਪੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਪੁੱਟਣ ਨਾਲ ਨਿਕਲੀ ਹੋਈ ਮਿੱਟੀ ਨੂੰ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਫੈਲਾ ਕੇ 22 m × 14 m ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਚਬੂਤਰਾ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਚਬੂਤਰੇ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. 3 m ਵਿਆਸ ਦਾ ਇੱਕ ਖੂਹ 14 m ਦੀ ਗਹਿਰਾਈ (ਡੂੰਘਾਈ) ਤੱਕ ਪੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਕਲੀ ਹੋਈ ਮਿੱਟੀ ਨੂੰ ਖੂਹ ਦੇ ਚਾਰੇ ਪਾਸੇ 4 m ਚੌੜੀ ਇੱਕ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਚਬੂਤਰਾ (ring) ਬਣਾਉਂਦੇ ਹੋਏ, ਸਮਾਨ ਰੂਪ ਨਾਲ ਫੈਲਾ ਕੇ ਇੱਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਬੰਨ ਬਣਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਬੰਨ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. 12 cm ਵਿਆਸ ਅਤੇ 15 cm ਉੱਚਾਈ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਵੇਲਣ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਬਰਤਨ ਆਈਸਕ੍ਰੀਮ ਨਾਲ ਪੂਰਾ ਭਰਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਇਸ ਆਇਸਕ੍ਰੀਮ ਦੀ ਉੱਚਾਈ 12 cm ਅਤੇ ਵਿਆਸ 6 cm ਵਾਲੇ ਸ਼ੰਕੂਆਂ ਵਿੱਚ ਭਰਿਆ ਜਾਣਾ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਉਪਰੀ ਸਿਰਾ ਅਰਧ ਗੋਲਾਕਾਰ ਹੋਵੇਗਾ। ਉਨ੍ਹਾਂ ਸ਼ੰਕੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਇਸ ਆਇਸਕ੍ਰੀਮ ਨਾਲ ਭਰੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।
6. 5.5 cm × 10 cm × 3.5 cm ਪਸਾਰਾਂ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਘਣਾਵ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ 1.75 cm ਵਿਆਸ ਅਤੇ 2 mm ਮੋਟਾਈ ਵਾਲੇ ਕਿੰਨੇ ਚਾਂਦੀ ਦੇ ਸਿੱਕਿਆਂ (coins) ਨੂੰ ਪਿਘਲਾਉਣਾ ਪਏਗਾ?
7. 32 cm ਉੱਚੀ ਅਤੇ 18 cm ਆਧਾਰ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਵੇਲਣਾਕਾਰ ਬਾਲਟੀ ਰੇਤ ਨਾਲ ਭਰੀ ਹੋਈ ਹੈ। ਇਸ ਬਾਲਟੀ ਨੂੰ ਭੂਮੀ 'ਤੇ ਖਾਲੀ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਰੇਤ ਦੀ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਆਕਾਰ ਢੇਰੀ ਬਣਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸ਼ੰਕੂ ਆਕਾਰ ਢੇਰੀ ਦੀ ਉੱਚਾਈ 24 cm ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਢੇਰੀ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਅਤੇ ਤਿਰਛੀ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. 6 cm ਚੌੜੀ ਅਤੇ 1.5 cm ਗਹਿਰੀ (ਡੂੰਘੀ) ਇੱਕ ਨਹਿਰ ਵਿੱਚ ਪਾਣੀ 10 km/h ਦੀ ਚਾਲ ਨਾਲ ਵਹਿ (ਚੱਲ) ਰਿਹਾ ਹੈ। 30 ਮਿੰਟ ਵਿੱਚ, ਇਹ ਨਹਿਰ ਕਿੰਨੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਸਿੰਚਾਈ ਕਰ ਸਕੇਗੀ, ਜਦਕਿ ਸਿੰਚਾਈ ਦੇ ਲਈ 8 cm ਡੂੰਘੇ ਪਾਣੀ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
9. ਇੱਕ ਕਿਸਾਨ ਆਪਣੇ ਖੇਤ ਵਿੱਚ ਬਣੀ 10 m ਵਿਆਸ ਵਾਲੀ ਅਤੇ 2 m ਡੂੰਘੀ ਇੱਕ ਵੇਲਣਾਕਾਰ ਟੈਂਕੀ ਨੂੰ ਅੰਦਰੂਨੀ ਵਿਆਸ 20 cm ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਪਾਇਪ ਦੁਆਰਾ ਇੱਕ ਨਹਿਰ ਨਾਲ ਜੋੜਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪਾਇਪ ਵਿੱਚ ਪਾਣੀ 3 km/h ਦੀ ਚਾਲ ਨਾਲ ਚੱਲ ਵਹਿ ਰਿਹਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਕਿੰਨੇ ਸਮੇਂ ਬਾਅਦ ਟੈਂਕੀ ਪੂਰੀ ਭਰ ਜਾਵੇਗੀ?

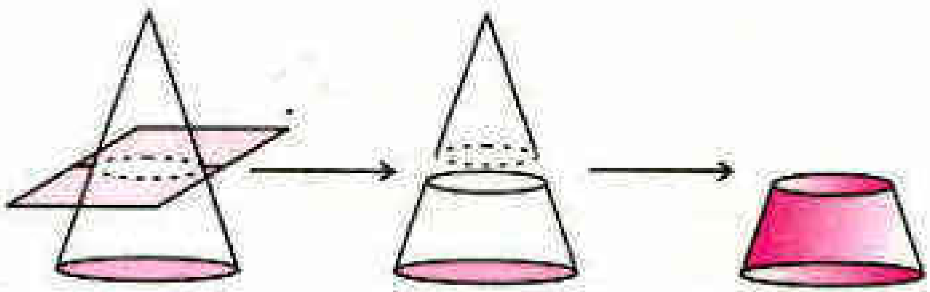
13.5 ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਛਿੰਨਕ (Frustum)

ਭਾਗ 13.2 ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਉਨ੍ਹਾਂ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਦੇਖਿਆ ਜੋ ਦੋ ਆਧਾਰ ਭੂਤ ਠੋਸਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਨਾਲ ਬਣਦੇ ਹਨ। ਆਓ ਹੁਣ ਇਸ ਨਾਲ ਕੁੱਝ ਅਲੱਗ ਕਰੀਏ। ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੂ ਲਵਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਇੱਕ ਭਾਗ ਹਟਾ ਦੇਵਾਂਗੇ। ਅਜਿਹਾ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਅਨੇਕਾਂ ਵਿਧੀਆਂ ਹਨ। ਪਰੰਤੂ ਜਿਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਸਾਡੀ ਰੁਚੀ ਹੈ ਉਹ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਤਲ ਦੁਆਰਾ ਇਸ ਨੂੰ ਕੱਟ ਕੇ ਇੱਕ ਛੋਟਾ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੂ ਅਲੱਗ ਕਰੋ। ਤੁਸੀਂ ਇਸ 'ਤੇ ਜ਼ਰੂਰ ਹੀ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਪਾਣੀ ਪੀਣ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਗਿਲਾਸ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇਸੇ ਆਕਾਰ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.19)।

ਚਿੱਤਰ 13.19

ਕਿਰਿਆ 1 : ਕੁੱਝ ਮਿੱਟੀ ਜਾਂ ਅਜਿਹਾ ਹੀ ਕੋਈ ਪਦਾਰਥ (ਜਿਵੇਂ ਪਲਾਸਟਿਕ, ਕਲੇ ਆਦਿ) ਲਓ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਬਣਾਓ। ਇਸ ਨੂੰ ਚਾਕੂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਆਧਾਰ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਕੱਟੋ। ਛੋਟੇ ਸ਼ੰਕੂ ਨੂੰ ਹਟਾ ਦਿਓ। ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ ਕੀ ਬੱਚਦਾ ਹੈ? ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ ਇੱਕ ਠੋਸ ਬੱਚਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ *ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਛਿੰਨਕ (frustum of a cone)* ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਸਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਅਰਧ ਵਿਆਸਾਂ ਵਾਲੇ ਦੋ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਸਿਰੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸ਼ੰਕੂ ਨੂੰ ਉਸਦੇ ਆਧਾਰ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਕਿਸੇ ਤਲ ਦੁਆਰਾ ਕੱਟਦੇ ਹਾਂ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.20) ਅਤੇ ਇਸ ਤਲ ਦੇ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਬਣੇ ਸ਼ੰਕੂ ਨੂੰ ਹਟਾ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਤਲ ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ ਬਚੇ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਭਾਗ ਨੂੰ **ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਛਿੰਨਕ (frustum)*** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।



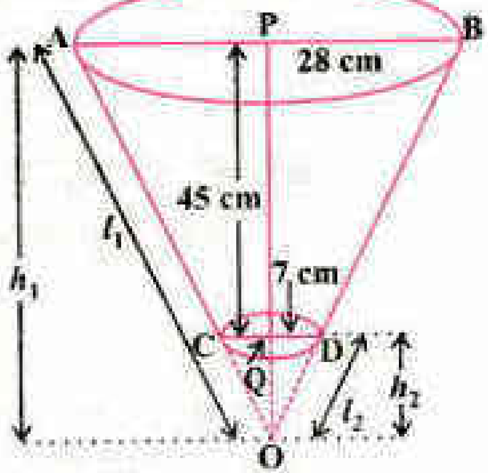
ਚਿੱਤਰ 13.20

ਅਸੀਂ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਆਇਤਨ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ? ਆਓ ਇਸ ਨੂੰ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਦੁਆਰਾ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰੀਏ।

* 'Frustum' ਇੱਕ ਲੈਟਿਨ ਸ਼ਬਦ ਹੈ, ਜਿਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ, 'ਕੱਟਿਆ ਹੋਇਆ ਟੁਕੜਾ' ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਬਹੁ ਵਚਨ ਹੈ 'Frusta'

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ, ਜੋ 45 *cm* ਉੱਚਾ ਹੈ, ਦੇ ਸਿਰਿਆਂ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 28 *cm* ਅਤੇ 7 *cm* ਹਨ। ਇਸਦਾ ਆਇਤਨ, ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ($\pi = \frac{22}{7}$ ਲਓ)

ਹੱਲ : ਇਸ ਛਿੰਨਕ ਨੂੰ ਦੋ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੂਆਂ OAB ਅਤੇ OCD ਦੇ ਅੰਤਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.21)। ਮੰਨ ਲਓ ਸੈਂਟੀਮੀਟਰ ਵਿੱਚ ਸ਼ੰਕੂ OAB ਦੀ ਉੱਚਾਈ h_1 ਹੈ ਅਤੇ ਤਿਰਛੀ ਉੱਚਾਈ l_1 ਹੈ, ਭਾਵ $OP = h_1$ ਅਤੇ $OA = OB = l_1$ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਓ ਸ਼ੰਕੂ OCD ਦੀ ਸੈਂਟੀਮੀਟਰ ਵਿੱਚ ਉੱਚਾਈ h_2 ਅਤੇ ਤਿਰਛੀ ਉੱਚਾਈ l_2 ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 13.21

ਸਾਨੂੰ $r_1 = 28\ cm$, $r_2 = 7\ cm$, ਅਤੇ ਛਿੰਨਕ ਦੀ ਉੱਚਾਈ $(h) = 45\ cm$ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਨ।

ਨਾਲ ਹੀ $$h_1 = 45 + h_2 \qquad (1)$$

ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਸਾਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸ਼ੰਕੂਆਂ OAB ਅਤੇ OCD ਦੀਆਂ ਉੱਚਾਈਆਂ h_1 ਅਤੇ h_2 ਨੂੰ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਨਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ ਤ੍ਰਿਭੁਜ OPB ਅਤੇ OQD ਸਮਰੂਪ ਹੈ (ਕਿਉਂ?) ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ :

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{28}{7} = \frac{4}{1} \qquad (2)$$

(1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ $h_2 = 15$ ਅਤੇ $h_1 = 60$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

ਹੁਣ, ਛਿੰਨਕ ਦਾ ਆਇਤਨ

= ਸ਼ੰਕੂ OAB ਦਾ ਆਇਤਨ – ਸ਼ੰਕੂ OCD ਦਾ ਆਇਤਨ

$$= \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{22}{7}\cdot(28)^2\cdot(60) - \frac{1}{3}\cdot\frac{22}{7}\cdot(7)^2\cdot(15)\right]\text{cm}^3 = 48510\ \text{cm}^3$$

ਸ਼ੰਕੂ OAB ਅਤੇ ਸ਼ੰਕੂ OCD ਦੀਆਂ ਤਿਰਛੀਆਂ ਉੱਚਾਈਆਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ l_1 ਅਤੇ l_2 ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ :

$$l_2 = \sqrt{(7)^2 + (15)^2} = 16.55\ \text{cm (ਲਗਭਗ)}$$

$$l_1 = \sqrt{(28)^2 + (60)^2} = 4\sqrt{(7)^2 + (15)^2} = 4 \times 16.55 = 66.20\ \text{cm}$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਛਿੰਨਕ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \pi r_1 l_1 - \pi r_2 l_2$

$$= \frac{22}{7}(28)(66.20) - \frac{22}{7}(7)(16.55) = 5461.5 \text{ cm}^2$$

ਹੁਣ, ਛਿੰਨਕ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$=$ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $+ \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

$$= 5461.5 \text{ cm}^2 + \frac{22}{7}(28)^2 \text{ cm}^2 + \frac{22}{7}(7)^2 \text{ cm}^2$$

$$= 5461.5 \text{ cm}^2 + 2464 \text{ cm}^2 + 154 \text{ cm}^2 = 8079.5 \text{ cm}^2$$

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿਸੇ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਦੀ ਉੱਚਾਈ h ਹੈ, ਤਿਰਛੀ ਉੱਚਾਈ l ਹੈ ਅਤੇ ਸਿਰਿਆਂ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r_1 ਅਤੇ r_2 $(r_1 > r_2)$ ਹੈ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਦੇ ਆਇਤਨ, **ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ** ਅਤੇ **ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ** ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰਾਂ ਦਾ ਸਿੱਧਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ:

(i) *ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਦਾ ਆਇਤਨ* $= \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

(ii) *ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ* $= \pi(r_1 + r_2)\, l$

ਜਿੱਥੇ $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$.

(iii) *ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਛਿੰਨਕ ਦਾ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ* $= \pi l\,(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$,

ਜਿੱਥੇ $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

ਇਨ੍ਹਾਂ ਸੂਤਰਾਂ ਨੂੰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਅਸੀਂ ਇੱਥੇ ਇਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ।

ਆਓ ਇਨ੍ਹਾਂ ਸੂਤਰਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਉਦਾਹਰਣ 12 ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੀਏ।

(i) ਛਿੰਨਕ ਦਾ ਆਇਤਨ $= \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\right)$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{22}{7} \cdot 45 \cdot \left[(28)^2 + (7)^2 + (28)(7)\right] \text{cm}^3$$

$$= 48510 \text{ cm}^3$$

(ii) ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ $\quad l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{(45)^2 + (28-7)^2} \text{ cm}$

$$= 3\sqrt{(15)^2 + (7)^2} = 49.65 \text{ cm}$$

ਇਸ ਲਈ ਛਿੰਨਕ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \pi(r_1 + r_2)\, l = \frac{22}{7}(28 + 7)(49.65) = 5461.5 \text{ cm}^2$$

(iii) ਛਿੰਨਕ ਦਾ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \pi(r_1 + r_2)l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$

$$= \left[5461.5 + \frac{22}{7}(28)^2 + \frac{22}{7}(7)^2\right] \text{cm}^2 = 8079.5 \text{ cm}^2$$

ਆਓ ਇਨ੍ਹਾਂ ਸੂਤਰਾਂ ਦੀ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਵਰਤੋਂ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਧਰਮਿੰਦਰ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਪਤਨੀ ਰੇਖਾ ਗੰਨੇ ਦੇ ਰਸ ਨਾਲ ਗੁੜ ਬਣਾ ਰਹੇ ਹਨ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਗੰਨੇ ਦੇ ਰਸ ਨੂੰ ਗਰਮ ਕਰਕੇ ਸੀਰਾ ਬਣਾ ਲਿਆ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੇ ਸਾਂਚਿਆਂ ਵਿੱਚ ਪਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਚੱਕਰੀ ਫਲਕਾਂ ਦੇ ਵਿਆਸ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 30 cm ਅਤੇ 35 cm ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਂਚੇ ਦੀ ਸਿੱਧੀ ਉੱਚਾਈ 14 cm ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.22)। ਜੇਕਰ 1 cm^3 ਸੀਰੇ ਦਾ ਦ੍ਰਵਮਾਨ ਲਗਭਗ 1.2 g ਹੈ ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਸਾਂਚੇ ਵਿੱਚ ਭਰੇ ਜਾ ਸਕਣ ਵਾਲੇ ਸੀਰੇ ਦਾ ਦ੍ਰਵਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। ($\pi = \frac{22}{7}$ ਲਓ)

ਚਿੱਤਰ 13.22

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਂਚਾ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ, ਇਸ ਵਿੱਚ ਭਰੇ ਜਾ ਸਕਣ ਵਾਲੇ ਸੀਰੇ ਦਾ ਆਇਤਨ $= \frac{\pi}{3}h\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\right)$,

ਜਿੱਥੇ r_1 ਵੱਡੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੈ ਅਤੇ r_2 ਛੋਟੇ ਆਧਾਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੈ।

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 14\left[\left(\frac{35}{2}\right)^2 + \left(\frac{30}{2}\right)^2 + \left(\frac{35}{2} \times \frac{30}{2}\right)\right] \text{cm}^3 = 11641.7 \text{ cm}^3$$

ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ 1 cm^3 ਸੀਰੇ ਦਾ ਦ੍ਰਵਮਾਨ 1.2 ਗ੍ਰਾਮ ਹੈ। ਅੰਤ ਹਰੇਕ ਸਾਂਚੇ ਵਿੱਚ ਭਰੇ ਜਾ ਸਕਣ ਵਾਲੇ ਸੀਰੇ ਦਾ ਭਾਰ ਦ੍ਰਵਮਾਨ $= (11641.7 \times 1.2)$ g

$= 13970.04\text{g} = 13.97 \text{ kg} = 14 \text{ kg}$ (ਲਗਭਗ)

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਧਾਤੂ ਨਾਲ ਬਣੀ ਇੱਕ ਖੁਲੀ ਬਾਲਟੀ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਇੱਕ ਛਿੰਨਕ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੀ ਹੈ, ਜੋ ਉਸੇ ਧਾਤੂ ਦੇ ਬਣੇ ਇੱਕ ਖੋਖਲੇ ਬੇਲਣਾਕਾਰ ਆਧਾਰ 'ਤੇ ਬਣੀ ਹੋਈ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.23)। ਇਸ ਬਾਲਟੀ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਸਿਰਿਆਂ ਦੇ ਵਿਆਸ 45 cm ਅਤੇ 25 cm ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਲਟੀ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਿੱਧੀ ਉੱਚਾਈ 40 cm ਅਤੇ ਬੇਲਣਾਕਾਰ ਆਧਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ 6 cm ਹੈ। ਇਸ ਬਾਲਟੀ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੀ ਧਾਤੂ ਦੀ ਚਾਦਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਬਾਲਟੀ ਦੇ ਹੱਥੇ ਨੂੰ ਇਸ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਨਹੀਂ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ। ਨਾਲ ਹੀ, ਉਸ ਪਾਣੀ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਇਸ ਬਾਲਟੀ ਵਿੱਚ ਧਾਰਨ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ। ($\pi = \frac{22}{7}$ ਲਓ)

ਚਿੱਤਰ 13.23

ਹੱਲ : ਬਾਲਟੀ ਦੀ ਕੁੱਲ ਉੱਚਾਈ = 40 cm ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਆਧਾਰ ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਦੀ ਉੱਚਾਈ (40 – 6) cm = 34 cm ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਛਿੰਨਕ ਦੀ ਤਿਰਛੀ ਉੱਚਾਈ $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

ਜਿੱਥੇ $r_1 = 22.5$ cm, $r_2 = 12.5$ cm ਅਤੇ $h = 34$ cm

ਇਸ ਲਈ
$$l = \sqrt{34^2 + (22.5 - 12.5)^2} \text{ cm}$$
$$= \sqrt{34^2 + 10^2} = 35.44 \text{ cm}$$

ਇਸ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਧਾਤੂ ਦੀ ਚਾਦਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ
+ ਚੱਕਰੀ ਆਧਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ
+ ਵੇਲਣ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= [\pi \times 35.44\,(22.5 + 12.5) + \pi \times (12.5)^2 + 2\pi \times 12.5 \times 6] \text{ cm}^2$$

$$= \frac{22}{7}[1240.4 + 156.25 + 150] \text{ cm}^2$$

$$= 4860.9 \text{ cm}^2$$

ਹੁਣ, ਬਾਲਟੀ ਵਿੱਚ ਆ ਸਕਣ ਵਾਲੇ ਪਾਣੀ ਦਾ ਆਇਤਨ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਬਾਲਟੀ ਦੀ ਧਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ

$$= \frac{\pi \times h}{3} \times (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{34}{3} \times [(22.5)^2 + (12.5)^2 + 22.5 \times 12.5] \text{ cm}^3$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{34}{3} \times 943.75 = 33615.48 \text{ cm}^3$$

= 33.62 ਲਿਟਰ (ਲਗਭਗ)

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 13.4

(ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕਿਹਾ ਨਾ ਜਾਵੇ, $\pi = \frac{22}{7}$ ਲਓ)

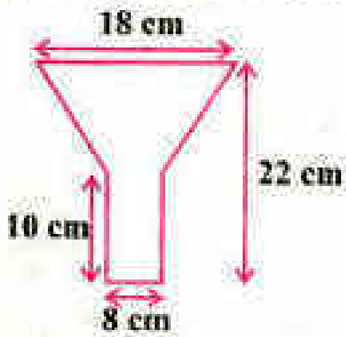
1. ਪਾਣੀ ਪੀਣ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਗਿਲਾਸ 14 cm ਉੱਚਾਈ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ। ਦੋਨਾਂ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਸਿਰਿਆਂ ਦੇ ਵਿਆਸ 4 cm ਅਤੇ 2 cm ਹਨ। ਇਸ ਗਿਲਾਸ ਦੀ ਧਾਰਨ ਸਮਰੱਥਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਚਿੱਤਰ 13.24

2. ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਦੀ ਤਿਰਛੀ ਉੱਚਾਈ 4 cm ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਚੱਕਰੀ ਸਿਰਿਆਂ ਦੇ ਪਰਿਮਾਪ (ਘੇਰਾ) 18 cm ਅਤੇ 6 cm ਹਨ। ਇਸ ਛਿੰਨਕ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਇੱਕ ਤੁਰਕੀ ਟੋਪੀ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਇੱਕ ਛਿੰਨਕ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੀ ਹੈ। (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.24) ਜੇਕਰ ਇਸਦੇ ਖੁੱਲੇ ਸਿਰੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 10 cm ਹੈ, ਉਪਰੀ ਸਿਰੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 4 cm ਹੈ ਅਤੇ ਟੋਪੀ ਦੀ ਤਿਰਛੀ ਉੱਚਾਈ 15 cm ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸਦੇ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਲੱਗੇ ਪਦਾਰਥ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਧਾਤੂ ਦੀ ਚਾਦਰ ਨਾਲ ਬਣਿਆ ਅਤੇ ਉੱਪਰ ਤੋਂ ਖੁੱਲਿਆ ਇੱਕ ਬਰਤਨ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਇੱਕ ਛਿੰਨਕ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਦੀ ਉੱਚਾਈ 16 cm ਹੈ ਅਤੇ ਹੇਠਲੇ ਅਤੇ ਉਪਰੀ ਸਿਰਿਆਂ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 8 cm ਅਤੇ 20 cm ਹਨ। ₹ 20 ਪ੍ਰਤਿ ਲਿਟਰ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ, ਇਸ ਬਰਤਨ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਭਰ ਸਕਣ ਵਾਲੇ ਦੁੱਧ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਨਾਲ ਹੀ, ਇਸ ਬਰਤਨ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੀ ਧਾਤੂ ਦੀ ਚਾਦਰ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 8 ਪ੍ਰਤਿ 100 cm^2 ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ($\pi = 3.14$ ਲਓ)
5. 20 cm ਉੱਚਾਈ ਅਤੇ ਸਿਖਰ ਕੋਣ (vertical angle) 60° ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਨੂੰ ਉਸਦੀ ਉੱਚਾਈ ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਂਦੇ ਇੱਕ ਤਲ ਨਾਲ ਦੋ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਕੱਟਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਤਲ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਆਧਾਰ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਨੂੰ ਵਿਆਸ $\frac{1}{16}$ cm ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਤਾਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਤਾਰ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 13.5 (ਇੱਛਾ-ਅਨੁਸਾਰ)*

1. 3 mm ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਤਾਂਬੇ ਦੇ ਇੱਕ ਤਾਰ ਨੂੰ 12 cm ਲੰਬੇ ਅਤੇ 10 cm ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਵੇਲਣ 'ਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਪੇਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਵੇਲਣ ਦੇ ਵਕਰ ਤਲ ਨੂੰ ਪੂਰੀ ਤਰਾਂ ਢੱਕ ਲੈਂਦਾ ਹੈ। ਤਾਰ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਦ੍ਰਵਮਾਨ (ਭਾਰ) ਪਤਾ ਕਰੋ, ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਤਾਂਬੇ ਘਣਤਾ 8.88 g ਪ੍ਰਤਿ cm^3 ਹੈ।
2. ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ 3 cm ਅਤੇ 4 cm ਹਨ (ਕਰਣ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ), ਨੂੰ ਉਸਦੇ ਕਰਣ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਘੁਮਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਦੋਹਰੇ ਸ਼ੰਕੂ (double cone) ਦੇ ਆਇਤਨ ਅਤੇ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। (π ਦਾ ਮੁੱਲ ਜੋ ਠੀਕ ਲੱਗੇ ਲੈ ਲਵੋ)।
3. ਇੱਕ ਟੈਂਕੀ ਜਿਸਦੇ ਅੰਦਰੂਨੀ ਮਾਪ 150 cm × 120 cm × 110 cm ਹਨ, ਵਿੱਚ 129600 cm^3 ਪਾਣੀ ਹੈ। ਇਸ ਪਾਣੀ ਵਿੱਚ ਕੁੱਝ ਛੇਕਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਇੱਟਾਂ ਉਦੋਂ ਤੱਕ ਪਾਈਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕਿ ਟੈਂਕੀ ਪੂਰੀ ਉੱਪਰ ਤੱਕ ਭਰ ਨਾ ਜਾਵੇ। ਹਰੇਕ ਇੱਟ ਆਪਣੇ ਆਇਤਨ ਦਾ $\frac{1}{17}$ ਪਾਣੀ ਸੋਖ ਲੈਂਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਇੱਟ ਦਾ ਮਾਪ 22.5 cm × 7.5 cm× 6.5 cm ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਟੈਂਕੀ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੀਆਂ ਇੱਟਾਂ ਪਾਈਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਕੇ ਉਸ ਤੋਂ ਪਾਣੀ ਬਾਹਰ ਨਾ ਆਵੇ?
4. ਕਿਸੇ ਮਹੀਨੇ ਦੇ 15 ਦਿਨਾਂ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਨਦੀ ਦੀ ਘਾਟੀ ਵਿੱਚ 10 cm ਵਰਖਾ ਹੋਈ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਘਾਟੀ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 7280 km^2 ਹੈ, ਤਾਂ ਦਰਸਾਓ ਕਿ ਕੁੱਲ ਵਰਖਾ ਲਗਭਗ ਤਿੰਨ ਨਦੀਆਂ ਦੇ ਆਮ ਪਾਣੀ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਸੀ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਹਰੇਕ ਨਦੀ 1072 km ਲੰਬੀ, 75 m ਚੌੜੀ ਅਤੇ 3 m ਡੂੰਘੀ ਹੈ।
5. ਟੀਨ ਦੀ ਬਣੀ ਹੋਈ ਇੱਕ ਤੇਲ ਦੀ ਕੁੱਪੀ 10 cm ਲੰਬੇ ਇੱਕ ਵੇਲਣ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਨਾਲ ਬਣੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੀ ਕੁੱਲ ਉੱਚਾਈ 22 cm ਹੈ, ਬੇਲਨਾਕਾਰ ਭਾਗ ਦਾ ਵਿਆਸ 8 cm ਹੈ ਅਤੇ ਕੁੱਪੀ ਦੇ ਉਪਰੀ ਸਿਰੇ ਦਾ ਵਿਆਸ 18 cm ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸਦੇ ਬਣਾਉਣ ਵਿੱਚ ਲੱਗੀ ਟੀਨ ਦੀ ਚਾਦਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 13.25)।



ਚਿੱਤਰ 13.25

6. ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਇੱਕ ਛਿੰਨਕ ਦੇ ਲਈ, ਪਹਿਲਾਂ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤੇ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਵਕਰ ਤਲ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਉਨ੍ਹਾਂ ਸੂਤਰਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ, ਜੋ ਭਾਗ 13.5 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ।
7. ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਇੱਕ ਛਿੰਨਕ ਦੇ ਲਈ ਪਹਿਲਾਂ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤੇ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਆਇਤਨ ਦਾ ਉਹ ਸੂਤਰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ, ਜੋ ਭਾਗ 13.5 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

* ਇਹ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ।

13.6 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ :

1. ਆਧਾਰ ਭੂਤ ਠੋਸਾਂ ਘਣਾਵ, ਵੇਲਣ, ਸ਼ੰਕੂ ਅਤੇ ਗੋਲੇ ਅਤੇ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਦੋ ਠੋਸਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ (ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਨਾਲ) ਨਾਲ ਬਣੇ ਠੋਸਾਂ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਨਾ।
2. ਠੋਸਾਂ ਘਣਾਵ, ਵੇਲਣ, ਸ਼ੰਕੂ, ਗੋਲੇ ਅਤੇ ਅਰਧ ਗੋਲੇ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਦੋ ਠੋਸਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਨਾਲ ਬਣੇ ਠੋਸਾਂ ਦੇ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰਨਾ।
3. ਜਦੋਂ ਕਿਸੇ ਸ਼ੰਕੂ ਨੂੰ ਉਸਦੇ ਆਧਾਰ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਕਿਸੇ ਤਲ ਦੁਆਰਾ ਕੱਟ ਕੇ ਇੱਕ ਛੋਟਾ ਸ਼ੰਕੂ ਹਟਾ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਜੋ ਠੋਸ ਬੱਚਦਾ ਹੈ, ਉਹ ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਇੱਕ ਛਿੰਨਕ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।
4. ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸੂਤਰ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਹਨ :

   (i) ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਦਾ ਆਇਤਨ $= \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\right)$

   (ii) ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \pi l(r_1 + r_2)$ ਜਿੱਥੇ $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

   (iii) ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਛਿੰਨਕ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \pi l(r_1 + r_2) + \pi(r_1^2 + r_2^2)$

   ਉਪਰੋਕਤ ਸੂਤਰਾਂ ਵਿੱਚ, h = ਛਿੰਨਕ ਦੀ ਸਿੱਧੀ ਉੱਚਾਈ ਅਤੇ, l = ਛਿੰਨਕ ਦੀ ਤਿਰਛੀ ਉੱਚਾਈ ਅਤੇ r_1 ਅਤੇ r_2 ਛਿੰਨਕ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਚੱਕਰੀ ਸਿਰਿਆਂ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹਨ।

ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ 14

There are lies,damned lies and statistics
(ਇੱਥੇ ਝੂਠ, ਸਫੈਦ ਝੂਠ ਅਤੇ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਹੈ।)

— *Disraeli*

14.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਜਮਾਤ ਨੌਂਵੀਂ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਅਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ (ਕੱਚੇ) ਅਤੇ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀਆਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਣਾ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੁਆਰਾ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਛੜ ਚਿੱਤਰ, ਆਇਤ ਚਿੱਤਰ [ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅ-ਸਮਾਨ (ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ) ਚੌੜਾਈ ਵਾਲੇ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਸਨ] ਅਤੇ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਬਹੁਭੁਜ ਆਦਿ ਰੂਪਾਂ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤਰਨ ਕਰਨਾ ਵੀ ਸਿੱਖਿਆ ਸੀ। ਸੱਚ ਤਾਂ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਅਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਕੁਝ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਪ੍ਰਤੀਨਿਧ (numerical representatives) ਪਤਾ ਕਰ ਕੇ ਇੱਕ ਕਦਮ ਹੋਰ ਅੱਗੇ ਵਧ ਗਏ ਸੀ। ਇਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਤਮਕਾ ਪ੍ਰਤੀਨਿਧੀਆਂ ਨੂੰ *ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪ (measures of central tendency)* ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਤਿੰਨ ਮਾਪਾਂ ਭਾਵ *ਮੱਧਮਾਨ (mean)*,*ਮੱਧਿਕਾ (median)* ਅਤੇ *ਬਹੁਲਕ (mode)* ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਤਿੰਨਾਂ ਮਾਪਾਂ ਭਾਵ ਮੱਧਮਾਨ, ਮੱਧਿਕਾ ਅਤੇ ਬਹੁਲਕ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਅਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਲਈ ਅੱਗੇ ਵਧਾਵਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ (cumulative frequency) ਅਤੇ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਣੀ ਦੀਆਂ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਵੀ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਹ ਵੀ ਸਿੱਖਾਂਗੇ ਕਿ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵਕਰ (cumulative frequency curves), ਜੋ *ਤੋਰਣ (ogives)* ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖਿੱਚਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

14.2 ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ (ਜਾਂ ਔਸਤ) ਸਾਰੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਨੂੰ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜਮਾਤ ਨੌਂਵੀਂ

ਤੋਂ ਯਾਦ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ਦੀਆਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ਹੋਣ ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਪ੍ਰੇਖਣ x_1, f_1 ਵਾਰੀ ਆਉਂਦਾ ਹੈ, ਪ੍ਰੇਖਣ x_2, f_2 ਵਾਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ, ਆਦਿ।

ਹੁਣ, ਸਾਰੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $= f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n$ ਹੈ ਅਤੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ :

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \quad + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \quad + f_n}$$

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਨੂੰ ਸੰਖੇਪ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਯੂਨਾਨੀ ਅੱਖਰ Σ [ਵੱਡਾ ਸਿਗਮਾ (capital sigma)] ਨਾਲ ਪ੍ਰਗਟਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਅੱਖਰ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ *ਜੋੜਨਾ* (*summation*) ਭਾਵ

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

ਇਸ ਨੂੰ ਹੋਰ ਸੰਖੇਪ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$ ਵਿੱਚ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਇਹ ਸਮਝਦੇ ਹੋਏ ਕਿ i ਦਾ ਮੁੱਲ 1 ਤੋਂ n ਤੱਕ ਬਦਲਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਇਸ ਸੂਤਰ ਦਾ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਮੱਧਮਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਕਿਸੇ ਸਕੂਲ ਦੀ ਜਮਾਤ X ਦੇ 30 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਗਣਿਤ ਦੇ ਇੱਕ ਪੇਪਰ ਵਿੱਚ 100 ਵਿੱਚੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਅੰਕ, ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ (x_i)	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (f_i)	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

ਹੱਲ: ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਹਰੇਕ x_i ਨਾਲ ਉਸਦੀ ਸੰਗਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ f_i ਦੁਆਰਾ ਗੁਣਨਫਲ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੈ, ਆਉ ਇਹਨਾਂ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ 14.1 ਵਿੱਚ ਵਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਸਤੰਭ (column) ਵਿੱਚ ਰੱਖੀਏ।

ਸਾਰਣੀ 14.1

ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ (x_i)	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (f_i)	$f_i x_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
ਜੋੜ	$\Sigma f_i = 30$	$\Sigma f_i x_i = 1779$

ਹੁਣ
$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$$

ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਮੱਧਮਾਨ 59.3 ਹੈ।

ਸਾਡੇ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਦੀਆਂ ਜ਼ਿਆਦਾਤਰ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ, ਅੰਕੜੇ ਇੰਨੇ ਵੱਡੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਅਰਥਪੂਰਨ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਲਈ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡ ਕੇ (ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਕਰਕੇ) ਛੋਟਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਆਉ ਉਦਾਹਰਣ 1 ਦੇ ਅਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਚੌੜਾਈ, ਮੰਨ ਲਓ 15 ਦੇ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਬਣਾ ਕੇ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲੀਏ। ਯਾਦ ਰੱਖੋ ਕਿ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਲਿਖਦੇ ਸਮੇਂ ਕਿਸੇ ਉਪਰਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਪ੍ਰੇਖਣ (ਮੁੱਲ) ਅਗਲੇ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਲਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ, ਅੰਕ 40 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਾਲੇ 4 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 25-40 ਵਿੱਚ ਨਾ ਲੈ ਕੇ ਅੰਤਰਾਲ 40-55 ਵਿੱਚ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪਰੰਪਰਾ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖਦੇ ਹੋਏ ਆਉ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਈਏ। (ਦੇਖੋ ਸਾਰਣੀ 14.2)।

ਸਾਰਣੀ 14.2

ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ	10 - 25	25 - 40	40 - 55	55 - 70	70 - 85	85 - 100
ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	2	3	7	6	6	6

ਹੁਣ, ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਬਿੰਦੂ (ਮੁੱਲ) ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੈ, ਜੋ ਪੂਰੇ ਅੰਤਰਾਲ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਨਿਧ ਕਰੇ। ਇਹ ਮੰਨ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਉਸ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਚਾਰੋਂ ਪਾਸੇ ਕੇਂਦਰਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ (mid-point) [ਜਾਂ ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ (class mark)] ਨੂੰ ਉਸ ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਨਿੱਧ (representative) ਮੰਨਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ (ਜਾਂ ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ) ਉਸ ਦੀ ਉਪਰਲੀ ਅਤੇ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ ਦਾ ਔਸਤ ਕੱਢ ਕੇ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਭਾਵ

$$\text{ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ} = \frac{\text{ਉਪਰਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ} + \text{ਹੇਠਲੀ ਵਰਗ ਸੀਮਾ}}{2}$$

ਸਾਰਣੀ 14.2 ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਵਰਗ 10–25 ਦਾ ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ $\frac{10+25}{2}$, ਭਾਵ 17.5 ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਹੋਰ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦੇ ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ 14.3 ਵਿੱਚ ਰੱਖਦੇ ਹਾਂ ਇਹ ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ x_i ਦਾ ਕੰਮ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਆਮ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ x_i ਦੇ ਸੰਗਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ f_i ਲਿਖੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਹੁਣ ਉਦਾਹਰਣ 1 ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੱਧਮਾਨ ਕੱਢਣ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਵੱਲ ਅੱਗੇ ਵੱਧਦੇ ਹਾਂ।

ਸਾਰਣੀ 14.3

ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (f_i)	ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ (x_i)	f_ix_i
10 - 25	2	17.5	35.0
25 - 40	3	32.5	97.5
40 - 55	7	47.5	332.5
55 - 70	6	62.5	375.0
70 - 85	6	77.5	465.0
85 – 100	6	92.5	555.0
ਜੋੜ	$\Sigma f_i = 30$		$\Sigma f_ix_i = 1860.0$

ਅਖੀਰਲੇ ਸਤੰਭ (column) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ $\Sigma f_i x_i$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{x}$, ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1860.0}{30} = 62$$

ਮੱਧਮਾਨ ਕੱਢਣ ਦੀ ਇਸ ਨਵੀਂ ਵਿਧੀ ਨੂੰ **ਪ੍ਰਤੱਖ ਵਿਧੀ (direct method)** ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਰਣੀ 14.1 ਅਤੇ 14.3 ਵਿੱਚ ਸਮਾਨ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਮੱਧਮਾਨ ਕੱਢਣ ਵਾਸਤੇ ਇੱਕ ਹੀ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਪਰਿਣਾਮ (ਮੱਧਮਾਨ) ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਸੋਚ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਅਜਿਹਾ ਕਿਉਂ ਹੋਇਆ ਅਤੇ ਇਸ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜਾ ਮੱਧਮਾਨ ਜਿਆਦਾ ਸਹੀ ਹੈ? ਦੋਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰ ਦਾ ਕਾਰਣ ਸਾਰਣੀ 14.3 ਵਿੱਚ ਮੰਨੇ ਹੋਏ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਕਲਪਨਾ ਦੀ ਵਜ੍ਹਾ ਨਾਲ ਹੈ। 59.3 ਸਹੀ ਮੱਧਮਾਨ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ 62 ਇੱਕ ਨੇੜਲਾ ਮੱਧਮਾਨ ਹੈ।

ਕਦੇ-ਕਦੇ x_i ਅਤੇ f_i ਦੇ ਮੁੱਲ ਵੱਡੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ x_i ਅਤੇ f_i ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਕੱਢਣਾ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਵਿੱਚ ਸਮਾਂ ਵੀ ਬਹੁਤ ਲੱਗ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦੇ ਲਈ, ਆਓ ਮੱਧਮਾਨ ਕੱਢਣ ਲਈ ਸਰਲ ਵਿਧੀ ਬਾਰੇ ਸੋਚੀਏ।

ਅਸੀਂ f_i ਦੇ ਨਾਲ ਕੋਈ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਪ੍ਰੰਤੂ ਅਸੀਂ, ਹਰੇਕ x_i ਨੂੰ ਇੱਕ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਨਾਲ ਗਣਨਾ ਕਰਨੀ ਸੌਖੀ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰਾਂਗੇ? ਹਰੇਕ x_i ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸੰਖਿਆ ਘਟਾਉਣ ਬਾਰੇ ਤੁਹਾਡਾ ਕੀ ਵਿਚਾਰ ਹੈ? ਆਓ ਇਹ ਵਿਧੀ ਅਪਨਾਉਣ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੀਏ।

ਇਸ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾਂ ਪਗ ਇਹ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਸਾਰੇ x_i ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ x_i ਨੂੰ *ਕਲਪਨਿਕ ਮੱਧਮਾਨ (assumed mean)* ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਮੰਨ ਲਈਏ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ 'a' ਨਾਲ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰੀਏ। ਨਾਲ ਹੀ ਆਪਣੀ ਗਣਨਾ ਨੂੰ ਹੋਰ ਸੌਖਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ 'a' ਨੂੰ ਅਜਿਹਾ x_i ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜੋ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ਦੇ ਮੱਧ ਵਿੱਚ ਕਿਤੇ ਆਉਂਦਾ ਹੋਵੇ। ਅਸੀਂ $a = 47.5$ ਜਾਂ $a = 62.5$ ਚੁਣ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਆਓ $a = 47.5$ ਲਈਏ।

ਅਗਲਾ ਪਗ ਹੈ ਕਿ a ਅਤੇ ਹਰੇਕ x_i ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਅੰਤਰ d_i ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ, ਭਾਵ ਹਰੇਕ x_i ਦਾ 'a' ਤੋਂ *ਵਿਚਲਨ (deviation)* ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ।

ਭਾਵ
$$d_i = x_i - a$$
$$= x_i - 47.5$$

ਤੀਜੇ ਪਗ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ d_i ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਸੰਗਤ f_i ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਕੇ ਸਾਰੇ $f_i d_i$ ਦਾ ਜੋੜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ। ਇਹ ਗਣਨਾ ਸਾਰਣੀ 14.4 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਗਟਾਈ ਗਈ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 14.4

ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (f_i)	ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ (x_i)	$d_i = x_i - 47.5$	$f_i d_i$
10 - 25	2	17.5	–30	–60
25 - 40	3	32.5	–15	–45
40 - 55	7	47.5	0	0
55 - 70	6	62.5	15	90
70 - 85	6	77.5	30	180
85 - 100	6	92.5	45	270
ਜੋੜ	$\Sigma f_i = 30$			$\Sigma f_i d_i = 435$

ਇਸ ਲਈ ਸਾਰਣੀ 14.4 ਤੋਂ, ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ $\bar{d} = \dfrac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

ਆਉ ਹੁਣ $\bar{d}$ ਅਤੇ $\bar{x}$ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੀਏ।

ਕਿਉਂਕਿ d_i ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਹਰੇਕ x_i ਵਿੱਚੋਂ a ਨੂੰ ਘਟਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ $\bar{d}$ ਵਿੱਚ a ਜੋੜਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਨੂੰ ਗਣਿਤਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

ਵਿਚਲਨਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ $\quad \bar{d} = \dfrac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

ਇਸ ਲਈ
$$\bar{d} = \frac{\Sigma f_i (x_i - a)}{\Sigma f_i}$$
$$= \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - \frac{\Sigma f_i a}{\Sigma f_i}$$
$$= \bar{x} - a\frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}$$
$$= \bar{x} - a$$

ਇਸ ਲਈ $\quad \bar{x} = a + \bar{d}$

ਭਾਵ $\quad \bar{x} = a + \dfrac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

ਹੁਣ ਸਾਰਣੀ 14.4 ਵਿੱਚ a, $\Sigma f_i d_i$ ਅਤੇ Σf_i ਦੇ ਮੁੱਲ ਭਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\bar{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62$$

ਇਸ ਲਈ, ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ 62 ਹੈ।

ਮੱਧਮਾਨ ਕੱਢਣ ਦੀ ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਧੀ **ਕਾਲਪਨਿਕ ਮੱਧਮਾਨ ਵਿਧੀ (assumed mean method)** ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਕਿਰਿਆ 1 : ਸਾਰਣੀ 14.3 ਵਿੱਚ, ਹਰੇਕ x_i (17.5, 32.5, ਆਦਿ) ਨੂੰ 'a' ਮੰਨ ਕੇ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਵੇਖਦੇ ਹੋ। ਤੁਸੀਂ ਵੇਖੋਗੇ ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਮੱਧਮਾਨ ਇਕੋ ਜਿਹਾ ਭਾਵ 62 ਆਉਂਦਾ ਹੈ। (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਮੱਧਮਾਨ ਦਾ ਮੁੱਲ ਚੁਣੇ ਹੋਏ 'a' ਦੇ ਮੁੱਲ ਉੱਪਰ ਨਿਰਭਰ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਵੇਖੋ ਕਿ ਸਾਰਣੀ 14.4 ਦੇ ਸਤੰਭ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲ 15 ਦੇ ਗੁਣਜ (multiples) ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸਤੰਭ (Column) 4 ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ 15 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ f_i ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਵਾਲੀਆਂ ਛੋਟੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਣਗੀਆਂ [ਇੱਥੇ 15, ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦਾ ਵਰਗ ਮਾਪ (ਸਾਈਜ਼) ਹੈ।]

ਇਸ ਲਈ, ਆਓ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ a ਕਲਪਨਿਕ ਮੱਧ ਹੈ ਅਤੇ h ਵਰਗਮਾਪ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਾਰੇ u_i ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਪਹਿਲਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਜਾਰੀ ਰੱਖਦੇ ਹਾਂ (ਭਾਵ f_iu_i ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਫਿਰ Σf_iu_i ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।) ਆਓ $h = 15$ ਲੈ ਕੇ ਸਾਰਣੀ 14.5 ਬਣਾਈਏ।

ਸਾਰਣੀ 14.5

ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ	f_i	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	f_iu_i
10 - 25	2	17.5	–30	–2	–4
25 - 40	3	32.5	–15	–1	–3
40 - 55	7	47.5	0	0	0
55 - 70	6	62.5	15	1	6
70 - 85	6	77.5	30	2	12
85 - 100	6	92.5	45	3	18
ਜੋੜ	$\Sigma f_i = 30$				$\Sigma f_iu_i = 29$

ਮੰਨ ਲਓ $\bar{u} = \frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}$ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਵੀ ਅਸੀਂ $\bar{u}$ ਅਤੇ $\bar{x}$ ਵਿੱਚਕਾਰ ਸੰਬੰਧ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ $u_i = \frac{x_i - a}{h}$

ਇਸ ਲਈ
$$\bar{u} = \frac{\Sigma f_i \frac{(x_i - a)}{h}}{\Sigma f_i} = \frac{1}{h}\left[\frac{\Sigma f_i x_i - a\Sigma f_i}{\Sigma f_i}\right]$$
$$= \frac{1}{h}\left[\frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - a\frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}\right]$$
$$= \frac{1}{h}[\bar{x} - a]$$

ਜਾਂ $h\bar{u} = \bar{x} - a$

ਭਾਵ $\bar{x} = a + h\bar{u}$

ਇਸ ਲਈ $\bar{x} = a + h\left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right)$

ਹੁਣ ਸਾਰਣੀ 14.5 ਤੋਂ $a, h, \Sigma f_i u_i$ ਅਤੇ Σf_i ਦੇ ਮੁੱਲ ਭਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$\bar{x} = 47.5 + 15 \times \frac{29}{30}$$
$$= 47.5 + 14.5 = 62$$

ਇਸ ਲਈ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਮੱਧਮਾਨ ਅੰਕ 62 ਹੈ।

ਮੱਧਮਾਨ ਕੱਢਣ ਦੀ ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਧੀ **ਪਗ ਵਿੱਚਲਣ ਵਿਧੀ (step deviation method)** ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਰੱਖੋ ਕਿ

- ਪਗ ਵਿੱਚਲਣ ਵਿਧੀ ਉਦੋਂ ਹੀ ਸੁਵਿਧਾਜਨਕ ਹੋਵੇਗੀ ਜਦੋਂ ਸਾਰੇ d_i ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੋਵੇ।
- ਤਿੰਨਾਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਮੱਧਮਾਨ ਇੱਕ ਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਕਾਲਪਨਿਕ ਮੱਧਮਾਨ ਵਿਧੀ ਅਤੇ ਪਗ ਵਿੱਚਲਣ ਵਿਧੀ, ਪ੍ਰਤੱਖ ਵਿਧੀ ਦੇ ਹੀ ਸਰਲ ਰੂਪ ਹਨ।

- ਸੂਤਰ $\bar{x} = a + h\bar{u}$ ਦਾ ਉਦੋਂ ਵੀ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ a ਅਤੇ h ਉਪਰੋਕਤ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾ ਹੋਣ, ਪਰੰਤੂ ਸਿਫ਼ਰ (ਜ਼ੀਰੋ) ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਅਜਿਹੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕਿ $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$ ਹੋਵੇ।

ਆਉ ਇਸ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਇੱਕ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਭਾਰਤ ਦੇ ਅਲੱਗ-2 ਰਾਜਾਂ ਅਤੇ ਕੇਂਦਰੀ ਸ਼ਾਸ਼ਤ ਪ੍ਰਦੇਸ਼ਾਂ (union territories) ਦੇ ਪੇਂਡੂ ਇਲਾਕਿਆਂ ਵਿੱਚ ਸਥਾਪਿਤ ਪ੍ਰਾਇਮਰੀ ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ ਇਸਤਰੀ ਅਧਿਆਪਕਾਵਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਵੰਡ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਦਰਜ ਤਿੰਨੇ ਵਿਧੀਆਂ ਨਾਲ ਇਸਤਰੀ ਅਧਿਆਪਕਾਵਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਇਸਤਰੀ ਅਧਿਆਪਕਾਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 - 85
ਰਾਜਾਂ/ਕੇਂਦਰੀ ਸ਼ਾਸਤ ਪ੍ਰਦੇਸ਼ਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	6	11	7	4	4	2	1

(ਸਰੋਤ:ਐਨ ਸੀ.ਈ.ਆਰ.ਟੀ. ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸੱਤਵਾਂ ਅਖਿਲ ਭਾਰਤੀਯ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਸਰਵੇ)

ਹੱਲ : ਆਉ ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦਾ x_i ਪਤਾ ਕਰੀਏ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਤੰਭ (ਕਾਲਮ) ਵਿੱਚ ਰੱਖੀਏ (ਦੇਖੋ ਸਾਰਣੀ 14.6)।

ਸਾਰਣੀ 14.6

ਇਸਤਰੀ ਅਧਿਆਪਕਾਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ	ਰਾਜਾਂ/ਕੇਂਦਰੀ ਸ਼ਾਸ਼ਤ ਪ੍ਰਦੇਸ਼ਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (f_i)	x_i
15 - 25	6	20
25 - 35	11	30
35 - 45	7	40
45 - 55	4	50
55 - 65	4	60
65 - 75	2	70
75 - 85	1	80

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ $a = 50$, $h = 10$, ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਤਦ $d_i = x_i - 50$ ਅਤੇ $u_i = \frac{x_i - 50}{10}$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ d_i ਅਤੇ u_i ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ 14.7 ਵਿੱਚ ਰੱਖਦੇ ਹਾਂ।

ਸਾਰਣੀ 14.7

ਇਸਤਰੀ ਅਧਿਆਪਕਾਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ	ਰਾਜਾਂ/ਕੇਂਦਰੀ ਸ਼ਾਸਤ ਪ੍ਰਦੇਸ਼ਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 50$	$u_i = \frac{x_i - 50}{10}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
15 - 25	6	20	–30	–3	120	–180	–18
25 - 35	11	30	–20	–2	330	–220	–22
35 - 45	7	40	–10	–1	280	–70	–7
45 - 55	4	50	0	0	200	0	0
55 - 65	4	60	10	1	240	40	4
65 - 75	2	70	20	2	140	40	4
75 - 85	1	80	30	3	80	30	3
ਜੋੜ	35				1390	–360	–36

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ, ਸਾਨੂੰ $\Sigma f_i = 35$, $\Sigma f_i x_i = 1390$, $\Sigma f_i d_i = -360$, $\Sigma f_i u_i = -36$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਤੱਖ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ, $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$

ਕਾਲਪਨਿਕ ਮੱਧਮਾਨ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ,

$$\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} = 50 + \frac{(-360)}{35} = 39.71$$

ਪਗ ਵਿੱਚਲਣ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ

$$\bar{x} = a + \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right) \times h = 50 + \left(\frac{-36}{35}\right) \times 10 = 39.71$$

ਇਸ ਲਈ, ਪੇਂਡੂ ਖੇਤਰਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਾਇਮਰੀ ਸਕੂਲਾਂ ਵਿੱਚ ਇਸਤਰੀ ਅਧਿਆਪਕਾਵਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ 39.71 ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਸਾਰੀਆਂ ਤਿੰਨੋਂ ਵਿਧੀਆਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਵਿਧੀ ਚੁਣਨਾ ਇਸ ਗੱਲ 'ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ x_i ਅਤੇ f_i ਦੇ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹਨ। ਜੇਕਰ x_i ਅਤੇ f_i ਦੇ ਮੁੱਲ ਛੋਟੇ ਹਨ ਤਾਂ ਪ੍ਰਤੱਖ ਵਿਧੀ ਵਧੀਆ ਹੋਵੇਗੀ। ਜੇਕਰ x_i ਅਤੇ f_i ਦੇ ਮੁੱਲ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਵੱਡੇ ਹਨ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਾਲਪਨਿਕ ਮੱਧਮਾਨ ਵਿਧੀ ਜਾਂ ਪਗ ਵਿੱਚਲਣ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ ਵਰਗ ਮਾਪ ਅਸਮਾਨ ਹਨ ਅਤੇ x_i ਦੇ ਮੁੱਲ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਵੱਡੇ ਹਨ ਤਾਂ ਵੀ ਅਸੀਂ ਸਾਰੇ d_i ਦਾ ਇੱਕ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ h ਲੈ ਕੇ, ਪਗ ਵਿੱਚਲਣ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਵੰਡ ਇੱਕ ਰੋਜ਼ਾ ਕ੍ਰਿਕਟ ਮੈਚਾਂ ਵਿੱਚ, ਗੇਂਦਬਾਜ਼ਾਂ ਦੁਆਰਾ ਲਏ ਗਏ ਵਿਕਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਸਹੀ (ਉਚਿਤ) ਵਿਧੀ ਚੁਣਦੇ ਹੋਏ ਲਏ ਗਏ ਵਿਕਟਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ? ਇਹ ਮੱਧਮਾਨ ਕੀ ਸੂਚਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ?

ਵਿਕਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	20 - 60	60 - 100	100 - 150	150 - 250	250 - 350	350 - 450
ਗੇਂਦਬਾਜ਼ਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	7	5	16	12	2	3

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਵਰਗਮਾਪ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਹਨ ਅਤੇ x_i ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੱਡੇ ਹਨ। ਆਉ $a = 200$ ਅਤੇ $h = 20$ ਲੈ ਕੇ ਪਗ ਵਿੱਚਲਣ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੀਏ। ਅਸੀਂ ਸਾਰਣੀ 14.8 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਅੰਕੜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

ਸਾਰਣੀ 14.8

ਲਏ ਗਏ ਵਿਕਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	ਗੇਂਦਬਾਜ਼ਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 200$	$u_i = \frac{d_i}{20}$	$u_i f_i$
20 - 60	7	40	–160	–8	–56
60 - 100	5	80	–120	–6	–30
100 - 150	16	125	–75	–3.75	–60
150 - 250	12	200	0	0	0
250 - 350	2	300	100	5	10
350 - 450	3	400	200	10	30
ਜੋੜ	45				–106

ਇਸ ਲਈ $\bar{u} = \frac{-106}{45}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, $\bar{x} = 200 + 20\left(\frac{-106}{45}\right) = 200 - 47.11 = 152.89$ ਹੈ।

ਇਹ ਸਾਨੂੰ ਦਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ 45 ਗੇਂਦਬਾਜ਼ਾਂ ਨੇ ਇੱਕ ਰੋਜ਼ਾ ਕ੍ਰਿਕਟ ਮੈਚਾਂ ਵਿੱਚ 152.89 ਦੀ ਔਸਤ ਨਾਲ ਵਿਕਟ ਲਏ ਹਨ।

ਆਉ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹੀਆਂ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਕਿਰਿਆ 2 :

ਆਪਣੀ ਜਮਾਤ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡ ਕੇ ਹਰੇਕ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਕਿਰਿਆ ਕਰਨ ਲਈ ਕਹੋ :

1. ਆਪਣੇ ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ ਹਾਲ ਵਿੱਚ ਹੀ (ਹੁਣੇ) ਲਈ ਗਈ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ, ਆਪਣੀ ਜਮਾਤ ਦੇ ਸਾਰਿਆਂ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕਠਾ ਕਰੋ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਇੱਕ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਓ।
2. ਆਪਣੇ ਸ਼ਹਿਰ ਵਿੱਚ 30 ਦਿਨਾਂ ਦਾ ਰਿਕਾਰਡ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਦਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਤਾਪਮਾਨ ਇਕੱਠਾ ਕਰੋ। ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪੇਸ਼ ਕਰੋ।
3. ਆਪਣੀ ਜਮਾਤ ਦੇ ਸਾਰੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਉੱਚਾਈ (cm ਵਿੱਚ) ਮਾਪੋ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਉ।

ਜਦੋਂ ਸਾਰੇ ਸਮੂਹ ਇਕੱਠੇ ਕੀਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀਆਂ ਬਣਾ ਲੈਣ ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਆਪਣੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਕੱਢਣ ਲਈ ਕਹੋ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਉਹ ਜੋ ਚਾਹੁਣ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 14.1

1. ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਦੁਆਰਾ ਆਪਣੇ ਵਾਤਾਵਰਨ ਚੇਤਨਾ ਅਭਿਆਨ ਦੇ ਅਧੀਨ ਇੱਕ ਸਰਵੇਖਣ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਇੱਕ ਮੁਹੱਲੇ ਦੇ 20 ਘਰਾਂ ਵਿੱਚ ਲੱਗੇ ਪੌਦਿਆਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜੇ ਇਕੱਠੇ ਕੀਤੇ। ਪ੍ਰਤਿ ਘਰ ਮੱਧਮਾਨ (ਔਸਤ) ਪੌਦਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਪੌਦਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	0 - 2	2 - 4	4 - 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 - 14
ਘਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	1	2	1	5	6	2	3

ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਤੁਸੀਂ ਕਿਹੜੀ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਅਤੇ ਕਿਉਂ?

2. ਕਿਸੇ ਫੈਕਟਰੀ ਦੇ 50 ਮਜ਼ਦੂਰਾਂ ਦੀ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਮਜ਼ਦੂਰੀ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਉੱਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਮਜ਼ਦੂਰੀ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ)	100 - 120	120 - 140	140 - 160	160 - 180	180 - 200
ਮਜ਼ਦੂਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	12	14	8	6	10

ਇੱਕ ਸਹੀ (ਉਚਿਤ) ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਇਸ ਫੈਕਟਰੀ ਦੇ ਮਜ਼ਦੂਰਾਂ ਦੀ ਮੱਧਮਾਨ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਮਜ਼ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

3. ਹੇਠ ਦਿਤੀ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਇੱਕ ਮੁਹੱਲੇ ਦੇ ਬੱਚਿਆਂ ਦਾ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੇਬ ਖਰਚ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਮੱਧਮਾਨ ਜੇਬ ਖਰਚਾ ₹ 18 ਹੈ। ਅਗਿਆਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ f ਪਤਾ ਕਰੋ:

ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੇਬ ਖਰਚਾ (ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ)	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 23	23 - 25
ਬੱਚਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	7	6	9	13	f	5	4

4. ਕਿਸੇ ਹਸਪਤਾਲ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਡਾਕਟਰ ਦੁਆਰਾ 30 ਇਸਤਰੀਆਂ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਦਿਲ ਦੀ ਧੜਕਣ (heart beat) ਪ੍ਰਤੀ ਮਿੰਟ ਨੋਟ ਕਰਕੇ ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਸੰਖੇਪ ਰੂਪ ਨਾਲ ਲਿਖੀ ਗਈ। ਇੱਕ ਸਹੀ (ਉਚਿਤ) ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਇਹਨਾਂ ਇਸਤਰੀਆਂ ਦੇ ਦਿਲ ਦੀ ਧੜਕਣ ਦੀ ਪ੍ਰਤੀ ਮਿੰਟ ਮੱਧਮਾਨ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ:

ਦਿਲ ਦੀ ਧੜਕਣ ਦੀ ਪ੍ਰਤੀ ਮਿੰਟ ਸੰਖਿਆ	65 - 68	68 - 71	71 - 74	74 - 77	77 - 80	80 - 83	83 - 86
ਇਸਤਰੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	2	4	3	8	7	4	2

5. ਕਿਸੇ ਬਜ਼ਾਰ ਵਿੱਚ, ਫ਼ਲ ਵਿਕ੍ਰੇਤਾ, ਪੇਟੀਆਂ ਵਿੱਚ ਰੱਖੇ ਅੰਬ ਵੇਚ ਰਹੇ ਸਨ। ਇਹਨਾਂ ਪੇਟੀਆਂ ਵਿੱਚ ਅੰਬਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸੀ। ਪੇਟੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਨੁਸਾਰ, ਅੰਬਾਂ ਦੀ ਵੰਡ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਸੀ:

ਅੰਬਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	50 - 52	53 - 55	56 - 58	59 - 61	62 - 64
ਪੇਟੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	15	110	135	115	25

ਇੱਕ ਪੇਟੀ ਵਿੱਚ ਰੱਖੀ ਅੰਬਾਂ ਦੀ ਮੱਧਮਾਨ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਤੁਸੀਂ ਮੱਧਮਾਨ ਕੱਢਣ ਲਈ ਕਿਹੜੀ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਹੈ?

6. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਕਿਸੇ ਮੁਹੱਲੇ ਦੇ 25 ਪਰਿਵਾਰਾਂ ਦੇ ਭੋਜਨ ਉੱਪਰ ਹੋਏ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਖਰਚ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ:

ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਖਰਚ (ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ)	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
ਪਰਿਵਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	4	5	12	2	2

ਇੱਕ ਉਚਿਤ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਭੋਜਨ ਉੱਪਰ ਹੋਏ ਖਰਚ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. ਹਵਾ ਵਿੱਚ ਸਲਫਰ ਡਾਈਆਕਸਾਈਡ (SO_2) ਦੀ ਮਾਤਰਾ (concentration) (ਭਾਗ ਪ੍ਰਤੀ ਮਿਲਿਅਨ ਵਿੱਚ) ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਇੱਕ ਇਲਾਕੇ ਦੇ 30 ਮੁਹੱਲਿਆ ਵਿੱਚੋਂ ਅੰਕੜੇ ਇਕੱਠੇ ਕੀਤੇ ਗਏ ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ:

SO_2 ਦੀ ਮਾਤਰਾ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
0.00 - 0.04	4
0.04 - 0.08	9
0.08 - 0.12	9
0.12 - 0.16	2
0.16 - 0.20	4
0.20 - 0.24	2

ਹਵਾ ਵਿੱਚ SO_2 ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਕਿਸੇ ਜਮਾਤ ਦੀ ਅਧਿਆਪਕਾ ਨੇ ਪੂਰੇ ਸਾਲ ਦੌਰਾਨ ਆਪਣੀ ਜਮਾਤ ਦੇ 40 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗੈਰਹਾਜ਼ਰੀ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਰਿਕਾਰਡ ਕੀਤਾ। ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਜਿੰਨੇ ਦਿਨ ਗੈਰਹਾਜ਼ਿਰ ਰਿਹਾ ਉਸ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ:

ਦਿਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	0 - 6	6 - 10	10 - 14	14 - 20	20 - 28	28 - 38	38 - 40
ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	11	10	7	4	4	3	1

9. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ 35 ਸ਼ਹਿਰਾਂ ਦੀ ਸਾਖਰਤਾ ਦਰ (ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਵਿੱਚ) ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਮੱਧਮਾਨ ਸਾਖਰਤਾ ਦਰ ਪਤਾ ਕਰੋ:

ਸਾਖਰਤਾ ਦਰ (% ਵਿੱਚ)	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 - 85	85 - 95
ਸ਼ਹਿਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	3	10	[illegible]	8	3

14.3 ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ

ਜਮਾਤ ਨੌਵੀਂ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਪੜ੍ਹਿਆ ਸੀ ਕਿ ਬਹੁਲਕ (mode) ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਵਿੱਚ ਉਹ ਮੁੱਲ ਹੈ ਜੋ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵਾਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਉਸ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦਾ ਮੁੱਲ ਜਿਸ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ ਤੁਸੀਂ ਅਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਬਹੁਲਕ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਚਰਚਾ ਵੀ ਨੌਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਇੱਥੇ ਇਹ ਸੰਭਵ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮੁੱਲਾਂ ਦੀ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਹੋਵੇ। ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ *ਬਹੁ-ਬਹੁਲਕ (multi-modal)* ਅੰਕੜੇ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਇਹ ਵੀ ਦੱਸਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜੇ ਵੀ ਬਹੁ-ਬਹੁਲਕ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ ਪ੍ਰੰਤੂ ਅਸੀਂ ਆਪਣੀ ਚਰਚਾ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਬਹੁਲਕ ਵਾਲੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਤੱਕ ਹੀ ਸੀਮਿਤ ਰੱਖਾਂਗੇ।

ਆਓ ਪਹਿਲਾਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਇਹ ਯਾਦ ਕਰੀਏ ਕਿ ਅਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ ਅਸੀਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਸੀ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਕਿਸੇ ਗੇਂਦਬਾਜ਼ ਦੁਆਰਾ 10 ਕ੍ਰਿਕਟ ਮੈਚਾਂ ਵਿੱਚ ਲਏ ਗਏ ਵਿਕਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ:

2 6 4 5 0 2 1 3 2 3

ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਆਓ ਉਪਰੋਕਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਈਏ ਜਿਵੇਂ ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ:

ਵਿਕਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	0	1	2	3	4	5	6
ਕ੍ਰਿਕਟ ਮੈਚਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	1	1	3	2	1	1	1

ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਗੇਂਦਬਾਜ਼ ਨੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੈਚਾਂ (3) ਵਿੱਚ 2 ਵਿਕਟਾਂ ਲਈਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ 2 ਹੈ।

ਇੱਕ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ, ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਨੂੰ ਵੇਖ ਕੇ ਬਹੁਲਕ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਉਹ ਵਰਗ (class) ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਅਧਿਕਤਮ ਹੈ। ਇਸ ਵਰਗ ਨੂੰ **ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ (modal class)** ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਬਹੁਲਕ ਇਸ ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ ਦੇ ਅੰਦਰ ਕੋਈ ਮੁੱਲ ਹੈ। ਜਿਸ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ:

$$\text{ਬਹੁਲਕ} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

ਜਿੱਥੇ l = ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ ਦੀ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ

h = ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਦਾ ਮਾਪ (ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਸਾਰੇ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਬਰਾਬਰ ਹੈ)

f_1 = ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ

f_0 = ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ ਤੋਂ ਠੀਕ ਪਹਿਲੇ ਵਰਗ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਅਤੇ

f_2 = ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ ਦੇ ਠੀਕ ਬਾਅਦ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਵਰਗ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਹੈ।

ਇਸ ਸੂਤਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਲਈ ਆਉ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਦੁਆਰਾ ਇੱਕ ਮੁਹੱਲੇ ਦੇ 20 ਪਰਿਵਾਰਾਂ ਉੱਪਰ ਕੀਤੇ ਗਏ ਸਰਵੇਖਣ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਵਜੋਂ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਪਰਿਵਾਰਾਂ ਦੇ ਮੈਂਬਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅੰਕੜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਏ :

ਪਰਿਵਾਰ ਮਾਪ	1 - 3	3 - 5	5 - 7	7 - 9	9 - 11
ਪਰਿਵਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	7	8	2	2	1

ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਅਧਿਕਤਮ ਵਰਗ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ 8 ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਦਾ ਸੰਗਤ ਵਰਗ 3 - 5 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ 3-5 ਹੈ।

ਹੁਣ,

ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ = 3 - 5, ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ ਦੀ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ $(l) = 3$ ਅਤੇ ਵਰਗ ਮਾਪ $(h) = 2$ ਹੈ।

ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ $(f_1) = 8$

ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ ਤੋਂ ਠੀਕ ਪਹਿਲੇ ਵਰਗ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ $(f_0) = 7$ ਅਤੇ

ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ ਤੋਂ ਠੀਕ ਬਾਅਦ ਵਰਗ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ $(f_2) = 2$ ਹੈ।

ਆਉ ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਸੂਤਰ ਵਿੱਚ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰੀਏ। ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$\text{ਬਹੁਲਕ} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 3 + \left(\frac{8-7}{2\times 8 - 7 - 2}\right) \times 2 = 3 + \frac{2}{7} = 3.286$$

ਇਸ ਲਈ, ਉਪਰੋਕਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ 3.286 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਗਣਿਤ ਦੀ ਇੱਕ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ 30 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਵੰਡ ਉਦਾਹਰਣ 1 ਦੀ ਸਾਰਣੀ 14.3 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ ਹੀ ਬਹੁਲਕ ਅਤੇ ਮੱਧਮਾਨ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਉਦਾਹਰਣ 1 ਦੀ ਸਾਰਣੀ 14.3 ਨੂੰ ਦੇਖੋ। ਕਿਉਂਕਿ ਅਧਿਕਤਮ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (7) ਵਾਲਾ ਅੰਤਰਾਲ 40-55 ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ 40-55 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ ਦੀ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ $(l) = 40$ ਹੈ,

ਵਰਗ ਮਾਪ $(h) = 15$ ਹੈ,

ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ $(f_1) = 7$ ਹੈ,

ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ ਤੋਂ ਠੀਕ ਪਹਿਲਾਂ ਵਾਲੇ ਵਰਗ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ $(f_0) = 3$ ਹੈ,

ਅਤੇ ਬਹੁਲਕ ਵਰਗ ਤੇ ਠੀਕ ਬਾਅਦ ਵਾਲੇ ਵਰਗ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ $(f_2) = 6$ ਹੈ।

ਹੁਣ, ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\text{ਬਹੁਲਕ} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 40 + \left(\frac{7-3}{14-6-3}\right) \times 15 = 52$$

ਇਸ ਲਈ ਬਹੁਲਕ ਅੰਕ 52 ਹੈ।

ਹੁਣ, ਉਦਾਹਰਣ 1 ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਮੱਧਮਾਨ ਅੰਕ 62 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਅਧਿਕਤਮ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਅੰਕ 52 ਹੈ ਅਤੇ ਔਸਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੇ 62 ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ:

1. ਉਦਾਹਰਣ 6 ਵਿੱਚ ਬਹੁਲਕ, ਮੱਧਮਾਨ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਇਹ ਮੱਧਮਾਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ ਵੱਡਾ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

2. ਇਹ ਸਥਿਤੀ ਦੀ ਮੰਗ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਾਡੀ ਰੁਚੀ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਔਸਤ ਅੰਕਾਂ ਵਿੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਫਿਰ ਅਧਿਕਤਮ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਔਸਤ ਅੰਕਾਂ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਪਹਿਲੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਮੱਧਮਾਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਦੂਸਰੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਬਹੁਲਕ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ।

ਕਿਰਿਆ 3 : ਕਿਰਿਆ 2 ਵਿੱਚ ਬਣਾਏ ਗਏ ਸਮੂਹਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤੇ ਗਏ ਕੰਮ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਵਟਾਂਦਰਾ ਜਾਰੀ ਰੱਖੋ। ਹਰੇਕ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ ਕੱਢਣ ਲਈ ਕਹੋ। ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਮੱਧਮਾਨ ਨਾਲ ਕਰਨ ਲਈ ਵੀ ਕਹੋ ਅਤੇ ਦੋਨਾਂ ਦੇ ਅਰਥਾਂ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਨ ਵਾਸਤੇ ਵੀ ਕਹੋ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਅਸਮਾਨ ਵਰਗ ਵਾਲੇ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ ਵੀ ਕੱਢਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਦੀ ਚਰਚਾ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 14.2

1. ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਕਿਸੇ ਹਸਪਤਾਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਭਰਤੀ ਹੋਏ ਰੋਗੀਆਂ ਦੀ ਉਮਰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ:

ਉਮਰ (ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ)	5 - 15	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65
ਰੋਗੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	6	11	21	23	14	5

ਉਪਰੋਕਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ ਅਤੇ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਦੋਨਾਂ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ।

2. ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜੇ, 225 ਬਿਜਲੀ ਉਪਕਰਨਾਂ ਦੇ ਜੀਵਨ ਕਾਲ (ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ) ਦੀ ਸੂਚਨਾ ਦਿੰਦੇ ਹਨ:

ਜੀਵਨਕਾਲ (ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ)	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120
ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	10	35	52	61	38	29

ਉਪਕਰਨਾਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ ਜੀਵਨਕਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

3. ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜੇ ਕਿਸੇ ਪਿੰਡ ਦੇ 200 ਪਰਿਵਾਰਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਘਰੇਲੂ ਖਰਚ ਦੀ ਵੰਡ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਪਰਿਵਾਰਾਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਖਰਚ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ ਮੱਧਮਾਨ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਖਰਚ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਖਰਚ (₹ ਵਿੱਚ)	ਪਰਿਵਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
1000 - 1500	24
1500 - 2000	40
2000 - 2500	33
2500 - 3000	28
3000 - 3500	30
3500 - 4000	22
4000 - 4500	16
4500 - 5000	7

4. ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਭਾਰਤ ਦੇ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲਾਂ ਵਿੱਚ, ਰਾਜਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਅਧਿਆਪਕ-ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਅਨੁਪਾਤ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ ਅਤੇ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਦੋਨਾਂ ਮਾਪਾਂ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ।

ਪ੍ਰਤੀ ਅਧਿਆਪਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	ਰਾਜ/ਕੇਂਦਰੀ ਸ਼ਾਸਤ ਪ੍ਰਦੇਸ਼ਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
15 - 20	3
20 - 25	8
25 - 30	9
30 - 35	10
35 - 40	3
40 - 45	0
45 - 50	0
50 - 55	2

5. ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਵਿਸ਼ਵ ਦੇ ਕੁਝ ਵਧੀਆ ਬੱਲੇਬਾਜ਼ਾਂ ਦੁਆਰਾ ਇੱਕ ਰੋਜ਼ਾ ਅੰਤਰਰਾਸ਼ਟਰੀ ਕ੍ਰਿਕਟ ਮੈਚਾਂ ਵਿੱਚ ਬਣਾਈਆਂ ਗਈਆਂ ਦੌੜਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ:

ਬਣਾਈਆਂ ਗਈਆਂ ਦੌੜਾਂ	ਬੱਲੇਬਾਜ਼ਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
3000 - 4000	4
4000 - 5000	18
5000 - 6000	9
6000 - 7000	7
7000 - 8000	6
8000 - 9000	3
9000 - 10,000	1
10,000 - 11,000	1

ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੇ ਇੱਕ ਸੜਕ ਦੇ ਕਿਸੇ ਸਥਾਨ ਉੱਪਰ ਖੜ੍ਹੇ ਹੋ ਕੇ ਉਥੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀਆਂ ਕਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨੋਟ ਕੀਤੀ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤਾ। ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ 3 ਮਿੰਟ ਦੇ ਅੰਤਰਾਲ ਨਾਲ ਉਸ ਸਥਾਨ ਤੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀਆਂ ਕਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ। ਇਹੋ ਜਿਹੇ 100 ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਉੱਪਰ ਪ੍ਰੇਖਣ ਲਏ ਗਏ। ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਕਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	7	14	13	12	20	11	15	8

14.4 ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ (Median)

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਜਮਾਤ ਨੌਵੀਂ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ, *ਮੱਧਿਕਾ (median)* ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦਾ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਮਾਪ ਹੈ ਜੋ ਕਿਸੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਵਿਚਕਾਰਲਾ ਮੁੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਅਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਨੂੰ ਵੱਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਜਦੋਂ n ਟਾਂਕ ਹੈ ਤਾਂ ਮੱਧਿਕਾ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ਵਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜਦੋਂ n ਜਿਸਤ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਮੱਧਿਕਾ $\frac{n}{2}$ ਵੇਂ ਅਤੇ $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ ਵੇਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਔਸਤ (ਮੱਧਮਾਨ) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ 100 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਕੁੱਲ 50 ਅੰਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕਾਂ ਬਾਰੇ ਦੱਸਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ	20	29	28	33	42	38	43	25
ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	6	28	24	15	2	4	1	20

ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਵਧਦਾ ਕ੍ਰਮ ਲਿਖੋ ਅਤੇ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਣੀ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਬਣਾਓ।

ਸਾਰਣੀ 14.9

ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
20	6
25	20
28	24
29	28
33	15
38	4
42	2
43	1
ਜੋੜ	**100**

ਇੱਥੇ $n = 100$ ਹੈ ਜੋ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਮੱਧਿਕਾ ਪ੍ਰੇਖਣ $\frac{n}{2}$ ਵੇਂ ਅਤੇ $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ ਵੇਂ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦਾ ਔਸਤ ਹੋਵੇਗਾ ਭਾਵ 50ਵੇਂ ਅਤੇ 51ਵੇਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾ ਦਾ ਔਸਤ। ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅੱਗੇ ਵੱਧਦੇ ਹਾਂ।

ਸਾਰਣੀ 14.10

ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
20	6
25 ਤੱਕ	6 + 20 = 26
28 ਤੱਕ	26 + 24 = 50
29 ਤੱਕ	50 + 28 = 78
33 ਤੱਕ	78 + 15 = 93
38 ਤੱਕ	93 + 4 = 97
42 ਤੱਕ	97 + 2 = 99
43 ਤੱਕ	99 + 1 = 100

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਨਵਾਂ ਸਤੰਭ (ਕਾਲਮ) ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਜੋੜਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਉਸ ਨੂੰ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਦਾ ਨਾਮ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਸਾਰਣੀ 14.11

ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
20	6	6
25	20	26
28	24	50
29	28	78
33	15	93
38	4	97
42	2	99
43	1	100

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ:

50ਵਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣ 28 ਹੈ (ਕਿਉਂ ?)

51ਵਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣ 29 ਹੈ

ਇਸ ਲਈ, ਮੱਧਿਕਾ $= \dfrac{28 + 29}{2} = 28.5$

ਟਿੱਪਣੀ : ਸਾਰਣੀ 14.11 ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਸਤੰਭ 1 ਅਤੇ 3 ਸੰਚਈ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਨਾਮ ਨਾਲ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਮੱਧਿਕਾ ਅੰਕ 28.5 ਸੂਚਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਲਗਭਗ 50 ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ 28.5 ਤੋਂ ਘੱਟ ਅੰਕ ਅਤੇ ਬਾਕੀ 50 ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ 28.5 ਤੋਂ ਵੱਧ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ।

ਆਉ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਸਮੂਹਿਕ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਕਿਵੇਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ 100 ਅੰਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 53 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹਿਕ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਉੱਪਰ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਸਾਰਣੀ 14.12

ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
0 - 10	5
10 - 20	3
20 - 30	4
30 - 40	3
40 - 50	3
50 - 60	4
60 - 70	7
70 - 80	9
80 - 90	7
90 - 100	8

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ।

ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ 10 ਤੋਂ ਘੱਟ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ? ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਉੱਤਰ 5 ਹੈ।

ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ 20 ਤੋਂ ਘੱਟ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ? ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ 20 ਤੋਂ ਘੱਟ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵਿੱਚ ਉਹ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੇ ਵਰਗ 0 - 10 ਵਿੱਚ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ ਅਤੇ ਉਹ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੇ ਵਰਗ 10 - 20 ਵਿੱਚ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, 20 ਤੋਂ ਘੱਟ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ

ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ 5 + 3 ਭਾਵ 8 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵਰਗ 10 - 20 ਦੀ *ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ (cumulative frequency)* 8 ਹੈ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਦੂਜੇ ਵਰਗਾਂ ਦੀ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਭਾਵ ਅਸੀਂ ਇਹ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 30 ਤੋਂ ਘੱਟ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹਨ, 40 ਤੋਂ ਘੱਟ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹਨ, ..., 100 ਤੋਂ ਘੱਟ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਾਰਣੀ 14.13 ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਰਹੇ ਹਾਂ:

ਸਾਰਣੀ 14.13

ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ)
10 ਤੋਂ ਘੱਟ	5
20 ਤੋਂ ਘੱਟ	5 + 3 = 8
30 ਤੋਂ ਘੱਟ	8 + 4 = 12
40 ਤੋਂ ਘੱਟ	12 + 3 = 15
50 ਤੋਂ ਘੱਟ	15 + 3 = 18
60 ਤੋਂ ਘੱਟ	18 + 4 = 22
70 ਤੋਂ ਘੱਟ	22 + 7 = 29
80 ਤੋਂ ਘੱਟ	29 + 9 = 38
90 ਤੋਂ ਘੱਟ	38 + 7 = 45
100 ਤੋਂ ਘੱਟ	45 + 8 = 53

ਉਪਰੋਕਤ ਵੰਡ **ਘਟਦੀ ਕ੍ਰਮ ਦੀ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ** ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇੱਥੇ 10, 20, 30, . . . , 100, ਸੰਗਤ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦੀਆਂ ਉਪਰਲੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਹਨ।

ਅਸੀਂ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਹਨਾਂ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੇ 0 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਉਸਦੇ ਬਰਾਬਰ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ, 10 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ, 20 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ, ਆਦਿ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਸਾਰਣੀ 14.12 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਰੇ 53 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ 0 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ 0 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ ਅੰਤਰਾਲ 0 - 10 ਵਿੱਚ 5 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ 53 – 5 = 48 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ 10 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਜਾਰੀ ਰੱਖਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ 20 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ 48 – 3 = 45, 30 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ 45 – 4 = 41, ਆਦਿ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ 14.14 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 14.14

ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ)
0 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	53
10 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	53 – 5 = 48
20 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	48 – 3 = 45
30 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	45 – 4 = 41
40 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	41 – 3 = 38
50 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	38 – 3 = 35
60 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	35 – 4 = 31
70 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	31 – 7 = 24
80 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	24 – 9 = 15
90 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	15 – 7 = 8

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਜਾਂ ਵੰਡ **ਵੱਧ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ** ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਥੇ 0, 10, 20, . . ., 90 ਸੰਗਤ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦੀਆਂ ਹੇਠਲੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਹਨ।

ਹੁਣ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਉਪਰੋਕਤ ਦੋਵੇਂ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਅਸੀਂ ਸਾਰਣੀ 14.12 ਅਤੇ ਸਾਰਣੀ 14.13 ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਕੇ ਇੱਕ ਨਵੀਂ ਸਾਰਣੀ 14.15 ਬਣਾ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੈ:

ਸਾਰਣੀ 14.15

ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (f)	ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ (cf)
0 - 10	5	5
10 - 20	3	8
20 - 30	4	12
30 - 40	3	15
40 - 50	3	18
50 - 60	4	22
60 - 70	7	29
70 - 80	9	38
80 - 90	7	45
90 - 100	8	53

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆ ਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਪ੍ਰੇਖਣ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਦੇਖ ਕੇ ਨਹੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਭ ਤੋਂ ਵਿਚਕਾਰਲਾ ਪ੍ਰੇਖਣ ਕਿਸੇ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਮੱਧ ਪ੍ਰੇਖਣ ਨੂੰ ਉਸ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਲੱਭਿਆ ਜਾਵੇ, ਜੋ ਅੰਕੜਿਆ ਨੂੰ ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਕਿਹੜਾ ਹੈ?

ਇਸ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸਾਰਿਆਂ ਵਰਗਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਅਤੇ $\frac{n}{2}$ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉਹ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਲੱਭਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਦੀ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ $\frac{n}{2}$ ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਨੇੜ ਹੋ। ਇਸ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਨੂੰ *ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ (median class)* ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਉਪਰੋਕਤ ਵੰਡ ਵਿੱਚ, $n = 53$ ਹੈ ਭਾਵ, $\frac{n}{2} = 26.5$ ਹੈ। ਹੁਣ 60 - 70 ਹੀ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਵਰਗ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ 29, $\frac{n}{2}$ ਭਾਵ 26.5 ਤੋਂ ਅਧਿਕ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਨੇੜੇ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ 60 - 70 **ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ** ਹੈ।

ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਮੱਧਿਕਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\text{ਮੱਧਿਕਾ} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h,$$

ਇੱਥੇ

$l =$ ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ ਦੀ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ

$n =$ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ

$cf =$ ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ ਤੋਂ ਠੀਕ ਪਹਿਲੇ ਵਾਲੇ ਵਰਗ ਦੀ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ

$f =$ ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ

$h =$ ਵਰਗ ਮਾਪ (ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਵਰਗ ਮਾਪ ਬਰਾਬਰ ਹਨ)

ਹੁਣ $\frac{n}{2} = 26.5$, $l = 60$, $cf = 22$, $f = 7$, $h = 10$

ਨੂੰ ਸੂਤਰ ਵਿੱਚ ਭਰਦੇ ਹੋਏ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$\text{ਮੱਧਿਕਾ} = 60 + \left(\frac{26.5 - 22}{7}\right) \times 10 = 60 + \frac{45}{7}$$

$$= 66.4$$

ਇਸ ਲਈ, ਲਗਭਗ ਅੱਧੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆ ਨੇ 66.4 ਤੋਂ ਘੱਟ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਅੱਧੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ 66.4 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਕਿਸੇ ਸਕੂਲ ਦੀ ਦਸਵੀਂ ਜਮਾਤ ਦੀਆਂ 51 ਲੜਕੀਆਂ ਦੀਆਂ ਉੱਚਾਈਆਂ ਦਾ ਇੱਕ ਸਰਵੇਖਣ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਅਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ :

ਉੱਚਾਈ (cm) ਵਿੱਚ	ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
140 ਤੋਂ ਘੱਟ	4
145 ਤੋਂ ਘੱਟ	11
150 ਤੋਂ ਘੱਟ	29
155 ਤੋਂ ਘੱਟ	40
160 ਤੋਂ ਘੱਟ	46
165 ਤੋਂ ਘੱਟ	51

ਮੱਧਿਕਾ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੱਧਿਕਾ ਉੱਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਸਾਨੂੰ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਘੱਟ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦੀਆਂ ਉੱਪਰਲੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ 140, 145, 150, ...165 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 140 ਤੋਂ ਘੱਟ, 140-145, 145-150,.....160-165 ਹਨ। ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਵੰਡ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ 4 ਲੜਕੀਆਂ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਉੱਚਾਈ 140 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਭਾਵ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 140 ਤੋਂ ਘੱਟ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ 4 ਹੈ। ਹੁਣ 145 ਸੈ.ਮੀ. ਤੋਂ ਘੱਟ ਉੱਚਾਈ ਵਾਲੀਆਂ 11 ਲੜਕੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ 140 ਸੈ.ਮੀ. ਤੋਂ ਘੱਟ ਉੱਚਾਈ ਵਾਲੀਆਂ 4 ਲੜਕੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 140 - 145 ਵਿੱਚ ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 11 – 4 = 7 ਹੋਵੇਗੀ ਭਾਵ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ 140 - 145 ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ 7 ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ 145 – 150 ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ 29 – 11 = 18 ਹੈ, 150 - 155 ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ 40 – 29 = 11 ਹੈ, ਆਦਿ। ਇਸ ਲਈ ਸੰਚਈ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਦੇ ਨਾਲ ਸਾਡੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਰਗੀ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 14.16

ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	ਸੰਚਈ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
140 ਤੋਂ ਘੱਟ	4	4
140 - 145	7	11
145 - 150	18	29
150 - 155	11	40
155 - 160	6	46
160 - 165	5	51

ਹੁਣ $n = 51$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, $\frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$ ਹੈ। ਇਹ ਪ੍ਰੇਖਣ ਅੰਤਰਾਲ 145 - 150 ਵਿੱਚ ਆਉਂਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ,

l (ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ) = 145,

ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ 145 - 150 ਦੇ ਠੀਕ ਪਹਿਲੇ ਵਰਗ ਦੀ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ (cf) = 11,

ਮੱਧਿਕਾ ਵਰਗ 145 – 150 ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ $f = 18$ ਅਤੇ ਵਰਗ ਮਾਪ $h = 5$ ਹੈ।

ਸੂਤਰ, ਮੱਧਿਕਾ = $l + \left(\frac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right) \times h$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$\text{ਮੱਧਿਕਾ} = 145 + \left(\frac{25.5 - 11}{18}\right) \times 5$$

$$= 145 + \frac{72.5}{18} = 149.03$$

ਇਸ ਲਈ, ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਉੱਚਾਈ 149.03 ਸੇ.ਮੀ. ਹੈ।

ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਲੱਗਭਗ 50% ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਉੱਚਾਈ 149.03 cm ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ ਇਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ 50% ਦੀ ਉੱਚਾਈ 149.03 cm ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ 525 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 100 ਹੈ, ਤਾਂ x ਅਤੇ y ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
0 - 100	2
100 - 200	5
200 - 300	x
300 - 400	12
400 - 500	17
500 - 600	20
600 - 700	y
700 - 800	9
800 - 900	7
900 - 1000	4

ਹੱਲ :

ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
0 - 100	2	2
100 - 200	5	7
200 - 300	x	$7 + x$
300 - 400	12	$19 + x$
400 - 500	17	$36 + x$
500 - 600	20	$56 + x$
600 - 700	y	$56 + x + y$
700 - 800	9	$65 + x + y$
800 - 900	7	$72 + x + y$
900 - 1000	4	$76 + x + y$

ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $n = 100$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $76 + x + y = 100$ ਭਾਵ $x + y = 24$ (1)

ਮੱਧਿਕਾ 525 ਹੈ ਜੋ ਵਰਗ 500-600 ਵਿੱਚ ਆਉਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $l = 500$, $f = 20$, $cf = 36 + x$, $h = 100$ ਹੈ।

ਸੂਤਰ ਮੱਧਿਕਾ $= l + \left(\dfrac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) h$, ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$525 = 500 + \left(\frac{50 - 36 - x}{20}\right) \times 100$$

ਜਾਂ $525 - 500 = (14 - x) \times 5$

ਜਾਂ $25 = 70 - 5x$

ਜਾਂ $5x = 70 - 25 = 45$

ਇਸ ਲਈ $x = 9$

ਇਸ ਲਈ (1) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $9 + y = 24$

ਭਾਵ $y = 15$

ਹੁਣ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਤਿੰਨਾਂ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਲਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰੀਏ ਕਿ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਜ਼ਰੂਰਤ ਦੇ ਲਈ ਕਿਹੜਾ ਮਾਪ ਵੱਧ ਉੱਚਿਤ ਹੈ।

ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੋਣ ਵਾਲਾ ਮਾਪ ਮੱਧਮਾਨ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਉੱਪਰ ਅਧਾਰਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦੋਨਾਂ ਸਿਖਰਲੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਇਹ ਸੰਪੂਰਨ ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਅਤੇ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਨਾਲ਼ ਹੀ ਦੋ ਜਾਂ ਵੱਧ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੰਡ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸਕੂਲਾਂ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਔਸਤ ਮੱਧਮਾਨ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸ ਸਕੂਲ ਦਾ ਪਰਦਰਸ਼ਨ ਵਧੀਆ ਰਿਹਾ।

ਪਰੰਤੂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਸਿਖਰ ਮੁੱਲ ਮੱਧਮਾਨ ਉੱਪਰ ਪ੍ਰਭਾਵ ਪਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਲਗਭਗ ਇਕੋ ਜਿਹੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵਾਲੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਇਕ ਵਧੀਆ ਪ੍ਰਤੀਨਿਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਵਰਗ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਮੰਨ ਲਉ 2 ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਪੰਜ ਵਰਗਾਂ ਦੀਆਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ 20, 25, 20, 21 ਅਤੇ 18 ਹੋਣ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਸਹੀ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ ਪ੍ਰਦਾਨ ਨਹੀਂ ਕਰੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਦੇ ਲਈ, ਮੱਧਮਾਨ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਇੱਕ ਚੰਗਾ ਪ੍ਰਤੀਨਿਧ ਨਹੀਂ ਕਰੇਗਾ।

ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਜਿੱਥੇ ਵਿਅਕਤੀਗਤ ਪ੍ਰੇਖਣ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਇੱਕ 'ਪ੍ਰਤੀਕਾਤਮਕ' (typical) ਪ੍ਰੇਖਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਮੱਧਿਕਾ ਵੱਧ ਉਪਯੁਕਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਕਿਸੇ ਦੇਸ਼ ਦੇ ਮਜ਼ਦੂਰਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਤੀਕਾਤਮਕ ਉਤਪਾਦਕਤਾਂ ਦਰ, ਔਸਤ ਮਜ਼ਦੂਰੀ ਆਦਿ ਦੇ ਲਈ ਮੱਧਿਕਾ ਇੱਕ ਉੱਚਿਤ ਮਾਪਕ ਹੈ। ਇਹ ਅਜਿਹੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਹਨ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸਿਖਰਲੇ (ਭਾਵ ਬਹੁਤ ਵੱਡੇ ਜਾਂ ਬਹੁਤ ਛੋਟੇ) ਮੁੱਲ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਅਜਿਹੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮੱਧਮਾਨ ਦੀ ਥਾਂ ਤੇ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦਾ ਮਾਪ ਮੱਧਿਕਾ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ, ਜਿੱਥੇ ਜ਼ਿਆਦਾਤਰ ਆਉਣ ਵਾਲਾ ਮੁੱਲ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨਾ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਪਸੰਦੀਦਾ ਵਸਤੂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਬਹੁਲਕ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਚੰਗਾ ਵਿਕਲਪ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵੇਖਿਆ ਜਾਣ ਵਾਲਾ ਪਸੰਦੀਦਾ ਟੀ.ਵੀ. ਪ੍ਰੋਗਰਾਮ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਉਸ ਉਪਭੋਗਤਾ ਵਸਤੂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਜਿਸ ਦੀ ਮੰਗ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ, ਲੋਕਾਂ ਦੁਆਰਾ ਵਾਹਨਾਂ ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਪਸੰਦ ਕੀਤਾ ਜਾਣ ਵਾਲਾ ਰੰਗ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਆਦਿ ਵਿੱਚ ਬਹੁਲਕ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀਆਂ :

1. ਇਹਨਾਂ ਤਿੰਨਾਂ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ ਦੇ ਮਾਪਕਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ ਜੋ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ:

3 ਮੱਧਿਕਾ = ਬਹੁਲਕ + 2 ਮੱਧਮਾਨ

2. ਅ-ਸਮਾਨ ਵਰਗ ਮਾਪਾਂ ਵਾਲੇ ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਵੀ ਪਤਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਦੀ ਚਰਚਾ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 14.3

1. ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਕਿਸੇ ਮੁਹੱਲੇ ਦੇ 68 ਉਪਭੋਗਤਾਵਾਂ ਦੀ ਬਿਜਲੀ ਦੀ ਮਹੀਨੇਵਾਰ ਖਪਤ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ, ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਬਹੁਲਕ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇਸ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵੀ ਕਰੋ।

ਮਹੀਨੇ ਵਾਰ ਖਪਤ	ਉਪਭੋਗਤਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
65 - 85	4
85 - 105	5
105 - 125	13
125 - 145	20
145 - 165	14
165 - 185	8
185 - 205	4

2. ਜੇਕਰ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਵੰਡ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ 28.5 ਹੋਵੇ ਤਾਂ x ਅਤੇ y ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ:

ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ	ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
0 - 10	5
10 - 20	x
20 - 30	20
30 - 40	15
40 - 50	y
50 - 60	5
ਜੋੜ	60

3. ਇੱਕ ਜੀਵਨ ਬੀਮਾ ਏਜੰਟ 100 ਪਾਲਿਸੀ ਧਾਰਕਾਂ ਦੀ ਉਮਰ ਦੀ ਵੰਡ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਮੱਧਿਕਾ ਉਮਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਪਾਲਿਸੀ ਕੇਵਲ ਉਹਨਾਂ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਨੂੰ ਦਿੱਤੀ ਜਾਵੇ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਉਮਰ 18 ਸਾਲ ਜਾਂ ਉਸ ਤੋਂ ਅਧਿਕ ਹੋਵੇ, ਪਰੰਤੂ 60 ਸਾਲ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਵੇ।

ਉਮਰ (ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ)	ਪਾਲਿਸੀ ਧਾਰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
20 ਤੋਂ ਘੱਟ	2
25 ਤੋਂ ਘੱਟ	6
30 ਤੋਂ ਘੱਟ	24
35 ਤੋਂ ਘੱਟ	45
40 ਤੋਂ ਘੱਟ	78
45 ਤੋਂ ਘੱਟ	89
50 ਤੋਂ ਘੱਟ	92
55 ਤੋਂ ਘੱਟ	98
60 ਤੋਂ ਘੱਟ	100

4. ਇੱਕ ਪੌਦੇ ਦੀਆਂ 40 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਲਗਭਗ ਮਿਲੀਮੀਟਰ ਵਿੱਚ ਮਾਪੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ :

ਲੰਬਾਈ (mm) ਵਿੱਚ	ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
118 - 126	3
127 - 135	5
136 - 144	9
145 - 153	12
154 - 162	5
163 - 171	4
172 - 180	2

ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਸੰਕੇਤ : ਮੱਧਿਕਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣਾ ਪਵੇਗਾ, ਕਿਉਂਕਿ ਸੂਤਰ ਵਿੱਚ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਮੰਨੀ ਗਈ ਹੈ। ਤਦ ਇਹ ਵਰਗ 117.5 - 126.5, 126.5 - 135.5, . . . ,171.5 - 180.5 ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

5. ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ 400 ਨਿਊਨ ਲੈਂਪਾਂ (lamp) ਦੇ ਜੀਵਨ ਕਾਲ (life time) ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ:

ਜੀਵਨ ਕਾਲ (ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ)	ਲੈਂਪਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
1500 - 2000	14
2000 - 2500	56
2500 - 3000	60
3000 - 3500	86
3500 - 4000	74
4000 - 4500	62
4500 - 5000	48

ਇੱਕ ਲੈਂਪ ਦਾ ਮੱਧਿਕਾ ਜੀਵਨ ਕਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਇੱਕ ਸਥਾਨਕ ਟੈਲੀਫੋਨ ਡਾਇਰੈਕਟਰੀ ਤੋਂ 100 ਉੱਪ ਨਾਮ (surnames) ਦੀ ਸੂਚੀ ਲਈ ਗਈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਵਰਤੇ ਗਏ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਈ:

ਅੱਖਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	1 - 4	4 - 7	7 - 10	10 - 13	13 - 16	16 - 29
ਉੱਪ-ਨਾਮ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	6	30	40	16	4	4

ਉੱਪ-ਨਾਮਾਂ ਵਿੱਚ ਮੱਧਿਕਾ ਅੱਖਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਉੱਪ-ਨਾਮਾਂ ਵਿੱਚ ਮੱਧਮਾਨ ਅੱਖਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਨਾਲ ਹੀ, ਉਪਨਾਮ ਦਾ ਬਹੁਲਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਵੰਡ ਇੱਕ ਜਮਾਤ ਦੇ 30 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਵਜਨ (ਭਾਰ) ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਮੱਧਿਕਾ ਭਾਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

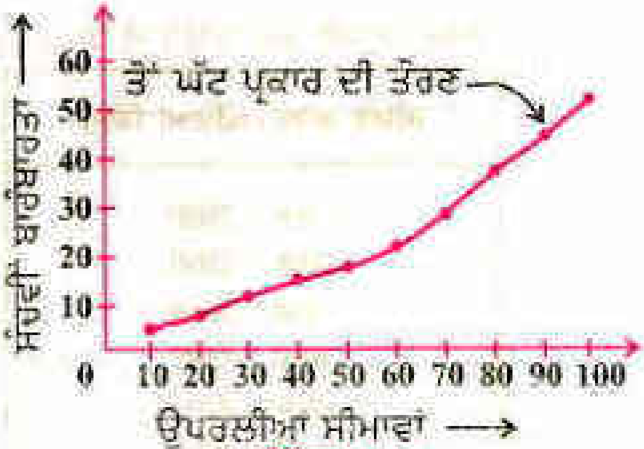
ਵਜਨ (ਕਿਲੋਗ੍ਰਾਮ ਵਿੱਚ)	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60	60 - 65	65 - 70	70 - 75
ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	2	3	8	6	6	3	2

14.5 ਸੰਚਵੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਦਾ ਆਲੇਖੀ ਚਿੱਤਰਨ (ਨਿਰੂਪਣ)

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ, ਅੱਖਰਾਂ ਨਾਲੋਂ ਜਿਆਦਾ ਵਧੀਆਂ ਭਾਸ਼ਾ ਬੋਲਦੇ ਹਨ। ਇੱਕ ਆਲੇਖੀ ਚਿੱਤਰਨ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਹੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਕ ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜਮਾਤ ਨੌਵੀਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਛੜ ਚਿੱਤਰਾਂ, ਆਇਤ ਚਿੱਤਰਾਂ ਅਤੇ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਬਹੁਭੁਜ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਚਿੱਤਰਨ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਆਓ ਹੁਣ ਇੱਕ ਸੰਚਵੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਨੂੰ ਆਲੇਖੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤਰਨ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਆਓ ਸਾਰਣੀ 14.13 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਉੱਪਰ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਮੁੱਲ 10, 20, 30, ..., 100 ਸੰਗਤ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦੀਆਂ ਉੱਪਰਲੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਹਨ। ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਆਲੇਖੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਖਿਤਿਜ ਧੁਰੇ (x-ਧੁਰੇ) ਉੱਤੇ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦੀਆਂ ਉਪਰਲੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ, ਇੱਕ ਸੁਵਿਧਾਜਨਕ ਪੈਮਾਨਾ (scale) ਲੈ ਕੇ ਅੰਕਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਲੰਬਾਤਮਕ ਧੁਰੇ (y-ਧੁਰੇ) ਉਤੇ ਉਹੀ ਜਾਂ ਕੋਈ ਹੋਰ ਪੈਮਾਨਾ ਲੈ ਕੇ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।



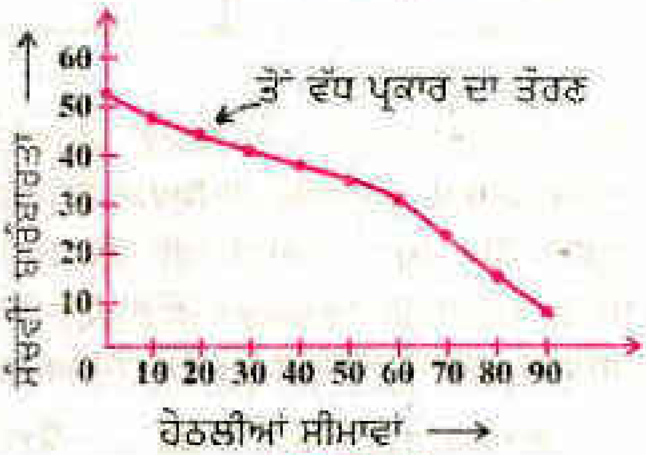
ਚਿੱਤਰ 14.1

ਭਾਵ ਦੋਨਾਂ ਧੁਰਿਆਂ ਉੱਪਰ ਇੱਕ ਹੀ ਪੈਮਾਨਾ ਲੈਣਾ ਜਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਆਉ ਹੁਣ ਇੱਕ ਗ੍ਰਾਫ ਪੇਪਰ (ਉੱਪਰੀ ਸੀਮਾ, ਸੰਗਤ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ) ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਗਤ ਬਿੰਦੂ (10, 5), (20, 8), (30, 12), (40, 15), (50, 18), (60, 22), (70, 29), (80, 38), (90, 45), (100, 53) ਆਲੇਖਿਤ ਕਰੀਏ ਅਤੇ ਇਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਮੁਕਤ ਹੱਥ ਵਕਰ (free hand smooth curve) ਦੁਆਰਾ ਮਿਲਾਈਏ। ਇਹ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਈ ਵਕਰ, ਤੋਂ ਘੱਟ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵਕਰ *(cumulative frequency curve)* ਜਾਂ ਤੋਰਣ *(ogive)* ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ। (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 14. 1)।

ਅੰਗਰੇਜੀ ਦੇ ਸ਼ਬਦ 'ogive' ਨੂੰ 'ogeev' (ਔਜੀਵ) ਬੋਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਦੀ ਉਤਪਤੀ ਸ਼ਬਦ 'ogee' ਤੋਂ ਹੋਈ ਹੈ। ਇਹ ਇੱਕ ਉੱਤਲ ਵਕਰ (convex curve) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਹਿਰਾਉਂਦੀ ਹੋਈ ਇੱਕ ਅਵਤਲ ਵਕਰ (concave curve) ਦੇ ਅਕਾਰ ਦੀ ਵਕਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ; ਭਾਵ ਇਹ ਵਕਰ S ਦੇ ਅਕਾਰ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਦੇ ਸਿਰੇ ਲੰਬਾਤਮਕ(vertical) ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ। 14ਵੀਂ ਅਤੇ 15ਵੀਂ ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਦੇ ਗੋਥਿਕ ਢੰਗ (Gothic style) ਦੀ ਵਸਤੂਕਲਾ ਵਿੱਚ, ogee ਆਕਾਰ ਦਾ ਵਕਰ ਉਸ ਕਲਾ ਦੀ ਪ੍ਰਮੁੱਖ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਵਿਚੋਂ ਇੱਕ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਾਰਣੀ 14.14 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ (ਤੋਂ ਵੱਧ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ) ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਉੱਪਰ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਉਸ ਦਾ ਤੋਰਣ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ।

ਯਾਦ ਕਰੋ ਇੱਥੇ 0, 10, 20, ...90 ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸੰਗਤ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲਾਂ 0 - 10, 10 - 20, ..., 90 - 100 ਦੀਆਂ ਹੇਠਲੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਹਨ। 'ਤੋਂ ਵੱਧ ਪ੍ਰਕਾਰ 'ਦੇ ਆਲੇਖੀ ਚਿੱਤਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਉੱਚਿਤ ਪੈਮਾਨਾ ਲੈਂਦੇ ਹੋਏ, ਇੱਕ ਗ੍ਰਾਫ ਪੇਪਰ ਉੱਤੇ ਖਿਤਿਜ ਧੁਰੇ ਉੱਪਰ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾਵਾਂ ਅਤੇ ਲੰਬਾਤਮਕ ਧੁਰੇ ਉੱਪਰ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਅੰਕਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ, ਅਸੀਂ (ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ, ਸੰਗਤ ਸੰਚਵੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਬਿੰਦੂ (0, 53), (10, 48), (20, 45),

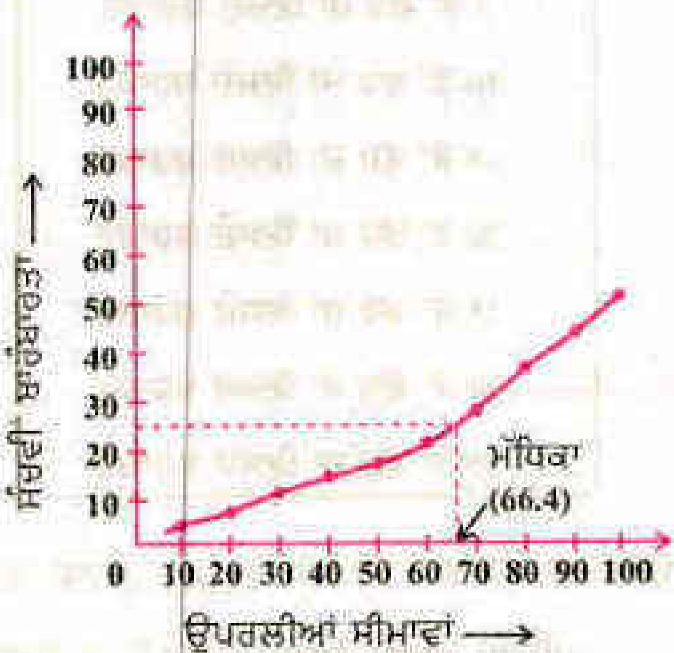


ਚਿੱਤਰ 14.2

(30, 41), (40, 38), (50, 35), (60, 31) (70, 24), (80, 15), (90, 8), ਅਲੇਖਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਫਿਰ ਅਸੀਂ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਮੁਕਤ ਹੱਥ ਵਕਰ ਦੁਆਰਾ ਮਿਲਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਜੋ ਵਕਰ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਹ 'ਤੋਂ ਅਧਿਕ ਪ੍ਰਕਾਰ' ਦੀ ਇੱਕ ਸੰਚਈ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵਕਰ ਜਾਂ ਤੋਰਣ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ। (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 14.2)

ਟਿੱਪਣੀ : ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਵੇਖੋ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਤੋਰਣ (ਚਿੱਤਰ 14.1 ਅਤੇ ਚਿੱਤਰ 14.2) ਬਰਾਬਰ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਹਨ ਜੋ ਸਾਰਣੀ 14.12 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹਨ।

ਹੁਣ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਇਹ ਉੱਠਦਾ ਹੈ ਕਿ ਤੋਰਣ ਕਿਸੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਮੱਧਿਕਾ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ? ਕੀ ਸਾਰਣੀ 14.12 ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਸੰਚਈ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵਕਰਾਂ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ? ਆਉ ਇਸ ਦੀ ਪਰਖ (ਜਾਂਚ) ਕਰੀਏ।

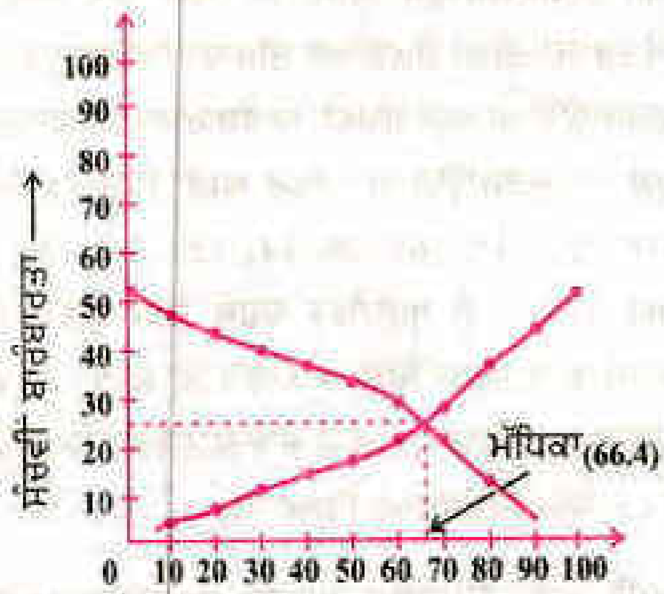


ਚਿੱਤਰ 14.3

ਇੱਕ ਸਪਸ਼ਟ ਵਿਧੀ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਖਿਤਿਜ ਧੁਰੇ ਉੱਪਰ, $\frac{n}{2} = \frac{53}{2} = 26.5$ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 14.3)। ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ, ਲੰਬਾਤਮਕ ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੋ ਜੋ ਉਪਰੋਕਤ ਵਕਰ ਨੂੰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ, ਖਿਤਿਜ ਧੁਰੇ ਉੱਪਰ ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ। ਖਿਤਿਜ ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਇਸ ਲੰਬ ਦੇ ਕਾਟਵੇਂ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਮੱਧਿਕਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 14.3)।

ਮੱਧਿਕਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਵੀ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੈ :

ਇੱਕ ਹੀ ਧੁਰਿਆਂ ਤੇ ਦੋਵੇਂ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ (ਭਾਵ ਤੋਂ ਘੱਟ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਅਤੇ ਤੋਂ ਵੱਧ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ) ਤੋਰਣ ਖਿੱਚੋ। ਦੋਵੇਂ ਤੋਰਣ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਖਿਤਿਜ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਲੰਬ ਖਿਚਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਲੰਬ ਖਿਤਿਜ ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਜਿਥੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ, ਉਹ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 14.4)।



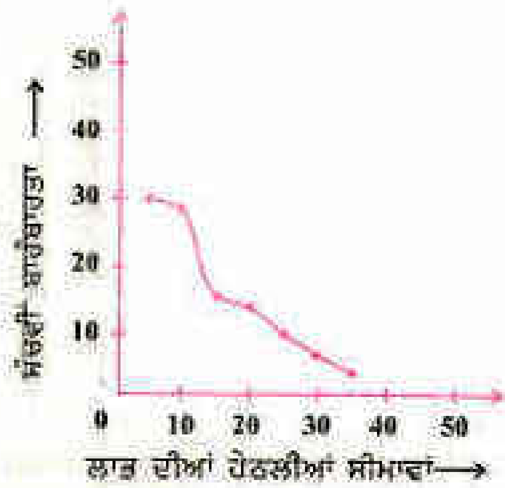
ਚਿੱਤਰ 14.4

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਕਿਸੇ ਮੁਹੱਲੇ ਦੇ ਇੱਕ ਸ਼ੋਪਿੰਗ ਕੰਪਲੈਕਸ (shopping complex) ਦੀਆਂ 30 ਦੁਕਾਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਕਮਾਏ ਗਏ ਸਾਲਾਨਾਂ ਲਾਭਾਂ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ:

ਲਾਭ (ਲੱਖ ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ)	ਦੁਕਾਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
5 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	30
10 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	28
15 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	16
20 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	14
25 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	10
30 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	7
35 ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ	3

ਉਪਰੋਕਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਦੋਵੇਂ ਤੋਰਣ ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ ਮੱਧਿਕਾ ਲਾਭ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਗ੍ਰਾਫ ਪੇਪਰ ਉੱਪਰ ਖਿਤਿਜ ਅਤੇ ਲੰਬਾਤਮਕ ਧੁਰੇ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਲਾਭ ਦੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦੀਆਂ ਹੇਠਲੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਖਿਤਿਜ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਲੰਬਾਤਮਕ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਫਿਰ ਅਸੀਂ ਬਿੰਦੂ (5, 30), (10, 28), (15, 16), (20, 14), (25, 10), (30, 7) ਅਤੇ (35, 3) ਨੂੰ ਅਲੇਖਿਤ ਕਰਕੇ ਇੱਕ ਮੁਕਤ ਹੱਥ ਵਕਰ ਨਾਲ ਮਿਲਾ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ 'ਤੋਂ ਵੱਧ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ' ਤੋਰਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 14.5 ਵਿੱਚ ਵਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



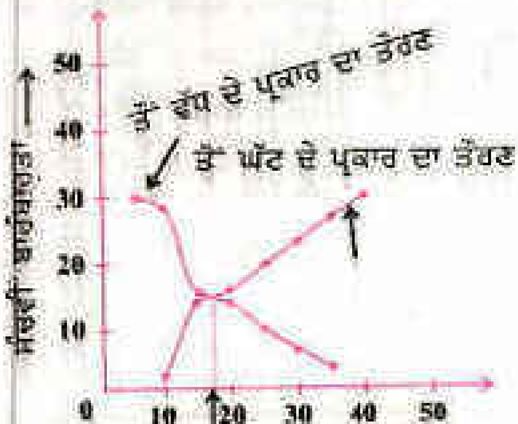
ਚਿੱਤਰ 14.5

ਆਓ ਹੁਣ, ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ, ਸੰਗਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਅਤੇ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੀਏ।

ਸਾਰਣੀ 14.17

ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40
ਦੁਕਾਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	2	12	2	4	3	4	3
ਸੰਚਈ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ	2	14	16	20	23	27	30

ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ (10, 2), (15, 14), (20, 16), (25, 20), (30, 23), (35, 27), (40, 30) ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 14.5 ਵਾਲੇ ਆਲੇਖ ਵਿੱਚ ਆਲੇਖਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਫਿਰ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਮੁਕਤ ਹੱਥ ਵਕਰ ਦੁਆਰਾ ਮਿਲਾਕੇ 'ਤੋਂ ਘੱਟ ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ' ਤੋਰਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 14.6 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਕਾਟਵੇਂ ਬਿੰਦੂ (ਸਾਂਝੇ ਬਿੰਦੂ) ਤੋਂ ਖਿਤਿਜ ਧੁਰੇ ਉੱਪਰ ਲੰਬ ਖਿਚਣ 'ਤੇ ਜੋ ਖਿਤਿਜ ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਲੰਬ ਦਾ ਕਾਟਵਾਂ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਉਸ ਦੇ ਸੰਗਤ ਮੁੱਲ ਤੋਂ ਮੱਧਿਕਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਮੱਧਿਕਾ ₹ 17.5 ਲੱਖ ਹੈ।)



ਮੱਧਿਕਾ (17.5) ਲਾਭ ਦੀਆਂ ਹੇਠਲੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ (ਲੱਖ ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ)

ਚਿੱਤਰ 14.6

ਟਿੱਪਣੀ : ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ, ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਤੋਰਣ ਖਿੱਚਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇਹ ਸੁਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰ ਲੈਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਲਗਾਤਾਰਤਾ (continuous) ਵਾਲੇ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ। (ਜਮਾਤ ਨੌਵੀਂ ਵਿੱਚ ਆਇਤ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੀਆਂ ਰਚਨਾਵਾਂ ਵੀ ਦੇਖੋ।)

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 14.4

1. ਹੇਠ ਦਿੱਤਾ ਵੰਡ ਕਿਸੇ ਫੈਕਟਰੀ ਦੇ 50 ਮਜ਼ਦੂਰਾਂ ਦੀ ਰੋਜ਼ਾਨਾਂ ਆਮਦਨ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ:

ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਆਮਦਨ (₹ ਵਿੱਚ)	100 - 120	120 - 140	140 - 160	160 - 180	180 - 200
ਮਜ਼ਦੂਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	12	14	8	6	10

'ਉਪਰੋਕਤ ਵੰਡ ਨੂੰ ਇੱਕ ਘੱਟ ਪ੍ਰਕਾਰ' ਦੇ ਸੰਚਈ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ ਅਤੇ ਉਸ ਦਾ ਤੋਰਣ ਖਿੱਚੋ।

2. ਕਿਸੇ ਜਮਾਤ ਦੇ 35 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਮੈਡੀਕਲ ਜਾਂਚ ਸਮੇਂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਭਾਰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਜ ਕੀਤਾ ਗਿਆ :

ਭਾਰ (ਕਿ.ਗ੍ਰਾ. ਵਿੱਚ)	ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ
38 ਤੋਂ ਘੱਟ	0
40 ਤੋਂ ਘੱਟ	3
42 ਤੋਂ ਘੱਟ	5
44 ਤੋਂ ਘੱਟ	9
46 ਤੋਂ ਘੱਟ	14
48 ਤੋਂ ਘੱਟ	28
50 ਤੋਂ ਘੱਟ	32
52 ਤੋਂ ਘੱਟ	35

ਉਪਰੋਕਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਘੱਟ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਤੋਰਣ ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ ਮੱਧਿਕਾ ਭਾਰ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ।

3. ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਕਿਸੇ ਪਿੰਡ ਦੇ 100 ਫਾਰਮਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀ ਹੈਕਟੇਅਰ ਕਣਕ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਉਤਪਾਦਨ (kg/ha)	50 - 55	55 - 60	60 - 65	65 - 70	70 - 75	75 - 80
ਫਾਰਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	2	8	12	24	38	16

ਇਸ ਵੰਡ ਨੂੰ 'ਵੱਧ ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਵੰਡ' ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇਸ ਦਾ ਤੋਰਣ ਖਿੱਚੋ।

14.6 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ :

1. ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ:

   (i) ਪ੍ਰਤੱਖ ਵਿਧੀ: $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

   (ii) ਕਲਪਨਿਕ ਮੱਧਮਾਨ ਵਿਧੀ $\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

   (iii) ਪਗ-ਵਿਚਲਨ ਵਿਧੀ: $\bar{x} = a + \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right) \times h$

   ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਇਹ ਮੰਨ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਉਸਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ, ਭਾਵ ਵਰਗ ਚਿੰਨ੍ਹ ਉੱਪਰ ਆਧਾਰਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

2. ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਬਹੁਲਕ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ:

$$\text{ਬਹੁਲਕ} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

ਜਿਥੇ ਸੰਕੇਤ ਆਪਣਾ ਮੁਤਾਬਿਕ ਅਰਥ ਰੱਖਦੇ ਹਨ।

3. ਕਿਸੇ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਵਰਗ ਦੀ ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਉਸ ਵਰਗ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਵਾਲੇ ਸਾਰੇ ਵਰਗਾਂ ਦੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਦਾ ਜੋੜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

4. ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ :

$$\text{ਮੱਧਿਕਾ} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

ਜਿਥੇ ਸੰਕੇਤ ਆਪਣਾ ਮੁਤਾਬਿਕ ਅਰਥ ਰਖਦੇ ਹਨ।

5. ਸੰਚਵੀਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵੰਡ ਨੂੰ ਆਲੇਖੀ ਰੂਪ ਤੋਂ ਸੰਚਵੀ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਵਕਰਾਂ ਜਾਂ ਤੋਂ ਘੱਟ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਜਾਂ ਤੋਂ ਵੱਧ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ, ਤੋਰਣ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰੂਪਣ।

6. ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਦੋਵਾਂ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਤੋਰਣਾਂ ਦੇ ਕਾਟਵੇਂ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਖਿਤਿਜ ਧੁਰੇ ਉੱਪਰ ਖਿੱਚੇ ਲੰਬ ਅਤੇ ਖਿਤਿਜ ਧੁਰੇ ਦੇ ਕਾਟਵੇਂ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਮੁੱਲ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਪਾਠਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼

ਵਰਗੀਕ੍ਰਿਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਬਹੁਲਕ ਅਤੇ ਮੱਧਿਕਾ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਸੂਤਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਨ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇਹ ਸੁਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਵਰਗ ਅੰਤਰਾਲ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਇਸੇ ਤਰਾਂ ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਰਣ ਖਿੱਚਣ ਲਈ ਵੀ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਤੋਰਣ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਉੱਚਿਤ ਪੈਮਾਨਾ ਦੋਵੇਂ ਧੁਰਿਆਂ 'ਤੇ ਸਮਾਨ ਨਹੀਂ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਸੰਭਾਵਨਾ 15

The theory of probabilities and the theory of errors now constitute a formidable body of great mathematical interest and of great practical importance.

(ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਅਤੇ ਤਰੁੱਟੀਆਂ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਹੁਣ ਅਤਿ ਗਣਿਤਿਕ ਰੁਚੀ ਦਾ ਅਤੇ ਅਤਿ ਵਿਵਿਹਾਰਕ ਮਹੱਤਵ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ਾਲ ਸਮੂਹ ਸਥਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।)

– *R.S. Woodward*

15.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ (experimental) [ਜਾਂ ਤਜਰਬੱਈ (empirical)] ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ, ਜਿਹੜਾ ਵਾਸਤਵਿਕ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਉੱਤੇ ਆਧਾਰਿਤ ਸੀ। ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ 1000 ਵਾਰ ਉਛਾਲਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਸੀ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਪਰਿਣਾਮਾਂ (outcomes) ਦੀਆਂ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾਵਾਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਸਨ :

ਚਿੱਤ (Head) : 455 ਪਟ (Tail) : 545

ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਉੱਤੇ ਆਧਾਰਿਤ, ਇੱਕ ਚਿੱਤ ਦੀ ਤਜਰਬੱਈ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{455}{1000}$, ਭਾਵ 0.455 ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਪਟ ਦੀ ਤਜਰਬੱਈ (empirical) ਸੰਭਾਵਨਾ 0.545 ਹੈ। (ਜਮਾਤ IX ਦੀ ਗਣਿਤ ਦੀ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਦਾ ਅਧਿਆਇ 15 ਦਾ ਉਦਾਹਰਣ 1 ਵੀ ਦੇਖੋ।) ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਇਹ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ 1000 ਵਾਰ ਉਛਾਲਣ ਦੇ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਉੱਤੇ ਆਧਾਰਿਤ ਹਨ। ਇਸੇ ਕਾਰਨ, ਇਹ ਤਜਰਬੱਈ ਜਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਅਖਵਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਅਤੇ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਵਾਪਰਨ ਨੂੰ ਦਰਜ ਕਰਨ ਉੱਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸਦੇ ਇਲਾਵਾ, ਇਹ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਸਿਰਫ਼ 'ਅਨੁਮਾਨ' (estimates) ਹੀ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਹੋਰ 1000 ਵਾਰ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲ ਕੇ ਕਰੀਏ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇਸਦੇ

ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਅੰਕੜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਪਹਿਲਾਂ ਨਾਲੋਂ ਵੱਖਰੇ ਸੰਭਾਵਨਾ ਅਨੁਮਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਗੇ।

ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਅਨੇਕ ਵਾਰ ਉਛਾਲਿਆ ਸੀ ਅਤੇ ਇਹ ਨੋਟ ਕੀਤਾ ਸੀ ਕਿ ਚਿੱਤ (ਜਾਂ ਪਟ) ਕਿੰਨੀ ਵਾਰ ਆਇਆ (ਜਮਾਤ IX ਦੇ ਅਧਿਆਇ 15 ਦੀ ਕਿਰਿਆ 1 ਅਤੇ 2 ਨੂੰ ਦੇਖੋ)। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਵੇਖਿਆ ਸੀ ਕਿ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਣ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵੱਧਦੀ ਗਈ, ਉਵੇਂ ਉਵੇਂ ਇੱਕ ਚਿੱਤ (ਜਾਂ ਪਟ) ਆਉਣ ਦੀ ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ ਸੰਭਾਵਨਾ ਸੰਖਿਆ $\frac{1}{2}$ ਦੇ ਨੇੜੇ ਆਉਂਦੀ ਰਹੀ। ਤੁਸੀਂ ਹੀ ਨਹੀਂ, ਸਗੋਂ ਪੂਰੇ ਸੰਸਾਰ ਦੇ ਅਲੱਗ ਅਲੱਗ ਭਾਗਾਂ ਦੇ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਨੇ ਇਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੇ ਹਨ ਅਤੇ ਚਿੱਤ ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਦਰਜ ਕੀਤਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ, ਅਠਾਰਵੀਂ ਸਦੀ ਦੇ ਫਰਾਂਸੀਸੀ ਜੀਵ-ਵਿਗਿਆਨੀ ਕੋਮਟੇ ਡੀ. ਬੁਫਾਨ Comte De Buffon) ਨੇ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ 4040 ਵਾਰ ਉਛਾਲਿਆ ਅਤੇ 2048 ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਚਿੱਤ ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{2048}{4040}$ ਭਾਵ 0.507 ਸੀ। ਬ੍ਰਿਟੇਨ ਦੇ ਜੇ.ਈ. ਕੈਰਿਚ (J.E. Kerrich) ਨੇ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ 10000 ਵਾਰ ਉਛਾਲਣ ਵਿੱਚ 5067 ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਚਿੱਤ ਆਉਣ ਦੀ ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{5067}{10000} = 0.5067$ ਸੀ। ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨੀ ਕਾਰਲ ਪੀਅਰਸਨ (Karl Pearson) ਨੇ ਇਸ ਵਿੱਚ ਵਧੇਰੇ ਸਮਾਂ ਲਗਾ ਕੇ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ 24000 ਵਾਰ ਉਛਾਲਿਆ। ਉਸ ਨੇ 12012 ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਉਸਨੂੰ ਇੱਕ ਚਿੱਤ ਦੇ ਆਉਣ ਦੀ ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.5005 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਈ।

ਹੁਣ, ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜੇਕਰ ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਮੰਨ ਲਓ ਇੱਕ ਮਿਲੀਅਨ ਵਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ ਚਿੱਤ ਆਉਣ ਦੀ ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ? ਜੇਕਰ ਪ੍ਰਯੋਗ 10 ਮਿਲੀਅਨ ਵਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ? ਤੁਸੀਂ ਆਮ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੇ ਆਧਾਰ ਉੱਤੇ ਇਹ ਮਹਿਸੂਸ ਕਰੋਗੇ ਕਿ ਜਿਵੇਂ ਜਿਵੇਂ ਸਿੱਕੇ ਉਛਾਲਣ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵਧਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਉਵੇਂ ਉਵੇਂ ਚਿੱਤ (ਜਾਂ ਪਟ) ਆਉਣ ਦੀ ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ ਸੰਭਾਵਨਾ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ 0.5, ਭਾਵ $\frac{1}{2}$ ਦੇ ਨੇੜੇ ਪ੍ਰਤੀਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਚਿੱਤ (ਪਟ) ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸਿਧਾਂਤਕ ਸੰਭਾਵਨਾ *(theoretical probability)* ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ, ਇਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਅਗਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਦੇਖਾਂਗੇ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸਿਧਾਂਤਕ ਸੰਭਾਵਨਾ [ਜਿਸਨੂੰ ਪਰੰਪਰਾਗਤ ਸੰਭਾਵਨਾ (classical probability) ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ] ਨਾਲ ਜਾਣ-ਪਛਾਣ ਕਰਾਵਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਸ ਧਾਰਨਾ ਉੱਤੇ ਆਧਾਰਿਤ ਸਰਲ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

15.2 ਸੰਭਾਵਨਾ — ਇੱਕ ਸਿਧਾਂਤਕ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ

ਆਓ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਥਿਤੀ ਉੱਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ:

ਮੰਨ ਲਓ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਅਚਨਚੇਤ (Random) ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਦੀ ਗੱਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਉਦੋਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਲਪਨਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਨਿਆਂ ਸੰਗਤ (fair) ਹੈ। ਭਾਵ ਇਹ ਸਮਮਿਤਈ (symmetrical) ਹੈ, ਤਾਂ ਕਿ ਕੋਈ ਕਾਰਣ ਨਾ ਹੋਵੇ ਕਿ ਇਹ ਇੱਕ ਹੀ ਪਾਸੇ, ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ, ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਡਿੱਗੇ। ਅਸੀਂ ਸਿੱਕੇ ਦੇ ਇਸ ਗੁਣ ਨੂੰ ਉਸਦਾ ਬਿਨਾ ਪੱਖਪਾਤੀ *(unbiased)* ਹੋਣਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। 'ਅਚਨਚੇਤ ਉਛਾਲ' (random toss) ਤੋਂ ਸਾਡਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਬਿਨਾ ਕਿਸੇ ਪੱਖਪਾਤ *(bias)* ਜਾਂ ਰੁਕਾਵਟ ਦੇ ਸੁਤੰਤਰਤਾਪੂਰਵਕ ਡਿੱਗਣ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਿੱਕਾ ਦੋ ਸੰਭਵ ਵਿਧੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਡਿੱਗ ਸਕਦਾ ਹੈ – ਜਾਂ ਤਾਂ ਚਿੱਤ ਉੱਤੇ ਹੋਵੇਗਾ ਜਾਂ ਫਿਰ ਪਟ ਉੱਤੇ ਹੋਵੇਗਾ [ਅਸੀਂ ਸਿੱਕੇ ਦੇ, ਉਸਦੇ ਕਿਨਾਰੇ (edge) ਦੀ ਖੜੇ ਦੀਆਂ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਡਿੱਗਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਰੱਦ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜੋ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਉਦੋਂ ਸੰਭਵ ਹੈ ਜਦੋਂ ਸਿੱਕਾ ਰੇਤ ਉੱਤੇ ਡਿੱਗੇ]। ਅਸੀਂ ਇਹ ਤਰਕਸੰਗਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਮੰਨ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹਰੇਕ ਪਰਿਣਾਮ, ਚਿੱਤ ਜਾਂ ਪਟ, ਦਾ ਪ੍ਰਗਟ ਹੋਣਾ ਉਨੀ ਹੀ ਵਾਰ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿੰਨਾ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਪਰਿਣਾਮ ਦਾ। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਰਿਣਾਮ ਚਿੱਤ ਅਤੇ ਪਟ ਸਮਸੰਭਾਵੀ *(equally likely)* ਵਾਲੇ ਹਨ। ਸਮਸੰਭਾਵੀ ਪਰਿਮਾਣਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਪਾਸੇ *(dice)* ਨੂੰ ਸੁੱਟਦੇ ਹਨ। ਸਾਡੇ ਲਈ, ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਦਾ ਅਰਥ ਇੱਕ ਨਿਆਂਸੰਗਤ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮ ਕੀ ਹਨ? ਇਹ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ਹਨ। ਹਰੇਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਉੱਪਰ ਆਉਣ ਦੀ ਬਰਾਬਰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਸਮਸੰਭਾਵੀ ਪਰਿਣਾਮ 1, 2, 3, 4, 5 ਅਤੇ 6 ਹਨ।

ਕੀ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ ਸਮਸੰਭਾਵੀ (ਬਰਾਬਰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਾਲੇ) ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਆਓ ਵੇਖੀਏ।

ਮੰਨ ਲਊ ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ 4 ਲਾਲ ਗੇਂਦਾਂ ਅਤੇ 1 ਨੀਲੀ ਗੇਂਦ ਹੈ ਅਤੇ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚੋਂ ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਥੈਲੇ ਦੇ ਅੰਦਰ ਕੁਝ ਵੇਖੇ, ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਬਾਹਰ ਕੱਢਦੇ ਹੋ। ਇਸਦੇ ਕੀ ਪਰਿਣਾਮ ਹਨ? ਕੀ ਇੱਕ ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਅਤੇ ਇੱਕ ਨੀਲੀ ਗੇਂਦ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ ਦੀਆਂ ਬਰਾਬਰ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਹਨ? ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਥੇ 4 ਲਾਲ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ ਅਤੇ ਨੀਲੀ ਗੇਂਦ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ। ਇਸ ਲਈ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰ ਹੀ ਮੰਨੋਗੇ ਕਿ ਤੁਹਾਡੇ ਦੁਆਰਾ ਨੀਲੀ ਗੇਂਦ ਦੇ ਮੁਕਾਬਲੇ ਇੱਕ ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਦੇ ਬਾਹਰ ਕੱਢਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਪਰਿਣਾਮ (ਇੱਕ ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਜਾਂ ਇੱਕ ਨੀਲੀ ਗੇਂਦ) ਸਮਸੰਭਾਵੀ(ਬਰਾਬਰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਾਲੇ) ਨਹੀਂ ਹਨ। ਪਰੰਤੂ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਰੰਗ ਦੀ ਗੇਂਦ ਨਿਕਲਣ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ ਸਮਸੰਭਾਵੀ (ਬਰਾਬਰ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਾਲੇ) ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦਾ ਸਮਸੰਭਾਵੀ (ਸਮਾਨ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਾਲੇ) ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ, ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਕੇ ਚਲਾਂਗੇ ਕਿ **ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ ਸਮਸੰਭਾਵੀ ਹਨ।**

ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਘਟਨਾ E ਦੀ **ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ ਜਾਂ ਤਜਰਬੰਈ** ਸੰਭਾਵਨਾ P(E) ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਸੀ:

$$P(E) = \frac{\text{ਯਤਨਾਂ (ਕੋਸ਼ਿਸ਼) ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਘਟਨਾ ਘਟੀ ਹੈ}}{\text{ਯਤਨਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ}}$$

ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਤਜਰਬੰਈ ਵਿਆਖਿਆ ਦਾ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਦੁਹਰਾਏ ਜਾ ਸਕਣ ਵਾਲੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਜੁੜੀ ਹਰੇਕ ਘਟਨਾ ਦੇ ਲਈ ਵਰਤਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾਉਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਸੀਮਾਵਾਂ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ ਅਨੇਕ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਇਹ ਜ਼ਿਆਦਾ ਖਰਚ ਵਾਲਾ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਇਹ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਜਿਹਾ ਕਰਨਾ ਸੰਭਵ ਹੀ ਨਾ ਹੋਵੇ। ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਸ਼ੱਕ, ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਣ ਜਾਂ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ, ਇਸ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਕਠਿਨਾਈ ਨਹੀਂ ਹੋਈ। ਪਰੰਤੂ ਇੱਕ ਉਪਗ੍ਰਹਿ (satellite) ਛੱਡਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਇਹ ਗਣਨਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਵਾਰ ਵਾਰ ਦੁਹਰਾਉਣ ਦੀ ਕਿ ਛੱਡਣ ਸਮੇਂ ਉਸਦੀ ਅਸਫਲਤਾ ਦੀ ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮ ਕੀ ਹਨ, ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਸੋਚਦੇ ਹੋ ਜਾਂ ਇੱਕ ਭੂਚਾਲ ਦੇ ਕਾਰਣ ਕੋਈ ਬਹੁਮੰਜ਼ਲੀ ਇਮਾਰਤ ਨਸ਼ਟ ਹੋਵੇਗੀ ਜਾਂ ਨਹੀਂ, ਦੀ ਤਜਰਬੰਈ ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨ ਲਈ ਭੂਚਾਲ ਦੀ ਘਟਨਾ ਦੇ ਦੁਬਾਰਾ ਵਾਪਰਣ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ?

ਅਜਿਹੇ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਵਿੱਚ, ਜਿੱਥੇ ਅਸੀਂ ਕੁੱਝ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਹੀ ਮੰਨਣ ਲਈ ਤਿਆਰ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਦੁਹਰਾਓ ਤੋਂ ਬੱਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਸਿਧਾਂਤਕ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਾਡੀ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ। ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਬਰਾਬਰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੋਣ (ਸਮਸੰਭਾਵੀ) ਦੀ ਕਲਪਨਾ (ਜਿਹੜੀਆਂ ਅਨੇਕ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਵਿੱਚ ਮੰਨਣ ਯੋਗ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਉੱਪਰ ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਣ ਅਤੇ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਹਨ) ਇਹਨਾਂ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੈ ਜੋ ਸਾਨੂੰ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਵੱਲ ਵਧਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ E ਦੀ ***ਸਿਧਾਂਤਕ ਸੰਭਾਵਨਾ (theoretical probability)*** [ਜਿਸਨੂੰ ਪਰੰਪਰਾਗਤ ਸੰਭਾਵਨਾ **(classical probability)** ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ] P(E) ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ:

$$\mathbf{P(E)} = \frac{\text{E ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}}{\text{ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}}$$

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਲਪਨਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ ਸਮਸੰਭਾਵੀ (ਬਰਾਬਰ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਾਲੇ)ਹਨ

ਅਸੀਂ ਸੰਖੇਪ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਸਿਧਾਂਤਕ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਸਿਰਫ 'ਸੰਭਾਵਨਾ' ਹੀ ਕਹਾਂਗੇ।

ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਉਪਰੋਕਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1795 ਵਿੱਚ ਪੀਅਰ-ਸਾਇਮਨ-ਲਾਪਲਾਸ (Pierre- Simon Laplace) ਨੇ ਦਿੱਤੀ ਸੀ।

ਸੰਭਾਵਨਾ ਸਿਧਾਂਤ ਦੀ ਸ਼ੁਰੂਆਤ 16ਵੀਂ ਸਦੀ ਵਿੱਚ ਹੋਈ, ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਇਤਾਲਵੀ ਭੌਤਿਕ ਸ਼ਾਸਤਰੀ ਅਤੇ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸਤਰੀ ਜੇ ਕਾਰਡਨ ਨੇ ਇਸ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੀ ਪੁਸਤਕ ਲਿਖੀ, ਜਿਸਦਾ ਨਾਮ ਸੀ: **The Book on Games of Chance** ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਬਦੌਲਤ ਹੀ, ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਨੇ ਮਹਾਨ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸਤਰੀਆਂ ਦਾ ਧਿਆਨ ਆਪਣੇ ਵੱਲ ਖਿੱਚਿਆ। ਇਹਨਾਂ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸਤਰੀਆਂ ਵਿੱਚ ਜੇਮਜ਼ ਬਰਨੂਲੀ (1654-1705), ਏ.ਡੀ. ਮੋਇਵਰੇ (1667-1754) ਅਤੇ ਪੀਅਰੇ-ਸਾਇਮਨ-ਲਾਪਲਾਸ ਅਜਿਹੇ ਲੋਕ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਨੇ ਇਸ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਾਰਥਕ ਯੋਗਦਾਨ ਦਿੱਤਾ। ਲਾਪਲਾਸ ਦੁਆਰਾ 1812 ਵਿੱਚ ਲਿਖੀ ਗਈ ਪੁਸਤਕ *(Theorie Analytiquedes Probabilities)* ਨੂੰ ਇੱਕ ਇਕੱਲੇ ਵਿਅਕਤੀ ਦੁਆਰਾ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਲਈ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਯੋਗਦਾਨ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹਾਲ ਦੇ ਕੁਲ ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ, ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਅਨੇਕ ਖੇਤਰਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਜੈਵਿਕ ਵਿਗਿਆਨ, ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ, ਵੰਸ਼ ਸੰਬੰਧੀ ਸ਼ਾਸਤਰ (genetics), ਭੌਤਿਕ ਵਿਗਿਆਨ, ਸਮਾਜ ਸ਼ਾਸਤਰ ਆਦਿ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਭਰਪੂਰ ਮਾਤਰਾ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ।

ਪੀਅਰੇ-ਸਾਇਮਨ-ਲਾਪਲਾਸ
(1749 – 1827)

ਆਓ ਅਜਿਹੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕੁੱਲ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਈਏ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਨਤੀਜੇ ਦੇ ਸਮਸੰਭਾਵੀ (equally likely) ਹੋਣ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਯੋਗ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਇੱਕ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ, ਇਕ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਉਛਾਲਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ, ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 2 ਹੈ – ਚਿੱਤ (H) ਅਤੇ ਪਟ (T)। ਮੰਨ ਲਓ ਘਟਨਾ E 'ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ' ਹੈ। ਤਦ, E ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ (ਭਾਵ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਤੇ ਅਨੁਕੂਲ) ਪਰਿਣਾਮ 1 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ :

$$P(E) = P\,(\text{ਚਿੱਤ}) = \frac{E \text{ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}}{\text{ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}} = \frac{1}{2}$$

ਇਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਜੇਕਰ ਘਟਨਾ F ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਹੈ, ਤਾਂ

$$P(F) = P(\text{ਪਟ}) = \frac{1}{2} \quad (\text{ਕਿਉਂ?})$$

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਇੱਕ ਨੀਲੀ ਗੇਂਦ ਅਤੇ ਇੱਕ ਪੀਲੀ ਗੇਂਦ ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਰੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਆਕਾਰ ਦੀਆਂ ਹਨ। ਕ੍ਰਿਤਕਾ ਬਿਨਾ ਥੈਲੇ ਦੇ ਅੰਦਰ ਵੇਖੇ, ਇਸ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ

ਗੇਂਦ ਬਾਹਰ ਕੱਢਦੀ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਗੇਂਦ

(i) ਪੀਲੀ ਹੋਵੇਗੀ? (ii) ਲਾਲ ਹੋਵੇਗੀ? (iii) ਨੀਲੀ ਹੋਵੇਗੀ?

ਹੱਲ : ਕ੍ਰਿਤਕਾ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚੋਂ, ਉਸ ਵਿੱਚ ਬਿਨ੍ਹਾ ਵੇਖੇ ਗੇਂਦ ਬਾਹਰ ਕੱਢਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਉਸਦੇ ਦੁਆਰਾ ਕੋਈ ਵੀ ਗੇਂਦ ਬਾਹਰ ਕੱਢਣਾ ਸਮਸੰਭਾਵੀ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ 'ਪੀਲੀ ਗੇਂਦ ਬਾਹਰ ਕੱਢਣਾ' ਘਟਨਾ Y ਹੈ, 'ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਬਾਹਰ ਕੱਢਣਾ' ਘਟਨਾ R ਅਤੇ 'ਨੀਲੀ ਗੇਂਦ ਬਾਹਰ ਕੱਢਣਾ' ਘਟਨਾ B ਹੈ।

ਹੁਣ, ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 3 ਹੈ।

(i) ਘਟਨਾ Y ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 1

ਇਸ ਲਈ $P(Y) = \frac{1}{3}$

ਇਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ, $P(R) = \frac{1}{3}$ ਅਤੇ $P(B) = \frac{1}{3}$

ਟਿੱਪਣੀ :

(1) ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀ ਉਹ ਘਟਨਾ ਜਿਸਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਪਰਿਣਾਮ ਹੋਵੇ ***ਮੁੱਢਲੀ ਘਟਨਾ*** *(elementary event)* ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ 1 ਵਿੱਚ ਦੋਨੋਂ ਘਟਨਾਵਾਂ E ਅਤੇ F ਮੁੱਢਲੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ। ਇਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਉਦਾਹਰਣ 2 ਵਿੱਚ ਘਟਨਾ Y, R ਅਤੇ B ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਇੱਕ ਮੁੱਢਲੀ ਘਟਨਾ ਹੈ।

(2) ਉਦਾਹਰਣ 1 ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $P(E) + P(F) = 1$

ਉਦਾਹਰਣ 2 ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $P(Y) + P(B) + P(R) = 1$

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ **ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਮੁੱਢਲੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 1 ਹੈ। ਇਹ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ।**

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਮੰਨ ਲਓ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਸੁੱਟਦੇ ਹਾਂ। (i) 4 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ? (ii) 4 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ?

ਹੱਲ : (i) ਇਥੇ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ '4 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ' ਘਟਨਾ E ਹੈ। ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮ ਛੇ ਹਨ, ਇਹ 1, 2, 3, 4, 5 ਅਤੇ 6 ਹਨ। ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਘਟਨਾ E ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮ 5 ਅਤੇ 6 ਹਨ। ਇਸ ਲਈ E ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 2 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$P(E) = P(4 \text{ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(ii) ਮੰਨ ਲਓ '4 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਜਾਂ ਉਸਦੇ ਬਰਾਬਰ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ' ਘਟਨਾ F ਹੈ।

ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮ = 6 ਹਨ।

ਘਟਨਾ F ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮ 1, 2, 3 ਅਤੇ 4 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ F ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 4 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

ਕੀ ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਘਟਨਾ E ਅਤੇ F ਮੁੱਢਲੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ? ਨਹੀਂ, ਇਹ ਮੁੱਢਲੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ ਘਟਨਾ E ਦੇ 2 ਪਰਿਣਾਮ ਹਨ ਅਤੇ ਘਟਨਾ F ਦੇ 4 ਪਰਿਣਾਮ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਉਦਾਹਰਣ 1 ਤੋਂ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \qquad (1)$$

ਜਿਥੇ ਘਟਨਾ E 'ਇੱਕ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ' ਹੈ ਅਤੇ ਘਟਨਾ F 'ਇੱਕ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ' ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 ਦੇ (i) ਅਤੇ (ii) ਤੋਂ ਵੀ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \qquad (2)$$

ਜਿਥੇ ਘਟਨਾ E '4 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ' ਅਤੇ ਘਟਨਾ F '4 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ ਘੱਟ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ' ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ 4 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦਾ ਅਰਥ ਉਹੀ ਹੈ ਜੋ 4 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਜਾਂ ਉਸਦੇ ਬਰਾਬਰ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਸਦਾ ਉਲਟ ਵੀ ਇਹੀ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ (1) ਅਤੇ (2) ਵਿੱਚ, ਕੀ ਘਟਨਾ 'F', 'E ਨਹੀਂ' (not E) ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਹਾਂ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਘਟਨਾ 'E ਨਹੀਂ' ਨੂੰ $\bar{E}$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, P(E) + P(E ਨਹੀਂ) = 1

ਭਾਵ $P(E) + P(\bar{E}) = 1$ ਹੈ, ਜਿਸ ਤੋਂ $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ E ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ ਕਿ

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

ਘਟਨਾ 'E ਨਹੀਂ' ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਘਟਨਾ $\bar{E}$, ਘਟਨਾ E ਦੀ ***ਪੂਰਕ*** *(complement)* ਘਟਨਾ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ E ਅਤੇ $\bar{E}$ ਪਰਸਪਰ ਪੂਰਕ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ।

ਅੱਗੇ ਵੱਧਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ, ਆਓ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤਰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੀਏ:

(i) ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਸੁੱਟਣ 'ਤੇ ਸੰਖਿਆ 8 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ?

(ii) ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਸੁੱਟਣ 'ਤੇ 7 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ?

ਆਓ (i) ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਈਏ:

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਸੁੱਟਣ ਨਾਲ ਕੇਵਲ ਛੇ ਹੀ ਸੰਭਾਵਿਤ ਪਰਿਣਾਮ ਹਨ। ਇਹ ਪਰਿਣਾਮ 1, 2, 3, 4, 5 ਅਤੇ 6 ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ ਪਾਸੇ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਫਲਕ ਉੱਤੇ 8 ਅੰਕਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 8 ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਕੋਈ ਵੀ ਪਰਿਣਾਮ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਭਾਵ ਅਜਿਹੇ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਸਿਫ਼ਰ (0) ਹੈ। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਸੁੱਟਣ ਨਾਲ, ਸੰਖਿਆ 8 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਅਸੰਭਵ *(impossible)* ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ P(8 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ) $= \frac{0}{6} = 0$

ਭਾਵ ਉਹ ਘਟਨਾ, ਜਿਸਦਾ ਵਾਪਰਨਾ ਅਸੰਭਵ ਹੈ, ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0 ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਅਜਿਹੀ ਘਟਨਾ ਨੂੰ ਇੱਕ **ਅਸੰਭਵ ਘਟਨਾ (impossible event)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਆਓ (ii) ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਈਏ:

ਕਿਉਂਕਿ ਪਾਸੇ ਦੀ ਹਰੇਕ ਫਲਕ ਉੱਤੇ ਅਜਿਹੀ ਸੰਖਿਆ ਲਿਖੀ ਹੈ ਜੋ 7 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਪਾਸੇ ਦੇ ਇੱਕ ਵਾਰ ਸੁੱਟਣ 'ਤੇ ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੈ ਕਿ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆ 7 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸ ਕਰਕੇ ਘਟਨਾ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਸਾਰੇ ਸੰਭਾਵਿਤ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗੀ, ਜੋ 6 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\quad$ P(E) = P(7 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ) $= \frac{6}{6} = 1$

ਇਸ ਕਰਕੇ ਉਹ ਘਟਨਾ, **ਜਿਸਦਾ ਵਾਪਰਨਾ ਨਿਸ਼ਚਿਤ** *(sure)* ਹੈ, ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 1 ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਅਜਿਹੀ ਘਟਨਾ ਨੂੰ ਇੱਕ **ਨਿਸ਼ਚਿਤ** *(sure)* ਜਾਂ **ਨਿਰਧਾਰਿਤ** *(certain)* ਘਟਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਸੰਭਾਵਨਾ P(E) ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅੰਸ਼ (ਘਟਨਾ E ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ) ਹਮੇਸ਼ਾ ਹਰ (ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ) ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਉਸਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ,

$$\mathbf{0 \le P(E) \le 1}$$

ਆਓ ਹੁਣ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ, ਤਾਸ਼ (playing cards) ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਲਈਏ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਤਾਸ਼ ਦੀ ਇੱਕ ਗੁੱਟੀ ਵੇਖੀ ਹੈ? ਇਸਦੇ 52 ਪੱਤੇ (cards) ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਜਿਹੜੇ 4 ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ 13 ਪੱਤੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਹ 4 ਸਮੂਹ ਹੁਕਮ (spades) (♠), ਪਾਨ (hearts) (♥), ਇੱਟ(diamonds) (♦) ਅਤੇ ਚਿੜੀ (clubs) (♣) ਹਨ। ਚਿੜੀ ਅਤੇ ਹੁਕਮ ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ

ਪਾਨ ਅਤੇ ਇੱਟ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਸਮੂਹ ਦੇ ਪੱਤੇ : ਇੱਕਾ/ਯੱਕਾ (ace), ਬਾਦਸ਼ਾਹ (king), ਬੇਗਮ (queen), ਗੁਲਾਮ (jack), 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 ਅਤੇ 2 ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਬਾਦਸ਼ਾਹ, ਬੇਗਮ, ਗੁਲਾਮ ਵਾਲੇ ਪੱਤੇ ਚਿੱਤਰ ਪੱਤੇ (*face cards*) ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫੈਂਟੀ ਗਈ 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪੱਤਾ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਇਹ ਪੱਤਾ:

(i) ਇੱਕ ਇੱਕਾ (ਯੱਕਾ) ਹੋਵੇਗਾ।

(ii) ਇੱਕ ਇੱਕਾ (ਯੱਕਾ) ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ।

ਹੱਲ : ਗੁੱਟੀ ਨੂੰ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫੈਂਟਣ ਨਾਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦਾ ਸਮਸੰਭਾਵੀ (*equally likely*) ਹੋਣਾ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(i) ਇੱਕ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚ 4 ਇੱਕੇ (ਯੱਕੇ) ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਮੰਨ ਲਓ ਘਟਨਾ E 'ਇੱਕ ਇੱਕਾ (ਯੱਕਾ) ਹੋਣਾ' ਹੈ।

E ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 4

ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 52 (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਕਰਕੇ $$P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

(ii) ਮੰਨ ਲਓ ਘਟਨਾ F 'ਇੱਕ (ਯੱਕਾ) ਨਹੀਂ' ਹੈ।

ਮੰਨਿਆ F ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 52 − 4 = 48 (ਕਿਉਂ?)

ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 52

ਇਸ ਕਰਕੇ $$P(F) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$$

ਟਿੱਪਣੀ : ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ F ਹੋਰ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਬਲਕਿ $\bar{E}$ ਹੀ ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ P(F) ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵੀ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ: $P(F) = P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਦੋ ਖਿਡਾਰੀ ਸੰਗੀਤਾ ਅਤੇ ਰੇਸ਼ਮਾ ਟੈਨਿਸ ਦਾ ਇੱਕ ਮੈਚ ਖੇਡਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਸੰਗੀਤਾ ਦੁਆਰਾ ਮੈਚ ਜਿੱਤਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.62 ਹੈ। ਰੇਸ਼ਮਾ ਦੇ ਜਿੱਤਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ S ਅਤੇ R ਕ੍ਰਮਵਾਰ: ਸੰਗੀਤਾ ਦੇ ਜਿੱਤਣ ਅਤੇ ਰੇਸ਼ਮਾ ਦੇ ਜਿੱਤਣ ਦੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਸੰਗੀਤਾ ਦੇ ਜਿੱਤਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ = P(S) = 0.62 (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

ਰੇਸ਼ਮਾ ਦੇ ਜਿੱਤਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ = P(R) = 1 − P(S)

[ਕਿਉਂਕਿ ਘਟਨਾਵਾਂ R ਅਤੇ S ਪੂਰਕ ਹਨ]

= 1 − 0.62 = 0.38

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਸਵਿਤਾ ਅਤੇ ਹਮੀਦਾ ਦੋ ਸਹੇਲੀਆਂ ਹਨ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋਵਾਂ (i) ਦੇ ਜਨਮ ਦਿਨ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਹੋਣ? (ii) ਦਾ ਜਨਮ ਦਿਨ ਇੱਕ ਹੀ ਹੋਵੇ? [ਲੀਪ ਦੇ ਸਾਲ (Leap year) ਨੂੰ ਛੱਡਦੇ ਹੋਏ]

ਹੱਲ : ਦੋਵਾਂ ਸਹੇਲੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਲੜਕੀ, ਮੰਨ ਲਓ, ਸਵਿਤਾ ਦਾ ਜਨਮ ਦਿਨ ਸਾਲ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਦਿਨ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਦੂਸਰੀ ਲੜਕੀ ਹਮੀਦਾ ਦਾ ਜਨਮ ਦਿਨ ਵੀ ਸਾਲ ਦੇ 365 ਦਿਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਇੱਕ ਦਿਨ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(i) ਜੇਕਰ ਹਮੀਦਾ ਦਾ ਜਨਮ ਦਿਨ ਸਵਿਤਾ ਦੇ ਜਨਮ ਦਿਨ ਤੋਂ ਭਿੰਨ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਜਨਮ ਦਿਨ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $365 - 1 = 364$ ਹੋਵੇਗੀ।

ਇਸ ਕਰਕੇ P (ਹਮੀਦਾ ਦਾ ਜਨਮ ਦਿਨ ਸਵਿਤਾ ਦੇ ਜਨਮ ਦਿਨ ਤੋਂ ਭਿੰਨ ਹੈ) $= \dfrac{364}{365}$

(ii) P(ਸਵਿਤਾ ਅਤੇ ਹਮੀਦਾ ਦਾ ਜਨਮ ਦਿਨ ਇੱਕ ਹੀ ਹੋਵੇ)

= 1 − P (ਦੋਵਾਂ ਦਾ ਜਨਮ ਦਿਨ ਭਿੰਨ ਹੈ)

$= 1 - \dfrac{364}{365}$ [$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ ਤੋਂ]

$= \dfrac{1}{365}$

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਕਿਸੇ ਸਕੂਲ ਦੀ ਜਮਾਤ X ਵਿੱਚ 40 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ 25 ਲੜਕੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ 15 ਲੜਕੇ ਹਨ। ਜਮਾਤ ਦੇ ਅਧਿਆਪਕ ਨੇ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਜਮਾਤ ਮੋਨੀਟਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਚੁਣਨਾ ਹੈ। ਉਹ ਹਰੇਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦਾ ਨਾਮ ਅਲੱਗ ਕਾਰਡ ਉੱਤੇ ਲਿਖਦੀ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਕਾਰਡ ਇੱਕੋ ਵਰਗੇ ਹੀ ਹਨ। ਫਿਰ ਉਹ ਇਹਨਾਂ ਕਾਰਡਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ ਪਾ ਕੇ ਚੰਗੀ ਤਰਾਂ ਹਿਲਾ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਉਹ ਇਸ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਕਾਰਡ ਕੱਢਦੀ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਕਾਰਡ ਉੱਤੇ ਲਿਖਿਆ ਨਾਮ (i) ਲੜਕੀ ਦਾ ਹੈ? (ii) ਲੜਕੇ ਦਾ ਹੈ?

ਹੱਲ : ਕੁੱਲ 40 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾ ਵਿੱਚੋਂ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਨਾਂ ਦਾ ਕਾਰਡ ਚੁਣਨਾ ਹੈ।

(i) ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 40

ਕਾਰਡ ਉੱਤੇ ਲੜਕੀ ਦਾ ਨਾਮ ਹੋਣ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 25 (ਕਿਉਂ?)

ਹੁਣ P (ਕਾਰਡ ਉੱਤੇ ਲੜਕੀ ਦਾ ਨਾਮ ਹੈ) = P(ਲੜਕੀ) $= \dfrac{25}{40} = \dfrac{5}{8}$

(ii) ਕਾਰਡ ਉੱਤੇ ਲੜਕੇ ਦਾ ਨਾਮ ਹੋਣ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 15 (ਕਿਉਂ?)

ਹੁਣ P(ਕਾਰਡ ਉੱਤੇ ਲੜਕੀ ਦਾ ਨਾਮ ਹੈ) = P(ਲੜਕਾ) $= \dfrac{15}{40} = \dfrac{3}{8}$

ਟਿੱਪਣੀ : ਅਸੀਂ P(ਲੜਕਾ) ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ:

$$P(\text{ਲੜਕਾ}) = 1 - P(\text{ਲੜਕਾ ਨਹੀਂ}) = 1 - P(\text{ਲੜਕੀ}) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਇੱਕ ਬਕਸੇ ਵਿੱਚ 3 ਨੀਲੇ, 2 ਚਿੱਟੇ ਅਤੇ 4 ਲਾਲ ਬੰਟੇ (marbles) ਹਨ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਬਕਸੇ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਬੰਟਾ ਅਚਾਨਕ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਇਹ ਬੰਟਾ

(i) ਚਿੱਟਾ ਹੈ? (ii) ਨੀਲਾ ਹੈ? (iii) ਲਾਲ ਹੈ?

ਹੱਲ : ਇਹ ਕਹਿਣਾ ਕਿ ਬੰਟਾ ਅਚਾਨਕ ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਸੰਖੇਪ ਵਿੱਚ ਇਹ ਕਹਿਣ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੇ ਪਰਿਣਾਮ ਬਰਾਬਰ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਾਲੇ (ਸਮਸੰਭਾਵੀ) ਹਨ। ਇਸ ਕਰਕੇ

ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $= 3 + 2 + 4 = 9$ (ਕਿਉਂ?)

ਮੰਨ ਲਓ ਘਟਨਾ W 'ਬੰਟਾ ਸਫੇਦ ਹੈ' ਨੂੰ, ਘਟਨਾ B 'ਬੰਟਾ ਨੀਲਾ ਹੈ' ਨੂੰ ਅਤੇ ਘਟਨਾ R 'ਬੰਟਾ ਲਾਲ ਹੈ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

(i) ਘਟਨਾ W ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 2

ਇਸ ਕਰਕੇ $P(W) = \frac{2}{9}$

ਇਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ, (ii) $P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ ਅਤੇ (iii) $P(R) = \frac{4}{9}$

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $P(W) + P(B) + P(R) = 1$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਹਰਪ੍ਰੀਤ ਦੋ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਸਿੱਕਿਆਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠੇ ਉਛਾਲਦੀ ਹੈ (ਮੰਨ ਲਓ ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ₹ 1 ਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਸਰਾ ਸਿੱਕਾ ₹ 2 ਦਾ ਹੈ)। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੇਗੀ?

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ 'ਚਿੱਤ' ਦੇ ਲਈ H ਅਤੇ 'ਪਟ' ਦੇ ਲਈ T ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਜਦ ਦੋ ਸਿੱਕਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਿਤ ਪਰਿਣਾਮ (H, H), (H, T), (T, H), (T, T) ਹਨ ਅਤੇ ਇਹ ਸਾਰੇ ਸਮਸੰਭਾਵੀ (ਬਰਾਬਰ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਾਲੇ) ਹਨ। ਇਥੇ (H, H) ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲੇ ਸਿੱਕੇ (ਮੰਨ ਲਓ ₹ 1 ਦੇ ਸਿੱਕੇ) ਉੱਤੇ 'ਚਿੱਤ' ਆਏਗਾ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਸਿੱਕੇ (₹ 2 ਦੇ ਸਿੱਕੇ) ਉੱਤੇ ਵੀ ਚਿੱਤ ਆਏਗਾ। ਇਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ (H, T) ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲੇ ਸਿੱਕੇ ਉੱਤੇ 'ਚਿੱਤ' ਆਏਗਾ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਸਿੱਕੇ ਉੱਤੇ 'ਪੱਟ' ਆਏਗਾ, ਆਦਿ

ਘਟਨਾ E 'ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਇੱਕ ਚਿੱਤ ਆਏਗਾ' ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮ (H, H), (H, T) ਅਤੇ

(T, H) ਹਨ। (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਕਰਕੇ E ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 3

ਇਸ ਲਈ $P(E) = \frac{3}{4}$

ਭਾਵ ਹਰਪ੍ਰੀਤ ਦੁਆਰਾ ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਇੱਕ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{3}{4}$ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਤੁਸੀਂ P(E) ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵੀ ਪਤਾ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ:

$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$ ਕਿਉਂਕਿ $P(\bar{E}) = P(\text{ਕੋਈ ਚਿੱਤ ਨਹੀਂ}) = \frac{1}{4}$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਹੁਣ ਤੱਕ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ, ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸੀ। ਜੇਕਰ ਨਹੀਂ, ਤਾਂ ਹੁਣ ਉਸਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰ ਲਓ।

ਅਨੇਕਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਅਜਿਹੇ ਹਨ, ਜਿਥੇ ਪਰਿਣਾਮ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਈ ਵੀ ਸੰਖਿਆ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਪਰਿਣਾਮ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਜਾਂ ਆਇਤ ਦੇ ਅੰਦਰ ਦਾ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਆਦਿ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਹੁਣ ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਨੂੰ ਗਿਣ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ, ਇਹ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਅਸੀਮਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਣਗਿਣਤ (ਅਨੇਕਾਂ) ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜਾਂ ਇਹ ਕਿ ਚੱਕਰ ਦੇ ਅੰਦਰ ਅਣਗਿਣਤ (ਅਨੇਕ) ਬਿੰਦੂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸੇ ਕਰਕੇ ਤੁਹਾਡੇ ਦੁਆਰਾ ਪੜ੍ਹੀ ਗਈ (ਸਿਧਾਂਤਕ) ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਵਰਤਮਾਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਥੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ। ਇਸ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਫਿਰ ਹੱਲ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ? ਇਸਦੇ ਉੱਤਰ ਦੇ ਲਈ, ਆਓ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਉਦਾਹਰਣ ਉੱਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 10* : ਇੱਕ ਮਿਊਜ਼ੀਕਲ ਕੁਰਸੀ (musical chair) ਖੇਡ ਵਿੱਚ, ਜਿਹੜੀ ਔਰਤ ਸੰਗੀਤ ਵਜਾ ਰਹੀ ਸੀ, ਨੂੰ ਇਹ ਸਲਾਹ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਕਿ ਉਹ ਸੰਗੀਤ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਨ ਦੇ ਬਾਅਦ 2 ਮਿੰਟ ਦੇ ਅੰਦਰ ਕਦੇ ਵੀ ਸੰਗੀਤ ਬੰਦ ਕਰ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਸੰਗੀਤ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲੇ ਅੱਧੇ ਮਿੰਟ ਵਿੱਚ ਬੰਦ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ?

ਹੱਲ : ਇਥੇ ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮ 0 ਅਤੇ 2 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਇਹ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਦਾ 0 ਤੋਂ 2 ਤੱਕ ਦਾ ਭਾਗ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 15.1)।

ਚਿੱਤਰ 15.1

* ਇਹ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

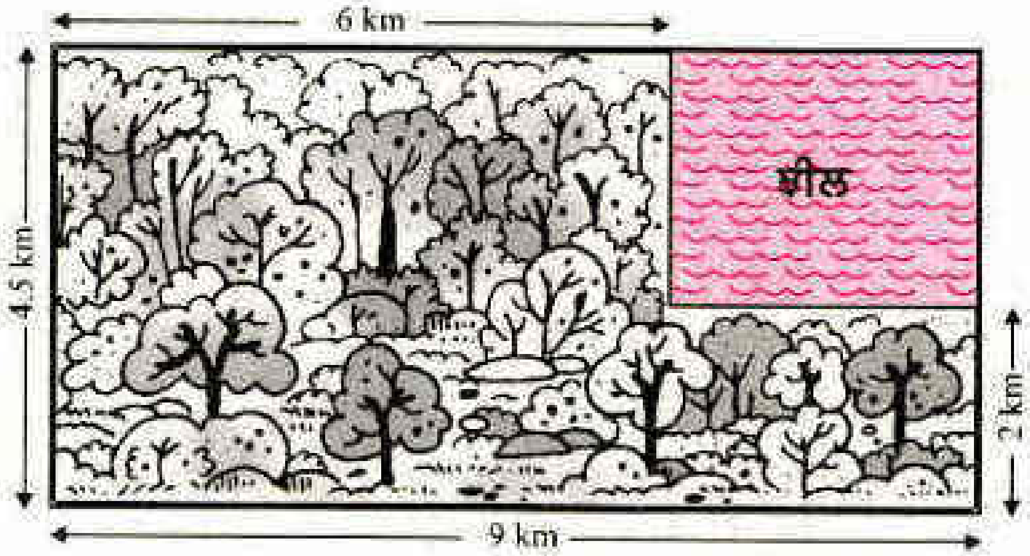
ਮੰਨ ਲਓ ਘਟਨਾ E 'ਸੰਗੀਤ ਸੁਰੂ ਹੋਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਪਹਿਲੇ ਅੱਧੇ ਮਿੰਟ ਵਿੱਚ ਬੰਦ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

E ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਉੱਤੇ 0 ਅਤੇ $\frac{1}{2}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੇ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਰੇ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਬਰਾਬਰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਤਰਕ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੁੱਲ ਦੂਰੀ 2 ਵਿੱਚੋਂ $\frac{1}{2}$ ਘਟਨਾ E ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਹੈ।

ਇਸ ਕਰਕੇ $P(E) = \dfrac{\text{ਘਟਨਾ E ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਦੂਰੀ}}{\text{ਪੂਰੀ ਦੂਰੀ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਪਰਿਣਾਮ ਸਥਿਤ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4}$

ਕੀ ਅਸੀਂ ਉਦਾਹਰਣ 10 ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ, ਉਸਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਸੰਪੂਰਨ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 11* : ਇੱਕ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਦੇ ਗੁੰਮ ਹੋਣ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਸੂਚਨਾ ਮਿਲਦੀ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਚਿੱਤਰ 15.2 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਆਇਤਾਕਾਰ ਖੇਤਰਫਲ ਵਿੱਚ ਕਿਤੇ ਡਿੱਗ ਪਿਆ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਝੀਲ ਵਿੱਚ ਡਿੱਗਾ ਹੈ?



ਚਿੱਤਰ 15.2

ਹੱਲ : ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਦਾ ਆਇਤਾਕਾਰ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਕਿਤੇ ਵੀ ਡਿੱਗਣਾ ਸਮਸੰਭਾਵੀ ਹੈ।

ਸੰਪੂਰਨ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ, ਜਿੱਥੇ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਡਿੱਗ ਸਕਦਾ ਹੈ

$= (4.5 \times 9)\ \text{km}^2 = 40.5\ \text{km}^2$

ਝੀਲ ਦਾ ਵਾਸਤਵਿਕ ਖੇਤਰਫਲ $= (2.5 \times 3)\ \text{km}^2 = 7.5\ \text{km}^2$

ਇਸ ਕਰਕੇ, P (ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਝੀਲ ਵਿੱਚ ਡਿੱਗਿਆ ਹੈ) $= \dfrac{7.5}{40.5} = \dfrac{75}{405} = \dfrac{5}{27}$ ਹੈ।

* ਇਹ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਇੱਕ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚ 100 ਕਮੀਜ਼ਾਂ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 88 ਠੀਕ ਹਨ ਅਤੇ 8 ਵਿੱਚ ਥੋੜੀ ਜਿਹੀ ਖਰਾਬੀ ਹੈ ਅਤੇ 4 ਵਿੱਚ ਜ਼ਿਆਦਾ ਖਰਾਬੀ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਪਾਰੀ ਜਿੰਮੀ ਉਹ ਕਮੀਜ਼ਾਂ ਹੀ ਸਵੀਕਾਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਠੀਕ ਹਨ, ਜਦ ਕਿ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਪਾਰੀ ਸੁਜਾਤਾ ਉਹਨਾਂ ਕਮੀਜ਼ਾਂ ਨੂੰ ਹੀ ਨਕਾਰਦੀ ਹੈ ਜਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚ ਜ਼ਿਆਦਾ ਖਰਾਬੀ ਹੈ। ਇਸ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਕਮੀਜ਼ ਅਚਾਨਕ ਬਾਹਰ ਕੱਢੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਕਮੀਜ਼

(i) ਜਿੰਮੀ ਨੂੰ ਸਵੀਕਾਰ ਹੋਵੇ? (ii) ਸੁਜਾਤਾ ਨੂੰ ਸਵੀਕਾਰ ਹੋਵੇ?

ਹੱਲ : 100 ਕਮੀਜ਼ਾਂ ਦੇ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਕਮੀਜ਼ ਪੱਖਪਾਤ ਰਹਿਤ ਬਾਹਰ ਕੱਢੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ 100 ਸਮਸੰਭਾਵੀ ਪਰਿਣਾਮ ਹਨ।

(i) ਜਿੰਮੀ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ (ਨੂੰ ਸਵੀਕਾਰ) ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 88 (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਕਰਕੇ P (ਕਮੀਜ਼ ਜਿੰਮੀ ਨੂੰ ਸਵੀਕਾਰ ਹੈ) $= \frac{88}{100} = 0.88$

(ii) ਸੁਜਾਤਾ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ $= 88 + 8 = 96$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਕਰਕੇ P (ਕਮੀਜ਼ ਸੁਜਾਤਾ ਨੂੰ ਸਵੀਕਾਰ ਹੈ) $= \frac{96}{100} = 0.96$

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਇੱਕ ਸਲੇਟੀ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਇੱਕ ਲਾਲ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸਾਰੇ ਸੰਭਾਵਿਤ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖੋ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ

(i) 8 ਹੈ। (ii) 13 ਹੈ। (iii) 12 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਜਾਂ ਉਸਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਜਦੋਂ ਲਾਲ ਪਾਸਾ '1' ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਸਲੇਟੀ ਪਾਸੇ ਉੱਤੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 1,2,3,4,5,6, ਵਿਚ ਕੋਈ ਵੀ ਸੰਖਿਆ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਤਦ ਵੀ ਹੋਵੇਗਾ, ਜਦ ਲਾਲ ਪਾਸੇ ਉੱਤੇ '2', '3','4','5', ਜਾਂ '6' ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਸੰਭਾਵਿਤ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਦਿੱਤੇ ਜੋੜੇ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਸੰਖਿਆ ਲਾਲ ਪਾਸੇ ਉੱਤੇ ਆਉਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਸਰੀ ਸੰਖਿਆ ਸਲੇਟੀ ਪਾਸੇ ਉੱਤੇ ਆਉਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਸਲੇਟੀ

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

ਲਾਲ

ਚਿੱਤਰ 15.3

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਜੋੜਾ (1, 4) ਜੋੜਾ (4, 1) ਤੋਂ ਭਿੰਨ ਹੈ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਕਰਕੇ ਸੰਭਾਵਿਤ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 6 × 6 = 36 ਹੈ।

(i) E ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਈ ਘਟਨਾ 'ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 8 ਹੈ' ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮ (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3) ਅਤੇ (6, 2) ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 15.3)।

ਭਾਵ E ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮ = 5

ਇਸ ਲਈ $P(E) = \frac{5}{36}$

(ii) ਜਿਸ ਤਰਾਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 15.3 ਤੋਂ ਵੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਘਟਨਾ F, 'ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 13 ਹੈ' ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਕੋਈ ਵੀ ਪਰਿਣਾਮ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $P(F) = \frac{0}{36} = 0$

(iii) ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 15.3 ਵਿੱਚ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ, ਘਟਨਾ G 'ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ≤ 12 ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ' ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਸਾਰੇ ਪਰਿਣਾਮ ਹਨ।

ਇਸ ਕਰਕੇ $P(G) = \frac{36}{36} = 1$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 15.1

1. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰੋ:
   (i) ਘਟਨਾ E ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ + ਘਟਨਾ 'E ਨਹੀਂ' ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ = ________ ਹੈ।
   (ii) ਉਸ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਜੋ ਵਾਪਰ ਨਹੀਂ ਸਕਦੀ ________ ਹੈ। ਅਜਿਹੀ ਘਟਨਾ ________ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ।
   (iii) ਉਸ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਜਿਸਦਾ ਵਾਪਰਨਾ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੈ ________ ਹੈ। ਅਜਿਹੀ ਘਟਨਾ ________ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ।
   (iv) ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਆਰੰਭਿਕ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ________ ਹੈ।
   (v) ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ________ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਜਾਂ ਉਸਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ________ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਜਾਂ ਉਸਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ-ਕਿਹੜੇ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ ਸਮਸੰਭਾਵੀ ਹਨ? ਸਪਸ਼ਟ ਕਰੋ।
   (i) ਇੱਕ ਡਰਾਈਵਰ ਕਾਰ ਚਲਾਉਣ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਕਾਰ ਚੱਲਣੀ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਜਾਂ ਕਾਰ ਚੱਲਣੀ ਸ਼ੁਰੂ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ।

(ii) ਇੱਕ ਖਿਡਾਰੀ ਬਾਸਕਟਬਾਲ ਨੂੰ ਬਾਸਕਟ ਵਿੱਚ ਪਾਉਣ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਉਹ ਬਾਸਕਟ ਵਿੱਚ ਗੇਂਦ ਪਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ਪਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

(iii) ਇੱਕ ਸੱਚ ਜਾਂ ਝੂਠ, ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉੱਤਰ ਸਹੀ ਹੈ ਜਾਂ ਗਲਤ ਹੋਵੇਗਾ।

(iv) ਇੱਕ ਬੱਚੇ ਦਾ ਜਨਮ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਇੱਕ ਲੜਕਾ ਹੈ ਜਾਂ ਇੱਕ ਲੜਕੀ ਹੈ।

3. ਫੁੱਟਬਾਲ ਦੇ ਖੇਡ ਨੂੰ ਆਰੰਭ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਇਹ ਫੈਸਲਾ ਲੈਣ ਲਈ ਕਿ ਕਿਹੜੀ ਟੀਮ ਪਹਿਲਾਂ ਗੇਂਦ ਲਵੇਗੀ, ਇਸਦੇ ਲਈ ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਣਾ ਇੱਕ ਨਿਆਂਸੰਗਤ ਵਿਧੀ ਕਿਉਂ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ?

4. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਸੰਖਿਆ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ?

(A) $\frac{2}{3}$ (B) -1.5 (C) 15% (D) 0.7

5. ਜੇਕਰ $P(E) = 0.05$ ਹੈ, ਤਾਂ 'E ਨਹੀਂ' ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ?

6. ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਨਿੰਬੂ ਦੀ ਮਹਿਕ ਵਾਲੀਆਂ ਮਿੱਠੀਆਂ ਗੋਲੀਆਂ ਹਨ। ਮਾਲਿਨੀ ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ ਦੇਖੇ ਉਸ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਗੋਲੀ ਬਾਹਰ ਕੱਢਦੀ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਕੱਢੀ ਗਈ ਗੋਲੀ

(i) ਸੰਤਰੇ ਦੀ ਮਹਿਕ ਵਾਲੀ ਹੈ?

(ii) ਨਿੰਬੂ ਦੀ ਮਹਿਕ ਵਾਲੀ ਹੈ?

7. ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ 3 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚੋਂ 2 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਜਨਮ ਦਿਨ ਇੱਕ ਹੀ ਦਿਨ ਨਾ-ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.992 ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹਨਾਂ 2 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਜਨਮ ਦਿਨ ਇੱਕ ਹੀ ਦਿਨ ਹੋਵੇ?

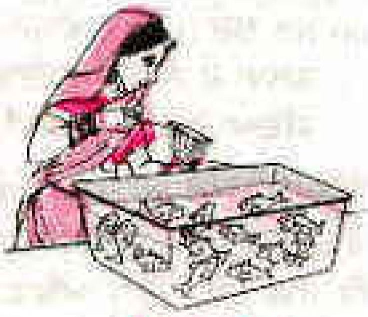
8. ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ 3 ਲਾਲ ਅਤੇ 5 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾ ਹਨ। ਇਸ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਅਚਾਨਕ ਬਾਹਰ ਕੱਢੀ ਗਈ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ ਕਿ ਗੇਂਦ (i) ਲਾਲ ਹੋਵੇ? (ii) ਲਾਲ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇ?

9. ਇੱਕ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚ 5 ਲਾਲ ਬੰਟੇ, 8 ਚਿੱਟੇ ਬੰਟੇ ਅਤੇ 4 ਹਰੇ ਬੰਟੇ ਹਨ। ਇਸ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਬੰਟਾ ਅਚਾਨਕ ਬਾਹਰ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਬੰਟਾ

(i) ਲਾਲ ਹੈ? (ii) ਚਿੱਟਾ ਹੈ? (iii) ਹਰਾ ਨਹੀਂ ਹੈ?

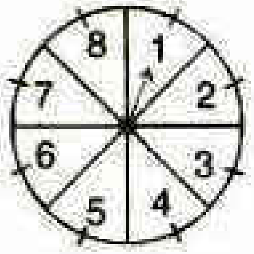
10. ਇੱਕ ਪਿੱਗੀ ਬੈਂਕ (piggy bank) ਵਿੱਚ, 50 ਪੈਸੇ ਦੇ ਸੌ ਸਿੱਕੇ ਹਨ, ₹ 1 ਦੇ ਪੰਜਾਹ ਸਿੱਕੇ ਹਨ, ₹ 2 ਦੇ ਵੀਹ ਸਿੱਕੇ ਅਤੇ ₹ 5 ਦੇ ਦਸ ਸਿੱਕੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਪਿੱਗੀ ਬੈਂਕ ਨੂੰ ਹਿਲਾ ਕੇ ਉਲਟਾ ਕਰਨ ਤੇ ਕੋਈ ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਬਾਹਰ ਡਿੱਗਣ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ ਸਮਸੰਭਾਵੀ ਹਨ (ਬਰਾਬਰ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਾਲੇ) ਤਾਂ ਉਸਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਡਿੱਗਿਆ ਹੋਇਆ ਸਿੱਕਾ (i) 50 ਪੈਸੇ ਦਾ ਹੋਵੇਗਾ (ii) ₹ 5 ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ?

11. ਗੋਪੀ ਆਪਣੇ ਜਲ-ਜੀਵ-ਕੁੰਡ (aquarium) ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਦੁਕਾਨ ਤੋਂ ਮੱਛੀਆਂ ਖਰੀਦਦੀ ਹੈ। ਦੁਕਾਨਦਾਰ ਇੱਕ ਟੈਂਕੀ ਜਿਸ ਵਿੱਚ 5 ਨਰ ਮੱਛੀਆਂ ਅਤੇ 8 ਮਾਦਾ ਮੱਛੀਆਂ ਹਨ, ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਮੱਛੀ ਪੱਖਪਾਤ ਰਹਿਤ ਉਸਨੇ ਬਾਹਰ ਕੱਢੀ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 15.4)। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਬਾਹਰ ਕੱਢੀ ਗਈ ਮੱਛੀ ਨਰ ਮੱਛੀ ਹੈ?



ਚਿੱਤਰ 15.4

12. ਸੰਜੋਗ (chance) ਦੇ ਇੱਕ ਖੇਡ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਤੀਰ ਨੂੰ ਘੁਮਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਵਿਰਾਮ ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ਅਤੇ 8 ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਵੱਲ ਸੰਕੇਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 15.5)। ਜੇਕਰ ਇਹ ਸਾਰੇ ਪਰਿਣਾਮ ਸਮਸੰਭਾਵੀ ਹਨ ਤਾਂ ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਤੀਰ ਸੰਕੇਤ



ਚਿੱਤਰ 15.5

(i) 8 ਨੂੰ ਕਰੇਗਾ?
(ii) ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਕਰੇਗਾ?
(iii) 2 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਕਰੇਗਾ?
(iv) 9 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਕਰੇਗਾ?

13. ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ:
(i) ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ (ii) 2 ਅਤੇ 6 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸਥਿਤ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ (iii) ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ

14. 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਫੈਂਟੀ ਗਈ ਤਾਸ਼ ਦੀ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪੱਤਾ ਬਾਹਰ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ:
(i) ਲਾਲ ਰੰਗ ਦਾ ਬਾਦਸ਼ਾਹ (ii) ਇੱਕ ਤਸਵੀਰ ਵਾਲਾ ਪੱਤਾ
(iii) ਲਾਲ ਰੰਗ ਦਾ ਤਸਵੀਰ ਵਾਲਾ ਪੱਤਾ (iv) ਪਾਨ ਦਾ ਗੁਲਾਮ
(v) ਹੁਕਮ ਦਾ ਪੱਤਾ (vi) ਇੱਟ ਦੀ ਬੇਗਮ

15. ਤਾਸ਼ ਦੇ ਪੰਜ ਪੱਤਿਆਂ-ਇੱਟ ਦਾ ਦਹਿਲਾ, ਗੁਲਾਮ, ਬੇਗਮ, ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਅਤੇ ਯੱਕੇ-ਨੂੰ ਪਲਟ ਕੇ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫੈਂਟਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਫਿਰ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਅਚਾਨਕ ਇੱਕ ਪੱਤਾ ਬਾਹਰ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
(i) ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਪੱਤਾ ਇੱਕ ਬੇਗਮ ਹੈ?
(ii) ਜੇਕਰ ਬੇਗਮ ਆਉਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ, ਉਸਨੂੰ ਅਲੱਗ ਰੱਖ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਪੱਤਾ ਬਾਹਰ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਦੂਸਰਾ ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਪੱਤਾ (a) ਇੱਕ ਯੱਕਾ ਹੈ? (b) ਇੱਕ ਬੇਗਮ ਹੈ?

16. ਕਿਸੇ ਕਾਰਨ 12 ਖਰਾਬ ਪੈੱਨ 132 ਚੰਗੇ ਪੈੱਨਾਂ ਵਿੱਚ ਮਿਲ ਗਏ ਹਨ। ਕੇਵਲ ਵੇਖ ਕੇ ਨਹੀਂ ਦੱਸਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਕਿ ਕੋਈ ਪੈੱਨ ਖਰਾਬ ਹੈ ਜਾਂ ਠੀਕ ਹੈ। ਇਸ ਮਿਸ਼ਰਣ ਵਿੱਚੋਂ, ਇੱਕ ਪੈੱਨ ਅਚਾਨਕ ਬਾਹਰ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਬਾਹਰ ਕੱਢੇ ਗਏ ਪੈੱਨ ਦੇ ਠੀਕ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

17. (i) 20 ਬਲਬਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚੋਂ 4 ਬਲਬ ਖਰਾਬ ਹਨ। ਇਸ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਬਲਬ ਅਚਾਨਕ ਬਾਹਰ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਬਲਬ ਖਰਾਬ ਹੋਵੇਗਾ?
(ii) ਮੰਨ ਲਓ (i) ਵਿੱਚ ਬਾਹਰ ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਬਲਬ ਖਰਾਬ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਇਸਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਬਲਬਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਮਿਲਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਬਾਕੀ ਬਲਬਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਬਲਬ ਅਚਾਨਕ ਬਾਹਰ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਬਲਬ ਖਰਾਬ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ?

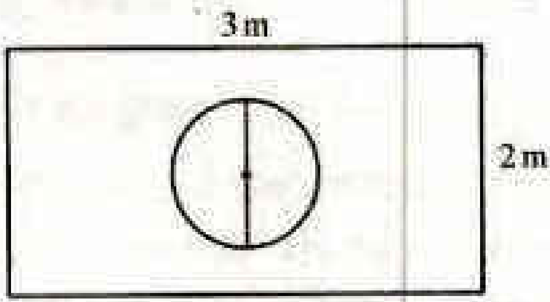
18. ਇੱਕ ਪੇਟੀ ਵਿੱਚ 90 ਪਲੇਟਾਂ (discs) ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਉੱਤੇ 1 ਤੋਂ 90 ਤੱਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਪੇਟੀ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪਲੇਟ ਅਚਾਨਕ ਬਾਹਰ ਕੱਢੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਪਲੇਟ ਉੱਤੇ ਅੰਕਿਤ ਹੋਵੇਗੀ: (i) ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ (ii) ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਸੰਖਿਆ (iii) 5 ਨਾਲ ਵੰਡੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ।

19. ਇੱਕ ਬੱਚੇ ਦੇ ਕੋਲ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਪਾਸਾ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਫਲਕਾਂ ਉੱਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੱਖਰ ਅੰਕਿਤ ਹਨ:

$\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$ $\boxed{E}$ $\boxed{A}$

ਇਸ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ (i) A ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ? (ii) D ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ?

20.* ਮੰਨ ਲਓ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 15.6 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਆਇਤਾਕਾਰ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਅਚਾਨਕ ਸੁੱਟਦੇ ਹੋ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਪਾਸਾ 1m ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਅੰਦਰ ਡਿੱਗੇਗਾ?



ਚਿੱਤਰ 15.6

21. 144 ਬਾਲ ਪੈੱਨਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ 20 ਬਾਲ ਪੈੱਨ ਖਰਾਬ ਹਨ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਠੀਕ ਹਨ। ਤੁਸੀਂ ਉਹੀ ਪੈੱਨ ਖਰੀਦਣਾ ਚਾਹੋਗੇ ਜਿਹੜਾ ਠੀਕ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਖਰਾਬ ਪੈੱਨ ਤੁਸੀਂ ਖਰੀਦਣਾ ਨਹੀਂ ਚਾਹੋਗੇ। ਦੁਕਾਨਦਾਰ ਇਹਨਾਂ ਪੈੱਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਅਚਾਨਕ ਇੱਕ ਪੈੱਨ ਬਾਹਰ ਕੱਢ ਕੇ ਤੁਹਾਨੂੰ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ
   (i) ਤੁਸੀਂ ਉਹ ਪੈੱਨ ਖਰੀਦੋਗੇ?
   (ii) ਤੁਸੀਂ ਉਹ ਪੈੱਨ ਨਹੀਂ ਖਰੀਦੋਗੇ?

22. ਉਦਾਹਰਣ 13 ਨੂੰ ਦੇਖੋ। (i) ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰੋ:

ਘਟਨਾ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ਸੰਭਾਵਨਾ	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{1}{36}$

(ii) ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇਹ ਤਰਕ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿ 'ਇਥੇ ਕੁੱਲ 11 ਪਰਿਣਾਮ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ਅਤੇ 12 ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ ਹਰੇਕ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{11}$ ਹੈ।' ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਤਰਕ ਨਾਲ ਸਹਿਮਤ ਹੋ? ਕਾਰਨ ਸਹਿਤ ਉੱਤਰ ਦਿਓ।

* ਇਹ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

23. ਇੱਕ ਖੇਡ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਰੁਪਏ ਦੇ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਵਾਰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਵਾਰ ਦਾ ਪਰਿਣਾਮ ਲਿਖ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਤਿੰਨੋ, ਪਰਿਣਾਮ ਸਮਾਨ ਹੋਣ ਤੇ, ਭਾਵ ਤਿੰਨ ਚਿੱਤ ਜਾਂ ਤਿੰਨ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ 'ਤੇ, ਹਨੀਫ ਖੇਡ ਵਿੱਚ ਜਿੱਤ ਜਾਏਗਾ, ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਉਹ ਹਾਰ ਜਾਏਗਾ। ਹਨੀਫ ਦੇ ਖੇਡ ਵਿੱਚ ਹਾਰ ਜਾਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

24. ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਦੋ ਵਾਰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ

(i) 5 ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਾਰ ਨਹੀਂ ਆਏਗਾ? (ii) 5 ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਇੱਕ ਵਾਰ ਆਏਗਾ?

[ਸੰਕੇਤ: ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਦੋ ਵਾਰ ਸੁੱਟਣਾ ਅਤੇ ਦੋ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕੋ ਵਾਰ ਸੁੱਟਣਾ ਇੱਕ ਹੀ ਪ੍ਰਯੋਗ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।]

25. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਤਰਕ ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਹੜਾ ਤਰਕ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ? ਕਾਰਨ ਸਹਿਤ ਉੱਤਰ ਦਿਓ.

(i) ਜੇਕਰ ਦੋ ਸਿੱਕਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕੋ ਵਾਰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸਦੇ ਤਿੰਨ ਸੰਭਾਵਿਤ ਪਰਿਣਾਮ-ਦੋ ਚਿੱਤ, ਦੋ ਪੱਟ ਜਾਂ ਹਰੇਕ ਇੱਕ ਵਾਰ ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਪਰਿਣਾਮ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{3}$ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਸੰਭਾਵਿਤ ਪਰਿਣਾਮ - ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਜਾਂ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{2}$ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 15.2 (ਇੱਛਾ ਅਨੁਸਾਰ)*

1. ਦੋ ਗ੍ਰਾਹਕ ਸ਼ਾਮ ਅਤੇ ਏਕਤਾ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਦੁਕਾਨ ਉੱਤੇ ਇੱਕ ਹੀ ਹਫ਼ਤੇ ਵਿੱਚ ਜਾ ਰਹੇ ਹਨ (ਮੰਗਲਵਾਰ ਤੋਂ ਸ਼ਨੀਵਾਰ ਤੱਕ)। ਹਰੇਕ ਦੁਆਰਾ ਦੁਕਾਨ ਉੱਤੇ ਕਿਸੇ ਦਿਨ ਜਾਂ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਦਿਨ ਜਾਣ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ ਸਮਸੰਭਾਵੀ (ਬਰਾਬਰ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਾਲੇ) ਹਨ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋਨੋਂ ਉਸ ਦੁਕਾਨ ਤੇ (i) ਇੱਕ ਹੀ ਦਿਨ ਜਾਣਗੇ? (ii) ਕ੍ਰਮਵਾਰ (ਨਾਲ-ਨਾਲ ਵਾਲੇ) ਦਿਨਾਂ ਵਿੱਚ ਜਾਣਗੇ? (iii) ਭਿੰਨ ਭਿੰਨ ਦਿਨਾਂ ਵਿੱਚ ਜਾਣਗੇ?

2. ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਦੇ ਫਲਕਾਂ ਉੱਤੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 1, 2, 2, 3, 3 ਅਤੇ 6 ਲਿਖੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਨੂੰ ਦੋ ਵਾਰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦੋਨੋ ਵਾਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਈਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਲਿਖ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਦੋਨੋ ਵਾਰ ਸੁੱਟਣ ਤੋਂ ਬਾਦ, ਪ੍ਰਾਪਤ ਜੋੜ ਦੇ ਕੁਝ ਸੰਭਾਵਿਤ ਮੁੱਲ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਨੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹਨ ਇਸ ਸਾਰਨੀ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰੋ।

ਪਹਿਲੀ ਵਾਰ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਮੁੱਲ

ਦੂਸਰੀ ਵਾਰ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਮੁੱਲ	+	1	2	2	3	3	6
	1	2	3	3	4	4	7
	2	3	4	4	5	5	8
	2					5	
	3						
	3			5			9
	6	7	8	8	9	9	12

* ਇਹ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ ਕੁੱਲ ਜੋੜ
(i) ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗਾ ? (ii) 6 ਹੈ? (iii) ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 6 ਹੈ?

3. ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ 5 ਲਾਲ ਗੇਂਦਾਂ ਅਤੇ ਕੁਝ ਨੀਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ ਜੇਕਰ ਇਸ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚੋਂ ਨੀਲੀ ਗੇਂਦ ਕੱਢਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਬਾਹਰ ਕੱਢਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਤੋਂ ਦੁੱਗਣੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ ਨੀਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਇੱਕ ਪੇਟੀ ਵਿੱਚ 12 ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ x ਕਾਲੀਆਂ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਅਚਾਨਕ ਬਾਹਰ ਕੱਢੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ ਗੇਂਦ ਕਾਲੀ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਇਸ ਪੇਟੀ ਵਿੱਚ 6 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਹੋਰ ਪਾ ਦਿੱਤੀਆਂ ਜਾਣ, ਤਾਂ ਕਾਲੀ ਗੇਂਦ ਨਿਕਲਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਹਿਲੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਾਲੋਂ ਦੁੱਗਣੀ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. ਇੱਕ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚ 24 ਬੰਟੇ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਹਰੇ ਹਨ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਨੀਲੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚੋਂ ਅਚਾਨਕ ਇੱਕ ਬੰਟਾ ਬਾਹਰ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਬੰਟੇ ਦੇ ਹਰਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{2}{3}$ ਹੈ। ਡੱਬੇ ਵਿੱਚ ਨੀਲੇ ਬੰਟਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

15.3 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ:

1. ਪ੍ਰਯੋਗੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਅਤੇ ਸਿਧਾਂਤਕ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ
2. ਘਟਨਾ E ਦੀ ਸਿਧਾਂਤਕ (ਜਾਂ ਪਰੰਪਰਾਗਤ) ਸੰਭਾਵਨਾ P(E) ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ:

$$P(E) = \frac{\text{E ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}}{\text{ਯਤਨਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਭਾਵਿਤ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}}$$

ਜਿੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਲਪਨਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਸਾਰੇ ਪਰਿਣਾਮ ਸਮਸੰਭਾਵੀ ਹਨ।

3. ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ (ਜਾਂ ਨਿਰਧਾਰਿਤ) ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 1 ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
4. ਇੱਕ ਅਸੰਭਵ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0 ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
5. ਘਟਨਾ E ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਸੰਖਿਆ P(E) ਹੈ ਕਿ

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

6. ਉਹ ਘਟਨਾ ਜਿਸਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਪਰਿਣਾਮ ਹੋਵੇ ਇੱਕ ਆਰੰਭਿਕ ਘਟਨਾ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਆਰੰਭਿਕ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਜੋੜ 1 ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
7. ਕਿਸੇ ਵੀ ਘਟਨਾ E ਦੇ ਲਈ $P(E) + P(\bar{E}) = 1$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $\bar{E}$ ਘਟਨਾ 'E ਨਹੀਂ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। E ਅਤੇ $\bar{E}$ ਪੂਰਕ ਘਟਨਾਵਾਂ ਕਹਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਪਾਠਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼

ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਦੀ ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ ਜਾਂ ਅਨੁਭਾਵਿਕ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਾਸਤਵਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਘਟਨਾ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਇਸ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸਿਧਾਂਤਕ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੇ ਇਹ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਕਿ ਕੀ ਘਟਨਾ ਘਟੇਗੀ। ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵਧਦੀ ਜਾਵੇਗੀ, ਉਵੇਂ-ਉਵੇਂ ਹੀ ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ ਅਤੇ ਸਿਧਾਂਤਕ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਦੇ ਲਗਭਗ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਦੀ ਉਮੀਦ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਸਬੂਤ A1

A1.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਸਾਡੇ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਤਰਕ ਪੇਸ਼ ਕਰਨ ਅਤੇ ਸਪਸ਼ਟ ਚਿੰਤਨ ਕਰਨ ਦੀ ਸਮਰੱਥਾ ਬਹੁਤ ਉਪਯੋਗੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਰਾਜਨੇਤਾ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਕਹਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿ 'ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਸਾਫ ਸੁਥਰੀ ਸਰਕਾਰ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਮੈਨੂੰ ਵੋਟਾਂ ਦੇਣੀਆਂ ਚਾਹੀਦੀਆਂ ਹਨ।' ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਉਹ ਤੁਹਾਡੇ ਅੰਦਰ ਇਹ ਵਿਸ਼ਵਾਸ਼ ਪੈਦਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਉਸਨੂੰ ਵੋਟਾਂ ਨਹੀਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਸਾਫ ਸੁਥਰੀ ਸਰਕਾਰ ਨਹੀਂ ਮਿਲ ਸਕਦੀ। ਇਸੇ ਤਰਾਂ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਇਸ਼ਤਿਹਾਰ ਵਿੱਚ ਇਹ ਦੱਸਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ 'ਬੁੱਧੀਮਾਨ ਵਿਅਕਤੀ XYZ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਬੂਟ ਪਹਿਨਦਾ ਹੈ' ਤਾਂ ਕੰਪਨੀ ਤੁਹਾਡੇ ਅੰਦਰ ਇਹ ਗੱਲ ਪੈਦਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ XYZ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਬੂਟ ਨਹੀਂ ਪਹਿਣਦੇ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਬੁੱਧੀਮਾਨ ਵਿਅਕਤੀ ਨਹੀਂ ਹੋ। ਤੁਸੀਂ ਖੁਦ ਇਹ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਦੋਵੇਂ ਕਥਨ ਆਮ ਜਨਤਾ ਨੂੰ ਭਰਮ ਵਿੱਚ ਪਾ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਤਰਕ ਪੇਸ਼ ਕਰਨ ਦੀ ਪ੍ਰੀਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਸਹੀ ਤਰਾਂ ਨਾਲ ਸਮਝੀਏ ਤਾਂ ਅਣਜਾਣੇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੇ ਜਾਲ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਫਸ ਸਕਦੇ।

ਤਰਕ ਪੇਸ਼ ਕਰਨ ਦਾ ਸਹੀ ਪ੍ਰਯੋਗ ਗਣਿਤ ਦਾ ਅਧਾਰ ਹੈ। ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਬੂਤ ਪੇਸ਼ ਕਰਨ ਵਿੱਚ। ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਤੁਹਾਨੂੰ ਸਬੂਤਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਕਲਪਨਾਵਾਂ ਤੋਂ ਜਾਣੂੰ ਕਰਵਾਇਆ ਗਿਆ ਸੀ ਅਤੇ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਕਥਨ, ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਿਮਾਇਤੀ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਵੀ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਸਬੂਤ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਗਣਿਤਕ ਕਥਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰ ਇੱਕ ਕਥਨ ਸਬੂਤ ਦੇ ਪਿਛਲੇ ਕਥਨ ਨਾਲ ਜਾਂ ਪਹਿਲੇ ਸਿੱਧ ਕੀਤੇ ਗਏ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) ਤੋਂ ਜਾਂ ਕਿਸੇ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ (axiom) ਤੋਂ ਜਾਂ ਪਰਿਕਲਪਨਾਵਾਂ ਤੋਂ ਤਰਕ ਰੂਪ ਨਾਲ ਨਿਗਮਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ. ਸਬੂਤ ਦੀ ਰਚਨਾ ਵਿੱਚ ਵਰਤੋਂ ਹੋਣ ਵਾਲਾ ਸਾਡਾ ਮੁੱਖ ਸਾਧਨ **ਨਿਗਮਨਿਕ ਤਰਕਣ** ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇਸ ਗੱਲ ਤੇ ਫਿਰ ਤੋਂ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਗਣਿਤਕ ਕਥਨ ਕੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਦ ਅਸੀਂ ਅਨੇਕ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੁਆਰਾ ਨਿਗਮਨਿਕ

(deductive) ਤਰਕਣ ਦੇਣ ਦੇ ਕੁਸ਼ਲ ਦੇ ਵੱਲ ਵਧ ਕਾਬਲ ਬਨਣ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਥੇ ਅਸੀਂ ਖੰਡਣ (negative) ਦੀ ਸੰਕਲਪਨਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਕਥਨ ਦਾ ਉਲਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਬਾਰੇ ਵੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਦ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਚਰਚਾ ਵੀ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਕਥਨ ਦਾ ਉਲਟ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਅਰਥ ਕੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਅਨੇਕ ਪ੍ਰਮੇਯਾ (ਥਿਊਰਮਾਂ) ਦੇ ਸਬੂਤਾਂ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਕਰਕੇ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਕਿਸੇ ਸਬੂਤ ਦੀ ਸਮੱਗਰੀ (ingredients) ਤੇ ਫਿਰ ਤੋਂ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਥੇ ਅਸੀਂ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਦੁਆਰਾ ਸਬੂਤ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਤੇ ਵੀ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਅਤੇ ਇਸ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਅਨੇਕ ਹੋਰ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ।

A1.2 ਗਣਿਤਕ ਕਥਨਾਂ ਦਾ ਪੁਨਰ-ਨਿਰੀਖਣ

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ 'ਕਥਨ' ਇਕ ਅਰਥਪੂਰਣ ਵਾਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਨਾਂ ਤਾਂ ਆਦੇਸ਼ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਨਾ ਹੀ ਵਿਸਮਿਕਬੋਧਿਕ (exclamation) ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ 'ਵਰਲਡ ਕੱਪ ਦੇ ਫਾਈਨਲ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੀਆਂ ਦੋ ਟੀਮਾਂ ਖੇਡ ਰਹੀਆਂ ਹਨ? ਇੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੈ, ਇੱਕ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।' ਜਾਉ ਅਤੇ ਆਪਣਾ ਘਰ ਦਾ ਕੰਮ ਪੂਰਾ ਕਰੋ' ਇੱਕ ਅਦੇਸ਼ ਹੈ, ਇੱਥ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।' ਕਿੰਨਾ ਹੀ ਵਧੀਆ ਗੋਲ ਹੈ !' ਇੱਕ ਵਿਸਮਿਕ ਬੋਧਿਕ ਹੈ, ਇੱਕ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਯਾਦ ਰਹੇ ਕਿ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਾਕ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਇੱਕੋ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ:

- ਸੱਚ
- ਝੂਠ (ਸੱਚ ਨਹੀਂ)
- ਸ਼ੱਕੀ

ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ, **ਕਥਨ ਕੇਵਲ ਉਸ ਵੇਲੇ ਸਵੀਕਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਹ ਜਾਂ ਸੱਚ ਹੋਵੇ ਜਾਂ (ਸੱਚ ਨਾਂ) ਝੂਠ ਹੋਵੇ।** ਇਸ ਲਈ ਸ਼ੱਕੀ ਵਾਕਾਂ ਨੂੰ ਗਣਿਤਕ (Mathematical) ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ।

ਆਉ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲੈ ਕੇ ਆਪਣੇ ਗਿਆਨ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਵਾਕ, ਕਥਨ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰੋ।

(i) ਸੂਰਜ ਧਰਤੀ ਦੁਆਲੇ ਘੁੰਮਦਾ ਹੈ।

(ii) ਵਾਹਨ ਦੇ ਚਾਰ ਪਹੀਏ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(iii) ਪ੍ਰਕਾਸ਼ ਦੀ ਗਤੀ ਲਗਭਗ 3×10^5 km/s ਹੈ।

(iv) ਨਵੰਬਰ ਤੋਂ ਮਾਰਚ ਤੱਕ ਕਲਕੱਤਾ ਦੀ ਸੜਕ ਬੰਦ ਰਹੇਗੀ।

(v) ਸਾਰੇ ਮਨੁੱਖ ਨਾਸ਼ਵਾਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਹੱਲ :

(i) ਇਹ ਵਾਕ ਸੱਚ ਨਹੀਂ (ਝੂਠ) ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਖਗੋਲ ਵਿਗਿਆਨੀਆਂ ਨੇ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ ਧਰਤੀ ਸੂਰਜ ਦੁਆਲੇ ਘੁੰਮਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ।

(ii) ਇਹ ਵਾਕ ਸ਼ੱਕੀ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਇਹ ਨਿਰਣਾ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਕਿ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਸੱਚ ਨਹੀਂ (ਝੂਠ) ਹੈ। ਇਹ ਇਸ ਗੱਲ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਵਾਹਨ ਕਿਹੜਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਵਾਹਨ 2, 3, 4, 6, 10, ਆਦਿ ਪਹੀਆਂ ਵਾਲਾ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iii) ਇਹ ਵਾਕ ਸੱਚ ਹੈ, ਜਿਸ ਤਰਾਂ ਕਿ ਭੌਤਿਕ ਵਿਗਿਆਨੀਆਂ ਨੇ ਸਿੱਧ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ।

(iv) ਇਹ ਵਾਕ ਸ਼ਕੀ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਸਪਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਇਥੇ ਕਿਸ ਸੜਕ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕਿਹਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(v) ਇਹ ਵਾਕ ਸੱਚ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਮਨੁੱਖ ਨੇ ਕਦੇ ਨਾ ਕਦੇ ਮਰਨਾ ਹੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਾਕ ਸੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਸੱਚ ਨਹੀਂ (ਝੂਠ) ਹਨ। ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰੋ।

(i) ਸਾਰੇ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(ii) ਕੁਝ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਭੁਜੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(iii) ਸਾਰੇ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(iv) ਕੁਝ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(v) ਕੁਝ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(vi) ਸਾਰੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(vii) ਕਿਸੇ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਹੱਲ :

(i) ਇਹ ਵਾਕ ਸੱਚ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹਨ।

(ii) ਇਹ ਵਾਕ ਸੱਚ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਉਹ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਜਿਸਦੇ ਅਧਾਰ ਕੋਣ 60 ਦੇ ਹਨ, ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(iii) ਇਹ ਵਾਕ ਸੱਚ ਨਹੀਂ (ਝੂਠ) ਹੈ। ਇਸਦੇ ਵਿਰੁੱਧ (ਉਲਟ) ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿਉ।

(iv) ਇਹ ਵਾਕ ਸੱਚ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀਆਂ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਜਿਥੇ p ਸੰਪੂਰਨ ਅੰਕ ਹੈ ਅਤੇ $q = 1$, ਸੰਪੂਰਨ ਅੰਕ ਹੈ। (ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $3 = \frac{3}{1}$)

(v) ਇਹ ਵਾਕ ਸੱਚ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ

p, q ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ q, p ਨੂੰ ਵਿਭਾਜਤ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ (ਵੰਡਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ), ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ। (ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $\frac{3}{2}$)

(vi) ਇਹ ਵਾਕ ਇਸ ਕਥਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ (ਵਰਗਾ) ਹੈ ਕਿ 'ਇੱਕ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਜੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।' ਇਹ ਵਾਕ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ (ਝੂਠ) ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(vii) ਇਹ ਵਾਕ ਸੱਚ ਨਹੀਂ (ਝੂਠ) ਹੈ। ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ r ਅਤੇ s ਦੇ ਵਿੱਚ $\frac{r+s}{2}$ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਜੇਕਰ $x<4$ ਹੈ ਤਾਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਸੱਚ ਹੈ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰੋ।

(i) $2x > 8$ (ii) $2x < 6$ (iii) $2x < 8$

ਹੱਲ :

(i) ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ ਨਹੀਂ (ਝੂਠ) ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, $x = 3 < 4$, $2x > 8$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ।

(ii) ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ ਨਹੀਂ (ਝੂਠ) ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $x = 3.5 < 4$, $2x < 6$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ।

(iii) ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਉਹ ਹੀ ਹੈ ਕਿ $x < 4$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਲੋੜੀਂਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਲਗਾ ਕੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ ਜਿਸ ਨਾਲ ਕਿ ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੋ ਜਾਣ।

(i) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(ii) ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਤੀਸਰੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(iii) ਸਾਰੇ ਧਨ ਪੂਰਨ ਅੰਕਾਂ p ਦੇ ਲਈ $\sqrt{p}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iv) ਸਾਰੀਆਂ ਦੋ-ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਹੱਲ :

(i) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(ii) ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਤੀਸਰੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(iii) ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ p ਦੇ ਲਈ $\sqrt{p}$ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iv) ਸਾਰੀਆਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਟਿਪਣੀ : ਉੱਪਰ ਦੇ ਕਥਨਾਂ ਦਾ ਦੁਬਾਰਾ ਕਥਨ ਹੋਰ ਤਰਾਂ ਵੀ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ (iii) ਦਾ ਦੁਬਾਰਾ ਕਥਨ $\sqrt{p}$ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੈ, ਜਿਥੇ p ਇੱਕ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦਾ ਧਨ ਸਪੂੰਰਨ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਜੋ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A1.1

1. ਜਦੋਂ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਵਾਕ ਕਥਨ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਜੇਕਰ ਕਥਨ ਹਨ ਤਾਂ ਦੱਸੋ ਕਿ ਉਹ ਸੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਝੂਠ। ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰੋ।
   (i) ਗਣਿਤ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕਾਂ ਰੋਚਿਕ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
   (ii) ਧਰਤੀ ਤੋਂ ਸੂਰਜ ਦੀ ਦੂਰੀ ਲਗਭਗ 1.5×10^8 km. ਹੈ।
   (iii) ਸਾਰੇ ਮਨੁੱਖ ਬੁੱਢੇ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।
   (iv) ਉੱਤਰਕਾਸ਼ੀ ਤੋਂ ਹਰਸਿਲ ਤੱਕ ਕੀਤੀ ਗਈ ਯਾਤਰਾ ਥੱਕਾਵਟ ਦੇਣ ਵਾਲੀ ਸੀ।
   (v) ਇਸਤਰੀ ਨੇ ਬਾਇਨੋਕੂਲਰ ਜੋੜੇ (ਦੂਰਬੀਨ) ਨਾਲ ਇੱਕ ਹਾਥੀ ਦੇਖਿਆ।
2. ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਝੂੱਠ। ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰੋ।
   (i) ਸਾਰੇ ਛੇ ਭੁਜ, ਬਹੁਭੁਜ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
   (ii) ਕੁਝ ਬਹੁਭੁਜ, ਪੰਜ ਭੁਜ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
   (iii) ਸਾਰੀਆਂ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 2 ਨਾਲ ਭਾਗ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
   (iv) ਕੁਝ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
   (v) ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
3. ਮੰਨ ਲਉ a ਅਤੇ b ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਜਿਥੇ $ab \neq 0$ ਹੈ, ਤਾਂ ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਸੱਚ ਹੈ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰੋ।
   (i) a ਅਤੇ b ਜਰੂਰੀ ਤੋਰ ਤੇ ਸਿਫਰ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ। (ii) a ਅਤੇ b ਲਾਜਮੀ (ਜਰੂਰੀ) ਸਿਫਰ ਨਾ ਹੋਣ
   (iii) ਜਾਂ ਤਾਂ a ਅਤੇ ਜਾਂ b ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਹੋਵੇ।
4. ਲੋੜੀਂਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨਾਲ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਇਸ ਤਰਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹ ਸੱਚ ਹੋ ਜਾਣ।
   (i) ਜੇਕਰ $a^2 > b^2$, ਤਾਂ $a > b$
   (ii) ਜੇਕਰ $x^2 = y^2$, ਤਾਂ $x = y$
   (iii) ਜੇਕਰ $(x+y)^2 = x^2 + y^2$, ਤਾਂ $x = 0$
   (iv) ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਸਮਦੋਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

A1.3 ਨਿਗਮਨਾਤਮਕ ਤਰਕ-ਸ਼ਕਤੀ (Deductive Reasoning)

IX ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਤੁਹਾਨੂੰ ਨਿਗਮਨਾਤਮਕ ਤਰਕ-ਸ਼ਕਤੀ ਦੀ ਸੰਕਲਪਨਾ ਤੋਂ ਜਾਣੂ ਕਰਵਾਇਆ ਗਿਆ ਸੀ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਅਨੇਕਾਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੁਆਰਾ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਿਗਮਨਾਤਮਕ ਤਰਕ-ਸ਼ਕਤੀ (Deductive Reasoning) ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ, ਸੱਚ ਮੰਨੇ ਗਏ ਕਥਨਾਂ ਤੋਂ ਸਿੱਟੇ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਪਰਿਕਲਪਨਾਵਾਂ ਜਾਂ ਅਧਾਰ ਵਾਕ (Hypotheses ਜਾਂ Premises) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂਆਤ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ ਬੀਜਾਪੁਰ ਕਰਨਾਟਕ ਰਾਜ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸ਼ਬਾਨਾ ਬੀਜਾਪੁਰ ਵਿੱਚ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ। ਸ਼ਬਾਨਾ ਕਿਸ ਰਾਜ ਵਿੱਚ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ?

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਦੋ ਪਰਿਕਲਪਨਾਵਾਂ ਹਨ :

(i) ਬੀਜਾਪੁਰ ਕਰਨਾਟਕ ਰਾਜ ਵਿੱਚ ਹੈ। (ii) ਸ਼ਬਾਨਾ ਬੀਜਾਪੁਰ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ।

ਇਹਨਾਂ ਪਰਿਕਪਨਾਵਾਂ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ (deduce) ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸ਼ਬਾਨਾ ਕਰਨਾਟਕ ਰਾਜ ਵਿੱਚ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ।

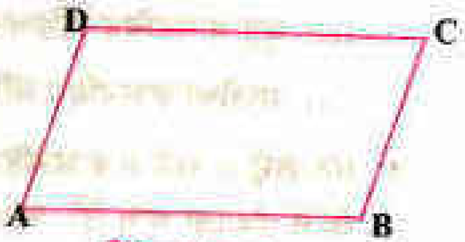
ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ ਗਣਿਤ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕਾਂ ਰੌਚਕ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਤੁਸੀਂ ਗਣਿਤ ਦੀ ਇੱਕ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਪੜ੍ਹ ਰਹੇ ਹੋ। ਜੋ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਤੁਸੀਂ ਪੜ੍ਹ ਰਹੇ ਹੋ ਉਸਦੇ ਬਾਰੇ ਅਸੀਂ ਕੀ ਸਿੱਟਾ ਕਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ?

ਹੱਲ : ਦੋਵਾਂ ਪਰਿਕਲਪਨਾਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਰੌਚਕ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਪੜ੍ਹ ਰਹੇ ਹੋ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : $y = -6x + 5$ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $x = 3$ ਹੈ, y ਦਾ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਦੋਨਾਂ ਪਰਿਕਲਪਨਾਵਾਂ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ $y = -6(3) + 5 = -13$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ ABCD ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ AD = 5 cm, AB = 7 cm (ਚਿੱਤਰ A1.1 ਦੇਖੋ)। DC ਅਤੇ BC ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹੋ?



ਚਿੱਤਰ A1.1

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ ABCD ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਹ ਸਾਰੇ ਗੁਣ ਜੋ ਇੱਕ ਸਮਾਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ABCD ਤੇ ਵੀ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ AD = 5 cm, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ BC = 5 cm ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰਾਂ ਹੀ ਅਸੀਂ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ DC = 7 cm ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਇਸ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਇੱਕ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਵਿੱਚ ਛੁਪੇ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਅਤੇ ਲਾਗੂ ਕਰਨ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਪੈਂਦੀ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ p ਦੇ ਲਈ $\sqrt{p}$ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ 19423 ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। $\sqrt{19423}$ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹੋ?

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sqrt{19423}$ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੈ।

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਇਸ ਗੱਲ ਵੱਲ ਤੁਸੀਂ ਜਰੂਰੀ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇਹ ਨਹੀਂ ਜਾਣਦੇ ਕਿ ਪਰਿਕਲਪਨਾਵਾਂ ਸੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਕੇ ਚਲਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਹ ਸੱਚ ਹਨ ਅਤੇ ਫਿਰ ਨਿਗਮਨਾਤਮਕ ਤਰਕ-ਸ਼ਕਤੀ (Deductive Reasoning) 9 ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਉਦਾਹਰਣ 9 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਨਹੀਂ ਕੀਤੀ ਕਿ 19423 ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਆਪਣੀ ਤਰਕ (ਦਲੀਲ) ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਮੰਨ ਲਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਤੇ ਜ਼ੋਰ ਦੇਣ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕਥਨ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਸਿੱਟੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚਣ ਲਈ ਅਸੀਂ ਨਿਗਮਨਾਤਮਕ ਤਰਕ-ਸ਼ਕਤੀ (Deductive Reasoning) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਥੇ ਇਹ ਗੱਲ ਮਹਤਵਪੂਰਣ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਤਰਕ-ਸ਼ਕਤੀ (Reasoning) ਸਹੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੀਏ ਅਤੇ ਤਰਕ-ਸ਼ਕਤੀ ਦੀ ਇਹ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਪਰਿਕਲਪਨਾਵਾਂ ਦੇ ਸੱਚ ਜਾਂ ਝੂਠ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਫਿਰ ਵੀ, ਇਸ ਗੱਲ ਵੱਲ ਧਿਆਨ ਦੇਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਗਲਤ ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂਆਤ ਕਰਾਂਗੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਗਲਤ ਸਿੱਟੇ ਤੇ ਵੀ ਪਹੁੰਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A1.2

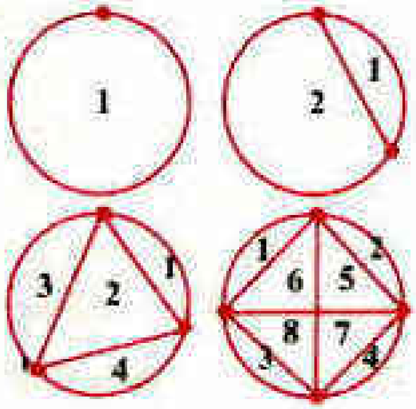
1. ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਔਰਤਾਂ ਨਾਸ਼ਵਾਨ ਹਨ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ A ਇੱਕ ਔਰਤ ਹੈ। A ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਸਿੱਟਾ ਕਢ ਸਕਦੇ ਹੋ?
2. ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਪਰਿਮੇਯ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ a ਅਤੇ b ਪਰਿਮੇਯ ਹਨ ਤਾਂ ab ਦੇ ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹੋ?
3. ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਰੂਪ (ਪ੍ਰਸਾਰ) ਅਸਾਂਤ (non-terminating) ਅਤੇ ਅਣਆਵਰਤੀ (non-recurring) ਹੈ ਅਤੇ $\sqrt{17}$ ਇਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। $\sqrt{17}$ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਬਾਰੇ ਅਸੀਂ ਕੀ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।
4. ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $y = x^2 + 6$ ਅਤੇ $x = -1$ ਤਾਂ y ਦੇ ਮੁੱਲ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੀ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ?
5. ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ ABCD ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਅਤੇ $\angle B = 80°$ ਤਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਬਾਕੀ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹੋ?

6. ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ PQRS ਇੱਕ ਚੱਕਰੀ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਸਮਦੋਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹੋ?

7. ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ p ਦੇ ਲਈ $\sqrt{p}$ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਵੀ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ 3721 ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ $\sqrt{3721}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ? ਕਿਉਂ ਜਾਂ ਕਿਉਂ ਨਹੀਂ?

A1.4 ਕੰਜੈਕਚਰ (conjectures), ਪ੍ਰਮੇਯ, ਸਬੂਤ ਅਤੇ ਗਣਿਤਕ ਤਰਕ-ਸ਼ਕਤੀਆਂ

ਚਿੱਤਰ A1.2 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਪਹਿਲੇ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਦੂਸਰੇ ਚੱਕਰ ਤੇ ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਹਨ, ਤੀਸਰੇ ਤੇ ਤਿੰਨ ਆਦਿ। ਹਰ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਭਵ ਰੇਖਾਵਾਂ ਖਿੱਚੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ A1.2

ਰੇਖਾਵਾਂ ਚੱਕਰ ਨੂੰ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਹਿਸਿਆਂ ਵਿੱਚ (ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਭਾਗ ਸਾਂਝਾ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ) ਵਿੱਚ ਵੰਡੀਆਂ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਗਿਣ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਜਿਸ ਤਰਾਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿਖਿਆਇਆ ਗਿਆ ਹੈ:

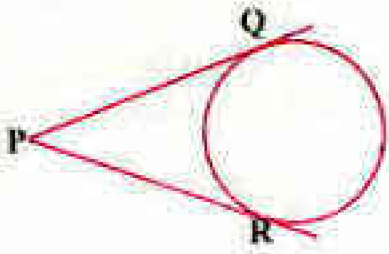
ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ	ਹਿਸਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (ਖੇਤਰ)
1	1
2	2
3	4
4	8
5	
6	
7	

ਤੁਹਾਡੇ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਲੋਕ ਇਸ ਨਤੀਜੇ (ਸੂਤਰ) ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕੇ ਹੋਣਗੇ ਜਿਸਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਹੋਣ ਤੇ, ਖੇਤਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੱਸੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੋਵੇ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੇ ਬੁੱਧੀਮਤ ਪੂਰਣ ਅਨੁਮਾਨ ਨੂੰ 'ਕੰਜੈਕਚਰ' ਕਿਹਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ ਤੁਹਾਡੇ ਕੰਜੈਕਚਰ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਚੱਕਰ ਤੇ 'n' ਬਿੰਦੂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਨ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਹਰ ਇੱਕ ਸੰਭਵ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਮਿਲਾਉਣ 2^{n-1} ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਅੱਲਗ-ਅਲੱਗ ਖੇਤਰ ਬਣਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਇੱਕ ਤਰਕ ਸੰਗਤ ਅਨੁਮਾਨ ਲੱਗਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ $n = 5$, ਹੈ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ 16 ਖੇਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ 5 ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਲਈ ਇਸ ਸੂਤਰ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ n ਬਿੰਦੂਆਂ ਲਈ 2^{n-1} ਖੇਤਰ ਹੋਣਗੇ? ਜੇਕਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਤਾਂ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਵਿਅਕਤੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਪੁਛੇ ਕਿ ਤੁਸੀਂ $n = 25$ ਦੇ ਲਈ ਇਸ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਯਕੀਨ ਨਾਲ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ, ਤੁਹਾਡੀ ਪ੍ਰਤੀਕ੍ਰਿਆ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ? ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦਾ ਉੱਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਬੂਤ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜੋ ਬਿਨਾਂ ਸ਼ੱਕ ਇਹ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕਿ ਕਿਸੇ (ਕੁਝ) 'n' ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਪਰਿਣਾਮ ਅਸਫਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਇੱਕ ਉਲਟ ਉਦਾਹਰਣ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਡੇ ਵਿੱਚ ਧੀਰਜ ਹੈ ਅਤੇ $n = 6$ ਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੋਗੇ ਤਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋਗੇ ਕਿ $n = 6$ ਲਈ 31 ਖੇਤਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ $n = 7$ ਲਈ 57 ਖੇਤਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਉੱਪਰ ਦੇ ਕੰਜੈਕਚਰ ਦਾ $n = 6$ ਇੱਕ ਉਲਟ ਉਦਾਹਰਣ Counter example ਹੈ। ਇਹ ਤੱਥ ਉਲਟ ਉਦਾਹਰਣ ਦੀ ਸ਼ਕਤੀ ਨੂੰ ਪਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਗਈ ਸੀ ਕਿ ਕਿਸੇ **ਕਥਨ ਨੂੰ ਝੂਠਾ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਹੀ ਉਲਟ ਉਦਾਹਰਣ ਬਹੁਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।**

ਇਸ ਗੱਲ ਵੱਲ ਤੁਸੀਂ ਜਰੂਰ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ $n = 1, 2, 3, 4$ ਅਤੇ 5 ਤੇ ਪਰਿਣਾਮ ਨੂੰ ਸੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਵੀ ਅਸੀਂ ਖੇਤਰਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸਬੂਤ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਤੇ ਜੋਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਆਉ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ (ਅਧਿਆਇ 5 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ) ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪਰਿਣਾਮ (ਨਤੀਜਾ) ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਜਰੂਰ ਜਾਣੂ ਹੋਵੇਗੇ : $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ਇਸਦੀ ਮਾਨਤਾ ਨੂੰ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ $n = 1, 2, 3,$ ਆਦਿ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਣਾਮ ਨੂੰ ਸੱਚਾ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੀ ਕਾਫੀ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਕਿਉਂਕਿ ਕੁਝ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ 'n' ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ ਜਿਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਪਰਿਣਾਮ (ਨਤੀਜਾ) ਸੱਚ ਨਾ ਹੋਵੇ (ਜਿਸ ਤਰਾਂ ਕਿ ਉੱਪਰ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ $n = 6$ ਤੇ ਪਰਿਣਾਮ (ਨਤੀਜਾ) ਅਸਫਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ) ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਬੂਤ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੈ ਜੋ ਇਸ ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਬਿਨਾਂ ਸ਼ੱਕ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰੇ। ਵੱਡੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਇਸਦੇ ਸਬੂਤ ਬਾਰੇ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋਗੇ।

ਹੁਣ ਚਿੱਤਰ A1.3 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ, ਇਥੇ PQ ਅਤੇ PR ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਚੱਕਰ ਤੇ ਖਿੱਚੀਆਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ A1.3

ਤੁਸੀਂ (ਥਿਊਰਮ 10.2 ਵਿੱਚ) ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ PQ = PR ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੇ ਅਨੇਕ ਚਿੱਤਰ ਖਿੱਚ ਕੇ ਸੰਗਤ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਮਾਪੀਆਂ ਗਈਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਦੁਆਰਾ ਹਰ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇਸ ਪਰਿਣਾਮ (ਨਤੀਜੇ) ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਸੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰਕੇ ਤੁਸੀਂ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਹੋਏ ਸੀ।

ਕੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੈ ਕਿ ਸਬੂਤ ਵਿੱਚ ਕੀ-ਕੀ ਸੀ? ਇਹ ਕਥਨਾਂ (ਜਿਸ ਨੂੰ ਤਰਕ/ਦਲੀਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ) ਦੇ ਇੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ (sequence) ਤੋਂ ਮਿਲਕੇ ਬਣਿਆ ਸੀ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਕਥਨ, ਸਬੂਤ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕੀਤੇ ਜਾ ਚੁੱਕੇ ਜਾਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤੇ ਜਾ ਚੁੱਕੇ ਜਾਂ ਤੁਹਾਡੇ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੇ ਸਬੂਤ ਨੂੰ ਕਥਨ PQ = PR ਨਾਲ ਖਤਮ ਕਰਦੇ ਹੋ ਭਾਵ ਉਸ ਕਥਨ ਤੇ ਜਿਸ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਸੀ।

ਸਬੂਤ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨ ਦੀ ਇਹ ਹੀ ਵਿਧੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਅਤੇ ਥਿਊਰਮਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸਬੂਤਾਂ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਚੰਗੀ ਤਰਾਂ ਸਮਝਣ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਮਿਲੇਗੀ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਸਬੂਤ ਦੀ ਪ੍ਰਤੱਖ ਜਾਂ ਨਿਗਮਨਾਤਮਕ (deductive) ਵਿਧੀ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਕਥਨ ਪੇਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। **ਹਰ ਇੱਕ ਕਥਨ ਪਿਛਲੇ ਕਥਨਾਂ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।** ਜੇਕਰ ਹਰ ਇੱਕ ਕਥਨ ਤਰਕ ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਹੈ [ਭਾਵ ਇੱਕ ਯੋਗ ਤਰਕ ਹੈ] ਤਾਂ ਇਸ ਨਾਲ ਸਹੀ ਸਿੱਟਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਦੋ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਹੱਲ :

ਲੜੀ ਨੰ:	ਕਥਨ	ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ/ਟਿੱਪਣੀ
1.	ਮੰਨ ਲਉ x ਅਤੇ y ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।	ਕਿਉਂਕਿ ਨਤੀਜਾ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ x ਅਤੇ y ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਕਿ ਪਰਿਮੇਯ ਹਨ।
2.	ਮੰਨ ਲਉ, $x=\frac{m}{n}, n \neq 0$ ਅਤੇ, $y=\frac{p}{q}$ $q \neq 0$ ਜਿਥੇ m, n, p ਅਤੇ q ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।	ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ।
3.	ਇਸ ਲਈ, $x+y=\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+np}{nq}$	ਕਿਉਂਕਿ ਨਤੀਜਾ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਾਰੇ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ $x+y$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

4.	ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਲਾਗੂ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $mq + np$ ਅਤੇ nq ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।	ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਪਤਾ ਗੁਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ।
5.	ਕਿਉਂਕਿ $n \neq 0$ ਅਤੇ $q \neq 0$, ਇਸ ਲਈ $nq \neq 0$.	ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਪਤਾ ਗੁਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ।
6.	ਇਸ ਲਈ, $x + y = \frac{mq + np}{nq}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।	ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਉੱਪਰ ਦੇ ਸਬੂਤ ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਕਥਨ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਤੱਥਾਂ ਜਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ।

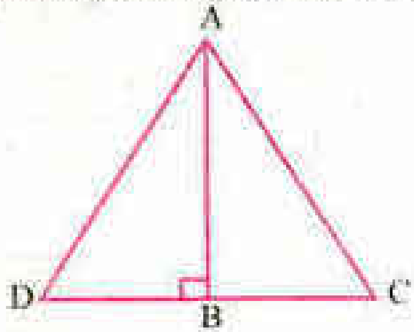
ਉਦਾਹਰਣ 11 : 3 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਹਰ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ $6k + 1$ ਜਾਂ $6k + 5$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿਥੇ k ਇੱਕ ਸਪੂੰਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ :

ਲੜੀ ਨੰ:	ਕਥਨ	ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ/ਟਿੱਪਣੀ
1.	ਮੰਨ ਲਉ p, 3 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।	ਕਿਉਂਕਿ ਨਤੀਜੇ ਦਾ ਸਬੰਧ 3 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।
2.	p ਨੂੰ 6 ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ p ਦਾ ਰੂਪ $6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$, ਜਾਂ $6k + 5$ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿਥੇ k ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਅੰਕ ਹੈ।	ਯੂਕਲਿਡ ਦੀ ਵਿਭਾਜਨ (ਵੰਡ) ਪ੍ਰਮੇਯਿਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ।
3.	ਪ੍ਰੰਤੂ $6k = 2(3k)$, $6k + 2 = 2(3k + 1)$, $6k + 4 = 2(3k + 2)$ ਅਤੇ $6k + 3 = 3(2k + 1)$ ਭਾਵ ਇਹ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ।	ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਬਾਕੀ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਕਰਾਂਗੇ ਜਦੋਂ ਕਿ p ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇ।
4.	ਇਸ ਲਈ p ਲਾਜ਼ਮੀ ਰੂਪ! $6k + 1$ ਜਾਂ $6k + 5$ ਦਾ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਜਿਥੇ k ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।	ਦੂਸਰੇ ਵਿਕਲਪਾਂ ਨੂੰ ਛੱਡਣ ਤੋਂ ਬਾਦ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਿੱਟੇ 'ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹਾਂ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਉੱਪਰ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਿਕਲਪਾਂ ਨੂੰ ਛੱਡਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ ਸਿੱਟੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਕਦੇ ਕਦੇ ਸੰਖਣਾਉਣ ਦੁਆਰਾ ਸਬੂਤ (proof by exhaustion) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਪ੍ਰਮੇਯ A1.1 (ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਉਲਟ) : ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਦਾ ਵਰਗ ਬਾਕੀ ਦੇ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈਆਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪਹਿਲੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ ਸਮਕੋਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ A1.4

ਹੱਲ :

ਲੜੀ ਨੰ:	ਕਥਨ	ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ/ਟਿੱਪਣੀ
1.	ਮੰਨ ਲਓ ΔABC ਪਰਿਕਲਪਨਾ $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ।	ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕਥਨ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।
2.	AB ਤੇ ਲੰਬ ਰੇਖਾ BD ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਇਸ ਤਰਾਂ ਕਿ $BD = BC$ ਹੋਵੇ ਅਤੇ A ਨੂੰ D ਨਾਲ ਮਿਲਾਉ।	ਇਹ ਇੱਕ ਅੰਤਰ ਗਿਆਨ ਵਾਲਾ ਪਗ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਸਾਨੂੰ ਥਿਊਰਮਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਅਕਸਰ (ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ) ਹੋਵੇਗੀ।
3.	ਰਚਨਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ΔABD ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਅਤੇ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ $AD^2 = AB^2 + BD^2$	ਅਸੀਂ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸਨੂੰ ਪਹਿਲਾਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਚੁੱਕਿਆ ਹੈ।
4.	ਰਚਨਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ $BD = BC$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $AD^2 = AB^2 + BC^2$.	ਤਰਕਸੰਗਤ ਨਿਗਮਨ (deduction)
5.	ਇਸ ਲਈ $AC^2 = AB^2 + BC^2 = AD^2$	ਕਲਪਨਾ ਅਤੇ ਪਿਛਲੇ ਕਥਨ ਨੂੰ ਲਾਗੂ ਕਰਨ ਤੇ
6.	ਕਿਉਂਕਿ AC ਅਤੇ AD ਧਨਾਤਮਕ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ $AC = AD$	ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਪਤਾ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਲਾਗੂ ਕਰਨ ਤੇ

7.	ਹੁਣ ਵੀ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦਰਸਾਇਆ ਹੈ ਕਿ AC = AD ਅਤੇ ਰਚਨਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ BC = BD ਅਤੇ AB ਸਾਂਝਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ SSS ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ $\Delta ABC \cong \Delta ABD$	ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਪਤਾ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਲਾਗੂ ਕਰਨ 'ਤੇ।
8.	ਕਿਉਂਕਿ $\Delta ABC \cong \Delta ABD$, ਇਸ ਲਈ $\angle ABC = \angle ABD$ ਜੋ ਇਕ ਸਮਕੋਣ ਹੈ	ਪਹਿਲਾਂ ਸਥਾਪਿਤ ਤੱਥ ਉੱਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਤਰਕ ਸੰਗਤ ਨਿਗਮਨ

ਟਿੱਪਣੀ : ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਰ ਇੱਕ ਪਰਿਣਾਮ ਨੂੰ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨਾਲ ਲੜੀਬੱਧ ਪਗਾਂ ਨਾਲ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਮਹੱਤਵ ਹੈ। ਸਬੂਤ ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਪਗ ਪਿਛਲੇ ਪਗਾਂ ਅਤੇ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਗਏ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਪ੍ਰਮੇਯ 6.9 ਵੀ ਦੇਖੋ)।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A1.3

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਰ ਇੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇੱਕ ਕਥਨ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕਿਹਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਹਰ ਇੱਕ ਸਬੂਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੇ ਗਏ ਸਾਰੇ ਪੱਗ ਦੱਸੋ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਪਗ (ਚਰਣ) ਦਾ ਕਾਰਣ ਵੀ ਦੱਸੋ।

1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, 4 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
2. ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਉ। ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਫਿਰ ਪਰਿਣਾਮ (ਨਤੀਜੇ) ਵਿੱਚ 6 ਜੋੜ ਦਿਉ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਤਰਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਗਈ ਸੰਖਿਆ ਸਦਾ (ਹਮੇਸ਼ਾਂ) ਹੀ 8 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
3. ਜੇਕਰ $p \geq 5$ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $p^2 + 2$, ਸੰਖਿਆ 3 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
   [**ਸੰਕੇਤ :** ਉਦਾਹਰਣ 11 ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰੋ।]
4. ਮੰਨ ਲਉ x ਅਤੇ y ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਦਿਖਾਉ ਕਿ xy ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੈ।
5. ਜੇਕਰ a ਅਤੇ b ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ $a = bq + r$, $0 \leq r < b$, ਜਿਥੇ q ਇੱਕ ਪੂਰਣ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ HCF (a, b) = HCF (b, r)
   [**ਸੰਕੇਤ :** ਮੰਨ ਲਉ HCF$(b, r) = h$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $b = k_1 h$ ਅਤੇ $r = k_2 h$, ਜਿਥੇ k_1 ਅਤੇ k_2 ਸਹਿ ਅਭਾਜ (co-prime) ਹੈ।]
6. ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀ ਭੁਜਾ BC ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਭੁਜਾਵਾਂ AB ਅਤੇ AC ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ D ਅਤੇ E 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

A1.5 ਕਥਨ ਦਾ ਖੰਡਨ (Negation)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ 'ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਦਾ ਖੰਡਣ ਕਰਨ ਦਾ ਕੀ ਮਤਲਬ ਹੈ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਚਰਚਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਨ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕੁਝ ਸੰਕੇਤਾਂ (ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ) ਤੋਂ ਜਾਣੂੰ ਕਰਵਾ

ਦੇਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਸੰਕਲਪਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਸਮਝ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਆਓ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇਸ ਕਥਨ ਨੂੰ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਈਏ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਨਾਮ ਦੇ ਦੇਈਏ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਕਥਨ '1 ਸਤੰਬਰ, 2005 ਨੂੰ ਦਿੱਲੀ ਵਿੱਚ ਵਰਖਾ ਹੋਈ ਸੀ' ਨੂੰ p ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

p: 1 ਸਤੰਬਰ, 2005 ਨੂੰ ਦਿੱਲੀ ਵਿੱਚ ਵਰਖਾ ਹੋਈ ਸੀ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਆਓ ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਲਿਖ ਲਈਏ

q: ਸਾਰੇ ਅਧਿਆਪਕ ਇਸਤਰੀਆਂ ਹਨ।

r: ਮਾਇਕ ਦੇ ਕੁੱਤੇ ਦੀ ਪੂਛ ਕਾਲੀ ਹੈ।

s: $2 + 2 = 4$.

t: ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।

ਇਹ ਸੰਕੇਤ ਸਾਨੂੰ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਚਰਚਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਗੱਲ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰਦੇ ਹਨ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਕੱਠਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਕਥਨਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿੰਨਾਂ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਥਨ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ **ਮਿਸ਼ਰਿਤ (Compound)** ਕਥਨਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

ਆਓ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਰ ਇੱਕ ਕਥਨ ਤੋਂ ਇੱਕ ਨਵੇਂ ਕਥਨ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਮੂਲ ਕਥਨ	ਨਵਾਂ ਕਥਨ
p: 1 ਸਤੰਬਰ 2005 ਨੂੰ ਦਿੱਲੀ ਵਿੱਚ ਵਰਖਾ ਹੋਈ ਸੀ।	$\sim p$: ਇਹ ਸੱਚ ਨਹੀਂ (ਝੂਠ) ਹੈ ਕਿ 1 ਸਿਤੰਬਰ 2005 ਨੂੰ ਦਿੱਲੀ ਵਿੱਚ ਵਰਖਾ ਹੋਈ ਸੀ।
q: ਸਾਰੇ ਅਧਿਆਪਕ ਇਸਤਰੀਆਂ ਹਨ।	$\sim q$: ਇਹ ਸੱਚ ਨਹੀਂ (ਝੂਠ) ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੇ ਅਧਿਆਪਕ ਇਸਤਰੀਆਂ ਹਨ।
r: ਮਾਇਕ ਦੇ ਕੁੱਤੇ ਦੀ ਪੂਛ ਕਾਲੀ ਹੈ।	$\sim r$: ਇਹ ਸੱਚ ਨਹੀਂ (ਝੂਠ) ਹੈ ਕਿ ਮਾਇਕ ਦੇ ਕੁੱਤੇ ਦੀ ਪੂਛ ਕਾਲੀ ਹੈ।
s: $2 + 2 = 4$	$\sim s$: ਇਹ ਸੱਚ ਨਹੀਂ (ਝੂਠ) ਹੈ ਕਿ $2 + 2 = 4$
t: ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।	$\sim t$: ਇਹ ਸੱਚ ਨਹੀਂ (ਝੂਠ) ਹੈ ਕਿ ABC ਸਮਭੁਜੀ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹਰ ਇੱਕ ਨਵਾਂ ਕਥਨ ਸੰਗਤ ਪੁਰਾਣੇ ਕਥਨ ਦਾ *ਖੰਡਣ* (negation) ਹੈ। ਭਾਵ $\sim p$, $\sim q$, $\sim r$, $\sim s$ ਅਤੇ $\sim t$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਕਥਨਾਂ p, q, r, s ਅਤੇ t ਦੇ ਖੰਡਣ ਹਨ। ਇਥ $\sim p$ ਨੂੰ ਨਹੀਂ p

(not p) ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਕਥਨ $\sim p$, ਉਸ ਪੁਸ਼ਟੀ (assertion) ਦਾ ਖੰਡਣ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਕਥਨ p ਕਹਿੰਦਾ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਆਪਣੀ ਸੁਭਾਵਿਕ ਗੱਲਬਾਤ ਵਿੱਚ $\sim p$ ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ '1 ਸਤੰਬਰ, 2005 ਨੂੰ ਦਿੱਲੀ ਵਿੱਚ ਵਰਖਾ ਨਹੀਂ ਹੋਈ ਸੀ'। ਫਿਰ ਵੀ ਇਸ ਤਰਾਂ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਸਾਨੂੰ ਸਾਵਧਾਨੀ ਵਰਤਣ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਸੰਭਵ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਸੋਚ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਕਥਨ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਯੋਗ ਥਾਂ ਤੇ ਕੇਵਲ ਸ਼ਬਦ 'ਨਹੀਂ' ਲਗਾ ਦੇਣ ਨਾਲ ਹੀ ਕਥਨ ਦਾ ਖੰਡਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਭਾਵੇਂ ਇਹ ਕਿਰਿਆ 'p' ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਤਾਂ ਲਾਗੂ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਪ੍ਰੰਤੂ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਉਸ ਵੇਲੇ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਸਾਡਾ ਕਥਨ ਸ਼ਬਦ 'ਸਾਰਿਆਂ' ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਕਥਨ q: ਸਾਰੇ ਅਧਿਆਪਕ ਇਸਤਰੀਆਂ ਹਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਿਹਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਕਥਨ ਦਾ ਖੰਡਣ $\sim q$: ਇਹ ਝੂਠ ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੇ ਅਧਿਆਪਕ ਇਸਤਰੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਹ ਕਥਨ ਦੇ ਵਰਗਾ ਹੈ ਕਿ 'ਕੁਝ ਅਧਿਆਪਕ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੇ ਹਨ ਜੋ ਪੁਰਸ਼ ਹਨ'। ਆਉ ਹੁਣ ਇਹ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ q ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਨਹੀਂ ਲਗਾ ਦਿੰਦੇ ਤਾਂ ਕੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਫਿਰ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਕਥਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ 'ਸਾਰੇ ਅਧਿਆਪਕ ਇਸਤਰੀਆਂ ਨਹੀਂ ਹਨ' ਜਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਥਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ' ਨਹੀਂ ਹਨ ਸਾਰੇ ਅਧਿਆਪਕ ਇਸਤਰੀਆਂ'। ਪਹਿਲੇ ਕਥਨ ਤੋਂ ਲੋਕ ਭੁਲੇਖੇ ਵਿੱਚ ਪੈ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਇਸ ਨਾਲ ਇਹ ਅਰਥ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੇ ਅਧਿਆਪਕ ਪੁਰਸ਼ ਹਨ (ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸ਼ਬਦ 'ਸਾਰੇ' ਤੇ ਜੋਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ) ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੀ q ਦਾ ਖੰਡਣ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਕਥਨ ਵਿੱਚ $\sim q$ ਦਾ ਅਰਥ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇਕ ਅਧਿਆਪਕ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦਾ ਹੈ ਜੋ ਇਸਤਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਦਾ ਖੰਡਣ ਲਿਖਦੇ ਸਮੇਂ ਸਾਵਧਾਨੀ ਵਰਤਣ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਦਾ ਨਿਰਣਾ ਕਿਵੇਂ ਕਰੀਏ ਕਿ ਜੋ ਖੰਡਣ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਹੈ ਉਹ ਸਹੀ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਕਸੌਟੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਮੰਨ ਲਉ p ਇੱਕ ਕਥਨ ਹੈ ਅਤੇ $\sim p$ ਇਸਦਾ ਖੰਡਣ ਹੈ। ਤਾਂ $\sim p$ ਝੂਠ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਦੇ p ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\sim p$ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ p ਝੂਠ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਜੇਕਰ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ ਕਿ ਮਾਇਕ ਦੇ ਕੁੱਤੇ ਦੀ ਪੂਛ ਕਾਲੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਝੂਠ ਹੈ ਕਿ ਮਾਇਕ ਦੇ ਕੁੱਤੇ ਦੀ ਪੂਛ ਕਾਲੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਝੂਠ ਹੈ ਕਿ ਮਾਇਕ ਦੇ ਕੁੱਤੇ ਦੀ ਪੂਛ ਕਾਲੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ ਕਿ ਮਾਇਕ ਦੇ ਕੁੱਤੇ ਦੀ ਪੂਛ ਕਾਲੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰਾਂ ਕਥਨਾਂ s ਅਤੇ t ਦੇ ਖੰਡਣ ਇਹ ਹਨ:

$s: 2 + 2 = 4$; ਖੰਡਣ $\sim s: 2 + 2 \neq 4$

t: ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਸਮਭੁਜੀ ਹੈ, $\sim t$: ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਸਮਭੁਜੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੁਣ, $\sim(\sim s)$ ਕੀ ਹੈ? ਇਹ $2 + 2 = 4$ ਹੋਵੇਗਾ ਜੋ ਕਿ s ਹੈ ਅਤੇ $\sim(\sim t)$ ਕੀ ਹੈ? ਇਹ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਸਮਭੁਜੀ ਹੈ ਭਾਵ t ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਕਥਨ $\boldsymbol{p}$ ਹੈ ਤਾਂ $\sim(\sim \boldsymbol{p})$ ਖੁਦ ਕਥਨ ਦੁਬਾਰਾ $\boldsymbol{p}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਖੰਡਣ ਲਿਖੋ:

(i) ਮਾਈਕ ਦੇ ਕੁੱਤੇ ਦੀ ਪੂਛ ਕਾਲੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) ਸਾਰੀਆਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(iii) $\sqrt{2}$ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੈ।

(iv) ਕੁਝ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(v) ਸਾਰੇ ਅਧਿਆਪਕ ਪੁਰਸ਼ ਨਹੀਂ ਹਨ।

(vi) ਕੁਝ ਘੋੜੇ ਭੂਰੇ ਨਹੀਂ ਹਨ।

(vii) ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੀ ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ $x^2 = -1$

ਹੱਲ :

(i) ਇਹ ਝੂਠ (ਸੱਚ ਨਹੀਂ) ਹੈ ਕਿ ਮਾਇਕ ਦੇ ਕੁੱਤੇ ਦੀ ਪੂਛ ਕਾਲੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਭਾਵ ਮਾਇਕ ਦੇ ਕੁੱਤੇ ਦੀ ਪੂਛ ਕਾਲੀ ਹੈ।

(ii) ਇਹ ਝੂਠ (ਸੱਚ ਨਹੀਂ) ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ "ਸਾਰੀਆਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀ ਹਨ।"

(iii) ਇਹ ਝੂਠ (ਸੱਚ ਨਹੀਂ) ਹੈ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੈ ਭਾਵ $\sqrt{2}$ ਅਪਰਿਮੇਯ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iv) ਇਹ ਝੂਠ (ਸੱਚ ਨਹੀਂ) ਹੈ ਕਿ ਕੁਝ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਭਾਵ ਕੋਈ ਵੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(v) ਇਹ ਝੂਠ (ਸੱਚ ਨਹੀਂ) ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੇ ਅਧਿਆਪਕ ਪੁਰਸ਼ ਨਹੀਂ ਹਨ ਭਾਵ ਸਾਰੇ ਅਧਿਆਪਕ ਪੁਰਸ਼ ਹਨ।

(vi) ਇਹ ਝੂਠ (ਸੱਚ ਨਹੀਂ) ਹੈ ਕਿ ਕੁਝ ਘੋੜੇ ਭੂਰੇ ਨਹੀਂ ਹਨ ਭਾਵ ਸਾਰੇ ਘੋੜੇ ਭੂਰੇ ਹਨ।

(vii) ਇਹ ਝੂਠ (ਸੱਚ ਨਹੀਂ) ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੀ ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ ਕਿ $x^2 = -1$ ਭਾਵ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਲਈ $x^2 = -1$

ਟਿੱਪਣੀ : ਉੱਪਰ ਕੀਤੀ ਗਈ ਚਰਚਾ ਤੋਂ ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਦਾ ਖੰਡਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦਾ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ **ਕਾਰਜ-ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨਿਯਮ** (working rule) ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ:

(i) ਪਹਿਲਾਂ "ਨਹੀਂ" ਨਾਲ ਕਥਨ ਲਿਖੋ।

(ii) ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਸ਼ੱਕ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਕੁਝ ਜਰੂਰਤ ਅਨੁਸਾਰ ਸੋਧ (modification) ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ 'ਸਾਰਿਆਂ' ਜਾਂ 'ਕੁਝ' ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕਥਨਾਂ ਤੇ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A1.4

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਖੰਡਣ ਲਿਖੋ:

(i) ਮਨੁੱਖ ਨਾਸ਼ਵਾਨ (mortal) ਹੈ।

(ii) ਰੇਖਾ l ਰੇਖਾ m ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ।

(iii) ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀਆਂ ਹਨ (iv) ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

(v) ਕੁਝ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਟਾਂਕ ਹਨ। (vi) ਕੋਈ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਆਲਸੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(vii) ਕੁਝ ਬਿੱਲੀਆਂ ਕਾਲੀਆਂ ਨਹੀਂ ਹਨ।

(viii) ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੀ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ x ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ ਕਿ $\sqrt{x} = -1$

(ix) ਸੰਖਿਆ 2, ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ a ਨੂੰ ਭਾਗ ਕਰਦੀ ਹੈ। (x) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਹਨ।

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਰ ਇੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਦੋ ਕਥਨ ਹਨ। ਦਸੋ ਕਿ ਦੂਸਰਾ ਕਥਨ ਪਹਿਲੇ ਦਾ ਖੰਡਣ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ:

(i) ਮੁਮਤਾਜ ਭੁੱਖੀ ਹੈ,
ਮੁਮਤਾਜ ਭੁੱਖੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) ਕੁਝ ਬਿੱਲੀਆਂ ਕਾਲੀਆਂ ਹਨ,
ਕੁਝ ਬਿੱਲੀਆਂ ਭੂਰੀਆਂ ਹਨ।

(iii) ਸਾਰੇ ਹਾਥੀ ਵਿਸ਼ਾਲ ਹਨ।
ਇੱਕ ਹਾਥੀ ਵਿਸ਼ਾਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iv) ਸਾਰੇ ਅੱਗ ਬਝਾਉ ਯੰਤਰ ਲਾਲ ਹਨ,
ਸਾਰੇ ਅੱਗ ਬਝਾਉ ਯੰਤਰ ਲਾਲ ਨਹੀਂ ਹਨ।

(v) ਕੁਝ ਆਦਮੀ ਗਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ।
ਕੁਝ ਆਦਮੀ ਗਾਂ ਹਨ।

A1.6 ਕਥਨ ਦਾ ਉਲਟ (ਵਿਲੋਮ)

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਕਥਨ ਦੇ ਉਲਟ ਦੀ ਧਾਰਣਾ (notion) ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਵਾਂਗੇ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਿਤ (compound) ਕਥਨ ਦਾ ਭਾਵ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੇ ਕਥਨ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਵੱਧ ਸਰਲ ਕਥਨਾਂ ਤੋਂ ਜੁੜ ਕੇ ਬਣਿਆ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਵੈਸੇ ਤਾਂ ਮਿਸ਼ਰਤ ਕਥਨ ਬਣਾਉਣ ਦੀਆਂ ਅਨੇਕ ਵਿਧੀਆਂ ਹਨ ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਥੇ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਵਿਧੀਆਂ ਤੇ ਧਿਆਨ ਕੇਂਦਰਿਤ ਕਰਾਂਗੇ ਜੋ ਸ਼ਬਦ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਤਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਦੋ ਸਰਲ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਕਥਨ 'ਜੇਕਰ ਵਰਖਾ ਹੋ ਰਹੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਸਾਇਕਲ 'ਤੇ ਜਾਣਾ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੈ।' ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਦੋ ਕਥਨਾਂ ਤੋਂ ਬਣਿਆ ਹੈ।

p: ਵਰਖਾ ਹੋ ਰਹੀ ਹੈ।

q: ਸਾਇਕਲ ਤੇ ਜਾਣਾ ਮੁਸ਼ਕਿਲ।

ਪਹਿਲਾਂ ਦਸੇ ਗਏ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ: ਜੇਕਰ p, ਤਾਂ q ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 'p ਤੋਂ ਮਤਲਬ q ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਅਸੀਂ $p \Rightarrow q$ ਨਾਲ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਕਥਨ ਇਹ ਹੈ ਕਿ 'ਜੇਕਰ ਪਾਣੀ ਦੀ ਟੈਂਕੀ ਕਾਲੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਵਿੱਚ ਪੀਣ ਵਾਲਾ ਪਾਣੀ ਹੈ'। ਇਹ $p \Rightarrow q$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ ਜਿਥੇ ਪਰਿਕਲਪਨਾ p ਹੈ (ਪਾਣੀ ਦੀ ਟੈਂਕੀ ਕਾਲੀ ਹੈ) ਅਤੇ ਸਿੱਟਾ q ਹੈ (ਟੈਂਕੀ ਵਿੱਚ ਪੀਣ ਵਾਲਾ ਪਾਣੀ ਹੈ)। ਮੰਨ ਲਉ ਅਸੀਂ ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਅਤੇ ਸਿੱਟੇ ਨੂੰ ਅਦਲ ਬਦਲ (Interchange) ਕਰ ਦੇਈਏ ਤਾਂ, ਤਾਂ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਕੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ? ਸਾਨੂੰ $q \Rightarrow p$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ ਜੇਕਰ ਟੈਂਕੀ ਵਿੱਚ ਪੀਣ ਵਾਲਾ ਪਾਣੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਟੈਂਕੀ ਜਰੂਰ ਕਾਲੀ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸ ਕਥਨ ਨੂੰ $p \Rightarrow q$ ਦਾ **ਉਲਟ** (converse) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਥਨ $p \Rightarrow q$ ਦਾ **ਉਲਟ** $q \Rightarrow p$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਥੇ p ਅਤੇ q ਕਥਨ ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $p \Rightarrow q$ ਅਤੇ $q \Rightarrow p$ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਉਲਟ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਉਲਟ ਲਿਖੋ:

(i) ਜੇਕਰ ਜਮੀਲਾ ਸਾਇਕਲ ਚਲਾ ਰਹੀ ਹੈ, ਤਾਂ 17 ਅਗਸਤ ਨੂੰ ਐਤਵਾਰ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ 17 ਅਗਸਤ ਨੂੰ ਐਤਵਾਰ ਹੈ ਤਾਂ ਜਮੀਲਾ ਸਾਇਕਲ ਚਲਾ ਰਹੀ ਹੈ।

(iii) ਜੇਕਰ ਰਾਣੀ ਗੁੱਸੇ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦਾ ਚਿਹਰਾ ਲਾਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(iv) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਕੋਲ ਸਿੱਖਿਆ ਵਿੱਚ ਗ੍ਰੈਜੂਏਸ਼ਨ ਦੀ ਡਿਗਰੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਨੂੰ ਪੜਾਉਣ ਦੀ ਇਜਾਜ਼ਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(v) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ ਵਾਇਰਲ ਸੰਕਰਮਣ (infection) ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਨੂੰ ਤੇਜ਼ ਬੁਖਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(vi) ਜੇਕਰ ਅਹਿਮਦ ਮੁੰਬਈ ਵਿੱਚ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਹੈ।

(vii) ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਸਮਭੁਜੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਸਾਰੇ ਅੰਦਰੂਨੀ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(viii) ਜੇਕਰ x ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ x ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਅਸਾਂਤ (non-terminating) ਅਣ-ਆਵਰਤੀ (non-recurring) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(ix) ਜੇਕਰ $x - a$ ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ, ਤਾਂ $p(a) = 0$.

ਹੱਲ : ਉੱਪਰ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹਰ ਇੱਕ ਕਥਨ $p \Rightarrow q$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਉਲਟ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਪਹਿਲਾ ਅਸੀਂ p ਅਤੇ q ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਫਿਰ $q \Rightarrow p$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

(i) p: ਜਮੀਲਾ ਸਾਇਕਲ ਚਲਾ ਰਹੀ ਹੈ ਅਤੇ q: 17 ਅਗਸਤ ਐਤਵਾਰ ਨੂੰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਉਲਟ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ 17 ਅਗਸਤ ਐਤਵਾਰ ਨੂੰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਜਮੀਲਾ ਸਾਇਕਲ ਚਲਾ ਰਹੀ ਹੈ।

(ii) ਇਹ (i) ਦਾ ਉਲਟ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸਦਾ ਉਲਟ ਉੱਪਰ (i) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਕਥਨ ਹੈ।

(iii) ਜੇਕਰ ਰਾਣੀ ਦਾ ਚਿਹਰਾ ਲਾਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਗੁੱਸੇ ਵਿੱਚ ਹੈ।

(iv) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ ਪੜ੍ਹਾਉਣ ਦੀ ਇਜਾਜ਼ਤ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਕੋਲ ਸਿੱਖਿਆ ਵਿੱਚ ਗ੍ਰੈਜੂਏਸ਼ਨ ਦੀ ਡਿਗਰੀ ਹੈ।

(v) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ ਤੇਜ਼ ਬੁਖਾਰ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਨੂੰ ਵਾਇਰਲ ਸੰਕਰਮਣ ਹੈ।

(vi) ਜੇਕਰ ਅਹਿਮਦ ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਮੁਬੰਈ ਵਿੱਚ ਹੈ।

(vii) ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੰਦਰੂਨੀ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।

(viii) ਜੇਕਰ x ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਅਸਾਂਤ ਅਣ-ਆਵਰਤੀ ਹੈ ਤਾਂ x ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

(ix) ਜੇਕਰ $p(a) = 0$, ਤਾਂ $x - a$ ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਚਿੰਤਾ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਕਿ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਸੱਚ ਨਹੀਂ (ਝੂਠ) ਅਸੀਂ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਰ ਇੱਕ ਕਥਨ ਦਾ ਕੇਵਲ ਉਲਟ ਲਿਖ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ. ਜੇਕਰ ਅਹਿਮਦ ਮੁੰਬਈ ਵਿੱਚ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ। ਆਉ ਹੁਣ ਇਸਦਾ ਉਲਟ ਲਈਏ। ਜੇਕਰ ਅਹਿਮਦ ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਹ ਮੁੰਬਈ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਇਹ ਜਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ ਇਹ ਸਦਾ ਸੱਚ ਹੀ ਹੋਵੇ ਉਹ ਭਾਰਤ ਦੇ ਕਿਸੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਿਮਾਇਤੀ ਵਿੱਚ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੀਆਂ ਅਨੇਕਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ ਜਿਥੇ $p \Rightarrow q$ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਨਿਰਣਾ ਲੈਣਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕੀ ਉਲਟ $q \Rightarrow p$ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਦਾ ਉਲਟ ਦੱਸੋ। ਹਰ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇਹ ਵੀ ਦੱਸੋ ਕਿ ਉਲਟ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਸੱਚ ਨਹੀਂ।

(i) ਜੇਕਰ n ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ $2n + 1$ ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਸ਼ਾਂਤ (terminating) ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਖਿਆ ਪਰਿਮੇਯ ਹੈ।

(iii) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਤਿਰਛੀ ਰੇਖਾ (transversal) ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਗਤ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iv) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਚਤੁਰਭੁਜ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(v) ਜੇਕਰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਹੱਲ :

(i) ਉਲਟ ਇਹ ਹੈ ਕਿ 'ਜੇਕਰ $2n + 1$ ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ n ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਇੱਕ ਸੱਚਾ ਨਹੀਂ (ਝੂਠਾ) ਕਥਨ ਹੈ (ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $15 = 2(7) + 1$ ਅਤੇ 7 ਟਾਂਕ ਹੈ।)

(ii) 'ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਪਰਿਮੇਯ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।' ਇਹ ਉਲਟ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਇੱਕ ਝੂਠਾ ਕਥਨ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਇੱਕ ਅਸ਼ਾਂਤ ਅਵਰਤੀ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(iii) ਉਲਟ ਇਹ ਹੈ ਕਿ 'ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਤਿਰਛੀ ਰੇਖਾ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰਾਂ ਕੱਟਦੀ ਹੈ ਕਿ ਸੰਗਤ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ'। ਜਮਾਤ IX ਦੀ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਸਵੈ-ਸਿੱਧ 6.4 ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲਿਆ ਹੈ ਕਿ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ।

(iv) 'ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦੀਆਂ ਆਹਮਣੇ ਸਾਹਮਣੇ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਉਲਟ ਹੈ। ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ (ਥਿਉਰਮ 8.1, ਜਮਾਤ IX)

(v) 'ਜੇਕਰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ' ਉਲਟ ਹੈ। ਇਹ ਕਥਨ ਝੂਠ (ਸੱਚ ਨਹੀਂ) ਹੈ। ਇਹ ਅਸੀਂ ਤੁਹਾਡੇ ਉਪਰ ਛੱਡ ਰਹੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਇਸਦੇ ਲਈ ਕੋਈ ਯੋਗ ਉਲਟ ਉਦਾਹਰਣ ਲੱਭੋ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A1.5

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਵਿਲੋਮ (ਉਲਟ) ਲਿਖੋ

(i) ਜੇਕਰ ਟੋਕੀਉ ਵਿੱਚ ਗਰਮੀ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਸ਼ਰਨ ਦੇ ਸਰੀਰ ਵਿੱਚੋਂ ਵੱਧ ਪਸੀਨਾ (ਮੁੜ੍ਹਕਾ) ਨਿਕਲਣ ਲਗਦਾ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ ਸ਼ਾਲਿਨੀ ਭੁੱਖੀ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਉਸਦਾ ਢਿੱਡ ਕੁੜਕੜਾਉਣ ਲੱਗਦਾ ਹੈ।

(iii) ਜੇਕਰ ਯਸ਼ਵੰਤ ਨੂੰ ਵਜੀਫਾ ਮਿਲਦਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸ ਨੂੰ ਡਿਗਰੀ ਮਿਲ ਸਕਦੀ ਹੈ।

(iv) ਜੇਕਰ ਪੌਦੇ ਵਿੱਚ ਫੁੱਲ ਲਗੇ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹ (ਜਿਉਂਦਾ) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(v) ਜੇਕਰ ਜਾਨਵਰ ਇੱਕ ਬਿੱਲੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸਦੀ ਇੱਕ ਪੂਛ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਦੇ ਵਿਲੋਮ (ਉਲਟ) ਲਿਖੋ। ਹਰ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਦੱਸੋ ਕਿ ਵਿਲੋਮ ਸੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਸੱਚ ਨਹੀਂ (ਝੂਠ) ਹੈ:

(i) ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਅਧਾਰ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(ii) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਟਾਂਕ (ਬਿਖਮ) ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸਦਾ ਵਰਗ ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(iii) ਜੇਕਰ $x^2 = 1$, ਤਾਂ $x = 1$

(iv) ਜੇਕਰ ABCD ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੋਵੇ ਤਾਂ AC ਅਤੇ BD ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਸਮਦੋਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

(v) ਜੇਕਰ a, b ਅਤੇ c ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ $a + (b + c) = (a + b) + c$

(vi) ਜੇਕਰ x ਅਤੇ y ਦੋ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ $x + y$ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(vii) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ PQRS ਦੇ ਸਿਖਰ ਬਿੰਦੂ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

A1.7 ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ ਦੁਆਰਾ ਸਬੂਤ (Proof by contradiction)

ਹੁਣ ਤੱਕ ਤੁਸੀਂ ਸਾਰੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਪਰਿਣਾਮਾਂ (ਨਤੀਜਿਆਂ) ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਪ੍ਰਤੱਖ ਤਰਕਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਅਪ੍ਰਤੱਖ ਤਰਕਾਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਨਾਲ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ ਦੁਆਰਾ ਸਬੂਤ (proof by contradiction) ਨਾਮ ਗਣਿਤ ਦੇ ਇੱਕ ਬਹੁਤ ਸ਼ਕਤੀਸ਼ਾਲੀ ਸਾਧਨ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਵਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਅਧਿਆਇ 1 ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਅਪਰਿਮੇਯਤਾ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਅਤੇ ਹੋਰ ਅਧਿਆਇਆਂ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਇੱਥੇ ਇਸ ਧਾਰਣਾ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਅਨੇਕ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਵਾਂਗੇ।

ਅੱਗੇ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰੀਏ ਕਿ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਕੀ ਹੈ। ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਵਿਰੋਧ ਉਦੋਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦਾ ਕਥਨ p ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ p ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਖੰਡਣ $\sim p$ ਵੀ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਹਾਰਣ ਦੇ ਲਈ

p: $x=\frac{a}{b}$ ਜਿਥੇ a ਅਤੇ b ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

q: ਸੰਖਿਆ 2 'a' ਅਤੇ 'b' ਦੋਹਾਂ ਨੂੰ ਵੰਡਦੀ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ p ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦਰਸਾ ਸਕੀਏ ਕਿ q ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ q ਦਾ ਇਹ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ p ਦੇ ਖੰਡਣ ਸੱਚ ਹੈ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਜੇਕਰ ਇਹ ਯਾਦ ਹੋਵੇ ਕਿ ਇਹ ਘਟਨਾ ਉਸ ਵੇਲੇ ਘਟੀ ਸੀ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰ ਰਹੇ ਸੀ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੈ। (ਦੇਖੋ ਅਧਿਆਇ 1)।

ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਦੁਆਰਾ ਸਬੂਤ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਕੰਮ ਕਰਦਾ ਹੈ? ਆਉ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈ ਕੇ ਇਸ ਤੇ ਅਸੀਂ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਮੰਨ ਲਉ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ:

ਸਾਰੀਆਂ ਔਰਤਾਂ ਨਾਸ਼ਵਾਨ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। A ਇੱਕ ਔਰਤ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਔਰਤ A ਨਾਸ਼ਵਾਨ ਹੈ।

ਭਾਵੇਂ ਇਹ ਇੱਕ ਸਰਲ ਉਦਾਹਰਣ ਹੈ, ਫਿਰ ਵੀ ਆਉ ਅਸੀਂ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਨਾਲ ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

- ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ ਅਸੀਂ ਕਥਨ p ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ (ਇਥੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦਰਸਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ p : 'ਔਰਤ A ਨਾਸ਼ਵਾਨ ਹੈ' ਸੱਚ ਹੈ)
- ਇਸ ਲਈ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਥਨ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਭਾਵ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ p ਦਾ ਖੰਡਣ ਸੱਚ ਹੈ (ਭਾਵ ਔਰਤ A ਨਾਸ਼ਵਾਨ ਨਹੀਂ ਹੈ)
- ਫਿਰ ਅਸੀਂ p ਦੇ ਖੰਡਣ ਦੀ ਸਚਾਈ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਅਨੇਕ ਤਰਕ ਸੰਗਤ ਨਿਗਮਨ (deductions) ਕਰਦੇ ਹਾਂ (ਕਿਉਂਕਿ 'ਔਰਤ A ਨਾਸ਼ਵਾਨ ਨਹੀਂ ਹੈ' ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਕਥਨ 'ਸਾਰੀਆਂ ਔਰਤਾਂ ਨਾਸ਼ਵਾਨ ਹਨ' ਦਾ ਇੱਕ ਉਲਟ ਉਦਾਹਰਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸੱਚ ਨਹੀਂ (ਝੂਠ) ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਔਰਤਾਂ ਨਾਸ਼ਵਾਨ ਹਨ।)
- ਜੇਕਰ ਇਸ ਨਾਲ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧਤਾ (contradiction) ਪੈਦਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਕਰਕੇ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਦੋਸ਼ ਪੂਰਣ ਗੱਲ ਮੰਨੀ ਹੈ ਕਿ 'p ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ' ਦੇ ਕਾਰਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। (ਇਹ ਇੱਕ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦਰਸਾਇਆ ਹੈ ਕਿ ਕਥਨ 'ਸਾਰੀਆਂ ਔਰਤਾਂ ਨਾਸ਼ਵਾਨ ਹਨ' ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਖੰਡਣ ਕਿ 'ਸਾਰੀਆਂ ਔਰਤਾਂ ਨਾਸ਼ਵਾਨ ਨਹੀਂ ਹਨ' ਸੱਚ ਹੈ। ਇਹ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਇਸ ਲਈ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਕੇ ਚਲੇ ਸੀ ਕਿ A ਨਾਸ਼ਵਾਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।)।
- ਇਸ ਲਈ ਸਾਡੀ ਕਲਪਨਾ ਗਲਤ ਹੈ ਭਾਵ p ਨੂੰ ਸੱਚ ਹੋਣਾ ਹੀ ਹੈ (ਇਸ ਲਈ A ਨਾਸ਼ਵਾਨ ਹੈ।)

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਇੱਕ ਗੈਰ ਸਿਫਰ (non zero) ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ :

ਕਥਨ	ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ/ਟਿੱਪਣੀ
ਅਸੀਂ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਦੁਆਰਾ ਸਬੂਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ। ਮੰਨ ਲਓ r ਇੱਕ ਸਿਫਰ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ x ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਓ, $r = \frac{m}{n}$ ਜਿਥੇ m, n ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $m \neq 0, n \neq 0$ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ rx ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੈ।	
ਮੰਨ ਲਓ rx ਪਰਿਮੇਯ ਹੈ।	ਇਥੇ ਅਸੀਂ ਉਸ ਕਥਨ ਦਾ ਉਲਟ ਸੱਚ ਮੰਨ ਰਹੇ ਹਾਂ ਜਿਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ।
ਤਾਂ, $rx = \frac{p}{q}, q \neq 0$, ਜਿਥੇ p ਅਤੇ q ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।	ਇਹ ਪਿਛਲੇ ਕਥਨ ਅਤੇ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
ਸਮੀਕਰਣ $rx = \frac{p}{q}, q \neq 0$, ਅਤੇ $r = \frac{m}{n}$, ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $x = \frac{p}{rq} = \frac{np}{mq}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।	
ਕਿਉਂਕਿ np ਅਤੇ mq ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $mq \neq 0$, ਇਸ ਲਈ x ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।	ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਅਤੇ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ।
ਇਹ ਇੱਕ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ x ਨੂੰ ਪਰਿਮੇਯ ਦਿਖਾਇਆ ਹੈ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਸਾਡੀ ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ x ਅਪਰਿਮੇਯ ਹੈ।	ਇਹ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਲੱਭ ਰਹੇ ਸੀ।
ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਇਸ ਦੋਸ਼ਪੂਰਣ ਕਲਪਨਾ ਕਿ rx ਪਰਿਮੇਯ ਹੈ ਦੇ ਕਾਰਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।	ਤਰਕਸੰਗਤ ਨਿਗਮਨ

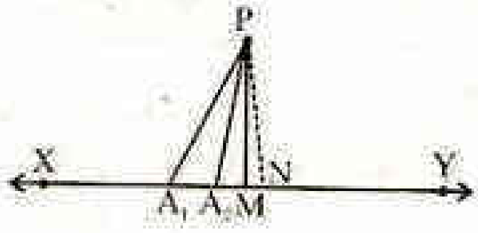
ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉਦਾਹਰਣ 11 ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਸ ਵਾਰ ਅਸੀਂ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਦੁਆਰਾ ਸਬੂਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ। ਪਰਿਣਾਮ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਕਥਨ	ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ/ਟਿੱਪਣੀ
ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ ਕਥਨ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ।	ਜਿਸ ਤਰਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਇਹ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ ਦੁਆਰਾ ਸਬੂਤ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਤਰਕ ਦੇਣ ਦੀ ਸ਼ੁਰੂਆਤ ਹੈ।
ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੀ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ $p > 3$ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜੋ $6n + 1$ ਜਾਂ $6n + 5$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿੱਥੇ n ਇਕ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।	ਇਹ ਪਰਿਣਾਮ (ਨਤੀਜੇ) ਦੇ ਕਥਨ ਦੇ ਖੰਡਣ ਹੈ।
6 ਦੇ ਭਾਗ ਤੇ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਥਿਊਰਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਅਤੇ ਇਸ ਤਥ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਕਿ p, $6n + 1$ ਜਾਂ $6n + 5$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਸਾਨੂੰ $p = 6n$ ਜਾਂ $6n + 2$ ਜਾਂ $6n + 3$ ਜਾਂ $6n + 4$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।	ਪਹਿਲਾਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤੇ ਗਏ ਪਰਿਣਾਮਾਂ (ਨਤੀਜਿਆਂ) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ।
ਇਸ ਲਈ p ਜਾਂ ਤਾਂ 2 ਜਾਂ 3 ਨਾਲ ਭਾਗ ਯੋਗ ਹੈ	ਤਰਕਸੰਗਤ ਨਿਗਮਨ
ਇਸ ਲਈ p ਅਭਾਜ ਨਹੀਂ ਹੈ।	ਤਰਕਸੰਗਤ ਨਿਗਮਨ
ਇਹ ਇੱਕ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧਤਾ (contradiction) ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਡੀ ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ p ਅਭਾਜ ਹੈ।	ਅਸੀਂ ਇਹੀ ਚਾਹੁੰਦੇ ਸੀ।
ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧਤਾ(contradiction)ਇਸ ਲਈ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਕਿਉਂ ਕਿ ਇਹ ਮੰਨ ਕੇ ਚੱਲੇ ਸੀ ਕਿ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੀ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ $p > 3$ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜੋ $6n + 1$ ਜਾਂ $6n + 5$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ।	
ਸਿੱਟੇ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ 3 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਹਰ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ $6n + 1$ ਜਾਂ $6n + 5$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੈ।	ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਸਬੂਤ ਦੀ ਉਦਾਹਰਣ ਤੋਂ ਇਹ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਪਰਿਣਾਮ ਨੂੰ ਅਨੇਕ ਵਿਧੀਆਂ ਨਾਲ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਪਰਿਮੇਯ A1.2 : *ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਉਸ ਰੇਖਾ ਤੇ ਜੋ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਨਹੀਂ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਸਾਰੇ ਰੇਖਾਖੰਡਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਰੇਖਾਖੰਡ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।*

ਸਬੂਤ :



ਚਿੱਤਰ A1.5

ਕਥਨ	ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ/ਟਿਪਣੀ
ਮੰਨ ਲਉ XY ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ ਹੈ, P ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਜੋ XY ਤੇ ਸਥਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ PM, PA_1, PA_2, . . . ਆਦਿ, ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਰੇਖਾ XY ਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੱਕ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਰੇਖਾਖੰਡ ਹਨ, ਜਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ PM ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ A1.5 ਦੇਖੋ)	ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੇ ਰੇਖਾਖੰਡਾਂ PM, PA_1, PA_2, . . ਆਦਿ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਰੇਖਾਖੰਡ XY ਤੇ ਲੰਬ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਰਿਆਂ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਰੇਖਾਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।
ਮੰਨ ਲਉ PM, XY 'ਤੇ ਲੰਬ ਨਹੀਂ ਹੈ।	ਇਹ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ ਦੁਆਰਾ ਸਿੱਧ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਕਥਨ ਦਾ ਖੰਡਣ ਹੈ।
ਰੇਖਾ XY ਤੇ PN ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ ਜਿਸ ਤਰਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ A1.5 ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂਦਾਰ ਰੇਖਾ ਨਾਲ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।	ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਰਚਨਾ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਹੈ।
ਸਾਰੇ ਰੇਖਾਖੰਡਾਂ PM, PN, PA_1, PA_2, . . ਆਦਿ ਵਿੱਚ PN ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਰੇਖਾਖੰਡ ਹੈ, ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ $PN < PM$	ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਭੁਜਾ ਕਰਣ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਗੁਣ।
ਇਹ ਸਾਡੀ ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਦਾ ਉਲਟ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਰੇਖਾਖੰਡਾਂ ਵਿੱਚ PM ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਰੇਖਾਖੰਡ ਹੈ।	ਅਸੀਂ ਇਹ ਹੀ ਚਾਹੁੰਦੇ ਸੀ।
ਇਸ ਲਈ, ਰੇਖਾਖੰਡ PM, XY ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।	ਅਸੀਂ ਸਿੱਟੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚ ਜਾਂਦੇ ਹਾਂ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A1.6

1. ਮੰਨ ਲਓ $a+b=c+d$, ਅਤੇ $a<c$, ਤਾਂ ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਦੁਆਰਾ ਸਬੂਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਇਹ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $b>d$
2. ਮੰਨ ਲਓ r ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ x ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਦੁਆਰਾ ਸਬੂਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਇਹ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $r+x$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
3. ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਦੁਆਰਾ ਸਬੂਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ a ਦੇ ਲਈ a^2 ਜਿਸਤ ਹੈ ਤਾਂ a ਵੀ ਜਿਸਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

   [ਸੰਕੇਤ : ਮੰਨ ਲਓ a ਜਿਸਤ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਭਾਵ ਇਹ $2n+1$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ ਜਿਥੇ n ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਫਿਰ ਅਗੇ ਵਧੋ।]
4. ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਦੁਆਰਾ ਸਬੂਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ a ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਲਈ a^2, 3 ਨਾਲ ਭਾਗ ਯੋਗ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ a ਵੀ 3 ਨਾਲ ਭਾਗ ਯੋਗ ਹੋਵੇਗਾ।
5. ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਦੁਆਰਾ ਸਬੂਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਇਹ ਦਿਖਾਉ ਕਿ n ਦਾ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦਾ ਕੋਈ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਜਿਸਦੇ ਲਈ 6^n ਦਾ ਅਖੀਰਲਾ ਅੰਕ ਸਿਫਰ ਹੋਵੇ।
6. ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕਟ ਨਹੀਂ ਸਕਦੀਆ ਹਨ।

A1.8 ਸਾਰ

ਇਸ ਅੰਤਿਕਾ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ:

1. ਕਿਸੇ ਸਬੂਤ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਅੰਸ਼ (ingredients) ਅਤੇ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹੇ ਗਏ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸੰਕਲਪ।
2. ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਦਾ ਖੰਡਣ।
3. ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਦਾ ਵਿਲੋਮ (ਉਲਟ)।
4. ਸਵੈ-ਵਿਰੋਧ (contradiction) ਦੁਆਰਾ ਸਬੂਤ।

ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ Mathematical Modelling A2

A2.1 ਭੂਮਿਕਾ

- ਇੱਕ ਬਾਲਗ ਮਨੁੱਖੀ ਸਰੀਰ ਵਿੱਚ ਲਗਭਗ 1,50,000 ਕਿ.ਮੀ. ਲੰਬੀਆਂ ਧਮਨੀਆਂ ਅਤੇ ਸ਼ਿਰਾਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਜਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚ ਖੂਨ ਚਲਦਾ ਹੈ।
- ਮਨੁੱਖ ਦਾ ਦਿਲ ਸਰੀਰ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀ 60 ਸੈਕਿੰਡ ਵਿੱਚ 5 ਤੋਂ 6 ਲਿਟਰ ਤੱਕ ਖੂਨ ਪੰਪ ਕਰਦਾ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।
- ਸੂਰਜ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਤਾਪਮਾਨ ਲਗਭੱਗ 6000° C ਹੈ।

ਕੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਜਾਣਕੇ ਹੈਰਾਨੀ ਹੋਈ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਸਾਡੇ ਵਿਗਿਆਨੀ ਅਤੇ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ ਇਹਨਾਂ ਸਿੱਟਿਆ ਦਾ ਮੁਲਾਂਕਣ ਕਰ ਸਕੇ ਹਨ? ਕੀ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਕੁਝ ਬਾਲਗਾਂ ਦੇ ਮ੍ਰਿਤਕ ਸਰੀਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਧਮਨੀਆਂ ਅਤੇ ਸ਼ਿਰਾਵਾਂ ਨੂੰ ਬਾਹਰ ਕੱਢ ਕੇ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਨਾਪੀ ਹੈ? ਕੀ ਦਿਲ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਤੀ ਸੈਕਿੰਡ ਪੰਪ ਕੀਤੇ ਗਏ ਖੂਨ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਰੀਰ ਤੋਂ ਖੂਨ ਬਾਹਰ ਕੱਢਿਆ ਹੈ? ਕੀ ਸੂਰਜ ਦਾ ਤਾਪਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਆਪਣੇ ਨਾਲ ਥਰਮਾਮੀਟਰ ਲੈ ਕੇ ਸੂਰਜ ਤੱਕ ਦੀ ਯਾਤਰਾ ਕੀਤੀ ਹੈ? ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੀ ਇਸ ਤਰਾਂ ਨਹੀਂ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਫਿਰ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਇਹ ਪੈਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਇਨ੍ਹਾਂ ਅਕੰੜਿਆਂ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ।

ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੀ ਇਸਦਾ ਉੱਤਰ **ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ** (Mathematical Modelling) ਦੇ ਅੰਦਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਤੁਹਾਨੂੰ ਜਾਣੂੰ ਕਰਵਾ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Mathematical Modelling) ਅਸਲ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਜੁੜੀ ਕਿਸੇ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਗਣਿਤਕ ਵਿਵਰਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਵੀ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Mathematical Modelling) ਕਿਸੇ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦਾ ਇੱਕ ਤਰੀਕਾ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਕਰਨ ਅਤੇ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਇਸਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Mathematical Modelling) ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਅਸਲ ਜੀਵਨ ਨਾਲ ਜੁੜੀ ਕਿਸੇ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਉਸਨੂੰ ਇੱਕ ਤੁੱਲ ਗਣਿਤਕ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਤਬਦੀਲ ਕਰ ਦੇਂਦੇ ਹਾਂ। ਜੇ ਫਿਰ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤਿਕ ਸਮੱਸਿਆ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਹੱਲ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਅਸਲ ਜਗਤ ਵਿੱਚ ਜੁੜੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਨਾਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇਹ ਦੇਖਣਾ ਜਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੱਲ ਅਰਥਪੂਰਣ ਹੈ, ਜੋ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Model) ਦੇ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ (Validating) ਦਾ ਇੱਕ ਪਗ ਹੈ। ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਜਿਥੇ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Mathematical Modelling) ਬਹੁਤ ਜਿਆਦਾ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਹੈ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹਨ:

(i) ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਕਿਸੇ ਨਦੀ ਦੀ ਡੂੰਘਾਈ ਅਤੇ ਚੋੜਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਜਿਥੇ ਪਹੁੰਚਿਆ ਨਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੋਵੇ।

(ii) ਧਰਤੀ ਅਤੇ ਹੋਰ ਗ੍ਰਹਿਾਂ ਦੇ ਭਾਰ ਦਾ ਅੰਦਾਜਾ ਲਗਾਉਣਾ।

(iii) ਧਰਤੀ ਅਤੇ ਕਿਸੀ ਹੋਰ ਗ੍ਰਹਿ ਦੀ ਵਿੱਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰਨਾ।

(iv) ਕਿਸੇ ਦੇਸ਼ ਵਿੱਚ ਮਾਨਸੂਨ ਆਉਣ ਦੇ ਬਾਰੇ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਦੱਸਣਾ।

(v) ਸਟਾਕ ਮਾਰਕੀਟ ਦੀ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ (Trend) ਬਾਰੇ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਦੱਸਣਾ।

(vi) ਕਿਸੇ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਸਰੀਰ ਵਿੱਚ ਅੰਦਾਜਨ ਖੂਨ (ਲਹੂ) ਦੇ ਆਇਤਨ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣਾ।

(vii) 10 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਕਿਸੇ ਸ਼ਹਿਰ (ਨਗਰ) ਦੀ ਅਬਾਦੀ ਬਾਰੇ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਦੱਸਣਾ।

(viii) ਕਿਸੇ ਦਰੱਖਤ ਦੀਆਂ ਪੱਤੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਬਾਰੇ ਅੰਦਾਜਾ ਲਗਾਉਣਾ।

(ix) ਕਿਸੇ ਸ਼ਹਿਰ ਦੇ ਵਾਯੂਮੰਡਲ ਵਿੱਚ ਮੌਜੂਦ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਪ੍ਰਦੂਸ਼ਕਾ ਦਾ ppm ਪਤਾ ਕਰਨਾ।

(x) ਵਾਤਾਵਰਣ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਦੂਸ਼ਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਪਤਾ ਕਰਨਾ।

(xi) ਸੂਰਜ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਤਾਪਮਾਨ ਦਾ ਅੰਦਾਜਾ ਲਗਾਉਣਾ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Mathematical Modelling) ਦੀ ਪ੍ਰੀਕਿਰਿਆ ਦੀ ਫਿਰ ਤੋਂ ਦੁਹਰਾਈ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਆਸ ਪਾਸ ਦੇ ਜੀਵਨ ਨਾਲ ਜੁੜੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ ਲਵਾਂਗੇ। ਭਾਗ A2.2 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Model) ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸਾਰੇ ਪਗਾਂ ਤੋਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਜਾਣੂੰ ਕਰਵਾਵਾਂਗੇ। ਭਾਗ A2.3 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਭਾਗ A2.4 ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Mathematical Modelling) ਦੇ ਮਹੱਤਵ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕਾਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

ਇਥੇ ਇਹ ਯਾਦ ਰਹੇ ਕਿ ਸਾਡਾ ਨਿਸ਼ਾਨਾ ਉਸ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਵਿਧੀ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀ ਤੁਹਾਨੂੰ ਜਾਗਰੂਕ ਕਰਨਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤ ਅਸਲ ਜਿੰਦਗੀ ਨਾਲ ਜੁੜੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਫਿਰ ਵੀ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Mathematical Modelling) ਦੇ ਮਹੱਤਵ ਨੂੰ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਸਮਝਣ ਦੇ ਲਈ ਤੁਹਾਨੂੰ ਗਣਿਤ ਦਾ ਕੁਝ ਹੋਰ ਗਿਆਨ ਹੋਣਾ ਜਰੂਰੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਵੱਡੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਸ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇਖਣ ਨੂੰ ਮਿਲਣਗੇ।

A2.2 ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Mathematical Modelling) ਦੇ ਪਗ

IX ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਕੀ ਇਹਨਾਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਨਾਲ ਤੁਹਾਨੂੰ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਅਤੇ ਇਸ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਪਗਾਂ ਦੀ ਕੁਝ ਸੂਖਮ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਈ ਸੀ? ਆਉ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਮੁੱਖ ਪਗਾਂ 'ਤੇ ਫਿਰ ਤੋਂ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਪਗ 1 (ਸਮੱਸਿਆ ਸਮਝਣਾ) ਅਸਲ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਕਰ ਰਹੇ ਹੋ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਸਮਸਿਆਵਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਜਿੰਨਾ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਸਮਝਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹੋ। ਕੁਝ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਕਰਕੇ ਅਤੇ ਕੁਝ ਕਾਰਕਾਂ (factors) ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਪ੍ਰਬੰਧ ਯੋਗ ਬਣਾਉ ਜਿਸ ਨਾਲ ਕਿ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਪ੍ਰਬੰਧਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕੇ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਮੰਨ ਲਉ ਸਾਡੀ ਸਮੱਸਿਆ ਇੱਕ ਝੀਲ ਵਿੱਚ ਮੱਛੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦਾ ਅੰਦਾਜਾ ਲਗਾਉਣ ਦੀ ਹੈ। ਇਥੇ ਇਹ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਮੱਛੀ ਨੂੰ ਫੜ ਕੇ ਬਾਹਰ ਕੱਢਿਆ ਜਾਵੇ ਅਤੇ ਫਿਰ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸੰਭਾਵਿਤ ਇੱਕ ਨਮੂਨਾ (sample) ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਝੀਲ ਦੇ ਅੰਦਰ ਮੱਛੀਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ ਦਾ ਅੰਦਾਜਾ ਲਗਾਉ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਪਗ 2 (ਗਣਿਤਕ ਵਰਣਨ ਅਤੇ ਸੂਤਰੀਕਰਣ) (Mathematical description and formulation): ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਪਹਿਲੂਆਂ ਦਾ ਵਰਣਨ ਗਣਿਤਿਕ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਕਰੋ। ਲੱਛਣਾਂ ਨੂੰ ਗਣਿਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਰਣਨ ਕਰਨ ਦੀ ਕੁਝ ਵਿਧੀਆਂ ਇਹ ਹਨ:

- ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ
- ਸਮੀਕਰਣ ਜਾਂ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ (inequalities) ਲਿਖੋ
- ਅੰਕੜੇ ਇਕੱਠੇ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਕੱਠੇ ਕਰੋ
- ਆਲੇਖ (ਗ੍ਰਾਫ) ਬਣਾਉ
- ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ (probabilities) ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰੋ

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਨਮੂਨਾ ਲੈ ਕੇ ਜਿਸ ਤਰਾਂ ਕਿ ਪਗ 1 ਵਿੱਚ ਦੱਸਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਮੱਛੀਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ ਦਾ ਅੰਦਾਜਾ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ? ਅਸੀਂ ਨਮੂਨੇ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਲਈਆਂ ਗਈਆਂ ਮੱਛੀਆਂ ਦੇ ਨਿਸ਼ਾਨੀਆਂ ਲਗਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਬਾਕੀ ਮੱਛੀਆਂ ਦੇ ਨਾਲ ਰਹਿਣ ਲਈ ਝੀਲ ਵਿੱਚ ਦੁਬਾਰਾ ਛੱਡ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਦ ਦੁਬਾਰਾ ਝੀਲ ਵਿੱਚੋਂ ਮੱਛੀਆਂ ਦਾ ਇੱਕ ਹੋਰ ਨਮੂਨਾ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਹ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਨਵੇਂ ਨਮੂਨੇ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਨਿਸ਼ਾਨ ਲੱਗੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਮੱਛੀਆਂ ਹਨ। ਫਿਰ ਅਨੁਪਾਤ ਅਤੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਮੱਛੀਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ ਦਾ ਅੰਦਾਜਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੀ ਲਈ, ਆਉ ਝੀਲ ਵਿੱਚੋਂ ਅਸੀਂ

20 ਮੱਛੀਆਂ ਦਾ ਇੱਕ ਨਮੂਨਾ ਲਈਏ ਅਤੇ ਉਸ ਉੱਪਰ ਨਿਸ਼ਾਨੀ ਲਗਾਉਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਉਸੇ ਝੀਲ ਵਿੱਚ ਛੱਡ ਦੇਈਏ ਜਿਸ ਨਾਲ ਕਿ ਉਹ ਝੀਲ ਦੀ ਬਾਕੀਆਂ ਮੱਛੀਆਂ ਨਾਲ ਮਿਲ ਜਾਣ। ਫਿਰ ਮੱਛੀਆਂ ਦੇ ਇਸ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚੋਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਨਮੂਨਾ (ਮੰਨ ਲਉ 50 ਮੱਛੀਆਂ ਦਾ ਨਮੂਨਾ) ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਨਵੇਂ ਨਮੂਨੇ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਨਿਸ਼ਾਨੀ ਲੱਗੀਆਂ ਮੱਛੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਕਿੰਨੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਅੰਕੜੇ ਇਕੱਠੇ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਥੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਕੇ ਚਲਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਨਿਸ਼ਾਨੀ ਲੱਗੀਆਂ ਮੱਛੀਆਂ ਦੂਸਰੀਆਂ ਮੱਛੀਆਂ ਨਾਲ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਮਿਲ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਜੋ ਨਮੂਨਾ ਅਸੀਂ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਉਹ ਮੱਛੀਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ ਦਾ ਇੱਕ ਚੰਗਾ ਪ੍ਰਤੀਨਿਧ ਹੈ।

ਪਗ 3 (ਗਣਿਤਕ ਸਮੱਸਿਆ ਹੱਲ ਕਰਨਾ): ਫਿਰ ਅਲੱਗ ਅਲੱਗ ਗਣਿਤਕ ਤਕਨੀਕਾਂ ਨੂੰ ਲਾਗੂ ਕਰਕੇ ਪਗ 2 ਵਿੱਚ ਵਿਕਸਿਤ ਕੀਤੀ ਗਈ ਸਰਲ ਗਣਿਤਕ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਮੰਨ ਲਉ ਪਗ 2 ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਨਮੂਨੇ ਵਿੱਚ 5 ਮੱਛੀਆਂ ਨਿਸ਼ਾਨੀ ਲੱਗੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਮੱਛੀਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ ਦਾ $\frac{5}{50}$ ਭਾਵ $\frac{1}{10}$ ਨਿਸ਼ਾਨੀ ਲੱਗਿਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਜਨਸੰਖਿਆ (ਗਿਣਤੀ) ਦਾ $\frac{1}{10} = 20$.

ਇਸ ਲਈ ਕੁੱਲ ਜਨਸੰਖਿਆ (ਗਿਣਤੀ) $= 20 \times 10 = 200$.

ਪਗ 4 (ਹੱਲ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ): ਪਿਛਲੇ ਪਗ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹੱਲ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਅਸਲ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਜੁੜੀ ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਪਗ 1 ਵਿੱਚ ਸ਼ੁਰੂਆਤ ਕੀਤੀ ਸੀ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਪਗ 3 ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮੱਛੀਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ 200 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਈ ਸੀ।

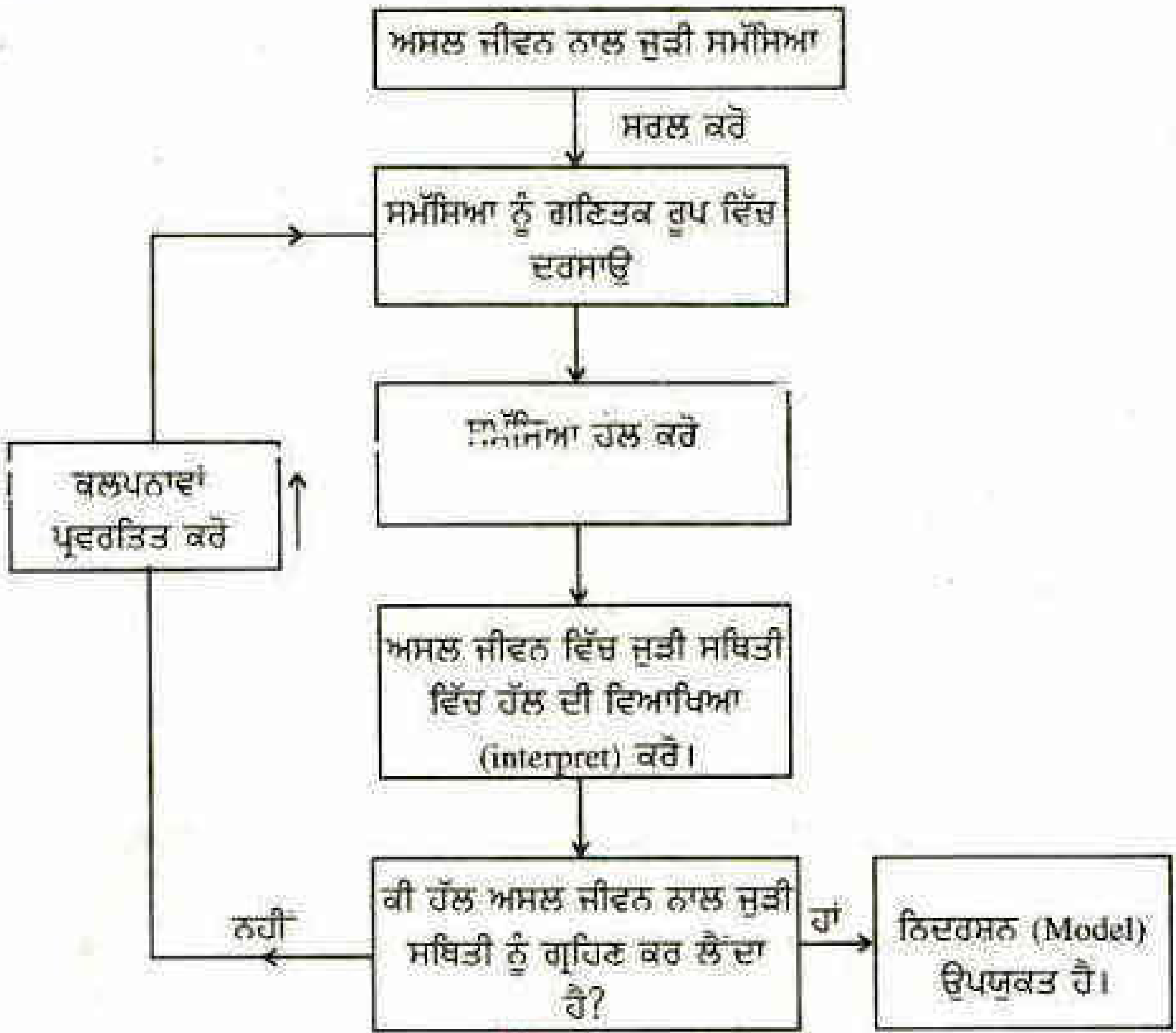
ਪਗ 5 ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੀ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕਤਾ (Validating the model) : ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਸਥਿਤੀ ਤੇ ਵਾਪਿਸ ਆਉਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਗਣਿਤਕ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਪਰਿਣਾਮ ਸਾਰਥਿਕ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਜੇਕਰ ਸਾਰਥਿਕ ਹਨ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (model) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਉਦੋਂ ਤੱਕ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕਿ ਨਵੀਂ ਸੂਚਨਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਾਂ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਕਦੇ ਕਦੇ ਸਰਲੀਕਰਣ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਦੇ ਕਾਰਣ ਗਣਿਤਕ ਬਿਉਰਾ ਦੇਂਦੇ ਸਮੇਂ ਅਸਲੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਜ਼ਰੂਰੀ ਪਹਿਲੂਆਂ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਵਾਂਝੇ ਰਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਹੱਲ ਅਸਲੀਅਤ ਤੋਂ ਹੱਟ ਕੇ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸਲ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇਸਦਾ ਕੋਈ ਅਰਥ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਪਗ 1 ਵਿੱਚ ਕੀਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਤੇ ਦੁਬਾਰਾ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਕੁਝ ਹੋਰ ਕਾਰਕਾਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਲਾਂ ਨਹੀਂ ਲਿਆ ਗਿਆ ਸੀ, ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਬਣਾ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਪਗ 3 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮੱਛੀਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਇੱਕ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਇਹ ਝੀਲ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਮੱਛੀਆਂ ਦੀ ਅਸਲ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੀ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ

ਇਹ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਗ 2 ਅਤੇ 3 ਨੂੰ ਕੁਝ ਵਾਰ ਦੁਹਰਾਉਣ ਅਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦਾ ਔਸਤ ਲੈਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਉੱਤਮ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਇਸ ਨਾਲ ਮੱਛੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਇੱਕ ਉੱਤਮ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ।

ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੀ ਕਾਰਜ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਦੇਖਣ ਦੀ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਚਿੱਤਰ A2.1 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਈ ਗਈ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ A2.1

ਹੱਲ ਦੀ ਸਰਲਤਾ ਬਣਾਈ ਰੱਖਣ ਦੇ ਲਈ ਨਿਦਰਸ਼ਕ ਸਰਲੀਕਰਣ ਅਤੇ ਸ਼ੁੱਧਤਾ ਦੇ ਵਿੱਚ ਸੰਤੁਲਨ ਬਣਾ ਕੇ ਰੱਖਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਉਹ ਆਸ਼ਾ ਕਰਦੇ ਹਨ ਕਿ ਲੱਗਭੱਗ ਅਸਲੀਅਤ ਦੇ ਇੰਨੇ ਨਜ਼ਦੀਕ ਹੋਣ ਕਿ ਕੁਝ ਪ੍ਰਗਤੀ ਹੋ ਸਕੇ। ਸਭ ਤੋਂ ਉੱਤਮ ਪਰਿਣਾਮ ਉਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ ਇਹ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕੇ ਕਿ ਅੱਗੇ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ਜਾਂ ਜਿਸ ਨਾਲ ਆਮ ਸ਼ੁੱਧਤਾ ਦੇ ਨਾਲ ਪਰਿਣਾਮ ਦਾ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕੇ। ਯਾਦ ਰਹੇ ਕਿ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਸਰਲ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਸਾਡੇ ਦੁਆਰਾ

ਕੀਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਨਾਲ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Model) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਕੋਈ ਵੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Model) ਪੂਰਨ (Perfect) ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਕੁਝ ਉੱਤਮ ਜਾਂ ਕੁਝ ਇਸ ਤੋਂ ਵਧੀਆ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A2.1

1. *ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਥਿਤੀ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।*

ਤੇਹਰਵੀਂ ਸਦੀ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਲਿਊਨਾਰਡ ਫਿਬੋਨਸੀ (Leonardo Fibonacci) *ਨੇ ਇੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਕੀਤਾ ਕਿ ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਖਰਗੋਸ਼ ਹੋ ਜਾਣਗੇ ਜਦੋਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਕੇਵਲ ਦੋ ਖਰਗੋਸ਼ਾਂ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂਆਤ ਕੀਤੀ ਸੀ ਅਤੇ ਇਥੇ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਖਰਗੋਸ਼ ਹਰ ਮਹੀਨੇ ਬੱਚਿਆਂ ਦਾ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਪੈਦਾ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਖਰਗੋਸ਼ ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਆਪਣਾ ਪਹਿਲਾ ਬੱਚਾ ਦੋ ਮਹੀਨੇ ਦੀ ਉਮਰ ਵਿੱਚ ਪੈਦਾ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਮਹੀਨਾ ਪ੍ਰਤੀ ਮਹੀਨਾ ਖਰਗੋਸ਼ਾਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਸਿਫ਼ਰ ਅਤੇ ਪਹਿਲੇ ਮਹੀਨੇ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਪਿਛਲੇ ਦੋ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ ਖਰਗੋਸ਼ਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।*

ਮਹੀਨਾ	ਖਰਗੋਸ਼ਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597

ਠੀਕ 16 ਮਹੀਨਿਆਂ ਬਾਦ ਤੁਹਾਡੇ ਕੋਲ ਖਰਗੋਸ਼ਾਂ ਦੇ ਲੱਗਭੱਗ 1600 ਜੋੜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਅਤੇ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Mathematical Modelling) ਦੇ ਅਲੱਗ ਅਲੱਗ ਪਗਾਂ ਦਾ ਸਪਸ਼ਟ ਕਥਨ ਲਿਖੋ।

A2.3 ਕੁਝ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ

ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Mathematical Modelling) ਦੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 **(ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਣਾ)**: ਮੰਨ ਲਉ ਤੁਹਾਡੀ ਅਧਿਆਪਿਕਾ ਤੁਹਾਨੂੰ ਅੰਦਾਜਾ ਲਗਾਉਣ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਖੇਡ ਦੀ ਚੁਣੌਤੀ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਖੇਡ ਵਿੱਚ ਉਹ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟੇਗੀ। ਪਾਸਾ ਸੁੱਟੇ ਜਾਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਅੰਦਾਜਾ ਲਗਾਉਣਾ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਆਈਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ। ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੇਣ 'ਤੇ ਤੁਹਾਨੂੰ ਦੋ ਅੰਕ ਮਿਲਣਗੇ ਅਤੇ ਗਲਤ ਉੱਤਰ ਹੋਣ ਤੇ ਤੁਹਾਡੇ ਦੋ ਅੰਕ ਕੱਟੇ ਜਾਣਗੇ। ਕਿਹੜੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸਭ ਤੋਂ ਵਧੀਆ ਅਨੁਮਾਨ ਹੋਣਗੀਆਂ?

ਹੱਲ:

ਪਗ 1 **(ਸਮੱਸਿਆ ਸਮਝਣਾ)** : ਤੁਹਾਨੂੰ ਕੁਝ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਹੋਣਾ ਜਰੂਰੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਆਉਣ ਦਾ ਸੰਯੋਗ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪਗ 2 **(ਗਣਿਤਕ ਵਰਣਨ) (Mathematical description)** : ਗਣਿਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਹ ਸਮੱਸਿਆ ਪਾਸਿਆਂ 'ਤੇ ਆਈਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸੰਭਵ ਜੋੜਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਪਰਵਰਤਿਤ (ਬਦਲ) ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਹੇਠਾਂ ਦਿਤੇ 36 ਸੰਖਿਆ ਜੋੜਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਵਿਕਲਪ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਕੇ ਅਸੀਂ ਹੋਰ ਸਰਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

ਹਰ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਸੰਖਿਆ ਪਹਿਲੇ ਪਾਸੇ 'ਤੇ ਆਉਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਸਰੀ ਸੰਖਿਆ ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ 'ਤੇ ਆਉਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਪਗ 3 **(ਗਣਿਤਕ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ)**: ਉੱਪਰ ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੇ ਸੰਭਾਵਿਤ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ਅਤੇ 12 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਮੰਨ

ਕੇ ਕਿ ਸਾਰੇ 36 ਜੋੜੇ ਸਮ-ਸੰਭਾਵੀ (equally likely) ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਸਾਨੂੰ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰ ਇੱਕ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਇਸਨੂੰ ਅਸੀ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

ਜੋੜ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ਸੰਭਾਵਨਾ	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

ਇਥੇ ਤੁਹਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ 7 ਦਾ ਜੋੜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{6}$ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਹੋਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ।

ਪਗ 4 **(ਹੱਲ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ)** (Interpreting the solution) ਕਿਉਂਕਿ ਜੋੜ 7 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਪਾਵਨਾ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਤੁਹਾਨੂੰ ਸੰਖਿਆ ਸੱਤ ਦਾ ਅਨੁਮਾਨ (ਅੰਦਾਜਾ) ਵਾਰ ਵਾਰ ਲਗਾਉਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਪਗ 5 **(ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੀ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕਤਾ)** (Validating the model) ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਕਈ ਵਾਰ ਸੁੱਟ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਉ। ਸੰਬੰਧਿਤ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਸੰਗਤ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਨਾਲ ਕਰੋ। ਜੇਕਰ ਇਕ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਨਜਦੀਕ ਨਾ ਹੋਣ ਤਾਂ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਪਾਸੇ ਸੰਭਾਵਿਤ ਇੱਕ ਪਾਸੜ (biased) ਹੋਣਗੇ। ਫਿਰ ਉਸ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਮੁੱਲ ਕੱਢਣ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਅੰਕੜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਇੱਕ ਪਾਸੜ (biased) ਹਨ।

ਅਗਲਾ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇਸਦੇ ਕੁਝ ਪਿਛੋਕੜ (background) ਦਾ ਗਿਆਨ ਹੋਣਾ ਜਰੂਰੀ ਹੈ।

ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਲੋਕਾਂ ਦਾ ਇਹ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਨੁਭਵ ਹੈ ਕਿ ਜਦੋਂ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਪੈਸੇ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਕੋਲ ਲੋੜੀਂਦੇ ਪੈਸੇ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ। ਰੋਜਾਨਾ ਜੀਵਨ ਦੀਆਂ ਜਰੂਰੀ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਖਰੀਦਣ ਦੇ ਲਈ ਜਾਂ ਅਰਾਮ ਦੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਖਰੀਦਣ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਪੈਸਿਆਂ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਸਕੂਟਰ, ਫਰਿਜ, ਟੈਲੀਵੀਜਨ, ਕਾਰ ਆਦਿ ਵਰਗੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਖਰੀਦਣ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਪੂੰਜੀ ਵਾਲੇ ਗ੍ਰਾਹਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵਿਉਪਾਰੀਆਂ ਨੇ ਕਿਸ਼ਤ ਯੋਜਨਾ ਨਾਲ ਦੀ ਯੋਜਨਾ ਚਲਾਈ ਹੈ।

ਕਦੇ ਕਦੇ ਇਹਨਾਂ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਖਰੀਦਣ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਗ੍ਰਾਹਕਾਂ ਨੂੰ ਲੁਭਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਵਿਕਰੇਤਾ ਕਿਸ਼ਤ ਯੋਜਨਾ ਚਲਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਕਿਸ਼ਤ ਯੋਜਨਾ ਦੇ ਤਹਿਤ(ਅੰਤਰਗਤ) ਵਸਤੂ ਖਰੀਦਣ ਸਮੇਂ ਉਸਨੇ ਵਸਤੂ ਦੀ ਕੀਮਤ ਦੇ ਇੱਕ ਭਾਗ (ਹਿੱਸੇ) ਦਾ ਹੀ ਭੁਗਤਾਨ ਕਰਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਭੁਗਤਾਨ ਕਿਸ਼ਤਾਂ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਮਹੀਨਾਵਾਰ, ਤਿਮਾਹੀ, ਛਿਮਾਹੀ ਜਾਂ ਸਾਲਾਨਾ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਹਾਂ, ਇੱਕ ਗੱਲ ਜਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸ਼ਤ ਯੋਜਨਾ ਦੇ ਤਹਿਤ ਖਰੀਦਦਾਰ ਨੂੰ ਕੁਝ ਵੱਧ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ

ਭੁਗਤਾਨ ਕਰਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਬਾਅਦ ਦੀਆਂ ਤਰੀਕਾਂ ਵਿੱਚ (ਜਿਸ ਨੂੰ ਮੁਲਤਵੀ ਭੁਗਤਾਨ (deferred payment) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ) ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਦੇ ਕਾਰਣ ਵਿਕਰੇਤਾ ਕੁਝ ਵਿਆਜ ਵਸੂਲ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਕਿਸ਼ਤ ਯੋਜਨਾ ਨੂੰ ਚੰਗੀ ਤਰਾਂ ਸਮਝਣ ਨਾਲ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸੰਕਲਪਨਾ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਵਰਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝ ਲਈਏ।

ਇੱਕ ਵਸਤੂ ਦੀ ਨਗਦ ਕੀਮਤ ਉਹ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਭੁਗਤਾਨ ਗ੍ਰਾਹਕ ਨੂੰ ਵਸਤੂ ਖਰੀਦਣ ਸਮੇਂ ਕਰਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ: ਜੇਕਰ ਭੁਗਤਾਨ ਯੋਜਨਾ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਹੋਵੇ ਕਿ ਬਾਕੀ ਧਨਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਪੂਰਾ ਭੁਗਤਾਨ ਇੱਕ ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਦਰ-ਅੰਦਰ ਹੀ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਬਕਾਇਆ ਭੁਗਤਾਨ (ਮੁਲਤਵੀ ਭੁਗਤਾਨ) 'ਤੇ ਸਧਾਰਣ ਵਿਆਜ ਲਗਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਪੁਰਾਣੇ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਕਰਜੇ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਈ ਗਈ ਰਾਸ਼ੀ 'ਤੇ ਲਗਾਏ ਗਏ ਵਿਆਜ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਚੰਗਾ ਨਹੀਂ ਸਮਝਿਆ ਜਾਂਦਾ ਸੀ। ਇੱਥੇ ਤੱਕ ਕਿ ਇਸ ਤਰਾਂ ਕਰਨਾ ਮਨਾਹੀ ਸੀ। ਵਿਆਜ ਦੇ ਭੁਗਤਾਨ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕਾਨੂੰਨ ਤੋਂ ਬਚਣ ਦੀ ਇੱਕ ਵਿਧੀ ਇਹ ਸੀ ਕਿ ਕਰਜਾ ਇੱਕ ਮੁਦਰਾ ਵਿੱਚ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਸੀ ਅਤੇ ਭੁਗਤਾਨ ਦੂਸਰੀ ਮੁਦਰਾ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਸੀ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰਾਂ ਵਿਆਜ ਵਿਨਿਯਮ ਦਰ ਲੁੱਕ ਜਾਂਦਾ ਸੀ।

ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧਿਤ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਸਮੱਸਿਆ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 2: ਜੂਹੀ ਇੱਕ ਸਾਇਕਲ ਖਰੀਦਣਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਸਦੇ ਲਈ ਉਹ ਬਾਜ਼ਾਰ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਦੇਖਦੀ ਹੈ ਕਿ ਜੋ ਸਾਇਕਲ ਉਹ ਖਰੀਦਣਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ ਉਸਦੀ ਕੀਮਤ ₹1800 ਹੈ। ਜੂਹੀ ਕੋਲ ₹600 ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਉਹ ਦੁਕਾਨਦਾਰ ਨੂੰ ਇਹ ਦਸੱਦੀ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਇਸ ਸਮੇਂ ਸਾਇਕਲ ਖਰੀਦ ਸਕੇ। ਥੋੜਾ ਬਹੁਤਾ ਹਿਸਾਬ ਲਗਾਉਣ ਤੋਂ ਬਾਦ ਉਹ ਜੂਹੀ ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ₹ 600 ਨਗਦ ਦੇ ਕੇ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਦੀਆਂ ₹ 610 ਦੀ ਦੋ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਕਿਸ਼ਤਾਂ ਦੇ ਕੇ ਉਹ ਸਾਈਕਲ ਖਰੀਦ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਹੁਣ ਜੂਹੀ ਦੇ ਕੋਲ ਦੋ ਵਿਕਲਪ ਬਚੇ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਜਾਂ ਤਾਂ ਉਹ ਕਿਸ਼ਤ ਯੋਜਨਾ ਨੂੰ ਮੰਨ ਲਵੇ ਜਾਂ ਬੈਂਕ ਤੋਂ ਕਰਜਾ ਲੈ ਕੇ ਜੋ ਕਿ 10% ਦੀ ਸਾਲਾਨਾ ਸਧਾਰਣ ਵਿਆਜ 'ਤੇ ਉਪਲਬਧ ਹੈ, ਨਗਦ ਭੁਗਤਾਨ ਕਰ ਦੇਵੇ ਤਾਂ ਦੱਸੋ ਕਿ ਆਰਥਿਕ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਨਾਲ ਕਿਹੜਾ ਵਿਕਲਪ ਵੱਧ ਚੰਗਾ ਹੋਵੇਗਾ?

ਹੱਲ :

ਪਗ 1 **(ਸਮੱਸਿਆ ਸਮਝਣਾ):** ਜੂਹੀ ਨੇ ਇਹ ਫੈਸਲਾ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਦੁਕਾਨਦਾਰ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵਿਕਲਪ ਨੂੰ ਮੰਨ ਲਵੇ ਜਾਂ ਨਾ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਉਸਨੂੰ ਇਹ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਉਹ ਦੋਵੇਂ ਵਿਆਜ ਦਰਾਂ ਤੋਂ ਜਾਣੂੰ ਹੋ ਜਾਵੇ, ਇੱਕ ਤਾਂ ਉਹ ਜੋ ਕਿ ਕਿਸ਼ਤ ਯੋਜਨਾ ਵਿੱਚ ਲਗਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਸਰਾ ਉਹ ਜੋ ਵਿਆਜ ਬੈਂਕ ਲਗਾਉਂਦਾ ਹੈ (ਭਾਵ 10%)।

ਪਗ 2 **ਗਣਿਤਕ ਵਰਣਨ (Mathematical description) :** ਯੋਜਨਾ ਨੂੰ ਸਵੀਕਾਰ ਜਾਂ ਅਸਵੀਕਾਰ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਉਸਨੂੰ ਬੈਂਕ ਦੁਆਰਾ ਲਈ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਵਿਆਜ ਦਰ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਦੁਕਾਨਦਾਰ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਵਿਆਜ ਦਰ ਨੂੰ ਦੇਖਣਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਰਹੇ ਕਿ ਕਿਉਂਕਿ ਪੂਰੀ ਧਨਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਭੁਗਤਾਨ ਇੱਕ ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਦਰ-ਅੰਦਰ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਰਾਸ਼ੀ ਤੇ ਸਧਾਰਣ ਵਿਆਜ ਹੀ ਦੇਣਾ ਹੋਵੇਗਾ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਇਕਲ ਦੀ ਨਗਦ ਕੀਮਤ = ₹ 1800

ਅਤੇ ਕਿਸ਼ਤ ਯੋਜਨਾ ਤਹਿਤ ਭੁਗਤਾਨ = ₹ 600

ਇਸ ਲਈ ਬਾਕੀ ਕੀਮਤ ਜਿਸਦਾ ਭੁਗਤਾਨ ਕਿਸ਼ਤ ਯੋਜਨਾ ਦੇ ਤਹਿਤ ਕਰਨਾ ਹੈ = ₹ (1800 – 600) = ₹ 1200

ਮੰਨ ਲਓ ਦੁਕਾਨਦਾਰ ਦੁਆਰਾ ਲਿਆ ਜਾਣ ਵਾਲਾ ਵਾਰਸ਼ਿਕ ਵਿਆਜ r % ਹੈ।

ਹਰ ਇੱਕ ਕਿਸ਼ਤ ਦੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ = ₹ 610

ਕਿਸ਼ਤ ਯੋਜਨਾ ਤਹਿਤ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ = ₹ 610 + ₹ 610 = ₹ 1220

ਕਿਸ਼ਤ ਯੋਜਨਾ ਤਹਿਤ ਭੁਗਤਾਨ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲਾ ਵਿਆਜ = ₹1220 – ₹ 1200 = ₹ 20 (1)

ਕਿਉਂਕਿ ਜੂਹੀ ਇੱਕ ਮਹੀਨੇ ਤੱਕ ₹1200 ਆਪਣੇ ਕੋਲ ਰੱਖਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

ਪਹਿਲੇ ਮਹੀਨੇ ਦਾ ਮੂਲਧਨ = ₹ 1200

ਦੂਸਰੇ ਮਹੀਨੇ ਦਾ ਮੂਲਧਨ = ₹ (1200 – 610) = ₹ 590

ਦੂਸਰੇ ਮਹੀਨੇ ਦਾ ਮੂਲਧਨ ਦੀ ਬਾਕੀ ਰਾਸ਼ੀ ₹ 590 + ਲਗਾਇਆ ਗਿਆ ਵਿਆਜ ₹ 20 = ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਕਿਸ਼ਤ ₹ 610 = ਦੂਸਰੀ ਕਿਸ਼ਤ।

ਇਸ ਲਈ, ਇੱਕ ਮਹੀਨੇ ਦਾ ਕੁੱਲ ਮੂਲਧਨ = ₹ 1200 + ₹ 590 = ₹ 1790

ਹੁਣ ਵਿਆਜ = ₹ $\frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12}$ (2)

ਪਗ 3: **(ਸਮੱਸਿਆ ਹੱਲ ਕਰਨਾ) :** (1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} = 20$$

ਜਾਂ $$r = \frac{20 \times 1200}{1790} = 13.14 \text{ (ਲਗਭਗ)}$$

ਪਗ 4: **(ਹੱਲ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ) (Interpreting the solution) :** ਕਿਸ਼ਤ ਯੋਜਨਾ ਤਹਿਤ ਲਗਾਏ ਗਏ ਵਿਆਜ ਦੀ ਦਰ = 13.14 %.

ਬੈਂਕ ਦੁਆਰਾ ਲਗਾਇਆ ਗਿਆ ਵਿਆਜ ਦਰ = 10%

ਇਸ ਲਈ ਸਾਇਕਲ ਖਰੀਦਣ ਲਈ ਉਸਨੂੰ ਬੈਂਕ ਤੋਂ ਕਰਜਾ ਲੈਣਾ ਵੱਧ ਪਸੰਦ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਆਰਥਿਕ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਇਹ ਵੱਧ ਚੰਗਾ ਹੈ।

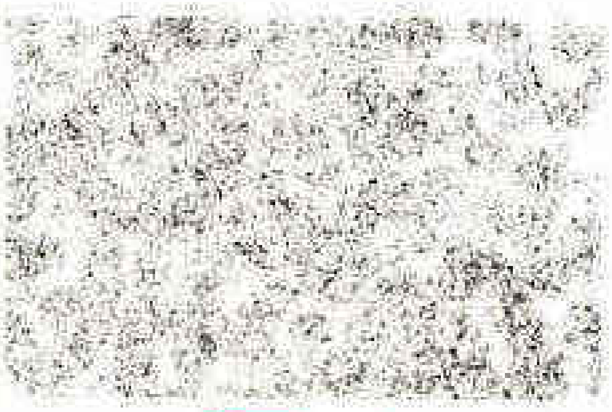
ਪਗ 5 (ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੀ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕਤਾ) (Validating the model) ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇਸ ਪਗ ਦਾ ਕੋਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਮਹੱਤਵ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹਨ। ਫਿਰ ਵੀ ਬੈਂਕ ਤੋਂ ਕਰਜਾ ਲੈਣ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਸਟੈਂਪ ਪੇਪਰ ਦੀ ਲਾਗਤ ਵਰਗੀਆਂ ਉਪਚਾਰਿਕਤਾਵਾਂ ਨਿਭਾਉਣ ਦੇ ਕਾਰਣ ਪ੍ਰਭਾਵੀ ਵਿਆਜ ਦਰ, ਜੇਕਰ ਕਿਸ਼ਤ ਯੋਜਨਾ ਦੀ ਵਿਆਜ ਦਰ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਆਪਣੀ ਰਾਇ ਬਦਲ ਵੀ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਹੁਣ ਵੀ ਵਿਆਜ ਦਰ ਦਾ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਆਪਣੀ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਅਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਹੁਣ ਵੀ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕਤਾ ਵਿੱਤੀ ਬਾਜਾਰ ਦੀ ਇੱਕ ਸਮੱਸਿਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਕਿਸ਼ਤ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰਨ ਦੇ ਅਲਗ-ਅਲਗ ਵਿਆਜ ਦਰ ਨਿਗਮਿਤ (incorporated) ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕਤਾ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਸਮੱਸਿਆ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A2.2

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹਰ ਇਕ ਸਮਸਿਆ ਵਿੱਚ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੀਆਂ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਅਵਸਥਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉ।

1. ਇੱਕ ਆਰਨਿਥਉਲੋਜਿਸਟ (ornithologist) ਇੱਕ ਵੱਡੇ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਤੋਤਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦਾ ਅੰਦਾਜਾ ਲਗਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਨੂੰ ਫੜਨ ਲਈ ਉਹ ਜਾਲ ਵਿਛਾਉਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ 32 ਤੋਤੇ ਫੜ ਲੈਂਦੀ ਹੈ। ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਉਹ ਛੱਲੇ ਪਾ ਕੇ ਅਜਾਦ ਛੱਡ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। ਅਗਲੇ ਹਫਤੇ ਉਹ 40 ਤੋਤਿਆਂ ਲਈ ਜਾਲ ਵਿਛਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 8 ਛੱਲੇ ਵਾਲੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
   (i) ਉਸਦੀ ਦੂਸਰੀ ਪਕੜ ਦਾ ਕਿੰਨਾ ਭਾਗ ਛੱਲੇ ਵਾਲਾ ਹੈ?
   (ii) ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਤੋਤਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦਾ ਇੱਕ ਅੰਦਾਜਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਮੰਨ ਲਉ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਚਿੱਤਰ ਇੱਕ ਜੰਗਲ ਦੇ ਇੱਕ ਹਵਾਈ ਜਹਾਜ ਨਾਲ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਫੋਟੋ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਇੱਕ ਦਰੱਖਤ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਤੁਹਾਡਾ ਉਦੇਸ਼ ਵਾਤਾਵਰਣ ਸਰਵੇਖਣ ਦੇ ਇੱਕ ਭਾਗ (ਹਿੱਸੇ) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਰਸਤੇ 'ਤੇ ਦਰਖਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ A2.2

3. ਇੱਕ ਟੀ.ਵੀ. ਜਾਂ ਤਾਂ ₹ 24000 ਨਗਦ ਦੇ ਕੇ ਜਾਂ ₹ 8000 ਨਗਦ ਅਤੇ ₹ 2800 ਦੀਆਂ 6 ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਕਿਸ਼ਤਾਂ ਦੇ ਭੁਗਤਾਨ ਕਰਕੇ ਖਰੀਦਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਟੀ.ਵੀ. ਖਰੀਦਣ ਲਈ ਅਲੀ ਬਾਜ਼ਾਰ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਲਈ ਉਸ ਕੋਲ ₹ 8000 ਹਨ। ਉਸ ਸਮੇਂ ਉਸ ਕੋਲ ਦੋ ਵਿਕਲਪ ਹਨ। ਇਕ ਵਿਕਲਪ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਕਿਸ਼ਤ ਯੋਜਨਾ ਤਹਿਤ ਟੀ.ਵੀ. ਖਰੀਦੇ ਅਤੇ ਦੂਸਰਾ ਵਿਕਲਪ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵਿੱਤੀ ਸੁਸਾਇਟੀ ਤੋਂ ਕਰਜਾ ਲੈ ਕੇ ਭੁਗਤਾਨ ਕਰਕੇ ਟੀ. ਵੀ. ਖਰੀਦੇ। ਸੁਸਾਇਟੀ 18% ਦੀ ਸਲਾਨਾ ਸਧਾਰਣ ਵਿਆਜ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵਿਆਜ ਲਗਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਅਲੀ ਦੇ ਲਈ ਕਿਹੜਾ ਵਿਕਲਪ ਵੱਧ ਚੰਗਾ ਹੈ?

A2.4 ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦਾ ਮਹੱਤਵ ਕਿਉਂ ਹੈ?

ਜਿਸ ਤਰਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਇੱਕ ਅੰਤਰ ਵਿਸ਼ਾ (interdisciplinary) ਸ਼ਾਖਾ ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸਤਰੀ ਅਤੇ ਹੋਰ ਵਿਸ਼ਾ ਖੇਤਰਾਂ ਦੇ ਮਾਹਿਰ ਵਰਤਮਾਨ ਉਤਪਾਦਾਂ ਵਿੱਚ ਸੁਧਾਰ ਲਿਆਉਣ, ਉੱਤਮ ਉਤਪਾਦ ਵਿਕਸਿਤ ਕਰਨ ਜਾਂ ਕੁਝ ਉਤਪਾਦਾਂ ਦੇ ਵਿਵਹਾਰ ਦੀ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਆਪਣੇ ਗਿਆਨ ਦਾ ਸਹਿਯੋਗ ਦਿੰਦੇ ਹਨ।

ਵੈਸੇ ਤਾਂ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (modelling) ਦੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੋਣ ਦੇ ਅਨੇਕਾਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕਾਰਣ ਹਨ ਪ੍ਰੰਤੂ ਕਿਸੇ ਨਾ ਕਿਸੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਕਾਰਣਾਂ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਤੋਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

- *ਸਮਝਦਾਰੀ ਵਧਾਉਣਾ* : ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦਾ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਹੋਵੇ ਜੋ ਅਸਲ ਜੀਵਨ ਨਾਲ ਜੁੜੇ ਤੰਤਰ ਦੇ ਜ਼ਰੂਰੀ ਵਿਵਹਾਰ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (model) ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਤੰਤਰ ਨੂੰ ਚੰਗੀ ਤਰਾਂ ਸਮਝ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਹੀ ਅਸੀਂ ਇਹ ਪਤਾ ਲਗਾ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤੰਤਰ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੇ-ਕਿਹੜੇ ਕਾਰਕ ਵੱਧ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਹਨ ਅਤੇ ਤੰਤਰ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਪਹਿਲੂ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਨਾਲ ਕਿਸ ਤਰਾਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ।

- *ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨ ਜਾਂ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਜਾਂ ਅਨੁਕਰਣ ਕਰਨਾ* : ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਜਾਨਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਸਲ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਜੁੜੇ ਤੰਤਰ ਦਾ ਭਵਿੱਖ ਵਿੱਚ ਕੀ ਮਹੱਤਵ ਹੈ ਪ੍ਰੰਤੂ ਤੰਤਰ ਦੇ ਨਾਲ ਸਿੱਧਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨਾ ਖਰਚੀਲਾ, ਅਵਿਹਾਰਕ ਜਾਂ ਅਸੰਭਵ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਮੌਸਮ ਦੀ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਦੇ ਲਈ, ਮਨੁੱਖ ਵਿੱਚ ਦਵਾਈ-ਦਸ਼ਤਾ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ, ਇੱਕ ਨਿਊਕਲੀਅਰ ਰਿਐਕਟਰ ਦਾ ਡਿਜਾਇਨ (ਨਮੂਨਾ) ਪਤਾ ਕਰਨ, ਆਦਿ-ਆਦਿ।

ਅਨੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਸੰਗਠਨਾਂ ਵਿੱਚ ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਉਣ ਦਾ ਵੱਧ ਮਹੱਤਵ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਭਾਵੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਨੂੰ ਨਿਗਮਿਤ ਕਰਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ:

- ਬਜ਼ਾਰੀ ਵਿਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਮੰਗ ਦੇ ਵਿਸ਼ਵਾਸਯੋਗ ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨ ਵਿਕਰੀ ਸੰਬੰਧੀ ਤਕਨੀਕਾਂ ਦੀ ਯੋਜਨਾ ਬਣਾਉਣ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਕ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

- ਸਕੂਲ ਬੋਰਡ ਨੂੰ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਜ਼ਿਲਿਆਂ ਵਿੱਚ ਸਕੂਲ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਬੱਚਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਵਿੱਚ ਹੋ ਰਹੇ ਵਾਧੇ ਦਾ ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਉਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਨਾਲ ਇਹ ਨਿਰਣਾ ਲਿਆ ਜਾ ਸਕੇ ਕਿ ਕਿੱਥੇ ਅਤੇ ਕਦੋਂ ਨਵੇਂ ਸਕੂਲ ਖੋਲ੍ਹੇ ਜਾ ਸਕਣ।

ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਭਵਿੱਖ ਦੀ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਵਾਉਣ ਵਾਲੇ ਪਿਛਲੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾ ਤਾਂ ਉਸ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਨਣ ਦੇ ਲਈ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਕਰਦੇ ਹਨ ਜੋ ਇਸਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰ ਸਕਣ। ਫਿਰ ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਉਣ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਅੰਕੜਿਆਂ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਭਵਿੱਖ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਮੂਲ ਭੂਤ ਰਣਨੀਤੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਜ਼ਿਆਦਾਤਰ ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨ ਤਕਨੀਕਾਂ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਇਸ ਕਲਪਨਾ 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਪ੍ਰਤਿਰੂਪ ਜਿਸ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਭਵਿੱਖ ਵਿੱਚ ਵੀ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦਾ ਰਹੇਗਾ।

- *ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾਉਣਾ :* ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਵੱਡੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਕਰਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਜੰਗਲ ਵਿੱਚ ਰੁੱਖਾਂ, ਝੀਲ ਵਿੱਚ ਮੱਛੀਆਂ ਆਦਿ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਉਦਾਹਰਣ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਇੱਕ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਚੋਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾ ਚੋਣ ਵਿੱਚ ਭਾਗ ਲੈਣ ਵਾਲੀਆਂ ਪਾਰਟੀਆਂ ਚੋਣ ਵਿੱਚ ਆਪਣੀ ਪਾਰਟੀ ਦੇ ਜਿੱਤਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਉਹ ਇਸ ਗੱਲ ਦਾ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਚੋਣ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਲੋਕ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਪਾਰਟੀ ਨੂੰ ਵੋਟ ਪਾਉਣਗੇ। ਆਪਣੀ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਆਪਣਾ ਚੋਣ ਅਭਿਆਨ ਦੀ ਰਣਨੀਤੀ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਨਿਰਣਾ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਚੋਣ ਵਿੱਚ ਕਿਸ ਪਾਰਟੀ ਨੂੰ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸੀਟਾਂ ਮਿਲਣਗੀਆਂ ਇਸਦੀ ਭਵਿੱਖਬਾਣੀ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਨਿਰਗਮ ਮਤਅਨੁਮਾਨ (exit polls) ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A2.3

1. ਪਿਛਲੇ ਪੰਜ ਸਾਲਾਂ ਦੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਦੇ ਅਧਾਰ 'ਤੇ ਸਾਲ ਦੇ ਅਖੀਰ ਵਿੱਚ ਦਸਵੀਂ ਜਮਾਤ ਦੇ ਬੋਰਡ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਤੁਹਾਡੇ ਸਕੂਲ ਦੁਆਰਾ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਔਸਤ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਓ।

A2.5 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅੰਤਿਕਾ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ:

1. ਇੱਕ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਅਸਲ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਜੁੜੀ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਗਣਿਤਕ ਵਿਉਰਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਜੀਵਨ ਨਾਲ ਜੁੜੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਨ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਹੈ।

2. ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Modelling) ਵਿੱਚ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪਗ ਲਾਗੂ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ: ਸਮੱਸਿਆ ਸਮਝਣਾ, ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦਾ ਸੂਤਰੀਕਰਣ ਉਸਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ, ਅਸਲ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਜੁੜੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇਸਦੀ ਵਿਆਖਿਆ (interpret) ਕਰਨਾ ਅਤੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਅਤਿ ਮਹੱਤਵਪੂਣ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੀ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕਤਾ (Validating the model)
3. ਕੁਝ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਵਿਕਸਿਤ ਕਰਨਾ।
4. ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦਾ ਮਹੱਤਵ।

ਉੱਤਰ/ਸੰਕੇਤ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 1.1

1. (i) 45 (ii) 196 (iii) 51
2. ਕੋਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $6q$, $6q+1$, $6q+2$, $6q+3$, $6q+4$ ਜਾਂ $6q+5$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।
3. 8 ਸਤੰਭ
5. ਕੋਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $9q$, $9q+1$, $9q+2$, $9q+3$, . . ., ਜਾਂ $9q+8$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 1.2

1. (i) $2^2 \times 5 \times 7$ (ii) $2^2 \times 3 \times 13$ (iii) $3^2 \times 5^2 \times 17$
   (iv) $5 \times 7 \times 11 \times 13$ (v) $17 \times 19 \times 23$
2. (i) ਲ.ਸ.ਵ. = 182; ਮ.ਸ.ਵ. = 13 (ii) ਲ.ਸ.ਵ. = 23460; ਮ.ਸ.ਵ. = 2 (iii) ਲ.ਸ.ਵ. = 3024; ਮ.ਸ.ਵ. = 6
3. (i) ਲ.ਸ.ਵ. = 420; ਮ.ਸ.ਵ. = 3 (ii) ਲ.ਸ.ਵ. = 11339; ਮ.ਸ.ਵ. = 1 (iii) ਲ.ਸ.ਵ. = 1800; ਮ.ਸ.ਵ. = 1
4. 22338
7. 36 ਮਿੰਟ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 1.4

1. (i) ਸ਼ਾਂਤ (ii) ਸ਼ਾਂਤ
   (iii) ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ (iv) ਸ਼ਾਂਤ
   (v) ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ (vi) ਸ਼ਾਂਤ
   (vii) ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ (viii) ਸ਼ਾਂਤ
   (ix) ਸ਼ਾਂਤ (x) ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ
2. (i) 0.00416 (ii) 2.125 (iv) 0.009375
   (vi) 0.115 (viii) 0.4 (ix) 0.7
3. (i) ਪਰਿਮੇਯ; q ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ 2 ਜਾਂ 5 ਜਾਂ ਦੋਵੇਂ ਹੋਣਗੇ।
   (ii) ਅਪਰਿਮੇਯ
   (iii) ਪਰਿਮੇਯ, q ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ 2 ਜਾਂ 5 ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਇੱਕ ਹੋਰ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੋਵੇਗਾ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 2.1

1. (i) ਕੋਈ ਸਿਫ਼ਰ (ਮੂਲ) ਨਹੀਂ (ii) 1 (iii) 3 (iv) 2 (v) 4 (vi) 3

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 2.2

1. (i) $-2, 4$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (iii) $-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$
   (iv) $-2, 0$ (v) $-\sqrt{15}, \sqrt{15}$ (vi) $-1, \frac{4}{3}$
2. (i) $4x^2 - x - 4$ (ii) $3x^2 - 3\sqrt{2}\,x + 1$ (iii) $x^2 + \sqrt{5}$
   (iv) $x^2 - x + 1$ (v) $4x^2 + x + 1$ (vi) $x^2 - 4x + 1$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 2.3

1. (i) ਭਾਗਫਲ $= x - 3$ ਅਤੇ ਬਾਕੀ $= 7x - 9$
   (ii) ਭਾਗਫਲ $= x^2 + x - 3$ ਅਤੇ ਬਾਕੀ $= 8$
   (iii) ਭਾਗਫਲ $= -x^2 - 2$ ਅਤੇ ਬਾਕੀ $= -5x + 10$
2. (i) ਹਾਂ (ii) ਹਾਂ (iii) ਨਹੀਂ 3. $-1, -1$ 4. $g(x) = x^2 - x + 1$
5. (i) $p(x) = 2x^2 - 2x + 14$, $g(x) = 2$, $q(x) = x^2 - x + 7$, $r(x) = 0$
   (ii) $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$, $q(x) = x + 1$, $r(x) = 2x + 2$
   (iii) $p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$, $g(x) = x^2 - 1$, $q(x) = x + 2$, $r(x) = 4$
   (i), (ii) ਅਤੇ (iii) ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਕਈ ਉਦਾਹਰਣ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 2.4 (ਇੱਛਾ ਅਨੁਸਾਰ)

2. $x^3 - 2x^2 - 7x + 14$ 3. $a = 1, b = \pm\sqrt{2}$
4. $-5, 7$ 5. $k = 5$ ਅਤੇ $a = -5$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 3.1

1. ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਦੋਹਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ: $x - 7y + 42 = 0$; $x - 3y - 6 = 0$, ਜਿਥੇ x ਅਤੇ y ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਲਦੇਵ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਲੜਕੀ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਉਪਰੋਕਤ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚ ਸਕਦੇ ਹੋ, ਜੋ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦਾ ਆਲੇਖੀ (ਗ੍ਰਾਫੀ) ਰੂਪ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।
2. ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਦੋਹਾਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ: $x + 2y = 1300$; $x + 3y = 1300$, ਜਿਥੇ x ਅਤੇ y ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਇੱਕ ਬੱਲੇ ਅਤੇ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਦੇ ਮੁੱਲ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) ਹਨ। ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਆਲੇਖੀ (ਗ੍ਰਾਫੀ) ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੋਹਾਂ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਆਲੇਖ (ਗ੍ਰਾਫ) ਖਿੱਚ ਸਕਦੇ ਹੋ।

3. ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਦੋਹਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ: $2x + y = 160$; $4x + 2y = 300$, ਜਿਥੇ x ਅਤੇ y ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸੇਬ ਅਤੇ ਅੰਗੂਰ ਦੇ ਮੁੱਲ (ਰੁ: ਪ੍ਰਤਿ ਕਿ: ਗ੍ਰਾਮ) ਹਨ। ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਆਲੇਖੀ (ਗ੍ਰਾਫੀ) ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੋਹਾਂ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 3.2

1. (i) ਰੇਖੀ ਸਮੀਰਕਣਾਂ ਦਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਜੋੜਾ ਹੈ:

$x + y = 10$; $x - y = 4$, ਜਿਥੇ x ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ y ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਆਲੇਖੀ (ਗ੍ਰਾਫੀ) ਹੱਲ ਦੇ ਲਈ ਗ੍ਰਾਫ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਹੀ ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ (ਆਲੇਖ) ਖਿੱਚੋ:

ਲੜਕੀਆਂ = 7, ਲੜਕੇ = 3.

(ii) ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਜੋੜਾ ਹੈ:

$5x + 7y = 50$; $7x + 5y = 46$, ਜਿਥੇ x ਅਤੇ y ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਇੱਕ ਪੈਂਨਸਿਲ ਅਤੇ ਇੱਕ ਕਲਮ ਦੇ ਮੁੱਲ (ਰੁ: ਵਿੱਚ) ਹਨ।

ਆਲੇਖੀ (ਗ੍ਰਾਫੀ) ਹੱਲ ਦੇ ਲਈ ਗ੍ਰਾਫ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਇੱਕ ਹੀ ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ (ਆਲੇਖ) ਖਿੱਚੋ:

ਇੱਕ ਪੈਂਨਸਿਲ ਦਾ ਮੁੱਲ = 3 ਰੁ., ਇੱਕ ਕਲਮ ਦਾ ਮੁੱਲ = 5 ਰੁ.

2. (i) ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ। (ii) ਸੰਪਾਤੀ (iii) ਸਮਾਂਤਰ

3. (i) ਸੰਗਤ (ii) ਅਸੰਗਤ (iii) ਸੰਗਤ (iv) ਸੰਗਤ (v) ਸੰਗਤ

4. (i) ਸੰਗਤ (ii) ਅਸੰਗਤ (iii) ਸੰਗਤ (iv) ਅਸੰਗਤ

ਉਪਰੋਕਤ (i) ਦਾ ਹੱਲ, $y = 5 - x$ ਹੈ। ਜਿਥੇ x ਕੋਈ ਵੀ ਮੁੱਲ ਲੈ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ ਹਨ।

ਉਪਰੋਕਤ (iii) ਦਾ ਹੱਲ $x = 2$, $y = 2$ ਹੈ। ਭਾਵ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਹੈ।

5. ਲੰਬਾਈ = 20 m ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ = 16 m

6. ਤਿੰਨਾਂ ਭਾਗਾਂ ਲਈ ਇਕ ਸੰਭਾਵਿਤ ਹੱਲ ਹੈ :

(i) $3x + 2y - 7 = 0$ (ii) $2x + 3y - 12 = 0$ (iii) $4x + 6y - 16 = 0$

7. ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰ $(-1, 0)$, $(4, 0)$ ਅਤੇ $(2, 3)$ ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 3.3

1. (i) $x = 9$, $y = 5$ (ii) $s = 9$, $t = 6$ (iii) $y = 3x - 3$,

ਇਥੇ x ਕੋਈ ਵੀ ਮੁੱਲ ਲੈ ਸਕਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ ਹਨ।

(iv) $x = 2$, $y = 3$ (v) $x = 0$, $y = 0$ (vi) $x = 2$, $y = 3$

2. $x = -2$, $y = 5$; $m = -1$.

3. (i) $x - y = 26$, $x = 3y$, ਜਿਥੇ x ਅਤੇ y $(x > y)$ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ; $x = 39$, $y = 13$.

(ii) $x - y = 18$, $x + y = 180$, ਜਿਥੇ x ਅਤੇ y ਅੰਸ਼ਾਂ (degree) ਵਿੱਚ ਦੋ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਹੈ; $x = 99$, $y = 81$.

(iii) $7x + 6y = 3800$, $3x + 5y = 1750$, ਜਿਥੇ x ਅਤੇ y ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਇੱਕ ਬੱਲੇ ਅਤੇ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਦੇ ਮੁੱਲ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) ਹਨ; $x = 500$, $y = 50$.

(iv) $x + 10y = 105$, $x + 15y = 155$, ਜਿਥੇ x (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਭਾੜਾ (ਕਿਰਾਇਆ) ਹੈ ਅਤੇ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) ਪ੍ਰਤੀ ਕਿ.ਮੀ. ਭਾੜਾ (ਕਿਰਾਇਆ) ਹੈ;

$x = 5$, $y = 10$; 255 ਰੁ:।

(v) $11x - 9y + 4 = 0$, $6x - 5y + 3 = 0$, ਜਿਥੇ x ਅਤੇ y ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਭਿੰਨ ਦੇ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਹਨ; $\frac{7}{9}$ $(x = 7, y = 9)$।

(vi) $x - 3y - 10 = 0$, $x - 7y + 30 = 0$, ਜਿਥੇ x ਅਤੇ y ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਜੈਕਬ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਪੁੱਤਰ ਦੀ ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਉਮਰ ਹੈ; $x = 40$, $y = 10$.

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 3.4

1. (i) $x = \frac{19}{5}$, $y = \frac{6}{5}$ (ii) $x = 2$, $y = 1$ (iii) $x = \frac{9}{13}$, $y = -\frac{5}{13}$,
   (iv) $x = 2$, $y = -3$

2. (i) $x - y + 2 = 0$, $2x - y - 1 = 0$, ਜਿਥੇ x ਅਤੇ y ਭਿੰਨ ਦੇ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਹਨ; $\frac{3}{5}$.
   (ii) $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2y - 10 = 0$, ਜਿਥੇ x ਅਤੇ y ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਨੂਰੀ ਅਤੇ ਸੋਨੂੰ ਦੀ ਉਮਰ (ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ) ਹੈ। ਨੂਰੀ ਦੀ ਉਮਰ $(x) = 50$, ਸੋਨੂੰ ਦੀ ਉਮਰ $(y) = 20$.
   (iii) $x + y = 9$, $8x - y = 0$, ਜਿਥੇ x ਅਤੇ y ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਦਹਾਈ ਅਤੇ ਇਕਾਈ ਦੇ ਅੰਕ ਹਨ; 18.
   (iv) $x + 2y = 40$, $x + y = 25$, ਜਿਥੇ x ਅਤੇ y ਕ੍ਰਮਵਾਰ ₹ 50 ਅਤੇ ₹ 100 ਦੇ ਨੋਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ;
   $x = 10$, $y = 15$.
   (v) $x + 4y = 27$, $x + 2y = 21$, ਜਿਥੇ x ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਿਰਾਇਆ (ਭਾੜਾ) (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) ਹੈ ਅਤੇ y ਅਲੱਗ ਕਿਰਾਇਆ (ਭਾੜਾ) ਪ੍ਰਤੀ ਦਿਨ ਹੈ; $x = 15$, $y = 3$.

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 3.5

1. (i) ਕੋਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ (ii) ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ; $x = 2$, $y = 1$
   (iii) ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ (iv) ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ; $x = 4$, $y = -1$
2. (i) $a = 5$, $b = 1$ (ii) $k = 2$
3. $x = -2$, $y = 5$
4. (i) $x + 20y = 1000$, $x + 26y = 1180$, ਜਿਥੇ x (ਰੁ: ਵਿੱਚ) ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਿਰਾਇਆ (ਭਾੜਾ) ਹੈ ਅਤੇ y (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) ਭੋਜਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਦਿਨ ਖਰਚ ਹੈ; $x = 400$, $y = 30$.
   (ii) $3x - y - 3 = 0$, $4x - y - 8 = 0$, ਜਿਥੇ x ਅਤੇ y ਭਿੰਨ ਦਾ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਹਨ; $\frac{5}{12}$.
   (iii) $3x - y = 40$, $2x - y = 25$, ਜਿਥੇ x ਅਤੇ y ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸਹੀ ਅਤੇ ਗਲਤ ਉੱਤਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ; 20.

(iv) $u - v = 20,\ u + v = 100$, ਜਿਥੇ u ਅਤੇ v (*km/h* ਵਿੱਚ) ਦੋਹਾਂ ਕਾਰਾਂ ਦੀ ਗਤੀ ਹੈ; $u = 60, v = 40$.

(v) $3x - 5y - 6 = 0,\ 2x + 3y - 61 = 0$, ਜਿਥੇ x ਅਤੇ y (ਇਕਾਈਆਂ ਵਿੱਚ) ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਆਇਤ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਹੈ; ਲੰਬਾਈ $(x) = 17$, ਚੌੜਾਈ $(y) = 9$.

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 3.6

1. (i) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$ (ii) $x = 4, y = 9$ (iii) $x = \frac{1}{5}, y = -2$

(iv) $x = 4, y = 5$ (v) $x = 1, y = 1$ (vi) $x = 1, y = 2$

(vii) $x = 3, y = 2$ (viii) $x = 1, y = 1$

2. (i) $u + v = 10, u - v = 2$, ਜਿਥੇ u ਅਤੇ v (*km/h*) ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਖੜੇ ਪਾਣੀ ਵਿੱਚ ਤਰਨ ਦੀ ਗਤੀ ਅਤੇ ਧਾਰਾ ਦੀ ਗਤੀ ਹੈ; $u = 6, v = 4$.

(ii) $\frac{2}{n} + \frac{5}{m} = \frac{1}{4}, \frac{3}{n} + \frac{6}{m} = \frac{1}{3}$, ਜਿਥੇ n ਅਤੇ m ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਕਸੀਦੇ ਦਾ ਕੰਮ ਖਤਮ ਕਰਨ ਦੀ ਲਈ ਇੱਕ ਔਰਤ (ਇਸਤਰੀ) ਅਤੇ ਇੱਕ ਪੁਰਸ਼ ਦੁਆਰਾ ਲਏ ਗਏ ਦਿਨਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ; $n = 18, m = 36$.

(iii) $\frac{60}{u} + \frac{240}{v} = 4, \frac{100}{u} + \frac{200}{v} = \frac{25}{6}$, ਜਿਥੇ u ਅਤੇ v (*km/h*) ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਰੇਲ ਗੱਡੀ ਅਤੇ ਬੱਸ ਦੀ ਗਤੀ ਹੈ; $u = 60, v = 80$.

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 3.7 (ਇੱਛਾ-ਅਨੁਸਾਰ)*

1. ਹਨੀ ਦੀ ਉਮਰ 19 ਸਾਲ ਹੈ ਅਤੇ ਸੰਨੀ ਦੀ ਉਮਰ 16 ਸਾਲ ਹੈ ਜਾਂ ਹਨੀ ਦੀ ਉਮਰ 21 ਸਾਲ ਅਤੇ ਸੰਨੀ ਦੀ ਉਮਰ 24 ਸਾਲ ਹੈ।

2. 40 ਰੁ:, 170 ਰੁ: ।ਮੰਨ ਲਉ ਪਹਿਲੇ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਕੋਲ x (ਰੁ: ਵਿੱਚ) ਸੰਪਤੀ (ਪੈਸੇ) ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਵਿਅਕਤੀ ਕੋਲ y (ਰੁ: ਵਿੱਚ) ਸੰਪਤੀ ਹਨ। ਤਾਂ

$x + 100 = 2(y - 100), y + 10 = 6(x - 10)$

3. 600 km 4. 36 5. $\angle A = 20°, \angle B = 40°, \angle C = 120°$

6. ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (1, 0), (0, –3), (0, –5) ਹਨ।

7. (i) $x = 1, y = -1$ (ii) $x = \frac{c(a-b)-b}{a^2-b^2}, y = \frac{c(a-b)+a}{a^2-b^2}$

(iii) $x = a, y = b$ (iv) $x = a + b, y = -\frac{2ab}{a+b}$ (v) $x = 2, y = 1$

8. $\angle A = 120°, \angle B = 70°, \angle C = 60°, \angle D = 110°$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 4.1

1. (i) ਹਾਂ (ii) ਹਾਂ (iii) ਨਹੀਂ (iv) ਹਾਂ

(v) ਹਾਂ (vi) ਨਹੀਂ (vii) ਨਹੀਂ (viii) ਹਾਂ

2. (i) $2x^2 + x - 528 = 0$, ਜਿਥੇ x (ਮੀਟਰਾਂ ਵਿੱਚ) ਜ਼ਮੀਨ ਦੇ ਟੁੱਕੜੇ ਦੀ ਚੋੜਾਈ ਹੈ।
(ii) $x^2 + x - 306 = 0$, ਜਿਥੇ x ਛੋਟੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
(iii) $x^2 + 32x - 273 = 0$, ਜਿਥੇ x (ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ) ਰੋਹਨ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਹੈ।
(iv) $u^2 - 8u - 1280 = 0$, ਜਿਥੇ u (km/h ਵਿੱਚ) ਰੇਲਗੱਡੀ ਦੀ ਗਤੀ (ਚਾਲ) ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 4.2

1. (i) $-2, 5$ (ii) $-2, \frac{3}{2}$ (iii) $-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}$
(iv) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (v) $\frac{1}{10}, \frac{1}{10}$
2. (i) 9, 36 (ii) 25, 30
3. ਸੰਖਿਆਵਾਂ 13 ਅਤੇ 14 ਹਨ। 4. ਧਨਤਾਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅੰਕ 13 ਅਤੇ 14 ਹਨ।
5. 5 cm ਅਤੇ 12 cm 6. ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = 6, ਹਰੇਕ ਵਸਤੂ ਦਾ ਮੁੱਲ = ₹ 15

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 4.3

1. (i) $\frac{1}{2}, 3$ (ii) $\frac{-1-\sqrt{33}}{4}, \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$ (iii) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$
(iv) ਹੋਂਦ (ਅਸਤਿਤਵ) ਨਹੀਂ ਹੈ।
2. ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਵਿੱਚ ਹੈ। 3. (i) $\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ (ii) 1, 2 4. 7 ਸਾਲ
5. ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ = 12, ਅੰਗ੍ਰੇਜ਼ੀ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ = 18;
ਜਾਂ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ = 13, ਅੰਗ੍ਰੇਜ਼ੀ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ = 17
6. 120 m, 90 m 7. 18, 12 ਜਾਂ 18, −12
8. 40 km/h 9. 15 ਘੰਟੇ, 25 ਘੰਟੇ
10. ਸਵਾਰੀ ਰੇਲਗੱਡੀ ਦੀ ਚਾਲ (ਗਤੀ) = 33 km/h, ਤੇਜ (ਐਕਸਪ੍ਰੈਸ) ਰੇਲਗੱਡੀ ਦੀ ਚਾਲ = 44 km/h
11. 18 m, 12 m

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 4.4

1. (i) ਵਾਸਤਵਿਕ ਮਿਫ਼ਰਾਂ(ਮੂਲਾਂ)ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ। (ii) ਬਰਾਬਰ ਮੂਲ; $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$
(iii) ਅਲੱਗ ਮੂਲ; $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$
2. (i) $k = \pm 2\sqrt{6}$ (ii) $k = 6$
3. ਹਾਂ, 40 m, 20 m 4. ਨਹੀਂ 5. ਹਾਂ, 20 m, 20 m

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 5.1

1. (i) ਹਾਂ; 15, 23, 31, . . . ਇੱਕ A.P. ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਅਗਲਾ ਪਦ ਪਿਛਲੇ ਪਦ ਵਿੱਚ 8 ਜੋੜਨ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

   (ii) ਨਹੀਂ, ਆਇਤਨ $V, \frac{3V}{4}, \left(\frac{3}{4}\right)^2 V, \ldots$ ਹੈ। (iii) ਹਾਂ; 150, 200, 250, . . . ਇੱਕ A.P. ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ।

   (iv) ਨਹੀਂ, ਰਾਸ਼ੀਆਂ $10000\left(1+\frac{8}{100}\right), 10000\left(1+\frac{8}{100}\right)^2, 10000\left(1+\frac{8}{100}\right)^3, \ldots$ ਹਨ।

2. (i) 10, 20, 30, 40 (ii) $-2, -2, -2, -2$ (iii) $4, 1, -2, -5$

   (iv) $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ (v) $-1.25, -1.50, -1.75, -2.0$

3. (i) $a = 3,\ d = -2$ (ii) $a = -5,\ d = 4$

   (iii) $a = \frac{1}{3},\ d = \frac{4}{3}$ (iv) $a = 0.6,\ d = 1.1$

4. (i) ਨਹੀਂ (ii) ਹਾਂ, $d = \frac{1}{2}$; $4, \frac{9}{2}, 5$

   (iii) ਹਾਂ, $d = -2$; $-9.2, -11.2, -13.2$ (iv) ਹਾਂ, $d = 4$; 6, 10, 14

   (v) ਹਾਂ, $d = \sqrt{2}$; $3+4\sqrt{2}, 3+5\sqrt{2}, 3+6\sqrt{2}$ (vi) ਨਹੀਂ

   (vii) ਹਾਂ, $d = -4$; $-16, -20, -24$ (viii) ਹਾਂ, $d = 0$; $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

   (ix) ਨਹੀਂ (x) ਹਾਂ, $d = a$; $5a, 6a, 7a$

   (xi) ਨਹੀਂ (xii) ਹਾਂ, $d = \sqrt{2}$; $\sqrt{50}, \sqrt{72}, \sqrt{98}$

   (xiii) ਨਹੀਂ (xiv) ਨਹੀਂ (xv) ਹਾਂ, $d = 24$; 97, 121, 145

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 5.2

1. (i) $a_n = 28$ (ii) $d = 2$ (iii) $a = 46$ (iv) $n = 10$ (v) $a_n = 3.5$

2. (i) C (ii) B

3. (i) $\boxed{14}$ (ii) $\boxed{18}, \boxed{8}$ (iii) $\boxed{6\frac{1}{2}}, \boxed{8}$

   (iv) $\boxed{-2}, \boxed{0}, \boxed{2}, \boxed{4}$ (v) $\boxed{53}, \boxed{23}, \boxed{8}, \boxed{-7}$

4. 16ਵਾਂ ਪਦ 5. (i) 34 (ii) 27

6. ਨਹੀਂ 7. 178 8. 64

9. 5ਵਾਂ ਪਦ **10.** 1 **11.** 65ਵਾਂ ਪਦ

12. 100 **13.** 128 **14.** 60

15. 13 **16.** 4, 10, 16, 22, . . .

17. ਅਖੀਰਲੇ ਪਦ ਤੋਂ 20ਵਾਂ ਪਦ 158 ਹੈ।

18. –13, –8, –3 **19.** 11ਵਾਂ ਸਾਲ **20.** 10

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 5.3

1. (i) 245 (ii) –180 (iii) 5505 (iv) $\frac{33}{20}$

2. (i) $1046\frac{1}{2}$ (ii) 286 (iii) – 8930

3. (i) $n = 16, S_n = 440$ (ii) $d = \frac{7}{3}, S_{13} = 273$ (iii) $a = 4, S_{12} = 246$

(iv) $d = -1, a_{10} = 8$ (v) $a = -\frac{35}{3}, a_9 = \frac{85}{3}$ (vi) $n = 5, a_n = 34$

(vii) $n = 6, d = \frac{54}{5}$ (viii) $n = 7, a = -8$ (ix) $d = 6$

(x) $a = 4$

4. 12. ਸੂਤਰ $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ ਵਿੱਚ $a = 9, d = 8, S = 636$ ਰੱਖਣ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $4n^2 + 5n - 636 = 0$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ ਮੂਲ $n = -\frac{53}{4}, 12$ ਮਿਲਦੇ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦੋਹਾਂ ਮੂਲਾਂ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਮੂਲ 12 ਹੀ ਠੀਕ ਹੈ।

5. $n = 16, d = \frac{8}{3}$ **6.** $n = 38, S = 6973$ **7.** ਜੋੜ = 1661

8. $S_{51} = 5610$ **9.** n^2 **10.** (i) $S_{15} = 525$ (ii) $S_{15} = -465$

11. $S_1 = 3, S_2 = 4;\ a_2 = S_2 - S_1 = 1;\ S_3 = 3,\ a_3 = S_3 - S_2 = -1,$
$a_{10} = S_{10} - S_9 = -15;\ a_n = S_n - S_{n-1} = 5 - 2n.$

12. 4920 **13.** 960 **14.** 625 **15.** ₹ 27750

16. ਇਨਾਮਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) 160, 140, 120, 100, 80, 60, 40 ਹੈ।

17. 234 **18.** 143 cm

19. 16 ਪੰਗਤੀਆਂ, 5 ਲਾਠੀਆਂ (ਡੰਡੀਆਂ) ਨੂੰ ਸਭ ਤੋਂ ਉਪਰਲੀ ਪੰਗਤੀ ਵਿੱਚ ਰੱਖਦੇ ਹਾਂ। $S = 200, a = 20, d = -1$ ਸੂਤਰ $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $41n - n^2 = 400$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਹੱਲ ਕਰਨ ਨਾਲ $n = 16, 25$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪੰਗਤੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 16 ਜਾਂ 25 ਹੈ। ਹੁਣ $a_{25} = a + 24d = -$

4 ਭਾਵ 25 ਵੀਂ ਪੰਗਤੀ ਵਿੱਚ ਡੰਡਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ –4 ਹੈ ਜੋ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $n = 25$ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ। $n = 16$ ਦੇ ਲਈ, $a_{16} = 5$, ਡੰਡੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ 16 ਪੰਗਤੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਸਭ ਤੋਂ ਉੱਪਰ ਵਾਲੀ ਪੰਗਤੀ ਵਿੱਚ 5 ਡੰਡੇ ਹਨ।

20. 370 m

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 5.4 (ਇੱਛਾ-ਅਨੁਸਾਰ)*

1. 32ਵਾਂ **2.** $S_{16} = 20, 76$ **3.** 385 cm

4. 35 **5.** 750 m³

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 6.1

1. (i) ਸਮਰੂਪ (ii) ਸਮਰੂਪ (iii) ਸਮਭੁਜੀ

(iv) ਬਰਾਬਰ, ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ **3.** ਨਹੀਂ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 6.2

1. (i) 2 cm (ii) 2.4 cm

2. (i) ਨਹੀਂ (ii) ਹਾਂ (iii) ਹਾਂ

9. ਬਿੰਦੂ O ਤੋਂ ਹੁੰਦੇ ਹੋਏ DC ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੋ ਜੋ AD ਅਤੇ BC ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂ E ਅਤੇ F ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੋਵੇ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 6.3

1. (i) ਹਾਂ, AAA, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (ii) ਹਾਂ, SSS, $\Delta ABC \sim \Delta QRP$

(iii) ਨਹੀਂ (iv) ਹਾਂ, SAS, $\Delta MNL \sim \Delta QPR$

(v) ਨਹੀਂ (vi) ਹਾਂ, AA, $\Delta DEF \sim \Delta PQR$

2. 55°, 55°, 55°

14. AD ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ E ਤੱਕ ਵਧਾਉ ਤਾਂ ਕਿ AD = DE ਅਤੇ PM ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ N ਤੱਕ ਵਧਾਉ ਤਾਂ ਕਿ PM = MN ਹੋਵੇ। EC ਅਤੇ NR ਨੂੰ ਮਿਲਾਉ

15. 42 m

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 6.4

1. 11.2 cm **2.** 4 : 1 **5.** 1 : 4 **8.** C **9.** D

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 6.5

1. (i) ਹਾਂ, 25 cm (ii) ਨਹੀਂ (iii) ਨਹੀਂ (iv) ਹਾਂ, 13 cm

6. $a\sqrt{3}$ **9.** 6 m **10.** $6\sqrt{7}$ m **11.** $300\sqrt{61}$ km

12. 13 m **17.** C

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 6.6 (ਇੱਛਾ-ਅਨੁਸਾਰ)*

1. R ਤੋਂ ਹੁੰਦੇ ਹੋਏ SP ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੋ ਜੋ ਰੇਖਾ QP ਨੂੰ ਵਧਾਉਣ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ T 'ਤੇ ਕੱਟੇ। ਦਿਖਾਉ ਕਿ PT = PR ਹਾਂ।

6. ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ ਦੇ Q.5 (iii) ਦਾ ਪਰਿਣਾਮ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ। 7. 3 m 2.79 m

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 7.1

1. (i) $2\sqrt{2}$ (ii) $4\sqrt{2}$ (iii) $2\sqrt{a^2+b^2}$

2. 39; 39 km 3. ਨਹੀਂ 4. ਹਾਂ 5. ਸੁੱਖੀ ਸਹੀ ਹੈ।

6. (i) ਵਰਗ (ii) ਚਤੁਰਭੁਜ ਨਹੀਂ ਹੈ। (iii) ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ

7. $(-7, 0)$ 8. $-9, 3$ 9. ± 4, $QR = \sqrt{41}$, $PR = \sqrt{82}$, $9\sqrt{2}$

10. $3x + y - 5 = 0$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 7.2

1. $(1, 3)$ 2. $\left(2, -\frac{5}{3}\right); \left(0, -\frac{7}{3}\right)$

3. $\sqrt{61}$ m; 5ਵੀਂ ਪੰਗਤੀ 22.5 m ਦੂਰੀ 'ਤੇ 4. 2 : 7

5. $1:1; \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ 6. $x = 6, y = 3$ 7. $(3, -10)$

8. $\left(-\frac{2}{7}, -\frac{20}{7}\right)$ 9. $\left(-1, \frac{7}{2}\right), (0, 5), \left(1, \frac{13}{2}\right)$ 10. 24 ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 7.3

1. (i) $\frac{21}{2}$ ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ (ii) 32 ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ 2. (i) $k = 4$ (ii) $k = 3$

3. 1 ਵਰਗ ਇਕਾਈ; 1 : 4 4. 28 ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 7.4 (ਇੱਛਾ-ਅਨੁਸਾਰ)*

1. 2 : 9 2. $x + 3y - 7 = 0$ 3. $(3, -2)$ 4. $(1, 0), (1, 4)$

5. (i) (4, 6), (3, 2), (6, 5); AD ਅਤੇ AB ਨੂੰ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੈ ਕੇ

(ii) (12, 2), (13, 6), (10, 3); CB ਅਤੇ CD ਨੂੰ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੈ ਕੇ ।

$\frac{9}{2}$ ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ, $\frac{9}{2}$ ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ, ਦੋਹਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਖੇਤਰਫਲ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

6. $\frac{15}{32}$ ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ 1 : 16

7. (i) $D\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$ (ii) $P\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$

(iii) $Q\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$, $R\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$ (iv) P, Q, R ਇੱਕ ਹੀ ਬਿੰਦੂ ਹਨ।

(v) $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

8. ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 8.1

1. (i) $\sin A = \frac{7}{25}, \cos A = \frac{24}{25}$ (ii) $\sin C = \frac{24}{25}, \cos C = \frac{7}{25}$

2. 0

3. $\cos A = \frac{\sqrt{7}}{4}, \tan A = \frac{3}{\sqrt{7}}$

4. $\sin A = \frac{15}{17}, \sec A = \frac{17}{8}$

5. $\sin\theta = \frac{5}{13}, \cos\theta = \frac{12}{13}, \tan\theta = \frac{5}{12}, \cot\theta = \frac{12}{5}, \operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{5}$

7. (i) $\frac{49}{64}$ (ii) $\frac{49}{64}$

8. ਹਾਂ

9. (i) 1 (ii) 0

10. $\sin P = \frac{12}{13}, \cos P = \frac{5}{13}, \tan P = \frac{12}{5}$

11. (i) ਝੂਠ (ਗਲਤ) (ii) ਸੱਚ (ਸਹੀ) (iii) ਝੂਠ (ਗਲਤ) (iv) ਝੂਠ (ਗਲਤ) (v) ਝੂਠ (ਗਲਤ)

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 8.2

1. (i) 1 (ii) 2 (iii) $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}$ (iv) $\frac{43 - 24\sqrt{3}}{11}$ (v) $\frac{67}{12}$

2. (i) A (ii) D (iii) A (iv) C

3. $\angle A = 45°, \angle B = 15°$

4. (i) ਝੂਠ (ਗਲਤ) (ii) ਸੱਚ (ਸਹੀ) (iii) ਝੂਠ (ਗਲਤ) (iv) ਝੂਠ (ਗਲਤ) (v) ਸੱਚ (ਸਹੀ)

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 8.3

1. (i) 1 (ii) 1 (iii) 0 (iv) 0

3. $\angle A = 36°$

5. $\angle A = 22°$

7. $\cos 23° + \sin 15°$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 8.4

1. $\sin A = \dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$, $\tan A = \dfrac{1}{\cot A}$, $\sec A = \dfrac{\sqrt{1+\cot^2 A}}{\cot A}$

2. $\sin A = \dfrac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}$, $\cos A = \dfrac{1}{\sec A}$, $\tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$

   $\cot A = \dfrac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$, $\operatorname{cosec} A = \dfrac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$

3. (i) 1 (ii) 1 4. (i) B (ii) C (iii) D (iv) D

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 9.1

1. 10 m 2. $8\sqrt{3}$ m 3. 3 m, $2\sqrt{3}$ m 4. $10\sqrt{3}$ m

5. $40\sqrt{3}$ m 6. $19\sqrt{3}$ m 7. $20(\sqrt{3}-1)$ m 8. $0.8(\sqrt{3}+1)$ m

9. $16\frac{2}{3}$ m 10. $20\sqrt{3}$ m, 20 m, 60 m 11. $10\sqrt{3}$ m, 10 m 12. $7(\sqrt{3}+1)$ m

13. $75(\sqrt{3}-1)$ m 14. $58\sqrt{3}$ m 15. 3 ਸੈਕਿੰਡ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 10.1

1. ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ
2. (i) ਇੱਕ (ii) ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ (iii) ਦੋ (iv) ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ 3. D

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 10.2

1. A 2. B 3. A 6. 3 cm
7. 8 cm 12. AB = 15 cm, AC = 13 cm

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 12.1

1. 28 cm 2. 10 cm
3. Pink: 346.5 cm^2; Red: 1039.5 cm^2; Grey: 1732.5 cm^2; Black: 2425.5 cm^2; White: 3118.5 cm^2
4. 4375 5. A

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 12.2

1. $\frac{132}{7}\text{cm}^2$ 2. $\frac{77}{8}\text{cm}^2$ 3. $\frac{154}{3}\text{cm}^2$
4. (i) $28.5\ \text{cm}^2$ (ii) $235.5\ \text{cm}^2$
5. (i) $22\ \text{cm}$ (ii) $231\ \text{cm}^2$ (iii) $\left(231-\frac{441\sqrt{3}}{4}\right)\text{cm}^2$
6. $20.4375\ \text{cm}^2$; $686.0625\ \text{cm}^2$ 7. $88.44\ \text{cm}^2$
8. (i) $19.625\ \text{m}^2$ (ii) $58.875\ \text{cm}^2$ 9. (i) $285\ \text{mm}$ (ii) $\frac{385}{4}\ \text{mm}^2$
10. $\frac{22275}{28}\ \text{cm}^2$ 11. $\frac{158125}{126}\ \text{cm}^2$ 12. $189.97\ \text{km}^2$
13. 162.68 ਰੁ: 14. D

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 12.3

1. $\frac{4523}{28}\text{cm}^2$ 2. $\frac{154}{3}\text{cm}^2$ 3. $42\ \text{cm}^2$
4. $\left(\frac{660}{7}+36\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$ 5. $\frac{68}{7}\ \text{cm}^2$ 6. $\left(\frac{22528}{7}-768\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$
7. $42\ \text{cm}^2$ 8. (i) $\frac{2804}{7}\ \text{m}$ (ii) $4320\ \text{m}^2$
9. $66.5\ \text{cm}^2$ 10. $1620.5\ \text{cm}^2$ 11. $378\ \text{cm}^2$
12. (i) $\frac{77}{8}\ \text{cm}^2$ (ii) $\frac{49}{8}\ \text{cm}^2$ 13. $228\ \text{cm}^2$
14. $\frac{308}{3}\ \text{cm}^2$ 15. $98\ \text{cm}^2$ 16. $\frac{256}{7}\ \text{cm}^2$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 13.1

1. $160\ \text{cm}^2$ 2. $572\ \text{cm}^2$ 3. $214.5\ \text{cm}^2$
4. ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਵਿਆਸ = 7 cm ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = $332.5\ \text{cm}^2$
5. $\frac{1}{4}l^2(\pi+24)$ 6. $220\ \text{m.}^2$ 7. $44\ \text{m.}^2$, 22000 ਰੁ:
8. $18\ \text{cm}^2$ 9. $374\ \text{cm}^2$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 13.2

1. π cm³
2. 66 cm³, ਮਾਡਲ ਦੇ ਅੰਦਰ ਦੀ ਹਵਾ ਦਾ ਆਇਤਨ = ਅੰਦਰ ਦੀ ਹਵਾ ਦਾ ਆਇਤਨ (ਸ਼ੰਕੂ + ਬੇਲਣ + ਸ਼ੰਕੂ)

$= \left(\frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \pi r^2 h_2 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_1\right)$, ਜਿਥੇ r ਸ਼ੰਕੂ ਅਤੇ ਬੇਲਣ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੈ, h_1 ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉਚਾਈ ਅਤੇ h_2 ਬੇਲਣ ਦੀ ਉਚਾਈ (ਲੰਬਾਈ) ਹੈ।

ਲੋੜੀਂਦਾ ਆਇਤਨ $= \frac{1}{3}\pi r^2 (h_1 + 3h_2 + h_1)$.

3. 338 cm³
4. 523.53 cm³
5. 100
6. 892.26 kg
7. 1.131 m³ (ਲਗਭਗ)
8. ਸਹੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਸਹੀ ਉੱਤਰ 346.51 cm³ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 13.3

1. 2.74 cm
2. 12 cm
3. 2.5 m
4. 1.125 m
5. 10
6. 400
7. 36 cm; $12\sqrt{13}$ cm
8. 562500 m² ਜਾਂ 56.25 ਹੈਕਟੇਅਰ
9. 100 ਮਿੰਟ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 13.4

1. $102\frac{2}{3}$ cm³
2. 48 cm³
3. $710\frac{2}{7}$ cm²
4. ਦੁੱਧ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 209 ਅਤੇ ਧਾਤੂ ਸ਼ੀਟ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 156.75 ਹੈ।
5. 7964.4 m

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 13.5 (ਇੱਛਾ-ਅਨੁਸਾਰ)*

1. 1256 cm, 788 gm (ਲਗਭਗ)
2. 30.14 cm³, 52.75 cm²
3. 1792
4. $782\frac{4}{7}$ cm²

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 14.1

1. 8.1 ਪੌਦੇ। ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਤੱਖ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ x_i ਅਤੇ f_i ਦੇ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਮੁੱਲ ਘੱਟ ਹਨ।
2. ₹ 145.20
3. $f = 20$
4. 75.9
5. 57.19
6. ₹ 211
7. 0.099 ppm
8. 12.38 ਦਿਨ
9. 69.43 %

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 14.2

1. ਬਹੁਲਕ = 36.8 ਸਾਲ, ਮੱਧਮਾਨ = 35.37 ਸਾਲ। ਹਸਪਤਾਲ ਵਿੱਚ ਭਰਤੀ ਜ਼ਿਆਦਾਤਰ ਰੋਗੀ 36.8 ਸਾਲ ਉਮਰ (ਲਗਭਗ) ਦੇ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਕਿ ਔਸਤਨ ਹਸਪਤਾਲ ਵਿੱਚ ਭਰਤੀ ਕੀਤੇ ਗਏ ਰੋਗੀਆਂ ਦੀ ਉਮਰ 35.57 ਸਾਲ ਹੈ।
2. 65.625 ਘੰਟੇ
3. ਬਹੁਲਕ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਖਰਚ = ₹ 1847.83, ਮੱਧਮਾਨ ਮਾਸਿਕ ਖਰਚ = ₹ 2662.5
4. ਬਹੁਲਕ : 30.6, ਮੱਧਮਾਨ = 29.2. ਜ਼ਿਆਦਾਤਰ ਰਾਜਾਂ/U.T. ਵਿੱਚ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਅਤੇ ਅਧਿਆਪਕ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 30.6 ਹੈ ਅਤੇ ਔਸਤਨ ਇਹ ਅਨੁਪਾਤ 29.2 ਹੈ।
5. ਬਹੁਲਕ = 4608.7 ਰਨ (ਦੌੜਾਂ) 6. ਬਹੁਲਕ = 44.7 ਕਾਰ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 14.3

1. ਮੱਧਿਕਾ = 137 ਇਕਾਈ, ਮੱਧਮਾਨ = 137.05 ਇਕਾਈ, ਬਹੁਲਕ = 135.76 ਇਕਾਈ

   ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇਹ ਤਿੰਨੋ ਮਾਪਕ ਲਗਭਗ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

2. $x = 8$, $y = 7$
3. ਮੱਧਮਾਨ ਉਮਰ = 35.76 ਸਾਲ
4. ਮੱਧਮਾਨ ਲੰਬਾਈ = 146.75 mm
5. ਮੱਧਮਾਨ ਜੀਵਨ = 3406.98 ਘੰਟੇ
6. ਮੱਧਮਾਨ = 8.05, ਮੱਧਮਾਨ = 8.32, ਬਹੁਲਕ = 7.88
7. ਬਹੁਲਕ ਭਾਰ = 56.67 kg

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 14.4

1.

ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਆਮਦਨ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ)	ਸੰਚਈ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
120 ਤੋਂ ਘੱਟ	12
140 ਤੋਂ ਘੱਟ	26
160 ਤੋਂ ਘੱਟ	34
180 ਤੋਂ ਘੱਟ	40
200 ਤੋਂ ਘੱਟ	50

ਬਿੰਦੂਆਂ (120, 12), (140, 26), (160, 34), (180, 40) ਅਤੇ (200, 50) ਨੂੰ ਅੰਕਿਤ ਕਰਕੇ ਤੋਰਣ ਖਿੱਚੋ।

2. ਬਿੰਦੂਆਂ : (38, 0), (40, 3), (42, 5), (44, 9), (46, 14), (48, 28), (50, 32) ਅਤੇ (52, 35) ਨੂੰ ਆਲੇਖਿਤ ਕਰਕੇ ਤੋਰਣ ਖਿੱਚੋ। ਇਥੇ $\frac{n}{2} = 17.5$. ਤੋਰਣ 'ਤੇ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉ ਜਿਸਦੀ ਕੋਟੀ 17.5 ਹੈ। ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਦਾ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਮੱਧਿਕਾ ਹੋਵੇਗਾ।

3.

ਉਤਪਾਦਨ (kg/ha)	ਸੰਚਈ ਬਾਰੰਬਾਰਤਾ
50 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ ਵੱਧ	100
55 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ ਵੱਧ	98
60 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ ਵੱਧ	90
65 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ ਵੱਧ	78
70 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ ਵੱਧ	54
75 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ ਵੱਧ	16

ਬਿੰਦੂਆਂ : (50, 100), (55, 98), (60, 90), (65, 78), (70, 54) ਅਤੇ (75, 16) ਨੂੰ ਆਲੇਖਿਤ ਕਰਕੇ ਤੋਰਣ ਖਿੱਚੋ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 15.1

1. (i) 1 (ii) 0, ਅਸੰਭਵ ਘਟਨਾ (iii) 1, ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਘਟਨਾ
(iv) 1 (v) 0, 1

2. ਪ੍ਰਯੋਗ (iii) ਅਤੇ (iv) ਸਮ-ਸੰਭਾਵੀ ਪਰਿਣਾਮ ਦਿੰਦੇ ਹਨ।

3. ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਦੇ (ਸੁੱਟਦੇ) ਹਾਂ ਤਾਂ ਚਿਤ ਜਾਂ ਪਟ ਆਉਣ ਦੀ ਬਰਾਬਰ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲਣ ਨਾਲ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਸਿੱਟੇ ਬਾਰੇ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ।

4. B 5. 0.95 6. (i) 0 (ii) 1

7. 0.008 8. (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{5}{8}$

9. (i) $\frac{5}{17}$ (ii) $\frac{8}{17}$ (iii) $\frac{13}{17}$ 10. (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{17}{18}$

11. $\frac{5}{13}$ 12. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{4}$ (iv) 1

13. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$

14. (i) $\frac{1}{26}$ (ii) $\frac{3}{13}$ (iii) $\frac{3}{26}$ (iv) $\frac{1}{52}$ (v) $\frac{1}{4}$ (vi) $\frac{1}{52}$

15. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) (a) $\frac{3}{4}$ (b) 0 16. $\frac{11}{12}$

17. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{15}{19}$ 18. (i) $\frac{9}{10}$ (ii) $\frac{1}{10}$ (iii) $\frac{1}{5}$

19. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{6}$ **20.** $\frac{\pi}{24}$ **21.** (i) $\frac{31}{36}$ (ii) $\frac{5}{36}$

22. (i)

ਦੋਹਾਂ ਪਾਸਿਆਂ 'ਤੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ਸੰਭਾਵਨਾ	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

(ii) ਨਹੀਂ, ਇਹ 11 ਪਰਿਣਾਮ (ਨਤੀਜੇ) ਸਮ-ਸੰਭਾਵੀ ਨਹੀਂ ਹਨ।

23. $\frac{3}{4}$; ਸੰਭਵ ਪਰਿਣਾਮ (ਨਤੀਜੇ) ਹਨ: HHH, TTT, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, ਇਥੇ THH ਦਾ ਭਾਵ ਪਹਿਲੇ ਉਛਾਲ ਵਿੱਚ ਪਟ, ਦੂਸਰੇ ਵਿੱਚ ਚਿਤ ਅਤੇ ਤੀਸਰੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਚਿਤ ਆਦਿ ਹੈ।

24. (i) $\frac{25}{36}$ (ii) $\frac{11}{36}$

25. (i) ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਣਾਮਾਂ (ਨਤੀਜਿਆਂ) ਦਾ ਵਰਗੀਕਰਨ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਸਮ-ਸੰਭਾਵੀ ਨਹੀਂ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ ਦੋਹਾਂ ਸਿੱਕਿਆਂ ਨੂੰ ਉਛਾਲਣ 'ਤੇ ਇਹ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲੇ 'ਤੇ ਚਿਤ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਤੇ ਪਟ ਜਾਂ ਪਹਿਲੇ 'ਤੇ ਪਟ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ 'ਤੇ ਚਿੱਤ ਆਵੇ। ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ 'ਤੇ ਪਟ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਤੇ ਚਿਤ ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੋਹਾਂ 'ਤੇ ਚਿਤ (ਜਾਂ ਦੋਹਾਂ 'ਤੇ ਪਟ) ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਤੋਂ ਦੁਗਣੀ ਹੈ।

(ii) ਸਹੀ ਹੈ। ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਲਏ ਗਏ ਦੋਵੇਂ ਪਰਿਣਾਮ ਸਮ-ਸੰਭਾਵੀ ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 15.2 (ਇੱਛਾ-ਅਨੁਸਾਰ)*

1. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{8}{25}$ (iii) $\frac{4}{5}$

2.

	1	2	2	3	3	6
1	2	3	3	4	4	7
2	3	4	4	5	5	8
2	3	4	4	5	5	8
3	4	5	5	6	6	9
3	4	5	5	6	6	9
6	7	8	8	9	9	12

(i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{9}$ (iii) $\frac{5}{12}$

3. 10 4. $\frac{x}{12}$, $x = 3$ 5. 8

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A1.1

1. (i) ਸ਼ੱਕੀ (ii) ਸੱਚ (iii) ਸੱਚ (iv) ਸ਼ੱਕੀ
   (v) ਸ਼ੱਕੀ
2. (i) ਸੱਚ (ii) ਸੱਚ (iii) ਝੂਠ (iv) ਸੱਚ (v) ਸੱਚ
3. ਕੇਵਲ (ii) ਹੀ ਸੱਚ ਹੈ।
4. (i) ਜੇਕਰ $a > 0$ ਅਤੇ $a^2 > b^2$, ਤਾਂ $a > b$.
   (ii) ਜੇਕਰ $xy \geq 0$ ਅਤੇ $x^2 = y^2$, ਤਾਂ $x = y$.
   (iii) ਜੇਕਰ $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ ਅਤੇ $y \neq 0$, ਤਾਂ $x = 0$.
   (iv) ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਇਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A1.2

1. A ਨਾਸ਼ਵਾਨ ਹੈ। 2. ab ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
3. $\sqrt{17}$ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਰੂਪ ਅਸ਼ਾਂਤ ਅਤੇ ਅਣ ਅਵਰਤੀ ਹੈ।
4. $y = 7$ 5. $\angle A = 100°$, $\angle C = 100°$, $\angle D = 180°$
6. PQRS ਇਕ ਆਇਤ ਹੈ।
7. ਹਾਂ, ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਦੇ ਅਧਾਰ 'ਤੇ। ਨਹੀਂ, ਕਿਉਂਕਿ $\sqrt{3721} = 61$ ਹੈ ਜੋ ਅਪਰਿਮੇਯ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਗਲਤ ਸੀ ਇਸ ਲਈ ਸਿੱਟਾ ਝੂਠ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A1.3

1. ਕਿਸੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਦੇ ਲਈ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $2n + 1$ ਅਤੇ $2n + 3$ ਲਓ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A1.4

1. (i) ਮਨੁੱਖ ਨਾਸ਼ਵਾਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।
   (ii) ਰੇਖਾ l ਰੇਖਾ m ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।
   (iii) ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀਆਂ ਨਹੀਂ ਹਨ।
   (iv) ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ।
   (v) ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਟਾਂਕ ਨਹੀਂ ਹਨ।
   (vi) ਕੁਝ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਸੁਸਤ ਹਨ।
   (vii) ਸਾਰੀਆਂ ਬਿੱਲੀਆਂ ਕਾਲੀਆਂ ਹਨ।
   (viii) ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ x ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ $\sqrt{x} = -1$.

(ix) ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ a ਨੂੰ 2 ਨਹੀਂ ਵੰਡਦਾ (ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ)

(x) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਨਹੀਂ ਹਨ।

2. (i) ਹਾਂ (ii) ਨਹੀਂ (iii) ਨਹੀਂ (iv) ਨਹੀਂ (v) ਹਾਂ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A1.5

1. (i) ਜੇਕਰ ਸ਼ਰਨ ਨੂੰ ਵੱਧ ਪਸੀਨਾ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਟੋਕੀਉ ਵਿੱਚ ਗਰਮੀ ਹੈ।
   (ii) ਜੇਕਰ ਸ਼ਾਲਿਨੀ ਦਾ ਢਿੱਡ ਗੁੜਗੁੜਾਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਭੁੱਖੀ ਹੈ।
   (iii) ਜੇਕਰ ਜਸਵੰਤ ਡਿਗਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਵਜ਼ੀਫਾ ਲੈਂਦਾ ਹੈ।
   (iv) ਜੇਕਰ ਪੌਦਾ ਜਿਊਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਵਿੱਚ ਫੁੱਲ ਹਨ।
   (v) ਜੇਕਰ ਜਾਨਵਰ ਦੀ ਪੂਛ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਬਿੱਲੀ ਹੈ।
2. (i) ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਅਧਾਰ 'ਤੇ ਬਣੇ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹਨ ਤਾਂ ਇਹ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ। ਸੱਚ
   (ii) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ ਟਾਂਕ ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਵੀ ਟਾਂਕ ਹੈ। ਸੱਚ
   (iii) ਜੇਕਰ $x = 1$, ਤਾਂ $x^2 = 1$. ਸੱਚ
   (iv) ਜੇਕਰ AC ਅਤੇ BD ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ABCD ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ। ਸੱਚ
   (v) ਜੇਕਰ $a + (b + c) = (a + b) + c$, ਤਾਂ a, b ਅਤੇ c ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਝੂਠ
   (vi) ਜੇਕਰ $x + y$ ਇਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ x ਅਤੇ y ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਝੂਠ
   (vii) ਜੇਕਰ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦੇ ਸਿਖਰ ਇੱਕ ਚੱਕਰ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਨ। ਸੱਚ

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A1.6

1. $b \leq d$ ਦੇ ਉਲਟ ਮੁੱਲ ਲਉ।
3. ਅਧਿਆਇ 1 ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ 10 ਨੂੰ ਵੇਖੋ।
6. IX ਜਮਾਤ ਦੀ ਗਣਿਤ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) 5.1 ਵੇਖੋ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A2.2

1. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) 160
2. 1 cm^2 ਖੇਤਰਫਲ ਲਉ ਅਤੇ ਇਸ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਗਿਣੋ। ਕੁੱਲ ਦਰਖਤਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਇਸ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਖੇਤਰਫਲ (cm^2 ਵਿੱਚ) ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹੋਵੇਗਾ।
3. ਕਿਸ਼ਤ ਯੋਜਨਾ ਦੇ ਅਧੀਨ ਵਿਆਜ ਦੀ ਦਰ 17.74% ਹੈ ਜੋ 18% ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ A2.3

1. ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਆਪਣੇ ਆਪ ਉੱਤਰ ਪਤਾ ਕਰਨ।