Government of Karnataka

# गणित

# MATHEMATICS

# 9

## नौवीं कक्षा

## Ninth Standard

## भाग – 2



राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

**Karnataka Textbook Society (R.)**
100 Feet Ring Road, Banashankari 3rd Stage, Bengaluru - 85

# आमुख

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (2005) सुझाती है कि बच्चों के स्कूली जीवन को बाहर के जीवन से जोड़ा जाना चाहिए। यह सिद्धान्त किताबी ज्ञान की उस विरासत के विपरीत है जिसके प्रभाववश हमारी व्यवस्था आज तक स्कूल और घर के बीच अंतराल बनाये हुए है। नई राष्ट्रीय पाठ्यचर्या पर आधारित पाठ्यक्रम और पाठ्यपुस्तकें इस बुनियादी विचार पर अमल करने का प्रयास हैं। इस प्रयास में हर विषय को एक मजबूत दीवार से घेर देने और जानकारी को रटा देने की प्रवृत्ति का विरोध शामिल है। आशा है कि ये कदम हमें राष्ट्रीय शिक्षा नीति (1986) में वर्णित बाल-केन्द्रित व्यवस्था की दिशा में काफ़ी दूर तक ले जाएँगे।

इस प्रयत्न की सफलता अब इस बात पर निर्भर है कि स्कूलों के प्राचार्य और अध्यापक बच्चों को कल्पनाशील गतिविधियों और सवालों की मदद से सीखने और सीखने के दौरान अपने अनुभव पर विचार करने का अवसर देते हैं। हमें यह मानना होगा कि यदि जगह, समय और आज़ादी दी जाए तो बच्चे बड़ों द्वारा सौंपी गई सूचना-सामग्री से जुड़कर और जूझकर नये ज्ञान का सृजन करते हैं। शिक्षा के विविध साधनों व स्रोतों की अनेदखी किये जाने का प्रमुख कारण पाठ्यपुस्तक को परीक्षा का एकमात्र आधार बनाने की प्रवृत्ति है। सर्जना और पहल को विकसित करने के लिये ज़रूरी है कि हम बच्चों को सीखने की प्रक्रिया में पूरा भागीदार मानें और बनाएँ, उन्हें ज्ञान की निर्धारित खुराक का ग्राहक मानना छोड़ दें।

ये उद्देश्य स्कूल की दैनिक ज़िन्दगी और कार्यशैली में काफ़ी फेरबदल की माँग करते हैं। दैनिक समय-सारणी में लचीलापन उतना ही ज़रूरी है जितनी वार्षिक कैलेण्डर के अमल में चुस्ती, जिससे शिक्षण के लिये नियत दिनों की संख्या हकीकत बन सके। शिक्षण और मूल्यांकन की विधियाँ भी इस बात को तय करेंगी कि यह पाठ्यपुस्तक स्कूल में बच्चों के जीवन को मानसिक दबाव तथा बोरियत की जगह खुशी का अनुभव बनाने में कितनी प्रभावी सिद्ध होती है। बोझ की समस्या से निपटने के लिये पाठ्यक्रम निर्माताओं ने विभिन्न चरणों में ज्ञान का पुनर्निधारण करते समय बच्चों के मनोविज्ञान एवं अध्यापन के लिये उपलब्ध समय का ध्यान रखने की पहले से अधिक सचेत कोशिश की है। इस कोशिश को और गहराने के यत्न में यह पाठ्यपुस्तक सोच-विचार और विस्मय, छोटे समूहों में बातचीत एवं बहस और हाथ से की जाने वाली गतिविधियों को प्राथमिकता देती है।

एन.सी.ई.आर.टी. इस पुस्तक की रचना के लिये बनाई गई पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति के परिश्रम के लिए कृतज्ञता व्यक्त करती है। परिषद् विज्ञान एवं गणित के सलाहकार समूह के अध्यक्ष प्रोफ़ेसर जयंत विष्णु नारलीकर और इस पुस्तक की मुख्य सलाहकार इन्दिरा गाँधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की प्रोफेसर पी. सिंक्लेयर की विशेष आभारी है। इस पाठ्यपुस्तक के विकास में कई शिक्षकों ने योगदान दिया; इस योगदान को संभव बनाने के लिये हम उनके प्राचार्यों के आभारी हैं। हम उन सभी संस्थाओं और संगठनों के प्रति कृतज्ञ हैं जिन्होंने अपने संसाधनों, सामग्री तथा सहयोगियों की मदद लेने में हमें उदारतापूर्वक सहयोग दिया। हम विशेष रूप से माध्यमिक एवं उच्चतर शिक्षा विभाग, मानव संसाधन विकास मंत्रालय द्वारा प्रोफेसर मृणाल मिरी और प्रोफ़ेसर जी. पी. देशपांडे की अध्यक्षता में गठित राष्ट्रीय निरीक्षण समिति द्वारा प्रदत्त बहुमूल्य समय एवं योगदान के लिए भी कृतज्ञ हैं। व्यवस्थागत सुधारों और अपने प्रकाशनों में निरन्तर निखार लाने के प्रति समर्पित एन.सी.ई.आर.टी. टिप्पणियों व सुझावों का स्वागत करेगी जिनसे भावी संशोधनों में मदद ली जा सके।

नयी दिल्ली *निदेशक*

*20 दिसंबर 2005* राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

# पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति

**विज्ञान एवं गणित के सलाहकार समूह के अध्यक्ष**

जयंत विष्णु नारलीकर, *इमीरिटस प्रोफ़ेसर,* अध्यक्ष, आई.यू.सी.ए.ए., गणेशखिंड, पूना विश्वविद्यालय, पूना।

**मुख्य सलाहकार**

पी. सिंक्लेयर, *प्रोफ़ेसर,* विज्ञान विद्यापीठ, इ.गा.रा.मु.वि., नयी दिल्ली

**मुख्य समन्वयक**

हुकुम सिंह, *प्रोफ़ेसर,* डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली

**सदस्य**

अंजली लाल, *पी.जी.टी.* (गणित), डी.ए.वी. पब्लिक स्कूल, सेक्टर-14, गुड़गांव
अंजू निरूला, *पी.जी.टी.* (गणित), डी.ए.वी. पब्लिक स्कूल, पुष्पांजली इंक्लेव, पीतम पुरा, दिल्ली
उदय सिंह, *लेक्चरर,* डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली
ए.के. वझलवार, *प्रोफ़ेसर,* डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली
एस. वेंकटरमन, *लेक्चरर,* विज्ञान विद्यापीठ, इ.गा.रा.मु.वि. नयी दिल्ली
जी.पी. दीक्षित, *प्रोफ़ेसर,* गणित और खगोलिकी विभाग, लखनऊ विश्वविद्यालय, लखनऊ
के.ए.एस.एस.वी. कामेश्वर राव, *लेक्चरर,* क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भुवनेश्वर
महेन्द्र आर. गजरे, *पी.जी.टी.,* अतुल विद्यालय, अतुल, जिला वलसाद
महेन्द्र शंकर, लेक्चरर (एस.जी.) (सेवानिवृत), रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली
रामा बालाजी, *टी.जी.टी.* (गणित), के.वी. मेग और केन्द्र, सेंट जान्स रोड, बंगलौर
वेद डुडेजा, *उप-प्रधानाचार्य* (सेवानिवृत), राजकीय बालिका माध्यमिक विद्यालय, सैनिक विहार, दिल्ली
संजय मुद्गल, *लेक्चरर,* सी.आई.ई.टी., रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली
शशिधर जगदीशन, *शिक्षक और सदस्य,* गवरनिंग कॉउंसिल, सेन्टर फॉर लर्निंग, बंगलौर

**हिन्दी रूपांतरकर्ता**

जी.पी. दीक्षित, *प्रोफ़ेसर,* गणित और खगोलिकी विभाग, लखनऊ विश्वविद्यालय, लखनऊ
महेन्द्र शंकर, लेक्चरर (एस.जी.) (सेवानिवृत), रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली
हरीश्वर प्रसाद सिन्हा, सी-210, राजाजी पुरम, लखनऊ

**सदस्य-समन्वयक**

राम अवतार, *प्रोफ़ेसर,* डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली (दिसम्बर 2005 तक)
आर.पी. मौर्य, *प्रोफ़ेसर,* डी.ई.एस.एम., रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली (जनवरी 2006 से)

# आभार

परिषद् पाठ्यपुस्तक की समीक्षा के लिए आयोजित कार्यशाला के निम्नलिखित प्रतिभागियों का उनके बहुमूल्य योगदान के लिए हार्दिक आभार प्रकट करती है: ए. के. सक्सैना, *प्रोफेसर* (सेवानिवृत), लखनऊ विश्वविद्यालय लखनऊ; सुनील बजाज, *एच.ओ.डी.* (गणित), एस.सी.ई.आर.टी. हरियाणा, गुड़गाँव; के. एल. आर्य, *प्रोफेसर* (सेवानिवृत), डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली; बंदिता कालरा, *लेक्चरर*, सर्वोदय कन्या विद्यालय, विकास पुरी, डिस्ट्रिक्ट सेंटर, नई दिल्ली; जगदीश सिंह, *पी.जी.टी.*, सैनिक स्कूल, कपूरथला; पी. के. बग्गा, *टी.जी.टी.*, एस.बी.वी., सुभाष नगर, नई दिल्ली; आर.सी. महाना, *टी.जी.टी.*, केन्द्रीय विद्यालय, संबलपुर; डी.आर. खंडवे, *टी.जी.टी.*, जे.एन.वी. दुधनोई, गोलपाड़ा; एस.एस. चट्टोपाध्याय, *एसिसटेंट मास्टर*, बिधान नगर गवर्नमेंट हाई स्कूल, कोलकाता; एन.ए. सुजाथा, *टी.जी.टी.*, के.वी. वास्को न. 1, गोवा; अकिला सहदेवन, *टी.जी.टी.*, के.वी. मीनांबक्कम, चेन्नई; एस.सी. राऊतो, *टी.जी.टी.*, सैंट्रल स्कूल फॉर तिब्बतनस, मसूरी; सुनील पी. जेवियर, *टी.जी.टी.*, एन.वी., नेरीयामंलगम, एरनाकुलम; अमित बजाज, *टी.जी.टी.*, सी.आर.पी.एफ पब्लिक स्कूल, रोहिणी, दिल्ली; आर.के. पाण्डे, *टी.जी.टी.*, डी.एम. स्कूल, आर.आई.ई. भोपाल; वी. माधवी, *टी.जी.टी.*, संस्कृति स्कूल, चाणक्यपुरी, नई दिल्ली; जी. श्री हरि बाबू, *टी.जी.टी.*, जे.एन.वी. कागज़नगर, अदिलाबाद।

परिषद् उन विषय-विशेषज्ञों, शिक्षकों एवं विभागीय सदस्यों की भी आभारी है जिन्होंने इस पुस्तक के हिन्दी संस्करण की समीक्षा की और इसे अधिक उपयोगी बनाने हेतु महत्त्वपूर्ण सुझाव दिए: नन्दकिशोर वर्मा, *लेक्चरर*, एच.ई.एस.-II, गणित विभाग, राज्य शैक्षिक अनु. एवं प्रशि. परि., हरियाणा, गुडगाँव; रविन्द्र सिंह पंवार, *पी.जी.टी.*, एम.बी.डी.ए.वी. सीनियर सै. स्कूल, यूसुफ सराय, नई दिल्ली; अजय कुमार सिंह, *टी.जी.टी.*, रामजस सी.सै. स्कूल, न. 3, कूचा नटवा, चाँदनी चौक, दिल्ली; सविता गर्ग, *पी.जी.टी.*, सर्वोदय कन्या विद्यालय, चांद नगर, नई दिल्ली; सुधा गुप्ता, *टी.जी.टी.*, सर्वोदय कन्या विद्यालय, अवन्तिका, रोहिणी, दिल्ली; राजकुमार भारद्वाज, *टी.जी.टी.*, राजकीय माध्यमिक बाल विद्यालय, ए-ब्लाक, सुल्तानपुरी, दिल्ली; अशोक कुमार गुप्ता, *टी.जी.टी.*, राजकीय उच्चतर माध्यमिक विद्यालय, एस.यू. ब्लाक, पीतमपुरा, दिल्ली; पी.के. तिवारी, *सहायक आयुक्त* (सेवानिवृत), केन्द्रीय विद्यालय संगठन, नई दिल्ली; आर.पी. मौर्य, (*समन्वयक*) *प्रोफ़ेसर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी.।

परिषद् पुस्तक विकास की प्रक्रिया में सहयोग के लिए एम. चन्द्रा, *प्रोफेसर एवं विभागाध्यक्ष*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी. का विशेष रूप से आभारी है।

परिषद् *कंप्यूटर प्रभारी*, दीपक कपूर; *डी.टी.पी. ऑपरेटर*, नरेश कुमार; *कॉपी संपादक*, प्रगति भारद्वाज और एल.आर. भारती; *प्रूफ रीडर*, योगिता शर्मा के प्रयासों के प्रति भी आभार प्रकट करती है। ए.पी.सी. कार्यालय, डी.ई.एस.एम. का प्रशासन, प्रकाशन विभाग और एन.सी.ई.आर.टी. सचिवालय के योगदान भी सराहनीय हैं।

# विषय सूची

अध्याय 8

# हीरोन का सूत्र



## 8.1 भूमिका

आप पिछली कक्षाओं में, विभिन्न आकारों की आकृतियों जैसे कि वर्ग, आयत, त्रिभुज और चतुर्भुज के बारे में पढ़ चुके हैं। आप इनमें से कुछ आकृतियों जैसे कि आयत, वर्ग इत्यादि के परिमाप और क्षेत्रफल भी परिकलित कर चुके हैं। उदाहरणार्थ, आप अपनी कक्षा के कमरे के फर्श का क्षेत्रफल और परिमाप ज्ञात कर सकते हैं।

आइए कमरे के फर्श का, उसकी भुजाओं के अनुदिश एक बार चलकर, चक्कर लगाएँ। ऐसा करने में आपने जो दूरी तय की है, वह फर्श का परिमाप है। कमरे के फर्श का परिमाप या माप (size) उसका क्षेत्रफल होता है।

इस प्रकार, यदि आपकी कक्षा का कमरा आयताकार है तथा इसकी लम्बाई और चौड़ाई क्रमश: 10 m और 8 m हैं, तो उसका परिमाप $2(10 + 8)$ m = 36 m होगा तथा उसका क्षेत्रफल 10 m × 8 m, अर्थात् 80 $m^2$ होगा।

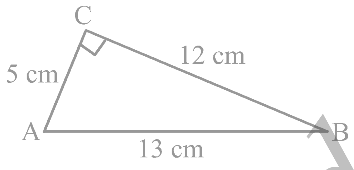
लम्बाई या चौड़ाई मापने का मात्रक (unit) मीटर (m) या सेन्टीमीटर (cm), इत्यादि लिया जाता है।

किसी समतल आकृति के क्षेत्रफल को मापने का मात्रक वर्ग मीटर ($m^2$) या वर्ग सेंटीमीटर ($cm^2$), इत्यादि लिया जाता है।

मान लीजिए आप एक त्रिभुजाकार बाग में बैठे हुए हैं। आप इसका क्षेत्रफल किस प्रकार ज्ञात करेंगे? अपनी पिछली कक्षाओं से, आप जानते हैं कि

$$\boxed{\textbf{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \textbf{आधार} \times \textbf{ऊँचाई}} \qquad \text{(I)}$$

हम देखते हैं कि यदि त्रिभुज एक **समकोण त्रिभुज** हो, तो हम समकोण को अंतर्विष्ट करने वाली भुजाओं को आधार और ऊँचाई लेकर सूत्र का सीधा प्रयोग करके क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, मान लीजिए कि एक समकोण त्रिभुज ABC की भुजाएँ क्रमशः 5 cm, 12 cm और 13 cm हैं। तब हम आधार 12 cm और ऊँचाई 5 cm लेते हैं। (देखिए आकृति 8.1)। अब, त्रिभुज का क्षेत्रफल निम्न होगा :



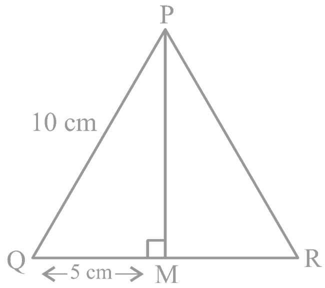
आकृति 8.1

$$\frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई} = \frac{1}{2} \times 12 \times 5 \text{ cm}^2$$

ध्यान दीजिए कि हम आधार 5 cm और ऊँचाई 12 cm भी ले सकते थे।

अब मान लीजिए कि हम एक **समबाहु त्रिभुज** PQR का क्षेत्रफल ज्ञात करना चाहते हैं, जिसकी प्रत्येक भुजा 10 cm है (देखिए आकृति 8.2)। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, हमें इसकी ऊँचाई ज्ञात होनी चाहिए। क्या आप इस त्रिभुज की ऊँचाई ज्ञात कर सकते हैं?

आइए हम याद करें कि त्रिभुज की भुजाएँ ज्ञात होने पर उसकी ऊँचाई कैसे ज्ञात करते हैं। यह एक समबाहु त्रिभुज में संभव है। QR का मध्य-बिन्दु M लेकर उसे P से मिलाइए। हम जानते हैं कि $\Delta$PMQ एक समकोण त्रिभुज है। अतः, पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग करके, हम लम्बाई PM नीचे दर्शाए अनुसार ज्ञात कर सकते हैं :



आकृति 8.2

$$PQ^2 = PM^2 + QM^2$$

अर्थात् $(10)^2 = PM^2 + (5)^2$, चूँकि QM = MR है।

अतः, हमें प्राप्त होता है : $PM^2 = 75$

अर्थात् $PM = \sqrt{75}$ cm $= 5\sqrt{3}$ cm

तब, $\Delta$ PQR का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई $= \frac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{3}\ \text{cm}^2 = 25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

आइए अब देखें कि इस सूत्र का प्रयोग करके एक **समद्विबाहु त्रिभुज** का क्षेत्रफल किस प्रकार परिकलित किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, हम एक त्रिभुज XYZ लेते हैं, जिसकी दोनों बराबर भुजाओं XY और XZ में से प्रत्येक भुजा 5 cm है तथा वह भुजा जो बराबर नहीं है, अर्थात् YZ, 8 cm लम्बाई की है (देखिए आकृति 8.3)।

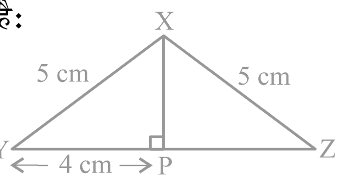
इस स्थिति में भी हम त्रिभुज की ऊँचाई जानना चाहते हैं। इसलिए, हम X से भुजा YZ पर लम्ब XP खींचते हैं। आप देख सकते हैं कि यह लम्ब XP त्रिभुज के आधार YZ को दो बराबर भागों में विभाजित करता है (RHS सर्वांगसम प्रतिबंध)।

अतः, $\quad YP = PZ = \frac{1}{2}\ YZ = 4\ \text{cm}$

फिर, पाइथागोरस प्रमेय के प्रयोग द्वारा, हमें प्राप्त होता है:

$$XP^2 = XY^2 - YP^2$$
$$= 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$$

अतः, $\quad XP = 3\ \text{cm}$




आकृति 8.3

अब, $\Delta$ XYZ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ (आधार YZ) $\times$ (ऊँचाई XP)

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 3\ \text{cm}^2 = 12\ \text{cm}^2$$

अब मान लीजिए कि हमें एक **विषमबाहु त्रिभुज** की भुजाओं की लम्बाइयाँ ज्ञात हैं, परन्तु ऊँचाई ज्ञात नहीं है। क्या आप अब भी इसका क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं? उदाहरणार्थ, आपके पास एक त्रिभुजाकार पार्क है, जिसकी भुजाएँ 40 m, 32 m और 24 m मापी गई हैं। आप इसका क्षेत्रफल किस प्रकार ज्ञात करेंगे? निश्चित रूप से, यदि आप सूत्र (I) का प्रयोग करके क्षेत्रफल ज्ञात करना चाहेंगे, तो आपको इसकी ऊँचाई ज्ञात करनी होगी। परन्तु हमें इसकी ऊँचाई ज्ञात करने का कोई संकेत नहीं मिल रहा है। ऐसा करने का प्रयत्न कीजिए। यदि आप ऐसा नहीं कर पाते हैं, तो अगले अनुच्छेद पर चले जाइए।

## 8.2 त्रिभुज का क्षेत्रफल – हीरोन के सूत्र द्वारा

हीरोन का जन्म संभवत: मिस्र में अलेक्जेंड्रिया नामक स्थान पर हुआ। उन्होंने अनुप्रायोगिक गणित (applied mathematics) पर कार्य किया। उनका गणितीय और भौतिकीय विषयों पर कार्य इतना अधिक और विभिन्न प्रकार का था कि उन्हें इन क्षेत्रों का एक विश्वकोण संबंधी (encyclopedic) लेखक समझा जाता था। उनका ज्यामितीय कार्य मुख्यत: मेन्सुरेशन (क्षेत्रमिति) की समस्याओं से संबंधित था। यह कार्य तीन पुस्तकों में लिखा गया है। पुस्तक 1 में, वर्गों, आयतों, त्रिभुजों, समलंबों, अनेक प्रकार के विशिष्ट चतुर्भुजों, सम बहुभुजों, वृत्तों के क्षेत्रफलों, बेलनों, शंकुओं, गोलों, इत्यादि के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का वर्णन है। इसी पुस्तक में, हीरोन ने त्रिभुज की तीनों भुजाओं के पदों में उसके क्षेत्रफल का प्रसिद्ध (या सुपरिचित) सूत्र प्रतिपादित किया है।

**हीरोन**
(10 सा॰यू॰पू॰–75 सा॰यू॰पू॰)
आकृति 8.4

हीरोन के इस सूत्र को *हीरो का सूत्र* (*Hero's formula*) भी कहा जाता है। इसे नीचे दिया जा रहा है:

$$\boxed{\textbf{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \qquad \text{(II)}$$

*जहाँ $a$, $b$ और $c$ त्रिभुज की भुजाएँ हैं तथा*

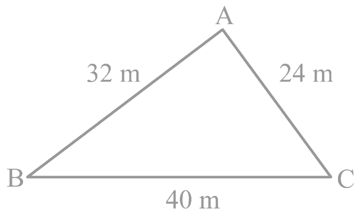
$$s = \text{त्रिभुज का अर्धपरिमाप (semi-perimeter)} = \frac{a+b+c}{2} \text{ है।}$$

यह सूत्र उस स्थिति में सहायक होता है, जब त्रिभुज की ऊँचाई सरलता से ज्ञात न हो सकती हो। आइए ऊपर बताए गए त्रिभुजाकार पार्क ABC का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, इस सूत्र का प्रयोग करें (देखिए आकृति 8.5)।

आइए $a = 40$ m, $b = 24$ m, $c = 32$ m लें ताकि हमें

$$s = \frac{40+24+32}{2} \text{ m} = 48 \text{ m}$$

प्राप्त होगा।




आकृति 8.5

अब, $s - a = (48 - 40)$ m $= 8$ m,

$s - b = (48 - 24)$ m $= 24$ m,

और $s - c = (48 - 32)$ m $= 16$ m

हैं।

अत:, पार्क ABC का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{48 \times 8 \times 24 \times 16}\ \text{m}^2 = 384\ \text{m}^2$

हम यह भी देखते हैं कि $32^2 + 24^2 = 1024 + 576 = 1600 = 40^2$ है। अत:, इस पार्क की भुजाएँ एक समकोण त्रिभुज बनाती हैं। सबसे बड़ी, अर्थात् BC, जिसकी लम्बाई 40 m है, इस त्रिभुज का कर्ण है तथा AB और AC के बीच का कोण 90° होगा।

इसलिए, सूत्र I से हम जाँच कर सकते हैं कि पार्क का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 32 \times 24\ \text{m}^2$

$= 384\ \text{m}^2$

हम पाते हैं कि यह क्षेत्रफल वही है जो हमें हीरोन के सूत्र से प्राप्त हुआ था।

अब आप पहले चर्चित किए गए अन्य त्रिभुजों के क्षेत्रफलों को हीरोन के सूत्र से ज्ञात करके जाँच कीजिए कि क्षेत्रफल पहले जैसे ही प्राप्त होते हैं। ये त्रिभुज हैं :

(i) 10 cm भुजा वाला समबाहु त्रिभुज

और (ii) असमान भुजा 8 cm और बराबर भुजाएँ 5 cm वाला समद्विबाहु त्रिभुज।

आप देखेंगे कि

(i) के लिए, $s = \frac{10 + 10 + 10}{2}\ \text{cm} = 15\ \text{cm}$

इसलिए, त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{15(15-10)(15-10)(15-10)}\ \text{cm}^2$

$= \sqrt{15 \times 5 \times 5 \times 5}\ \text{cm}^2 = 25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

(ii) के लिए, $s = \frac{8 + 5 + 5}{2}\text{cm} = 9\ \text{cm}$

इसलिए, त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{9(9-8)(9-5)(9-5)}\ \text{cm}^2$

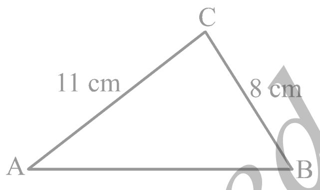
$= \sqrt{9 \times 1 \times 4 \times 4}\ \text{cm}^2 = 12\ \text{cm}^2$

आइए अब कुछ उदाहरण लें।

**उदाहरण 1 :** एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी दो भुजाएँ 8 cm और 11 cm हैं और जिसका परिमाप 32 cm है (देखिए आकृति 8.6)।

हल : यहाँ, परिमाप = 32 cm, $a$ = 8 cm और $b$ = 11 cm है।

इसलिए, तीसरी भुजा $c$ = 32 cm – (8 + 11) cm = 13 cm



आकृति 8.6

अब, $2s = 32$ है। इसलिए $s = 16$ cm,

$s - a = (16 - 8)$ cm = 8 cm,

$s - b = (16 - 11)$ cm = 5 cm,

$s - c = (16 - 13)$ cm = 3 cm

इसलिए, त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

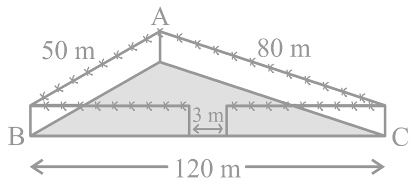
$= \sqrt{16 \times 8 \times 5 \times 3}\ \text{cm}^2 = 8\sqrt{30}\ \text{cm}^2$

उदाहरण 2 : एक त्रिभुजाकार पार्क ABC की भुजाएँ 120 m, 80 m और 50 m हैं (देखिए आकृति 8.7)। एक मालिन *धनिया* को इसके चारों ओर एक बाड़ लगानी है और इसके अंदर घास उगानी है। उसे कितने क्षेत्रफल में घास उगानी है? एक ओर 3 m चौड़े एक फाटक के लिए स्थान छोड़ते हुए इसके चारों ओर ₹ 20 प्रति मीटर की दर से काँटेदार बाड़ लगाने का व्यय भी ज्ञात कीजिए।

हल : पार्क का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, हमें प्राप्त है :

$2s = 50$ m + 80 m + 120 m = 250 m

अर्थात् $s = 125$ m



आकृति 8.7

इसलिए, $s - a = (125 - 120)$ m = 5 m,

$s - b = (125 - 80)$ m = 45 m,

$s - c = (125 - 50)$ m = 75 m

अतः, घास उगाने के लिए क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{125 \times 5 \times 45 \times 75}\ \text{m}^2$

$= 375\sqrt{15}\ \text{m}^2$

साथ ही, पार्क का परिमाप = AB + BC + CA = 250 m

अतः, बाड़ लगाने के लिए आवश्यक तार की लम्बाई = 250 m – 3 m (फाटक के लिए)

= 247 m

इसलिए, बाड़ लगाने का व्यय = ₹ 20 × 247 = ₹ 4940

**उदाहरण 3 :** एक त्रिभुजाकार भूखंड (plot) की भुजाओं का अनुपात 3 : 5 : 7 है और उसका परिमाप 300 m है। इस भूखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

**हल :** मान लीजिए भुजाएँ (मीटरों में) $3x$, $5x$ और $7x$ हैं (देखिए आकृति 8.8)।

तब, हम जानते हैं कि $3x + 5x + 7x = 300$ (त्रिभुज का परिमाप)

इसलिए, $15x = 300$ है, जिससे $x = 20$ प्राप्त होता है।

इसलिए, त्रिभुज की भुजाएँ $3 \times 20$ m, $5 \times 20$ m और $7 \times 20$ m हैं।

अर्थात् ये भुजाएँ 60 m, 100 m और 140 m हैं।

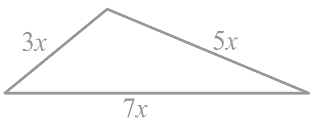
क्या आप अब (हीरोन का सूत्र प्रयोग करके) क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं?

अब, $$s = \frac{60 + 100 + 140}{2} \text{ m} = 150 \text{ m}$$

इसलिए, क्षेत्रफल $$= \sqrt{150(150 - 60)(150 - 100)(150 - 140)} \text{ m}^2$$

$$= \sqrt{150 \times 90 \times 50 \times 10} \text{ m}^2$$

$$= 1500\sqrt{3} \text{ cm}^2$$



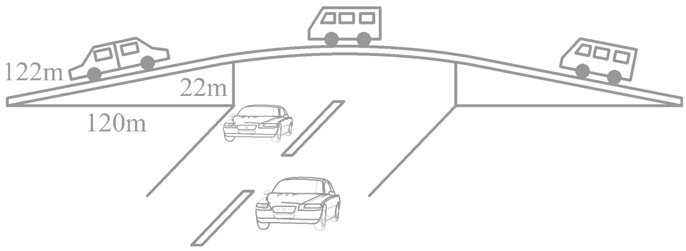
आकृति 8.8



## प्रश्नावली 8.1

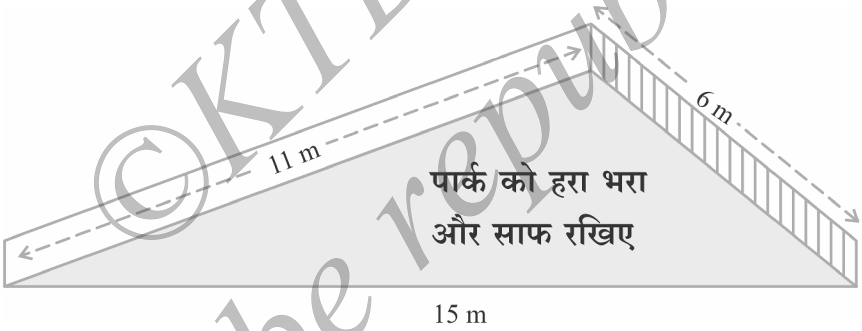
1. एक यातायात संकेत बोर्ड पर 'आगे स्कूल है' लिखा है और यह भुजा '$a$' वाले एक समबाहु त्रिभुज के आकार का है। हीरोन के सूत्र का प्रयोग करके इस बोर्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। यदि संकेत बोर्ड का परिमाप 180 cm है, तो इसका क्षेत्रफल क्या होगा?

2. किसी फ्लाईओवर (flyover) की त्रिभुजाकार दीवार को विज्ञापनों के लिए प्रयोग किया जाता है। दीवार की भुजाओं की लंबाइयाँ 122 m, 22 m और 120 m हैं (देखिए आकृति 8.9)। इस विज्ञापन से प्रति वर्ष ₹ 5000 प्रति m² की प्राप्ति होती है। एक कम्पनी ने एक दीवार को विज्ञापन देने के लिए 3 महीने के लिए किराए पर लिया। उसने कुल कितना किराया दिया?




आकृति 8.9

3. किसी पार्क में एक फिसल पट्टी (slide) बनी हुई है। इसकी पार्श्वीय दीवारों (side walls) में से एक दीवार पर किसी रंग से पेंट किया गया है और उस पर "पार्क को हरा-भरा और साफ रखिए" लिखा हुआ है (देखिए आकृति 8.10)। यदि इस दीवार की विमाएँ 15 m, 11 m और 6 m हैं, तो रंग से पेंट हुए भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।




आकृति 8.10

4. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी दो भुजाएँ 18 cm और 10 cm हैं तथा उसका परिमाप 42 cm है।

5. एक त्रिभुज की भुजाओं का अनुपात 12 : 17 : 25 है और उसका परिमाप 540 cm है। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

6. एक समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप 30 cm है और उसकी बराबर भुजाएँ 12 cm लम्बाई की हैं। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

## 8.3 चतुर्भुजों के क्षेत्रफल ज्ञात करने में हीरोन के सूत्र का अनुप्रयोग

मान लीजिए एक किसान के पास खेती के लिए भूमि है और वह इसे खेती करवाने के लिए कुछ मजदूरों को नियुक्त करती है और उन्हें प्रति वर्ग मीटर खेती किए गए क्षेत्रफल की दर से मजदूरी देती है। वह ऐसा कैसे करेगी? अनेक बार खेत चतुर्भुजों के आकार के होते हैं।

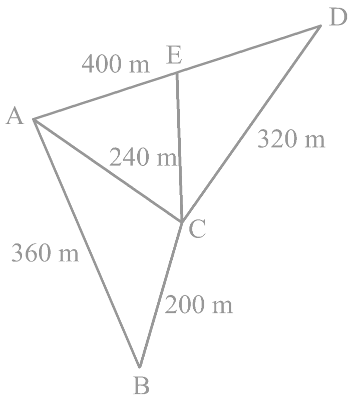
हमें चतुर्भुजाकार को त्रिभुजाकार भागों में विभाजित करना पड़ता है और फिर त्रिभुज के क्षेत्रफल के सूत्र का प्रयोग करके चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात हो जाता है। आइए नीचे दी हुई समस्या को देखें :

**उदाहरण 4 :** कमला के पास 240 m, 200 m और 360 m भुजाओं वाला एक त्रिभुजाकार खेत है, जहाँ वह गेहूँ उगाना चाहती है। इसी खेत से संलग्न 240 m, 320 m और 400 m भुजाओं वाला एक अन्य खेत है, जहाँ वह आलू और प्याज उगाना चाहती है (देखिए आकृति 8.11)। उसने इस खेत की सबसे लम्बी भुजा के मध्य-बिन्दु को सम्मुख शीर्ष से जोड़कर उसे दो भागों में विभाजित कर दिया। इनमें से एक भाग में उसने आलू उगाए और दूसरे भाग में प्याज उगाई। गेहूँ, आलू और प्याज के लिए कितने-कितने क्षेत्रफलों (हेक्टेयर में) का प्रयोग किया गया है? (1 हेक्टेयर = 10000 $m^2$ है)

**हल :** मान लीजिए ABC वह खेत है, जहाँ गेहूँ उगाया गया है। साथ ही, ACD वह खेत है जिसकी भुजा AD के मध्य-बिन्दु E को C से जोड़कर इस खेत को दो भागों में विभाजित किया गया है।

$$a = 200 \text{ m}, b = 240 \text{ m}, c = 360 \text{ m}$$

अतः, $s = \dfrac{200 + 240 + 360}{2}$ m = 400 m



आकृति 8.11

इसलिए, गेहूँ उगाने के लिए क्षेत्रफल

$$= \sqrt{400(400 - 200)\,(400 - 240)\,(400 - 360)} \text{ m}^2$$

$$= \sqrt{400 \times 200 \times 160 \times 40} \text{ m}^2$$

$= 16000\sqrt{2}$ $m^2$ = $1.6 \times \sqrt{2}$ हेक्टेयर

= 2.26 हेक्टेयर (लगभग)

आइए अब $\Delta$ACD का क्षेत्रफल परिकलित करें।

यहाँ, $s = \dfrac{240 + 320 + 400}{2}$ m = 480 m

अतः, $\Delta$ ACD का क्षेत्रफल = $\sqrt{480(480 - 240)\,(480 - 320)\,(480 - 400)}$ $m^2$

= $\sqrt{480 \times 240 \times 160 \times 80}$ $m^2$ = 38400 $m^2$ = 3.84 हेक्टेयर

ध्यान दीजिए कि AD के मध्य-बिन्दु E को सम्मुख शीर्ष C से जोड़ने वाला रेखाखंड त्रिभुज ACD को बराबर क्षेत्रफलों वाले दो भागों में विभाजित करता है। क्या आप इसका कारण बता सकते हैं? वास्तव में, इन दोनों भागों के बराबर आधार AE और ED हैं तथा नि:संदेह इनकी संगत ऊँचाइयाँ भी बराबर हैं।

अत:, आलू उगाने के लिए क्षेत्रफल = प्याज उगाने के लिए क्षेत्रफल

$= (3.84 \div 2)$ हेक्टेयर = 1.92 हेक्टेयर

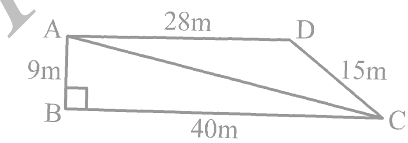
**उदाहरण 5 :** किसी स्कूल के विद्यार्थियों ने सफाई अभियान के लिए एक रैली निकाली। उन्होंने दो समूहों में, विभिन्न गलियों में चलकर मार्च किया। एक समूह ने गलियों AB, BC और CA में मार्च किया तथा अन्य समूह ने गलियों AC, CD और DA में मार्च किया (देखिए आकृति 8.12)। फिर उन्होंने इन गलियों द्वारा घेरे गए भागों को साफ किया। यदि AB = 9 m, BC = 40 m, CD = 15 m, DA = 28 m और $\angle B = 90°$ है, तो किस समूह ने अधिक सफाई की और कितनी अधिक? विद्यार्थियों द्वारा सफाई किया गया कुल क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए। (यह मान कर चलिए कि गलियों की चौड़ाइयों को छोड़ा जा सकता है।)

**हल :** चूँकि AB = 9 m और BC = 40 m, $\angle B = 90°$ है, इसलिए

$$AC = \sqrt{9^2 + 40^2}\ \text{m}$$

$$= \sqrt{81 + 1600}\ \text{m}$$

$$= \sqrt{1681}\ \text{m} = 41\text{m}$$



आकृति 8.12

अब, पहले समूह ने समकोण त्रिभुज ABC के क्षेत्रफल के बराबर सफाई की है।

अत:, क्षेत्रफल $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$$= \frac{1}{2} \times 40 \times 9\ \text{m}^2 = 180\ \text{m}^2$$

दूसरे समूह ने $\Delta ACD$ के क्षेत्रफल के बराबर सफाई की है। इसकी भुजाएँ 41 m, 15 m और 28 m हैं।

यहाँ, $$s = \frac{41 + 15 + 28}{2}\ \text{m} = 42\ \text{m}$$

अत:, $\Delta$ ACD का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{42(42-41)\,(42-15)(42-28)}\ \text{m}^2$$

$$= \sqrt{42 \times 1 \times 27 \times 14}\ \text{m}^2 = 126\ \text{m}^2$$

इसलिए, पहले समूह ने 180 $m^2$ सफाई की जो दूसरे समूह की सफाई से (180–126) $m^2$, अर्थात् 54 $m^2$ अधिक है।

सभी विद्यार्थियों द्वारा की गई सफाई का कुल क्षेत्रफल = (180 + 126) $m^2$ = 306 $m^2$

**उदाहरण 6 :** सानया के पास एक खेत है जो एक समचतुर्भुज के आकार का है (देखिए आकृति 8.13)। वह अपनी एक पुत्री और एक पुत्र से यह चाहती थी कि वे इस खेत पर काम करके अलग-अलग फसलों (या उपजों) का उत्पादन करें। उसने इस खेत को दो बराबर भागों में विभाजित कर दिया। यदि इस खेत का परिमाप 400 m है और एक विकर्ण 160 m है, तो प्रत्येक को खेती के लिए कितना क्षेत्रफल प्राप्त होगा?

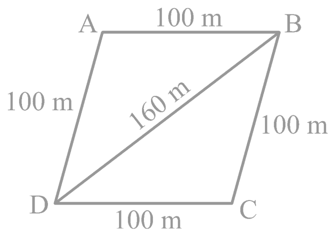
**हल :** मान लीजिए ABCD खेत है। इसका

परिमाप = 400 m

इसलिए, प्रत्येक भुजा = 400 m ÷ 4 = 100 m

अर्थात् AB = AD = 100 m

मान लीजिए विकर्ण BD = 160 m है। तब



आकृति 8.13

Δ ABD का अर्धपरिमाप

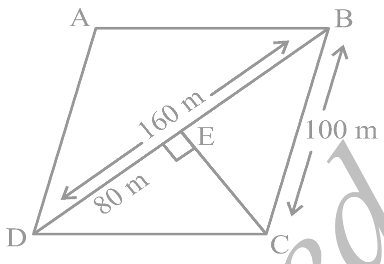
$$s = \frac{100+100+160}{2}\ \text{m} = 180\ \text{m}$$

अतः, Δ ABD का क्षेत्रफल $= \sqrt{180(180-100)\,(180-100)\,(180-160)}\ \text{m}^2$

$$= \sqrt{180 \times 80 \times 80 \times 20}\ \text{m}^2 = 4800\ \text{m}^2$$

इसलिए, प्रत्येक को खेती करने के लिए 4800 $m^2$ क्षेत्रफल प्राप्त होगा।

**वैकल्पिक विधि :** CE ⊥ BD खींचिए (देखिए आकृति 8.14)।



आकृति 8.14

चूँकि $BD = 160$ है, इसलिए

$DE = 160\text{ m} \div 2\text{ m} = 80\text{ m}$

साथ ही, $DE^2 + CE^2 = DC^2$ है।

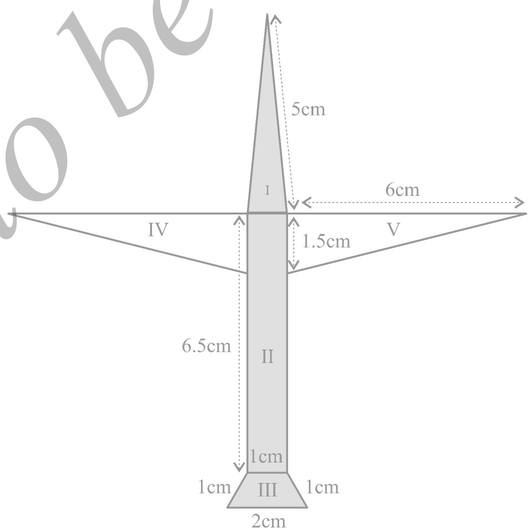
इसलिए, $CE = \sqrt{DC^2 - DE^2}$

अतः, $CE = \sqrt{100^2 - 80^2}\text{ m} = 60\text{ m}$

इसलिए, $\Delta$ BCD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 160 \times 60\text{ m}^2 = 4800\text{ m}^2$

## प्रश्नावली 8.2

1. एक पार्क चतुर्भुज ABCD के आकार का है, जिसमें $\angle C = 90°$, $AB = 9\text{ m}$, $BC = 12\text{ m}$, $CD = 5\text{ m}$ और $AD = 8\text{ m}$ है। इस पार्क का कितना क्षेत्रफल है?
2. एक चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसमें $AB = 3\text{ cm}$, $BC = 4\text{ cm}$, $CD = 4\text{ cm}$, $DA = 5\text{ cm}$ और $AC = 5\text{ cm}$ है।
3. राधा ने एक रंगीन कागज से एक हवाईजहाज का चित्र बनाया, जैसा कि आकृति 8.15 में दिखाया गया है। प्रयोग किए गए कागज का कुल क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 8.15

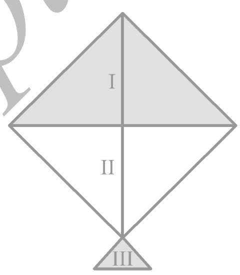
**4.** एक त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज का एक ही आधार है और क्षेत्रफल भी एक ही है। यदि त्रिभुज की भुजाएँ 26 cm, 28 cm और 30 cm हैं तथा समांतर चतुर्भुज 28 cm के आधार पर स्थित है, तो उसकी संगत ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

**5.** एक समचतुर्भुजाकार घास के खेत में 18 गायों के चरने के लिए घास है। यदि इस समचतुर्भुज की प्रत्येक भुजा 30 m है और बड़ा विकर्ण 48 m है, तो प्रत्येक गाय को चरने के लिए इस घास के खेत का कितना क्षेत्रफल प्राप्त होगा?

**6.** दो विभिन्न रंगों के कपड़ों के 10 त्रिभुजाकार टुकड़ों को सीकर एक छाता बनाया गया है (देखिए आकृति 8.16)। प्रत्येक टुकड़े के माप 20 cm, 50 cm और 50 cm हैं। छाते में प्रत्येक रंग का कितना कपड़ा लगा है?

**7.** एक पतंग तीन भिन्न-भिन्न शेडों (shades) के कागजों से बनी है। इन्हें आकृति 8.17 में I, II और III से दर्शाया गया है। पतंग का ऊपरी भाग 32 cm विकर्ण का एक वर्ग है और निचला भाग 6 cm, 6 cm और 8 cm भुजाओं का एक समद्विबाहु त्रिभुज है। ज्ञात कीजिए कि प्रत्येक शेड का कितना कागज प्रयुक्त किया गया है।

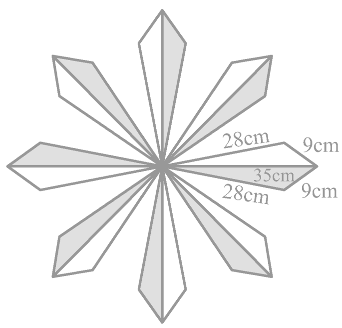

आकृति 8.16




आकृति 8.17

**8.** फर्श पर एक फूलों का डिज़ाइन 16 त्रिभुजाकार टाइलों से बनाया गया है, जिनमें से प्रत्येक की भुजाएँ 9 cm, 28 cm और 35 cm हैं (देखिए आकृति 8.18)। इन टाइलों को 50 पैसे प्रति $cm^2$ की दर से पालिश कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

**9.** एक खेत समलंब के आकार का है जिसकी समांतर भुजाएँ 25 m और 10 m हैं। इसकी असमांतर भुजाएँ 14 m और 13 m हैं। इस खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।




आकृति 8.18

## 8.4 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है :

1. यदि त्रिभुज की भुजाएँ $a, b$ और $c$ हों, तो हीरोन के सूत्र द्वारा त्रिभुज का क्षेत्रफल $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ होता है जहाँ $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ है।

2. एक चतुर्भुज जिसकी भुजाएँ तथा एक विकर्ण दिए हों, तो उसका क्षेत्रफल उसे दो त्रिभुजों में विभाजित करके और फिर हीरोन के सूत्र का प्रयोग करके ज्ञात किया जा सकता है।

अध्याय 9

# निर्देशांक ज्यामिति

What's the good of Mercator's North Poles and Equators, Tropics, Zones and Meridian Lines? So the Bellman would cry; and crew would reply ' They are merely conventional signs!'

(मरकेटर के उत्तरी ध्रुवों और विषुवत वृत्तों, उष्ण कटिबंधों, मंडलों और यामोत्तर रेखाओं में क्या अच्छाई है? इसलिए बेलमैन ने शोर मचाया होगा और नाविक दल ने उत्तर दिया होगा, ''ये केवल परंपरागत चिह्न हैं''।)

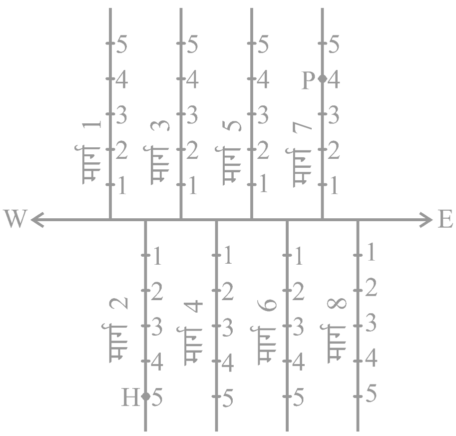
LEWIS CARROLL, *The Hunting of the Snark*



## 9.1 भूमिका

आप यह पढ़ चुके हैं कि एक संख्या रेखा पर एक बिन्दु का स्थान निर्धारण किस प्रकार किया जाता है। आप यह भी पढ़ चुके हैं कि एक रेखा पर एक बिन्दु की स्थिति की व्याख्या किस प्रकार की जाती है। ऐसी अनेक स्थितियाँ हैं जिनमें एक बिन्दु ज्ञात करने के लिए हमें एक से अधिक रेखाओं के संदर्भ में उसकी स्थिति की व्याख्या करनी होती है। उदाहरण के लिए, निम्नलिखित स्थितियों पर विचार कीजिए:

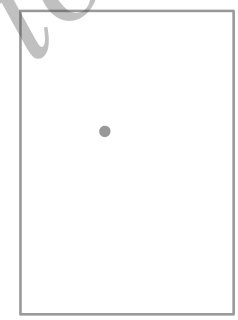
I. आकृति 9.1 में एक मुख्य मार्ग है जो पूर्व से पश्चिम की ओर जाता है और इस पर कुछ सड़कें बनी हैं, इनकी सड़क (मार्ग) संख्याएँ पश्चिम से पूर्व की ओर दी गई हैं।



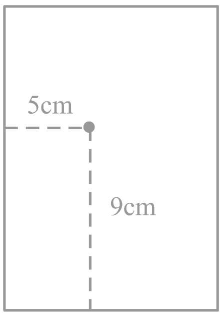

आकृति 9.1

प्रत्येक सड़क (मार्ग) पर बने मकानों पर संख्याएँ अंकित कर दी गई हैं। आपको यहाँ अपनी सहेली के मकान का पता लगाना है। क्या इसके लिए केवल एक निर्देश-बिन्दु का ज्ञात होना पर्याप्त होगा? उदाहरण के लिए, यदि हमें केवल यह ज्ञात हो कि वह सड़क 2 पर रहती है तो क्या हम उसके घर का पता सरलता से लगा सकते हैं? उतनी सरलता से नहीं जितनी सरलता से तब जबकि हमें दो जानकारियाँ अर्थात् सड़क की वह संख्या जिस पर उसका मकान है और मकान की संख्या ज्ञात होने पर होती है। यदि आप उस मकान पर जाना चाहते हैं जो सड़क 2 पर स्थित है और जिसकी संख्या 5 है, तो सबसे पहले आपको यह पता लगाना होगा कि सड़क 2 कौन-सी है और तब उस मकान का पता लगाना होता है जिसकी संख्या 5 है। आकृति 9.1 में H इसी मकान का स्थान दर्शाता है। इसी प्रकार, P उस मकान को दर्शाता है जो सड़क संख्या 7 पर है और जिसकी संख्या 4 है।

II. मान लीजिए आप एक कागज की शीट पर एक बिन्दु लगा देते हैं [आकृति 9.2 (a)]। यदि हम आपसे कागज़ पर लगे बिन्दु की स्थिति के बारे में पूछें, तो आप इसे कैसे बताएँगे? संभवत: आप इस प्रश्न का उत्तर इस प्रकार दें : "बिन्दु कागज़ के आधे के ऊपरी भाग में स्थित है" या "यह भी कह सकते हैं कि यह बिन्दु कागज़ की बायीं कोर के निकट स्थित है" या "यह बिन्दु कागज़ की बायीं ओर के ऊपरी कोने के काफी निकट स्थित है।" क्या ऊपर दिए गए कथनों में से किसी भी कथन के आधार पर आप बिन्दु की ठीक-ठीक स्थिति बता सकते हैं? स्पष्ट है कि उत्तर "नहीं" है। परन्तु, यदि आप यह कहें कि "बिन्दु कागज़ की बायीं कोर से लगभग 5 cm दूर है, तो इससे आपको बिन्दु की स्थिति का आभास तो हो जाता है फिर भी ठीक-ठाक स्थिति का पता नहीं चलता। थोड़ा बहुत सोच-विचार के बाद आप यह कह सकते हैं कि सबसे नीचे वाली रेखा से बिन्दु 9 cm की दूरी पर है। अब हम बिन्दु की स्थिति ठीक-ठाक बता सकते हैं।



(a)




(b)

आकृति 9.2

इसके लिए हम दो नियत रेखाओं अर्थात् कागज की बायीं कोर और कागज़ की सबसे नीचे वाली रेखा से बिन्दु की स्थिति नियत करते हैं [आकृति 9.2 (b)]। दूसरे शब्दों में, हम यह कह सकते हैं कि बिन्दु की स्थिति ज्ञात करने के लिए दो स्वतंत्र सूचनाओं का होना आवश्यक होता है।

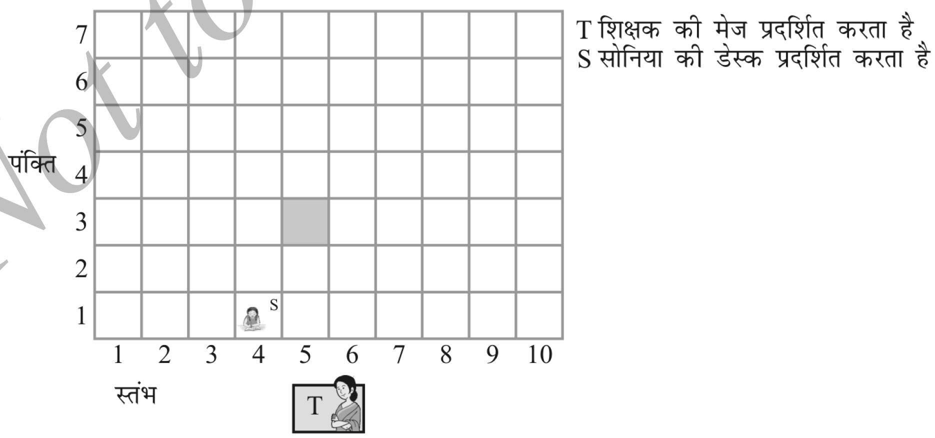
अब आप कक्षा में "बैठने की योजना" नामक निम्नलिखित क्रियाकलाप कीजिए:

**क्रियाकलाप 1 (बैठने की योजना) :** सभी मेज़ों को एक साथ खींचकर अपनी कक्षा में बैठने की एक योजना बनाइए। प्रत्येक मेज़ को एक वर्ग से निरूपित कीजिए। प्रत्येक वर्ग में उस विद्यार्थी का नाम लिखिए जिस पर वह बैठता है और जिसे वह वर्ग निरूपित करता है। कक्षा में प्रत्येक विद्यार्थी की स्थिति का ठीक-ठीक निर्धारण निम्नलिखित दो सूचनाओं की सहायता से किया जाता है।

(i) वह स्तंभ जिसमें वह बैठता / बैठती है।

(ii) वह पंक्ति जिसमें वह बैठता / बैठती है।

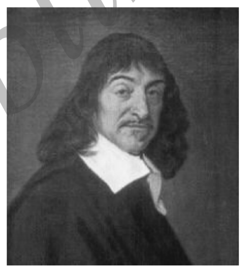
यदि आप उस मेज़ पर बैठते हैं जो 5वें स्तंभ और तीसरी पंक्ति में है, जिसे आकृति 9.3 में छायित वर्ग से दिखाया गया है, तो आपकी स्थिति को (5, 3) के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ पहली संख्या स्तंभ संख्या को प्रकट करती है और दूसरी संख्या पंक्ति संख्या को प्रकट करती है। क्या यह वही है जो कि (3, 5) है? आप अपनी कक्षा के अन्य विद्यार्थियों के नाम और उनके बैठने की स्थितियाँ लिखें। उदाहरण के लिए, यदि सोनिया चौथे स्तंभ और पहली पंक्ति में बैठती है, तो उसके लिए S(4, 1) लिखिए। शिक्षक की मेज़ आपके बैठने की योजना के अंतर्गत नहीं आती है। यहाँ हम शिक्षक को केवल एक प्रेक्षक ही मानते हैं।




आकृति 9.3

ऊपर की चर्चा में आपने यह देखा है कि एक तल पर रखी हुई किसी वस्तु की स्थिति दो लंब रेखाओं की सहायता से निरूपित की जा सकती है। यदि वस्तु एक बिन्दु है, तो हमें सबसे नीचे वाली रेखा से और कागज की बायीं कोर से बिन्दु की दूरी ज्ञात होना आवश्यक होता है। ''बैठने की योजना'' के संबंध में हमें स्तंभ की संख्या और पंक्ति की संख्या का जानना आवश्यक होता है। इस सरल विचारधारा के दूरगामी परिणाम होते हैं और इससे गणित की **निर्देशांक ज्यामिति** (Coordinate Geometry) नामक एक अति महत्वपूर्ण शाखा की व्युत्पत्ति हुई। इस अध्याय में, हमारा लक्ष्य निर्देशांक ज्यामिति की कुछ आधारभूत संकल्पनाओं से आपको परिचित कराना है। इसके बारे में आप विस्तार से अध्ययन उच्च कक्षाओं में करेंगे। प्रारंभ में फ्रांसीसी दार्शनिक और गणितज्ञ **रेने दकार्ते** ने इस अध्ययन को विकसित किया था।

कुछ लोग प्रात:काल में बिस्तर पर लेटे रहना पसंद करते हैं। यही आदत सत्रहवीं शताब्दी के महान फ्रांसीसी गणितज्ञ **रेने दकार्ते** की थी। परन्तु वह आलसी व्यक्ति नहीं था, वह यह समझता था कि बिस्तर पर पड़े-पड़े ही अधिक चिंतन किया जा सकता है। एक दिन जबकि वह अपने बिस्तर पर लेटे-लेटे आराम कर रहा था, उसने एक तल में एक बिन्दु की स्थिति का निर्धारण करने से संबंधित समस्या का हल ढूँढ़ निकाला। जैसाकि आप देखेंगे उसकी विधि अक्षांश और देशांतर की पुरानी विचारधारा की ही एक विकसित रूप थी। एक तल की एक बिन्दु की स्थिति का निर्धारण करने में प्रयुक्त पद्धति को दकार्ते के सम्मान में **कार्तीय पद्धति** (**Cartesian System**) भी कहा जाता है।



**रेने दकार्ते (1596 -1650)**

आकृति 9.4



## प्रश्नावली 9.1

**1.** एक अन्य व्यक्ति को आप अपने अध्ययन मेज पर रखे टेबल लैंप की स्थिति किस तरह बताएँगे?

**2.** **( सड़क योजना ) :** एक नगर में दो मुख्य सड़कें हैं, जो नगर के केन्द्र पर मिलती हैं। ये दो सड़कें उत्तर-दक्षिण की दिशा और पूर्व-पश्चिम की दिशा में हैं। नगर की अन्य सभी सड़कें इन मुख्य सड़कों के समांतर परस्पर 200 मीटर की दूरी पर हैं। प्रत्येक दिशा में लगभग पाँच सड़कें हैं। 1 सेंटीमीटर = 200 मीटर का पैमाना लेकर अपनी नोट बुक में नगर का एक मॉडल बनाइए। सड़कों को एकल रेखाओं से निरूपित कीजिए।

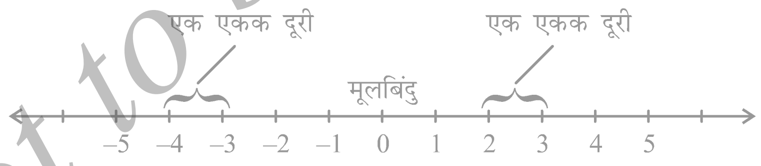
आपके मॉडल में एक-दूसरे को काटती हुई अनेक क्रॉस-स्ट्रीट (चौराहे) हो सकती हैं। एक विशेष क्रॉस-स्ट्रीट दो सड़कों से बनी है, जिनमें से एक उत्तर-दक्षिण दिशा में जाती है और दूसरी पूर्व-पश्चिम की दिशा में। प्रत्येक क्रॉस-स्ट्रीट का निर्देशन इस प्रकार किया जाता है: यदि दूसरी सड़क उत्तर-दक्षिण दिशा में जाती है और पाँचवीं सड़क पूर्व-पश्चिम दिशा में जाती है और ये एक क्रॉसिंग पर मिलती हैं, तब इसे हम क्रॉस-स्ट्रीट (2, 5) कहेंगे। इसी परंपरा से यह ज्ञात कीजिए कि

(i) कितनी क्रॉस-स्ट्रीटों को (4, 3) माना जा सकता है।

(ii) कितनी क्रॉस-स्ट्रीटों को (3, 4) माना जा सकता है।

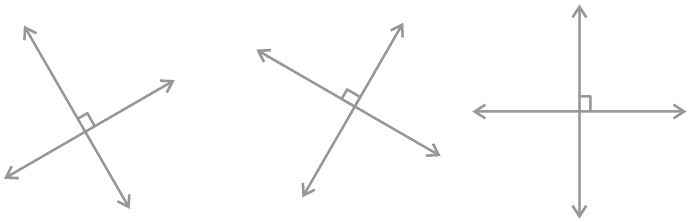
## 9.2 कार्तीय पद्धति

'संख्या पद्धति' के अध्याय में आप **संख्या रेखा** के बारे में पढ़ चुके हैं। संख्या रेखा पर एक नियत बिन्दु से दूरियों को बराबर एककों में एक दिशा में धनात्मक और दूसरी दिशा में ऋणात्मक अंकित किया जाता है। उस बिन्दु को, जहाँ से दूरियाँ अंकित की जाती हैं, **मूल-बिन्दु (origin)** कहा जाता है। एक रेखा पर समान दूरियों पर बिन्दुओं को अंकित करके, हम संख्या रेखा का प्रयोग संख्याओं को निरूपित करने के लिए करते हैं। यदि एक एकक दूरी संख्या '1' को निरूपित करती हो, तो 3 एकक दूरी संख्या '3' को निरूपित करेगी, जहाँ 'O' मूलबिन्दु है। मूलबिन्दु से धनात्मक दिशा में दूरी $r$ पर स्थित बिन्दु संख्या $r$ को निरूपित करती है। मूलबिन्दु से ऋणात्मक दिशा में दूरी $r$ पर स्थित बिन्दु संख्या $r$ को निरूपित करती है। संख्या रेखा पर विभिन्न संख्याओं के स्थान आकृति 9.5 में दिखाए गए हैं।



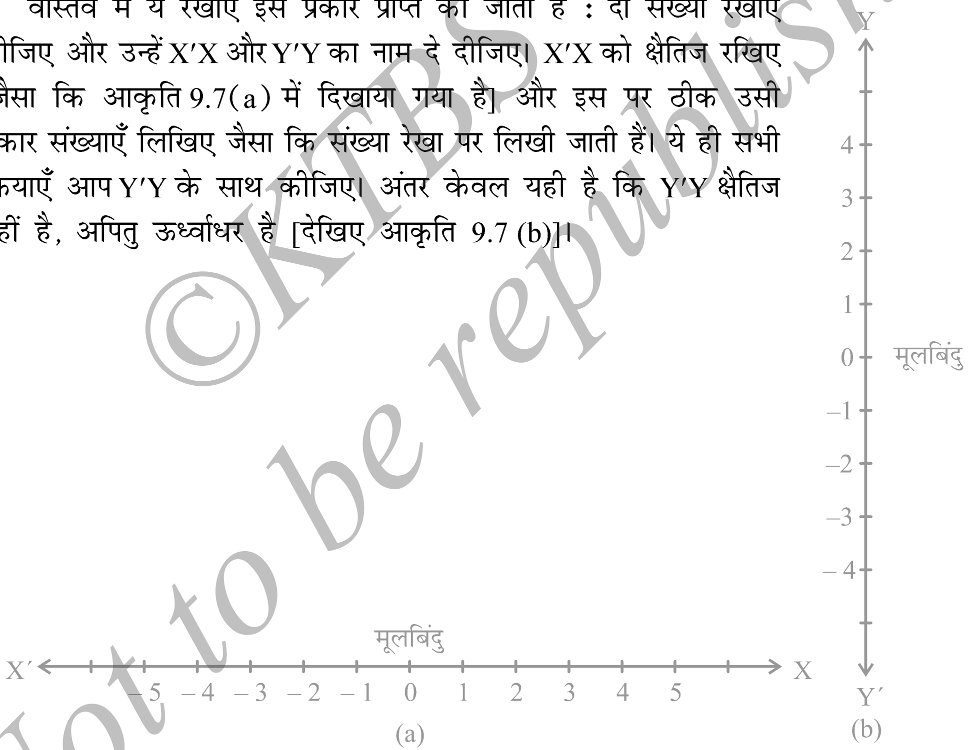

आकृति 9.5

दकार्ते ने एक तल पर एक दूसरे पर लंब दो रेखाओं को खींचने और इन रेखाओं के सापेक्ष तल पर बिन्दुओं का स्थान निर्धारण करने का विचार प्रस्तुत किया। लंब रेखाएँ किसी भी दिशा में हो सकती हैं, जैसा कि आकृति 9.6 में दिखाया गया है। लेकिन जब हम इस *अध्याय में* एक तल में स्थित एक बिन्दु का स्थान निर्धारण करने के लिए दो रेखाएँ लेंगे, तो एक रेखा क्षैतिज होगी और दूसरी रेखा ऊर्ध्वाधर, जैसा कि आकृति 9.6 (c) में दिखाया गया है।




आकृति 9.6

वास्तव में ये रेखाएँ इस प्रकार प्राप्त की जाती हैं : दो संख्या रेखाएँ लीजिए और उन्हें X′X और Y′Y का नाम दे दीजिए। X′X को क्षैतिज रखिए [जैसा कि आकृति 9.7(a) में दिखाया गया है] और इस पर ठीक उसी प्रकार संख्याएँ लिखिए जैसा कि संख्या रेखा पर लिखी जाती हैं। ये ही सभी क्रियाएँ आप Y′Y के साथ कीजिए। अंतर केवल यही है कि Y′Y क्षैतिज नहीं है, अपितु ऊर्ध्वाधर है [देखिए आकृति 9.7 (b)]।

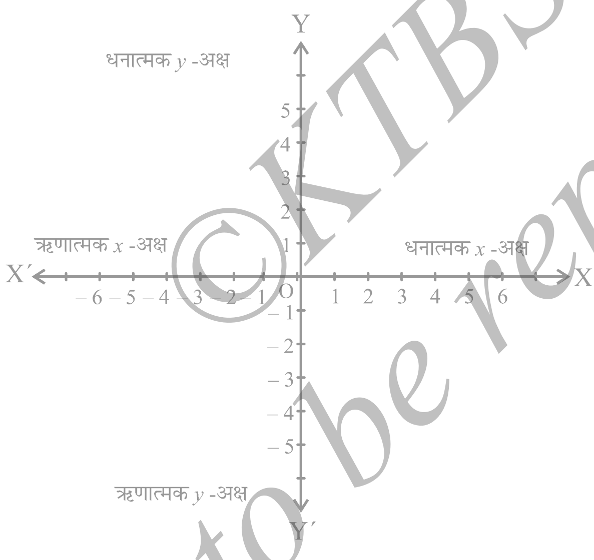



आकृति 9.7

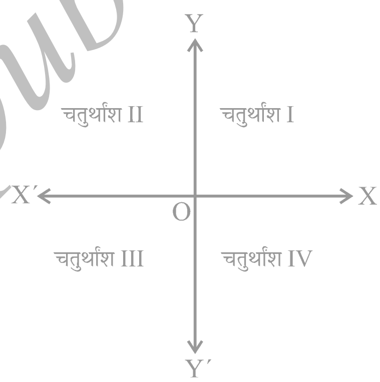
दोनों रेखाओं का संयोजन इस प्रकार कीजिए कि ये दो रेखाएँ एक-दूसरे को मूलबिन्दु पर काटती हों (आकृति 9.8)। क्षैतिज रेखा X′X को $x$ - अक्ष कहा जाता है और ऊर्ध्वाधर रेखा Y′Y को $y$ - अक्ष कहा जाता है। वह बिन्दु, जहाँ X′X और Y′Y एक-दूसरे को काटती हैं, उसे **मूलबिन्दु (origin)** कहा जाता है और इसे O से प्रकट किया जाता है। क्योंकि धनात्मक संख्याएँ OX और OY की दिशाओं में स्थित हैं, इसलिए OX और OY को क्रमशः

$x$-अक्ष और $y$-अक्ष की धनात्मक दिशाएँ कहा जाता है। इसी प्रकार, OX′ और OY′ को $x$-अक्ष और $y$-अक्ष की क्रमश: ऋणात्मक दिशाएँ कहा जाता है।

यहाँ आप यह देखते हैं कि ये दोनों अक्ष तल को चार भागों में विभाजित करती हैं। इन चार भागों को **चतुर्थांश (quadrants)** (एक–चौथाई) कहा जाता है। OX से वामावर्त दिशा में इन्हें I, II, III और IV चतुर्थांश कहा जाता है (देखिए आकृति 9.9)। इस प्रकार, इस तल में दोनों अक्ष और चारों चतुर्थांश सम्मिलित हैं। हम इस तल को *कार्तीय तल* (*Cartesian plane*) या *निर्देशांक तल* (*Coordinate plane*) या *xy-तल* (*xy-plane*) कहते हैं। अक्षों को *निर्देशांक अक्ष* (*coordinate axes*) कहा जाता है।

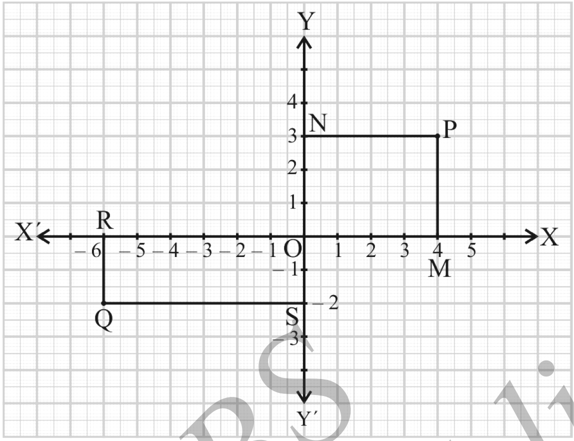



आकृति 9.8




आकृति 9.9

आइए अब हम यह देखें कि गणित में इस पद्धति का इतना महत्व क्यों है और यह किस प्रकार उपयोगी होती है। आगे दिया गया आरेख लीजिए, जहाँ अक्षों को आलेख कागज (graph paper) पर खींचा गया है। आइए हम अक्षों से बिन्दुओं P और Q की दूरियाँ ज्ञात करें। इसके लिए $x$-अक्ष पर लंब PM और $y$-अक्ष पर लंब PN डालिए। इसी प्रकार, हम लंब QR और QS डालते हैं, जैसा कि आकृति 9.10 में दिखाया गया है।




आकृति 9.10



आप पाते हैं कि

(i) $y$-अक्ष से बिन्दु P की लांबिक दूरी, जिसे $x$-अक्ष की धनात्मक दिशा में मापा गया है, PN = OM = 4 एकक है।

(ii) $x$-अक्ष से बिन्दु P की लांबिक दूरी, जिसे $y$-अक्ष की धनात्मक दिशा में मापा गया है, PM = ON = 3 एकक है।

(iii) $y$-अक्ष से बिन्दु Q की लांबिक दूरी, जिसे $x$-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में मापा गया है, OR = SQ = 6 एकक है।

(iv) $x$-अक्ष से बिन्दु Q की लांबिक दूरी, जिसे $y$-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में मापा गया है, OS = RQ = 2 एकक है।

इन दूरियों की सहायता से हम बिन्दुओं का निर्धारण किस प्रकार करें कि कोई भ्रम न रह जाए?

हम निम्नलिखित परंपराओं को ध्यान में रखकर एक बिन्दु के निर्देशांक लिखते हैं:

(i) एक बिन्दु का $x$ - निर्देशांक ($x$-coordinate), $y$-अक्ष से इस बिन्दु की लांबिक दूरी है, जिसे $x$-अक्ष पर मापा जाता है (जो कि $x$-अक्ष की धनात्मक दिशा में धनात्मक और $x$-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में ऋणात्मक होती है)। बिन्दु P के लिए यह + 4 है और Q के लिए यह – 6 है। $x$ - निर्देशांक को **भुज (abscissa)** भी कहा जाता है।

(ii) एक बिन्दु का $y$-निर्देशांक, $x$-अक्ष से उसकी लांबिक दूरी होती है जिसे $y$-अक्ष पर मापा जाता है (जो $y$-अक्ष की धनात्मक दिशा में धनात्मक और $y$-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में ऋणात्मक होती है)। बिन्दु P के लिए यह $+3$ है और Q के लिए $-2$ है। $y$-निर्देशांक को **कोटि (ordinate)** भी कहा जाता है।

(iii) निर्देशांक तल में एक बिन्दु के निर्देशांक लिखते समय पहले $x$-निर्देशांक लिखते हैं और उसके बाद $y$-निर्देशांक लिखते हैं। हम निर्देशांकों को कोष्ठक के अंदर लिखते हैं।

अत: P के निर्देशांक (4, 3) हैं और Q के निर्देशांक (– 6, – 2) हैं।

ध्यान दीजिए कि तल में एक बिन्दु के निर्देशांक अद्वितीय होते हैं। इसके अनुसार निर्देशांक (3, 4) और निर्देशांक (4, 3) समान नहीं हैं।

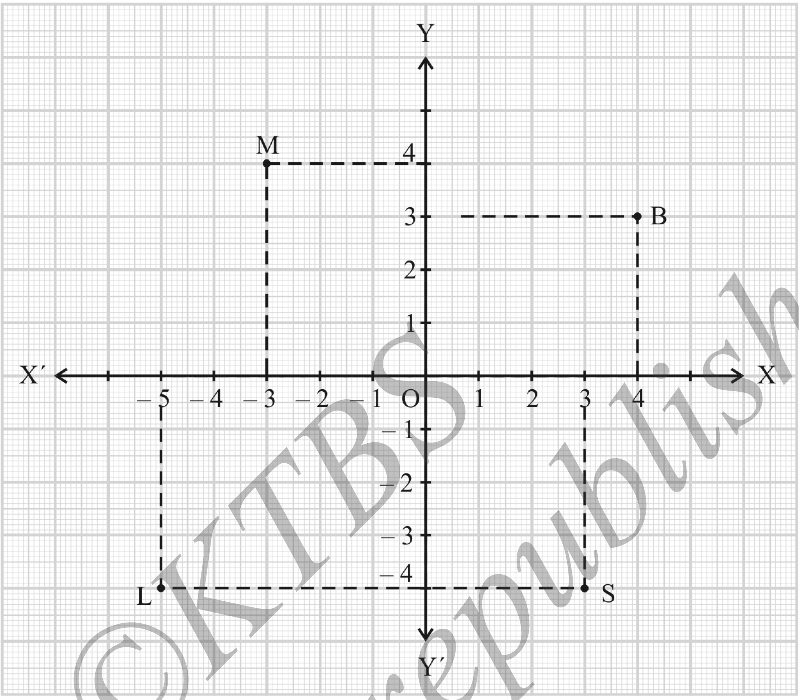
उदाहरण 1 : नीचे दी गई आकृति 9.11 को देखकर निम्नलिखित कथनों को पूरा कीजिए:

(i) बिन्दु B का भुज और कोटि क्रमश: _ _ _ _ और _ _ _ _ हैं। अत: B के निर्देशांक (_ _ _, _ _ _) हैं।

(ii) बिन्दु M के $x$-निर्देशांक और $y$-निर्देशांक क्रमश: _ _ _ और _ _ _ हैं। अत: M के निर्देशांक (_ _, _ _) हैं।

(iii) बिन्दु L के $x$-निर्देशांक और $y$-निर्देशांक क्रमश: _ _ _ और _ _ _ हैं। अत: L के निर्देशांक (_ _, _ _) हैं।

(iv) बिन्दु S के $x$-निर्देशांक और $y$-निर्देशांक क्रमश: _ _ _ और _ _ _ हैं। अत: S के निर्देशांक (_ _, _ _) हैं।




आकृति 9.11

**हल :** (i) क्योंकि $y$-अक्ष से बिन्दु B की दूरी 4 एकक है, इसलिए बिन्दु B का $x$-निर्देशांक या भुज 4 होगा। $x$-अक्ष से बिन्दु B की दूरी 3 एकक है, इसलिए बिन्दु B का $y$-निर्देशांक अर्थात् कोटि 3 होगी। अत: बिन्दु B के निर्देशांक (4, 3) हैं।

ऊपर (i) की भांति:

(ii) बिन्दु M के $x$-निर्देशांक और $y$-निर्देशांक क्रमश: –3 और 4 हैं। अत: बिन्दु M के निर्देशांक (–3, 4) हैं।

(iii) बिन्दु L के $x$-निर्देशांक और $y$ - निर्देशांक क्रमश: –5 और – 4 हैं। अत: बिन्दु L के निर्देशांक (–5, – 4) हैं।

(iv) बिन्दु S के $x$-निर्देशांक और $y$- निर्देशांक क्रमश: 3 और – 4 है। अत: बिन्दु S के निर्देशांक (3, – 4) हैं।

**उदाहरण 2 :** आकृति 9.12 में अक्षों पर अंकित बिन्दुओं के निर्देशांक लिखिए:

**हल :** आप यहाँ देख सकते हैं कि :

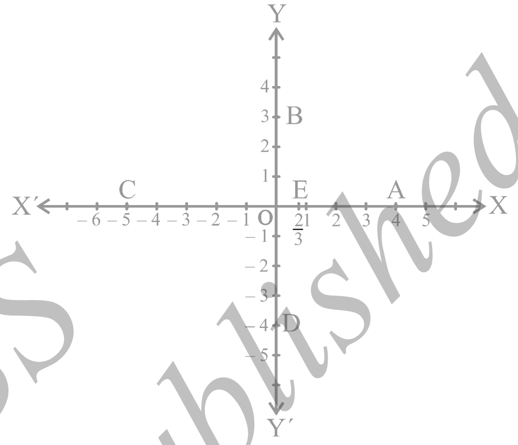
(i) बिन्दु A, $y$-अक्ष से + 4 एकक की दूरी पर है और $x$-अक्ष से दूरी 0 पर है। अत: बिन्दु A का $x$-निर्देशांक 4 है और $y$-निर्देशांक 0 है। इसलिए A के निर्देशांक (4, 0) हैं।

(ii) B के निर्देशांक (0, 3) हैं। क्यों?

(iii) C के निर्देशांक (– 5, 0) हैं। क्यों?

(iv) D के निर्देशांक (0, – 4) हैं। क्यों?

(v) E के निर्देशांक $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ हैं। क्यों?




आकृति 9.12

क्योंकि $x$-अक्ष का प्रत्येक बिन्दु $x$-अक्ष से शून्य दूरी पर है, इसलिए $x$-अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिन्दु का $y$-निर्देशांक सदा ही शून्य होगा। इस तरह, $x$-अक्ष पर स्थित किसी भी बिन्दु के निर्देशांक $(x, 0)$ के रूप के होंगे, जहाँ $y$-अक्ष से बिन्दु की दूरी $x$ है। इसी प्रकार, $y$-अक्ष पर स्थित किसी भी बिन्दु के निर्देशांक $(0, y)$ के रूप के होंगे, जहाँ $x$-अक्ष से बिन्दु की दूरी $y$ है। क्यों?

*मूलबिन्दु O के निर्देशांक क्या हैं? क्योंकि दोनों अक्षों से इसकी दूरी शून्य है, इसलिए इसके भुज और कोटि दोनों ही शून्य होंगे। अत: मूलबिन्दु के निर्देशांक* **(0, 0)** होते हैं।

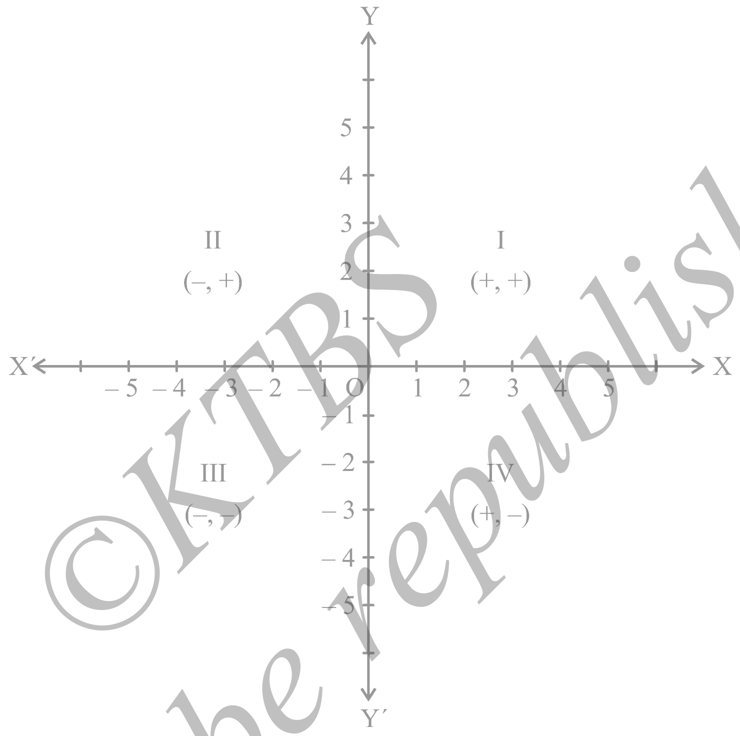
ऊपर के उदाहरणों में, आपने एक बिन्दु के निर्देशांकों में लगे चिह्नों और उस बिन्दु के चतुर्थांश, जिसमें वह स्थित है, के बीच के निम्नलिखित संबंधों की ओर अवश्य ध्यान दिया होगा:

(i) यदि बिन्दु पहले चतुर्थांश में है, तो बिन्दु (+, +) के रूप का होगा, क्योंकि पहला चतुर्थांश धनात्मक $x$-अक्ष और धनात्मक $y$-अक्ष से परिबद्ध है।

(ii) यदि बिन्दु दूसरे चतुर्थांश में है, तो बिन्दु (–, +) के रूप का होगा, क्योंकि दूसरा चतुर्थांश ऋणात्मक $x$-अक्ष और धनात्मक $y$-अक्ष से परिबद्ध है।

(iii) यदि बिन्दु तीसरे चतुर्थांश में है, तो बिन्दु (–, –) के रूप में होगा, क्योंकि तीसरा चतुर्थांश ऋणात्मक $x$-अक्ष और ऋणात्मक $y$-अक्ष से परिबद्ध है।

(iv) यदि बिन्दु चौथे चतुर्थांश में है, तो बिन्दु (+, –) के रूप में होगा, क्योंकि चौथा चतुर्थांश धनात्मक $x$-अक्ष और ऋणात्मक $y$-अक्ष से परिबद्ध है (देखिए आकृति 9.13)।




आकृति 9.13



**टिप्पणी :** एक तल में स्थित एक बिन्दु की व्याख्या करने के संबंध में ऊपर हमने जिस पद्धति के बारे में चर्चा की है, वह केवल एक परंपरा है जिसको पूरे विश्व में स्वीकार किया जाता है। उदाहरण के लिए, पद्धति में ऐसा भी हो सकता है कि पहले कोटि लिखी जाए और उसके बाद भुज लिखा जाए। फिर भी, जिस पद्धति का उल्लेख हमने किया है उसे पूरा विश्व बिना किसी भ्रम के स्वीकार करता है।

## प्रश्नावली 9.2

**1.** निम्नलिखित प्रश्नों में से प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दीजिए:

(i) कार्तीय तल में किसी बिन्दु की स्थिति निर्धारित करने वाली क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर रेखाओं के क्या नाम हैं?

(ii) इन दो रेखाओं से बने तल के प्रत्येक भाग के नाम बताइए।

(iii) उस बिन्दु का नाम बताइए जहाँ ये दो रेखाएँ प्रतिच्छेदित होती हैं।

**2.** आकृति 9.14 देखकर निम्नलिखित को लिखिए:

(i) B के निर्देशांक

(ii) C के निर्देशांक

(iii) निर्देशांक $(-3, -5)$ द्वारा पहचाना गया बिन्दु

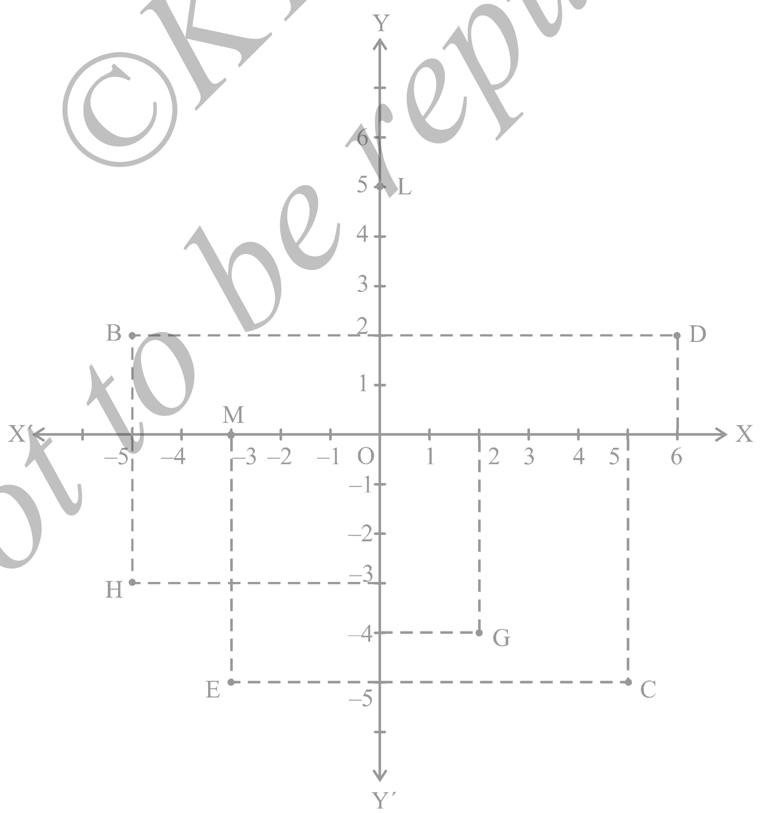
(iv) निर्देशांक $(2, -4)$ द्वारा पहचाना गया बिन्दु

(v) D का भुज

(vi) बिन्दु H की कोटि

(vii) बिन्दु L के निर्देशांक

(viii) बिन्दु M के निर्देशांक

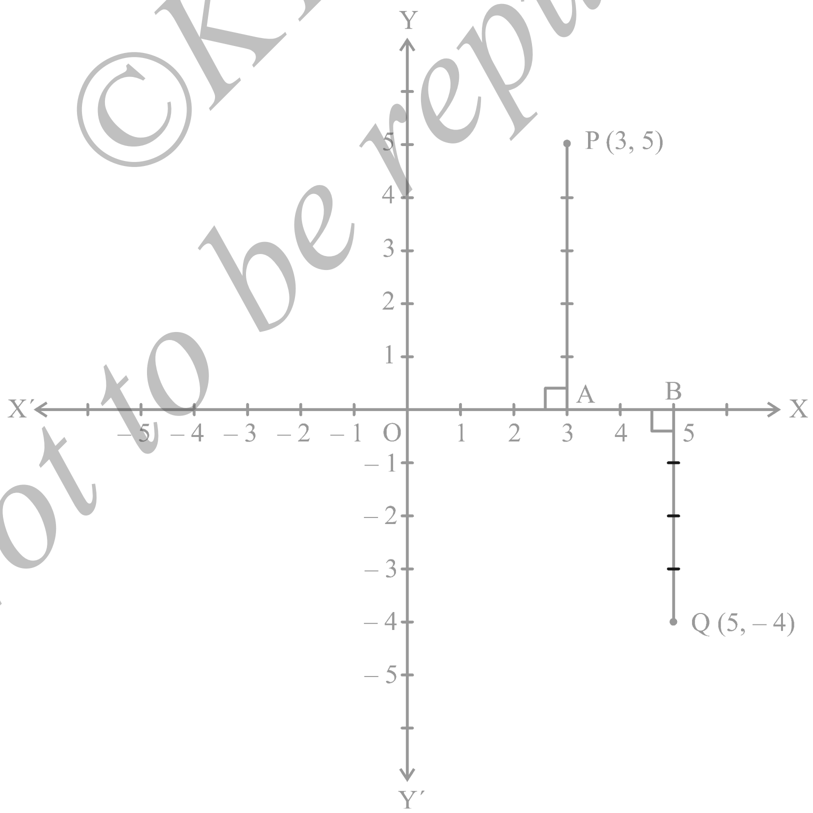



आकृति 9.14

## 9.3 तल में एक बिन्दु आलेखित करना जबकि इसके निर्देशांक दिए हुए हों

अभी तक हमने आपके लिए बिन्दु खींचे हैं और आपसे उनके निर्देशांक बताने के लिए कहा है। अब हम आपको यह दर्शाएँगे कि तल में इन बिन्दुओं को किस प्रकार अंकित करते हैं जबकि इनके निर्देशांक हमें ज्ञात हों। इस प्रक्रम को हम "बिन्दु का आलेखन" (plotting the point) कहते हैं।

मान लीजिए एक बिन्दु के निर्देशांक (3, 5) हैं। हम इस बिन्दु को निर्देशांक तल में आलेखित करना चाहते हैं। हम निर्देशांक अक्ष खींचते हैं और अपने एककों का चयन इस प्रकार करते हैं कि दोनों अक्षों पर एक सेंटीमीटर एक एकक को निरूपित करता हो। बिन्दु (3, 5) के निर्देशांक से हमें यह पता चलता है कि धनात्मक $x$-अक्ष पर इस बिन्दु की $y$-अक्ष से दूरी 3 एकक है और धनात्मक $y$-अक्ष पर इस बिन्दु की $x$-अक्ष से दूरी 5 एकक है। मूलबिन्दु O से प्रारंभ करके हम धनात्मक $x$-अक्ष पर 3 एकक की गिनती करते हैं और संगत बिन्दु को A के रूप में अंकित करते हैं। अब A से प्रारंभ करके हम $y$-अक्ष

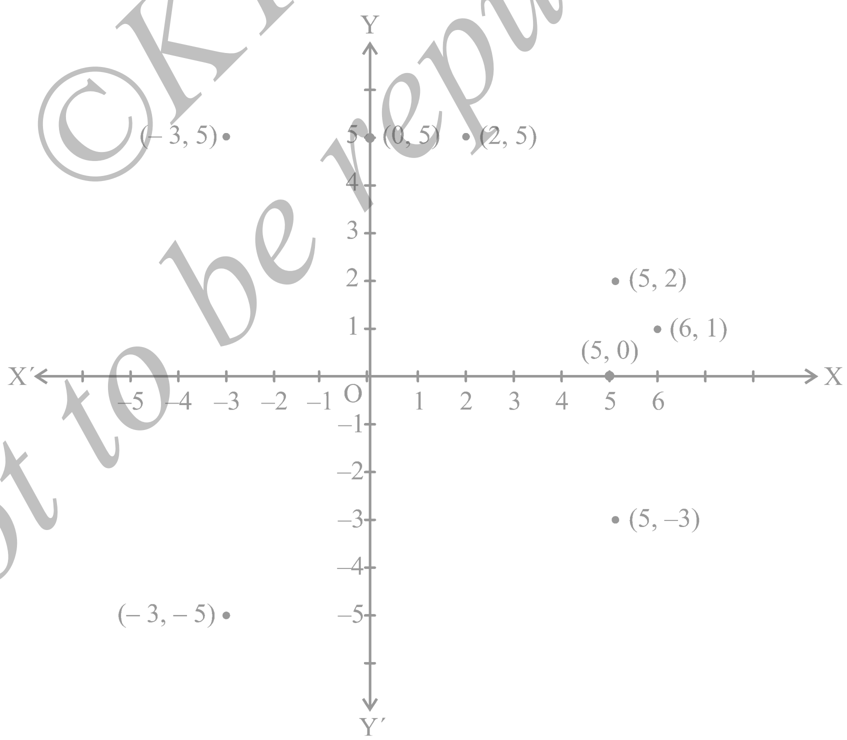



आकृति 9.15

की धनात्मक दिशा में चलते हैं और 5 एकक की गिनती करते हैं तथा संगत बिन्दु को P के रूप में अंकित करते हैं (देखिए आकृति 9.15)। आप यहाँ यह देखते हैं कि $y$-अक्ष से P की दूरी 3 एकक है और $x$ - अक्ष से 5 एकक है। अत: P विचाराधीन बिन्दु की स्थिति है। ध्यान दीजिए कि P पहले चतुर्थांश में स्थित है, क्योंकि P के दोनों निर्देशांक धनात्मक हैं। इसी प्रकार आप निर्देशांक तल में बिन्दु Q (5, – 4) आलेखित कर सकते हैं। ऋणात्मक $y$-अक्ष के अनुदिश $x$-अक्ष से Q की दूरी 4 एकक है जिससे कि इसका $y$-निर्देशांक – 4 है (देखिए आकृति 9.15)। बिन्दु Q चौथे चतुर्थांश में स्थित है। क्यों?

**उदाहरण 3 :** कार्तीय तल में बिन्दुओं (5, 0), (0, 5), (2, 5), (5, 2), (–3, 5), (–3, –5), (5, –3) और (6, 1) का स्थान निर्धारण कीजिए।

**हल :** 1cm = 1 एकक लेकर हम $x$-अक्ष और $y$-अक्ष खींचते हैं। बिन्दुओं की स्थितियों को आकृति 9.16 में गहरे बिन्दुओं से दिखाया गया है।



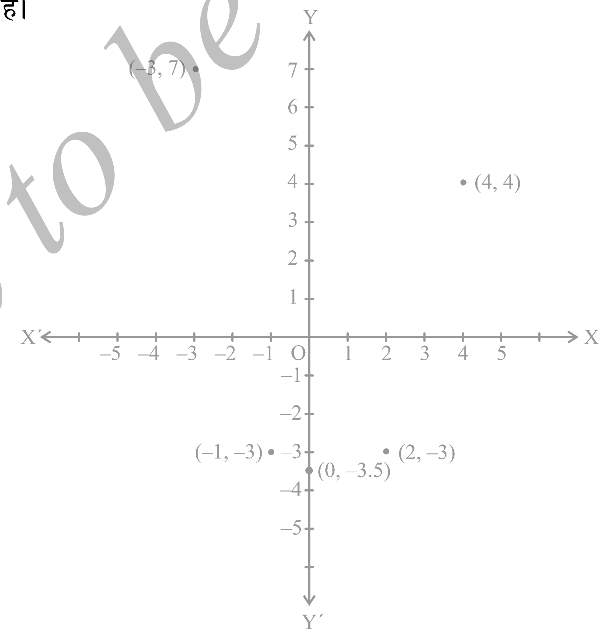

आकृति 9.16

**नोट :** ऊपर दिए गए उदाहरण में हम यह देखते हैं कि (5, 0) और (0, 5) समान नहीं हैं। इसी प्रकार, (5, 2) और (2, 5) अलग-अलग स्थितियाँ हैं और (–3, 5) और (5, –3) भिन्न-भिन्न स्थितियाँ हैं। इसी प्रकार के अनेक उदाहरण लेने पर आप यह देखेंगे कि यदि $x \neq y$ हो, तो कार्तीय तल में $(x, y)$ की स्थिति $(y, x)$ की स्थिति से भिन्न होती है। अतः यदि हम निर्देशांकों $x$ और $y$ में अदला-बदली करें, तो $(y, x)$ की स्थिति $(x, y)$ की स्थिति से भिन्न हो जाएगी। इससे यह अर्थ निकलता है कि $(x, y)$ में $x$ और $y$ के क्रम का काफी महत्व होता है। अतः $(x, y)$ को क्रमित युग्म (ordered pair) कहा जाता है। क्रमित युग्म $(x, y) \neq$ क्रमित युग्म $(y, x)$, यदि $x \neq y$ है और $(x, y) = (y, x)$, यदि $x = y$ है।

**उदाहरण 4 :** निम्नलिखित संख्या-युग्मों को कार्तीय तल के बिन्दुओं के रूप में आलेखित कीजिए। अक्षों पर पैमाना 1 सेंटीमीटर = 1 एकक लीजिए।

| $x$ | – 3 | 0 | – 1 | 4 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 7 | –3.5 | – 3 | 4 | – 3 |

**हल :** सारणी में दिए गए संख्या-युग्मों को बिन्दुओं (– 3, 7), (0, –3.5), (– 1, – 3), (4, 4) और (2, – 3) से निरूपित किया जा सकता है। बिन्दुओं के स्थानों को आकृति 3.17 में गहरे बिन्दुओं से दिखाया गया है।




आकृति 9.17

**क्रियाकलाप 2 :** *दो व्यक्तियों का एक खेल*। (आवश्यक वस्तुएँ – दो काउंटर या सिक्के, ग्राफ पेपर, अलग-अलग रंगों के दो पासे, मान लीजिए लाल और हरे रंग के दो पासे)।

प्रत्येक काउंटर को (0, 0) पर रखिए। प्रत्येक खिलाड़ी एक साथ दो पासे फेंकती हैं। जब पहली खिलाड़ी ऐसा करती है, तो मान लीजिए लाल पासे पर 3 आता है और हरे पासे पर 1 आता है। अतः वह अपना काउंटर (3, 1) की ओर ले जाती है। इसी प्रकार, यदि दूसरी खिलाड़ी लाल पर 2 और हरे पर 4 फेंकती है, तो वह अपना काउंटर (2, 4) की ओर ले जाती है। दूसरी बार फेंकने पर यदि पहली खिलाड़ी लाल पर 1 और हरे पर 4 फेंकती है, तो वह अपना काउंटर (3, 1) से (3 + 1, 1 + 4) की ओर ले जाती है। अर्थात् (3, 1) के $x$-निर्देशांक में 1 जोड़ देती है और $y$-निर्देशांक में 4 जोड़ देती है।

इस खेल का उद्देश्य सीमा लाँघे बिना पहले (10, 10) पर पहुँचना है, अर्थात् न तो भुज और न ही कोटि 10 से अधिक हो सकती है। ध्यान रहे कि एक काउंटर की स्थिति दूसरे काउंटर की स्थिति के साथ संपाती नहीं होनी चाहिए। उदाहरण के लिए, यदि पहली खिलाड़ी का काउंटर उस बिन्दु की ओर गतिमान होता है जहाँ पहले से ही दूसरी खिलाड़ी का काउंटर स्थित है, तो दूसरी खिलाड़ी का काउंटर (0, 0) पर आ जाएगा। यदि सीमा लाँघे बिना चाल चलना संभव नहीं है, तो खिलाड़ी से वह बारी छूट जाती है। इस खेल को अधिक संख्या में अपनी सहेलियों को लेकर आप खेल सकती हैं।

**टिप्पणी :** कार्तीय तल में बिन्दुओं के आलेखन की तुलना कुछ सीमा तक समय-दूरी ग्राफ, भुजा-परिमाप ग्राफ, आदि जिनका अध्ययन आप पिछली कक्षाओं में कर चुके हैं, जैसी विभिन्न स्थितियों से की जा सकती है। ऐसी स्थिति में, $x$-अक्ष और $y$-अक्ष के स्थान पर अक्षों को $t$-अक्ष, $d$-अक्ष, $s$-अक्ष या $p$-अक्ष आदि कह सकते हैं।

## प्रश्नावली 9.3

1. किस चतुर्थांश में या किस अक्ष पर बिन्दु $(-2, 4), (3, -1), (-1, 0), (1, 2)$ और $(-3, -5)$ स्थित हैं? कार्तीय तल पर इनका स्थान निर्धारण करके अपने उत्तर सत्यापित कीजिए।

2. अक्षों पर दूरी का उपयुक्त एकक लेकर नीचे सारणी में दिए गए बिन्दुओं को तल पर आलेखित कीजिए:

| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 8 | 7 | $-1.25$ | 3 | $-1$ |

## 9.4 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिन्दुओं का अध्ययन किया है:

1. एक तल में एक वस्तु या एक बिन्दु का स्थान निर्धारण करने के लिए दो लांबिक रेखाओं की आवश्यकता होती है जिसमें एक क्षैतिज होती है और दूसरी ऊर्ध्वाधर होती है।
2. तल को कार्तीय या निर्देशांक तल कहा जाता है और रेखाओं को निर्देशांक अक्ष कहा जाता है।
3. क्षैतिज रेखा को $x$-अक्ष और ऊर्ध्वाधर रेखा को $y$-अक्ष कहा जाता है।
4. निर्देशांक अक्ष तल को चार भागों में बाँट देते हैं, जिन्हें चतुर्थांश कहा जाता है।
5. अक्षों के प्रतिच्छेद बिन्दु को मूलबिन्दु कहा जाता है।
6. $y$-अक्ष से किसी बिन्दु की दूरी को उसका $x$-निर्देशांक या भुज कहा जाता है। साथ ही, $x$-अक्ष से बिन्दु की दूरी को $y$-निर्देशांक या कोटि कहा जाता है।
7. यदि एक बिन्दु का भुज $x$ हो और कोटि $y$ हो, तो $(x, y)$ को बिन्दु के निर्देशांक कहा जाता है।
8. $x$-अक्ष पर एक बिन्दु के निर्देशांक $(x, 0)$ के रूप के होते हैं और $y$-अक्ष पर बिन्दु के निर्देशांक $(0, y)$ के रूप के होते हैं।
9. मूलबिन्दु के निर्देशांक $(0, 0)$ होते हैं।
10. एक बिन्दु के निर्देशांक पहले चतुर्थांश में $(+, +)$ के रूप के दूसरे चतुर्थांश में $(-, +)$ के रूप के, तीसरे चतुर्थांश में $(-, -)$ के रूप के और चौथे चतुर्थांश में $(+, -)$ के रूप के होते हैं, जहाँ $+$ एक धनात्मक वास्तविक संख्या को और $-$ एक ऋणात्मक वास्तविक संख्या को प्रकट करते हैं।
11. यदि $x \neq y$ हो, तो $(x, y) \neq (y, x)$ होगा और यदि $x = y$ हो, तो $(x, y) = (y, x)$ होगा।

अध्याय 10

# दो चरों वाले रैखिक समीकरण

*The principal use of the Analytic Art is to bring Mathematical Problems to Equations and to exhibit those Equations in the most simple terms that can be.*

*(वैश्लेषिक कला का मुख्य प्रयोग गणितीय समस्याओं को समीकरण में लाना है और इन समीकरणों को यथासंभव सरल पदों में प्रस्तुत करना है)।*

—***Edmund Halley***



## 10.1 भूमिका

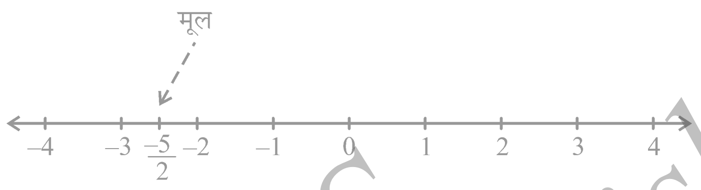
पिछली कक्षाओं में, आप एक चर वाले रैखिक समीकरणों का अध्ययन कर चुके हैं। क्या आप एक चर वाला कोई रैखिक समीकरण लिख सकते हैं? आप कह सकते हैं कि $x + 1 = 0$, $x + \sqrt{2} = 0$ और $\sqrt{2}\,y + \sqrt{3} = 0$ एक चर वाले रैखिक समीकरणों के उदाहरण हैं। आप यह भी जानते हैं कि ऐसे समीकरणों का एक अद्वितीय (अर्थात् एक और केवल एक) हल होता है। आपको संभवत: यह भी याद होगा कि एक संख्या रेखा पर हल को किस प्रकार निरूपित किया जाता है। इस अध्याय में, हम एक चर वाले रैखिक समीकरणों पर पुन: विचार करेंगे और उनसे संबंधित ज्ञान को दो चरों वाले रैखिक समीकरणों पर लागू करेंगे। यहाँ हम इस प्रकार के प्रश्नों पर विचार करेंगे: क्या दो चरों वाले रैखिक समीकरण का एक हल होता है? यदि हाँ, तो क्या यह अद्वितीय होता है? कार्तीय तल पर हल किस प्रकार दिखाई पड़ता है? इस प्रकार के प्रश्नों का अध्ययन करने के लिए, हम अध्याय 3 में बताई गई संकल्पनाओं का भी प्रयोग करेंगे।

## 10.2 रैखिक समीकरण

आइए पहले हम यह देखें कि अभी तक आपने क्या-क्या अध्ययन किया है। आइए हम निम्नलिखित समीकरण लें :

$$2x + 5 = 0$$

इसका हल, अर्थात् समीकरण का मूल $-\frac{5}{2}$ है। इसे संख्या रेखा पर इस प्रकार निरूपित किया जा सकता है, जैसा कि नीचे की आकृति में दिखाया गया है :




आकृति 10.1

एक समीकरण को हल करते समय निम्नलिखित बातों को ध्यान में रखना होता है।

एक रैखिक समीकरण पर तब कोई प्रभाव नहीं पड़ता जबकि:

(i) समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ी या घटाई जाती है।

(ii) समीकरण के दोनों पक्षों को समान शून्येतर संख्या से गुणा या भाग दिया जाता है।

आइए अब हम निम्नलिखित स्थिति पर विचार करें:

नागपुर में भारत और श्रीलंका के बीच खेले गए एक एकदिवसीय अंतर्राष्ट्रीय क्रिकेट मैच में दो भारतीय बल्लेबाजों ने एक साथ मिलकर 176 रन बनाए। इस जानकारी को एक समीकरण के रूप में व्यक्त कीजिए।

यहाँ आप यह देख सकते हैं कि दोनों बल्लेबाजों में से किसी भी बल्लेबाज द्वारा बनाए गए रन ज्ञात नहीं हैं, अर्थात् यहाँ दो अज्ञात राशियाँ हैं। आइए हम इन अज्ञात राशियों को $x$ और $y$ से प्रकट करें। इस तरह एक बल्लेबाज द्वारा बनाए गए रनों की संख्या $x$ है और दूसरे बल्लेबाज द्वारा बनाए गए रनों की संख्या $y$ है। हम जानते हैं कि

$$x + y = 176$$

है, जो कि अभीष्ट समीकरण है।

यह दो चरों वाले एक रैखिक समीकरण का एक उदाहरण है। यह परंपरा रही है कि इस प्रकार के समीकरणों के चरों को $x$ और $y$ से प्रकट किया जाता है, परंतु अन्य अक्षरों का भी प्रयोग किया जा सकता है। दो चरों वाले रैखिक समीकरणों के कुछ उदाहरण ये हैं:

$$1.2s + 3t = 5,\ p + 4q = 7,\ \pi u + 5v = 9 \text{ और } 3 = \sqrt{2}\,x - 7y$$

क्या आप कुछ और उदाहरण दे सकते हैं? ध्यान दीजिए कि आप इन समीकरणों को क्रमशः $1.2s + 3t - 5 = 0$, $p + 4q - 7 = 0$, $\pi u + 5v - 9 = 0$ और $\sqrt{2}\,x - 7y - 3 = 0$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

अतः उस समीकरण को, जिसे $ax + by + c = 0$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता हो, जहाँ $a$, $b$ और $c$ वास्तविक संख्याएँ हैं और $a$ और $b$ दोनों शून्य नहीं हैं, *दो चरों वाला रैखिक समीकरण* (*linear equation in two variables*) कहा जाता है।

**उदाहरण 1 :** नीचे दिए गए समीकरणों को $ax + by + c = 0$ के रूप में लिखिए और प्रत्येक स्थिति में $a$, $b$ और $c$ के मान बताइए :

(i) $2x + 3y = 4.37$ (ii) $x - 4 = \sqrt{3}\,y$ (iii) $4 = 5x - 3y$ (iv) $2x = y$

**हल :** (i) $2x + 3y = 4.37$ को $2x + 3y - 4.37 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है। यहाँ $a = 2$, $b = 3$ और $c = -4.37$ है।

(ii) समीकरण $x - 4 = \sqrt{3}\,y$ को $x - \sqrt{3}\,y - 4 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है। यहाँ $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$ और $c = -4$ है।

(iii) समीकरण $4 = 5x - 3y$ को $5x - 3y - 4 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है। यहाँ $a = 5$, $b = -3$ और $c = -4$ है। क्या आप इस बात से सहमत हैं कि इसे $-5x + 3y + 4 = 0$ के रूप में भी लिखा जा सकता है? इस स्थिति में, $a = -5$, $b = 3$ और $c = 4$ है।

(iv) समीकरण $2x = y$ को $2x - y + 0 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है। यहाँ $a = 2$, $b = -1$ और $c = 0$ है।

समीकरण $ax + b = 0$ भी दो चरों वाले रैखिक समीकरणों का ही एक उदाहरण है, क्योंकि इसे $ax + 0.y + b = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है।

उदाहरण के लिए, $4 - 3x = 0$ को $-3x + 0.y + 4 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है।

**उदाहरण 2 :** निम्नलिखित में से प्रत्येक को दो चरों वाले समीकरणों के रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) $x = -5$ (ii) $y = 2$ (iii) $2x = 3$ (iv) $5y = 2$

**हल :** (i) $x = -5$ को $1.x + 0.y = -5$, या $1.x + 0.y + 5 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है।

(ii) $y = 2$ को $0.x + 1.y = 2$, या $0.x + 1.y - 2 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है।

(iii) $2x = 3$ को $2.x + 0.y - 3 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है।

(iv) $5y = 2$ को $0.x + 5.y - 2 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है।

## प्रश्नावली 10.1

1. एक नोटबुक की कीमत एक कलम की कीमत से दो गुनी है। इस कथन को निरूपित करने के लिए दो चरों वाला एक रैखिक समीकरण लिखिए।

   (संकेत : मान लीजिए, नोटबुक की कीमत $x$ रु है और कलम की कीमत $y$ रु है)।

2. निम्नलिखित रैखिक समीकरणों को $ax + by + c = 0$ के रूप में व्यक्त कीजिए और प्रत्येक स्थिति में $a, b$ और $c$ के मान बताइए:

   (i) $2x + 3y = 9.3\overline{5}$ (ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0$ (iii) $-2x + 3y = 6$ (iv) $x = 3y$

   (v) $2x = -5y$ (vi) $3x + 2 = 0$ (vii) $y - 2 = 0$ (viii) $5 = 2x$

## 10.3 रैखिक समीकरण का हल

आपने देखा है कि एक चर वाले प्रत्येक रैखिक समीकरण का एक अद्वितीय हल होता है। दो चरों वाले रैखिक समीकरण के हल के बारे में आप क्या कह सकते हैं? क्योंकि समीकरण में दो चर हैं, इसलिए हल का अर्थ होता है $x$ तथा $y$ के उन मानों का युग्म जो दिए हुए समीकरण को संतुष्ट करते हैं। आइए, हम समीकरण $2x + 3y = 12$ लें। यहाँ $x = 3$ और $y = 2$ एक हल है, क्योंकि जब हम ऊपर के समीकरण में $x = 3$ और $y = 2$ प्रतिस्थापित करते हैं तब हमें यह प्राप्त होता है:

$$2x + 3y = (2 \times 3) + (3 \times 2) = 12$$

इस हल को एक क्रमित युग्म $(3, 2)$ के रूप में लिखा जाता है, जिसमें पहले $x$ का और उसके बाद $y$ का मान लिखा जाता है। इसी प्रकार, $(0, 4)$ भी ऊपर दिए गए समीकरण का एक हल है।

इसके विपरीत, $(1, 4)$ ऊपर दिए गए समीकरण का एक हल नहीं है, क्योंकि $x = 1$ और $y = 4$ प्रतिस्थापित करने पर हमें $2x + 3y = 14$ प्राप्त होता है जो 12 नहीं है। ध्यान दीजिए कि $(0, 4)$ तो एक हल है परंतु $(4, 0)$ एक हल नहीं है। इस तरह आपने $2x + 3y = 12$ के कम से कम दो हल $(3, 2)$ और $(0, 4)$ प्राप्त कर लिए हैं।

क्या आप कोई अन्य हल प्राप्त कर सकते हैं? क्या आप इस बात से सहमत हैं कि $(6, 0)$ एक अन्य हल है? यदि हाँ, तो आप इसे सत्यापित कीजिए। वस्तुत: निम्न विधि से हम कई हल प्राप्त कर सकते हैं:

आप $2x + 3y = 12$ में अपनी इच्छानुसार $x$ का एक मान (मान लीजिए $x = 2$) ले सकते हैं। तब समीकरण $4 + 3y = 12$ हो जाता है, जो कि एक चर वाला रैखिक समीकरण

है। इसे हल करने पर हमें $y = \frac{8}{3}$ प्राप्त होता है। अत: $\left(2, \frac{8}{3}\right)$, $2x + 3y = 12$ का एक अन्य हल है। इसी प्रकार, $x = -5$ लेने पर हम पाते हैं कि समीकरण $-10 + 3y = 12$ हो जाता है। इससे $y = \frac{22}{3}$ प्राप्त होता है। अत: $\left(-5, \frac{22}{3}\right)$, $2x + 3y = 12$ का एक अन्य हल है। इसलिए दो चरों वाले रैखिक समीकरण के विभिन्न हलों का कोई अंत नहीं है। कहने का अर्थ है कि *दो चरों वाले रैखिक समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं।*

**उदाहरण 3 :** समीकरण $x + 2y = 6$ के चार अलग-अलग हल ज्ञात कीजिए।

**हल :** देखने पर $x = 2, y = 2$ एक हल है, क्योंकि $x = 2, y = 2$ पर

$$x + 2y = 2 + 4 = 6$$

है। आइए, अब हम $x = 0$ लें। $x$ के इस मान पर दिया हुआ समीकरण $2y = 6$ हो जाता है, जिसका कि एक अद्वितीय हल $y = 3$ होता है। अत: $x = 0, y = 3$ भी $x + 2y = 6$ का एक हल है। इसी प्रकार, $y = 0$ लेने पर दिया हुआ समीकरण $x = 6$ हो जाता है। अत: $x = 6, y = 0$ भी $x + 2y = 6$ का एक हल है। अंत में, आइए हम $y = 1$ लें। अब दिया हुआ समीकरण $x + 2 = 6$ हो जाता है, जिसका हल $x = 4$ है। इसलिए, $(4, 1)$ भी दिए हुए समीकरण का एक हल है। अत:, दिए हुए समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक हलों में चार हल ये हैं:

$$(2, 2), (0, 3), (6, 0) \text{ और } (4, 1)$$

**टिप्पणी :** ध्यान दीजिए कि एक हल प्राप्त करने की सरल विधि $x = 0$ लेना है और $y$ का संगत मान प्राप्त करना है। इसी प्रकार, हम $y = 0$ ले सकते हैं और तब $x$ का संगत मान प्राप्त कर लेते हैं।

**उदाहरण 4 :** निम्नलिखित समीकरणों में से प्रत्येक समीकरण के दो हल ज्ञात कीजिए:

(i) $4x + 3y = 12$

(ii) $2x + 5y = 0$

(iii) $3y + 4 = 0$

**हल :** (i) $x = 0$ लेने पर, हमें $3y = 12$, अर्थात् $y = 4$ प्राप्त होता है। अत: $(0, 4)$ भी दिए हुए समीकरण का एक हल है। इसी प्रकार, $y = 0$ लेने पर हमें $x = 3$ प्राप्त होता है। इस तरह, $(3, 0)$ भी एक हल है।

(ii) $x = 0$ लेने पर, हमें $5y = 0$, अर्थात् $y = 0$ प्राप्त होता है। इसलिए $(0, 0)$ दिए हुए समीकरण का एक हल है।

अब, यदि हम $y = 0$ लें, तो हमें एक हल के रूप में पुनः (0, 0) प्राप्त होता है; जो कि वही है जिसे हमने पहले प्राप्त किया था। एक अन्य हल प्राप्त करने के लिए $x = 1$ लीजिए। तब आप देख सकते हैं कि $y$ का संगत मान $-\frac{2}{5}$ है। अतः $\left(1, -\frac{2}{5}\right)$, $2x + 5y = 0$ का एक अन्य हल है।

(iii) समीकरण $3y + 4 = 0$ को $0.x + 3y + 4 = 0$ के रूप में लिखने पर, $x$ के किसी भी मान पर हमें $y = -\frac{4}{3}$ प्राप्त होगा। अतः हमें दो हल $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ और $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$ प्राप्त हो सकते हैं।

## प्रश्नावली 10.2

**1.** निम्नलिखित विकल्पों में कौन-सा विकल्प सत्य है, और क्यों?

$y = 3x + 5$ का

(i) एक अद्वितीय हल है (ii) केवल दो हल हैं (iii) अपरिमित रूप से अनेक हल हैं

**2.** निम्नलिखित समीकरणों में से प्रत्येक समीकरण के चार हल लिखिए:

(i) $2x + y = 7$ (ii) $\pi x + y = 9$ (iii) $x = 4y$

**3.** बताइए कि निम्नलिखित हलों में कौन-कौन समीकरण $x - 2y = 4$ के हल हैं और कौन-कौन हल नहीं हैं :

(i) $(0, 2)$ (ii) $(2, 0)$ (iii) $(4, 0)$ (iv) $\left(\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right)$ (v) $(1, 1)$

**4.** $k$ का मान ज्ञात कीजिए जबकि $x = 2, y = 1$ समीकरण $2x + 3y = k$ का एक हल हो।

## 10.4 दो चरों वाले रैखिक समीकरण का आलेख

अभी तक आपने दो चरों वाले रैखिक समीकरण के हल बीजीय रूप से प्राप्त किए हैं। आइए अब हम इसके ज्यामितीय निरूपण को देखें। आप जानते हैं कि प्रत्येक ऐसी समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं। इन्हें हम निर्देशांक तल में किस प्रकार दर्शा सकते हैं? हल को मान-युग्मों में लिखने पर आपको इसके कुछ संकेत मिल सकते हैं। उदाहरण 3 के रैखिक समीकरण

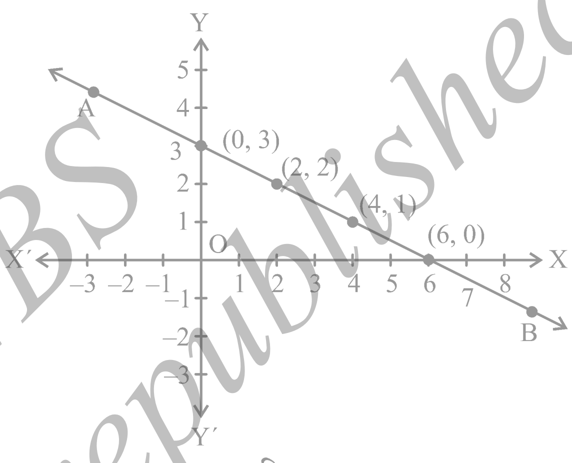
$$x + 2y = 6 \qquad (1)$$

के हल को $x$ के संगत मानों के नीचे $y$ के मान लिखकर एक सारणी के रूप में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है:

सारणी 1

| $x$ | 0 | 2 | 4 | 6 | . . . |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 3 | 2 | 1 | 0 | . . . |

पिछले अध्याय में आपने यह देखा है कि एक आलेख कागज (graph paper) पर बिंदुओं को किस प्रकार आलेखित किया जाता है। आइए हम आलेख कागज पर बिंदुओं (0, 3), (2, 2), (4, 1) और (6, 0) को आलेखित करें। अब किन्हीं दो बिंदुओं को मिलाकर एक रेखा प्राप्त कीजिए। मान लीजिए यह रेखा AB है (देखिए आकृति 10.2)।




आकृति 10.2

क्या आप देखते हैं कि अन्य दो बिंदु भी रेखा AB पर स्थित हैं? अब, इस रेखा पर एक अन्य बिंदु, मान लीजिए (8, –1), लीजिए। क्या यह एक हल है? वस्तुत: $8 + 2(-1) = 6$ है। अत: (8, –1) एक हल है। इस रेखा AB पर एक अन्य बिंदु लीजिए और जाँच कीजिए कि इसके निर्देशांक समीकरण को संतुष्ट करते हैं या नहीं। अब एक ऐसा बिंदु लीजिए जो रेखा AB पर स्थित नहीं हो। मान लीजिए यह बिंदु (2, 0) है। क्या इसके निर्देशांक समीकरण को संतुष्ट करते हैं? जाँच करने पर आप यह देखेंगे कि ये निर्देशांक समीकरण को संतुष्ट नहीं करते।

इस तरह, हम यह देखते हैं कि

1. प्रत्येक बिंदु जिसके निर्देशांक समीकरण (1) को संतुष्ट करते हैं; रेखा AB पर स्थित होता है।
2. रेखा AB पर स्थित प्रत्येक बिंदु $(a, b)$ से समीकरण (1) का एक हल $x = a, y = b$ प्राप्त हो जाता है।
3. कोई भी बिंदु, जो रेखा AB पर स्थित नहीं है, समीकरण (1) का हल नहीं होगा।

अत: आप यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि रेखा पर स्थित प्रत्येक बिंदु रेखा के समीकरण को संतुष्ट करता है और समीकरण का प्रत्येक हल रेखा पर स्थित एक बिंदु होता है। वस्तुत: दो चरों वाले एक रैखिक समीकरण ज्यामितीय रूप से एक ऐसी रेखा से निरूपित किया जाता है जिसके सभी बिंदु समीकरण के हल होते हैं। इसे रैखिक समीकरण का *आलेख* कहा जाता है। अत: दो चरों वाले रैखिक समीकरण का आलेख प्राप्त करने के लिए दो हलों के संगत दो बिंदु आलेखित करना और उन्हें एक रेखा से मिला देना पर्याप्त होता है। फिर भी, उत्तम तो यह होगा कि इस प्रकार के दो से अधिक बिंदु आलेखित किए जाएँ जिससे कि आप आलेख की शुद्धता की जाँच तुरंत कर सकें।

**टिप्पणी :** एक घात वाले बहुपद समीकरण $ax + by + c = 0$ को रैखिक समीकरण इसलिए कहा जाता है, क्योंकि इसका ज्यामितीय निरूपण एक सरल रेखा होती है।

**उदाहरण 5 :** यदि बिंदु $(1, 2)$ दिया हुआ हो, तो क्या आप उस रेखा का समीकरण दे सकते हैं जिस पर वह बिंदु स्थित है? इस प्रकार के कितने समीकरण हो सकते हैं?

**हल :** $(1, 2)$ उस रैखिक समीकरण का एक हल है जिसे आप ढूँढ़ रहे हैं। इस प्रकार आप एक ऐसी रेखा का पता लगाना चाहते हैं जो बिंदु $(1, 2)$ से होकर जाती है। इस प्रकार के रैखिक समीकरण का एक उदाहरण $x + y = 3$ है। अन्य समीकरण हैं: $y - x = 1$, $y = 2x$, क्योंकि ये भी बिंदु $(1, 2)$ के निर्देशांकों से संतुष्ट हो जाते हैं। वस्तुत:, ऐसे अपरिमित रूप से अनेक रैखिक समीकरण हैं जो बिंदु $(1, 2)$ के निर्देशांकों से संतुष्ट हो जाते हैं। क्या आप इसे चित्रीय रूप से देख सकते हैं?

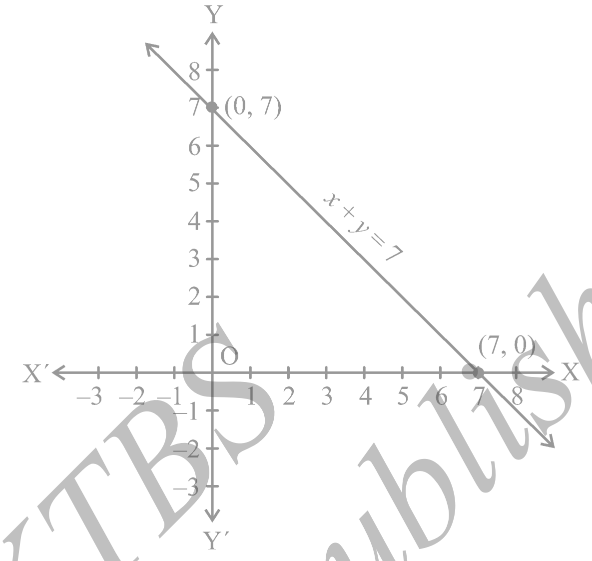
**उदाहरण 6 :** $x + y = 7$ का आलेख खींचिए।

**हल :** ग्राफ (आलेख) खींचने के लिए हमें समीकरण के कम से कम दो हलों की आवश्यकता होती है। आप यह देख सकते हैं कि दिए हुए समीकरण के हल $x = 0, y = 7$ और $x = 7$, $y = 0$ हैं। अत: ग्राफ खींचने के लिए आप नीचे दी गई सारणी का प्रयोग कर सकते हैं:

**सारणी 2**

| | | |
|---|---|---|
| ***x*** | 0 | 7 |
| ***y*** | 7 | 0 |

सारणी 2 के दो बिंदुओं को आलेखित करके इन्हें एक रेखा से मिलाकर आलेख खींचिए (देखिए आकृति 10.3)।



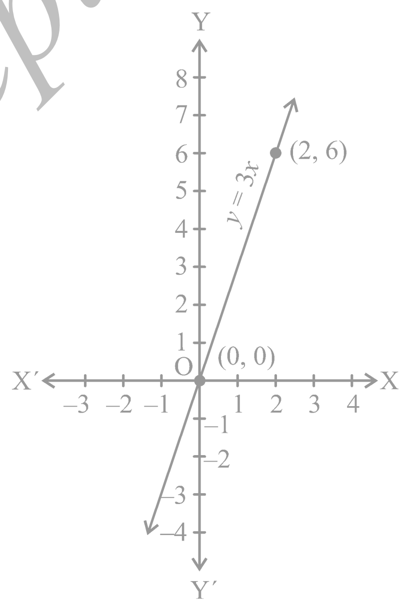

आकृति 10.3

**उदाहरण 7 :** आप जानते हैं कि एक पिंड पर लगाया गया बल पिंड में उत्पन्न त्वरण के अनुक्रमानुपाती होता है। इस स्थिति को व्यक्त करने वाला एक समीकरण लिखिए और समीकरण को आलेखित कीजिए।

**हल :** यहाँ चर, बल और त्वरण हैं। मान लीजिए लगाया गया बल $y$ मात्रक है और उत्पन्न त्वरण $x$ मात्रक है। अनुपात और समानुपात से आप इस तथ्य को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं:

$$y = kx$$

जहाँ $k$ एक अचर है। (विज्ञान के अध्ययन से आप यह जानते हैं कि वास्तव में $k$ पिंड का द्रव्यमान होता है)।




आकृति 10.4

अब क्योंकि हम यह नहीं जानते कि $k$ क्या है, इसलिए हम $y = kx$ का परिशुद्ध आलेख नहीं खींच सकते। फिर भी, यदि हम $k$ को एक मान दे दें, तब हम आलेख खींच सकते हैं। आइए हम $k = 3$ लें। तब हम $y = 3x$ को निरूपित करने वाली रेखा खींच सकते हैं।

इसके लिए, इस समीकरण के हम दो हल ज्ञात करते हैं। मान लीजिए ये हल (0, 0) और (2, 6) हैं (देखिए आकृति 10.4)।

इस आलेख से आप यह देख सकते हैं कि जब लगाया गया बल 3 मात्रक होता है, तब उत्पन्न त्वरण 1 मात्रक होता है। आप यहाँ यह भी देखते हैं कि बिंदु (0, 0) आलेख पर स्थित है, जिसका अर्थ यह है कि जब लगाया गया बल 0 मात्रक होता है तो उत्पन्न त्वरण 0 मात्रक होता है।

**टिप्पणी :** $y = kx$ के रूप की समीकरण का आलेख एक रेखा होती है जो सदा मूलबिंदु से होकर जाती है।

**उदाहरण 8 :** आकृति 10.5 में दिए गए प्रत्येक आलेख को ध्यान से देखिए और नीचे के प्रत्येक आलेख के विकल्पों से आलेख में दिए गए समीकरण का चयन कीजिए:

(a) आकृति 10.5 (i) के लिए,

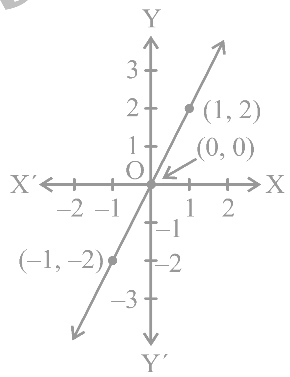
(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = x$ (iv) $y = 2x + 1$

(b) आकृति 10.5 (ii) के लिए,

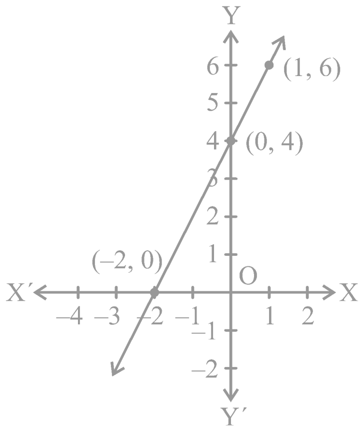
(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = 2x + 4$ (iv) $y = x - 4$

(c) आकृति 10.5 (iii) के लिए,

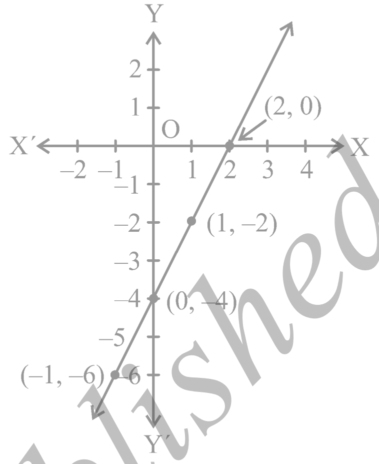
(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = 2x + 1$ (iv) $y = 2x - 4$




(i)



(ii)



(iii)

आकृति 10.5



**हल :** (a) आकृति 10.5 (i) में रेखा पर बिंदु (–1, –2), (0, 0), (1, 2) हैं। देखने पर, इस आलेख का संगत समीकरण $y = 2x$ है। आप यहाँ यह देख सकते हैं कि प्रत्येक स्थिति में $y$-निर्देशांक, $x$-निर्देशांक का दोगुना है।

(b) आकृति 10.5 (ii) में रेखा पर बिंदु (–2, 0), (0, 4), (1, 6) हैं। आप जानते हैं कि आलेख के बिंदुओं के निर्देशांक समीकरण $y = 2x + 4$ को संतुष्ट करते हैं। अत:, $y = 2x + 4$ आकृति 10.5 (ii) के आलेख का संगत समीकरण है।

(c) आकृति 10.5 (iii) में, रेखा पर बिंदु (–1, –6), (0, –4), (1, –2), (2, 0) हैं। देखकर आप यह कह सकते हैं कि $y = 2x - 4$ दिए हुए आलेख का संगत समीकरण है।

## प्रश्नावली 10.3

**1.** दो चरों वाले निम्नलिखित रैखिक समीकरणों में से प्रत्येक का आलेख खींचिए:

(i) $x + y = 4$ (ii) $x - y = 2$ (iii) $y = 3x$ (iv) $3 = 2x + y$

**2.** बिंदु (2, 14) से होकर जाने वाली दो रेखाओं के समीकरण लिखिए। इस प्रकार की और कितनी रेखाएँ हो सकती हैं, और क्यों?

**3.** यदि बिंदु (3, 4) समीकरण $3y = ax + 7$ के आलेख पर स्थित है, तो $a$ का मान ज्ञात कीजिए।

**4.** एक नगर में टैक्सी का किराया निम्नलिखित है : पहले किलोमीटर का किराया 8 रु है और

उसके बाद की दूरी के लिए प्रति किलोमीटर का किराया 5 रु है। यदि तय की गई दूरी $x$ किलोमीटर हो, और कुल किराया $y$ रु हो, तो इसका एक रैखिक समीकरण लिखिए और उसका आलेख खींचिए।

**5.** निम्नलिखित आलेखों में से प्रत्येक आलेख के लिए दिए गए विकल्पों से सही समीकरण का चयन कीजिए:

**आकृति 10.6 के लिए**

(i) $y = x$

(ii) $x + y = 0$

(iii) $y = 2x$

(iv) $2 + 3y = 7x$

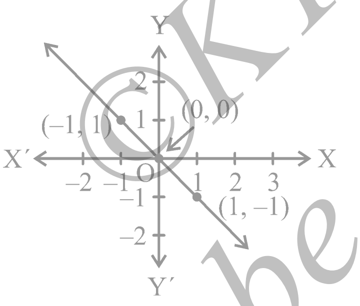
**आकृति 10.7 के लिए**

(i) $y = x + 2$

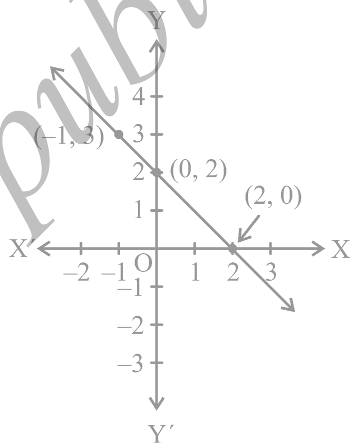
(ii) $y = x - 2$

(iii) $y = -x + 2$

(iv) $x + 2y = 6$




आकृति 10.6




आकृति 10.7

**6.** एक अचर बल लगाने पर एक पिंड द्वारा किया गया कार्य पिंड द्वारा तय की गई दूरी के अनुक्रमानुपाती होता है। इस कथन को दो चरों वाले एक समीकरण के रूप में व्यक्त कीजिए और अचर बल 5 मात्रक लेकर इसका आलेख खींचिए। यदि पिंड द्वारा तय की गई दूरी

(i) 2 मात्रक (ii) 0 मात्रक

हो, तो आलेख से किया हुआ कार्य ज्ञात कीजिए।

**7.** एक विद्यालय की कक्षा IX की छात्राएं यामिनी और फातिमा ने मिलकर भूकंप पीड़ित व्यक्तियों की सहायता के लिए प्रधानमंत्री राहत कोष में 100 रु अंशदान दिया। एक रैखिक समीकरण लिखिए जो इन आंकड़ों को संतुष्ट करती हो। (आप उनका अंशदान $x$ रु और $y$ रु मान सकते हैं)। इस समीकरण का आलेख खींचिए।

**8.** अमरीका और कनाडा जैसे देशों में तापमान फारेनहाइट में मापा जाता है, जबकि भारत जैसे देशों में तापमान सेल्सियस में मापा जाता है। यहाँ फारेनहाइट को सेल्सियस में रूपांतरित करने वाला एक रैखिक समीकरण दिया गया है :

$$F = \left(\frac{9}{5}\right)C + 32$$

(i) सेल्सियस को $x$-अक्ष और फारेनहाइट को $y$- अक्ष मानकर ऊपर दिए गए रैखिक समीकरण का आलेख खींचिए।

(ii) यदि तापमान 30°C है, तो फारेनहाइट में तापमान क्या होगा?

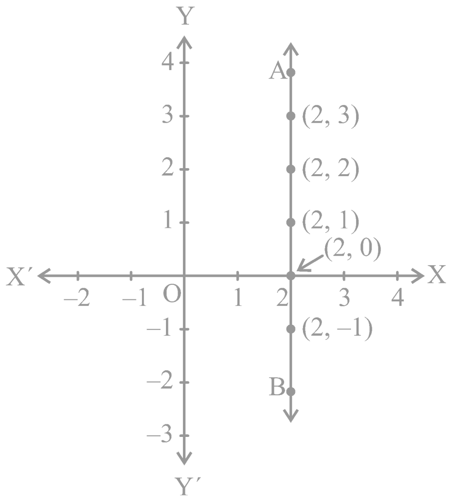
(iii) यदि तापमान 95°F है, तो सेल्सियस में तापमान क्या होगा?

(iv) यदि तापमान 0°C है, तो फारेनहाइट में तापमान क्या होगा? और यदि तापमान 0°F है, तो सेल्सियस में तापमान क्या होगा?

(v) क्या ऐसा भी कोई तापमान है जो फारेनहाइट और सेल्सियस दोनों के लिए संख्यात्मकत: समान है? यदि हाँ, तो उसे ज्ञात कीजिए।

## 10.5 $x$-अक्ष और $y$-अक्ष के समांतर रेखाओं के समीकरण

आप यह पढ़ चुके हैं कि किस प्रकार कार्तीय तल में एक दिए हुए बिंदु के निर्देशांक लिखे जाते हैं। क्या आप जानते हैं कि कार्तीय तल पर (2, 0), (–3, 0), (4, 0) और $(n, 0)$, जहाँ $n$ कोई वास्तविक संख्या है, कहाँ पर स्थित होते हैं? हाँ, ये सभी बिंदु $x$-अक्ष पर स्थित हैं। परंतु क्या आप जानते हैं कि ऐसा क्यों है? ऐसा इसलिए है क्योंकि $x$-अक्ष पर प्रत्येक बिंदु का $y$-निर्देशांक 0 होता है। वस्तुत: $x$-अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिंदु $(x, 0)$ के रूप का होता है। क्या अब आप $x$-अक्ष के समीकरण का अनुमान लगा सकते हैं? हाँ, यह समीकरण $y = 0$ होता है। जैसा कि आप देख सकते हैं, $y = 0$ को $0.x + 1.y = 0$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। इसी प्रकार, आप यह देख सकते हैं कि $y$-अक्ष का समीकरण $x = 0$ होता है।




आकृति 10.8

अब समीकरण $x - 2 = 0$ लीजिए। यदि इसे हम केवल एक चर $x$ वाला एक समीकरण मान लें, तो इसका एक अद्वितीय हल $x = 2$ होता है, जो संख्या रेखा पर स्थित एक बिंदु है। साथ ही, इसे दो चरों वाला समीकरण मान लेने पर इसे $x + 0.y - 2 = 0$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। इसके अपरिमित रूप से अनेक हल हैं, जो $(2, r)$ के रूप के हैं, जहाँ $r$ एक वास्तविक संख्या है। साथ ही आप यह जाँच सकते हैं कि $(2, r)$ के रूप का प्रत्येक बिंदु इस समीकरण का एक हल है। अतः दो चरों वाले समीकरण की भांति, $x - 2 = 0$ के आलेख को आकृति 10.8 में रेखा AB से निरूपित किया जाता है।

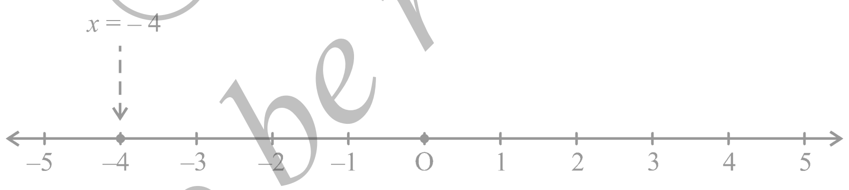
**उदाहरण 9 :** समीकरण $2x + 1 = x - 3$ को हल कीजिए और हल को (i) संख्या रेखा (ii) कार्तीय तल पर निरूपित कीजिए।

**हल :** $2x + 1 = x - 3$ को हल करने पर यह प्राप्त होता है:

$$2x - x = -3 - 1$$

अर्थात् $$x = -4$$

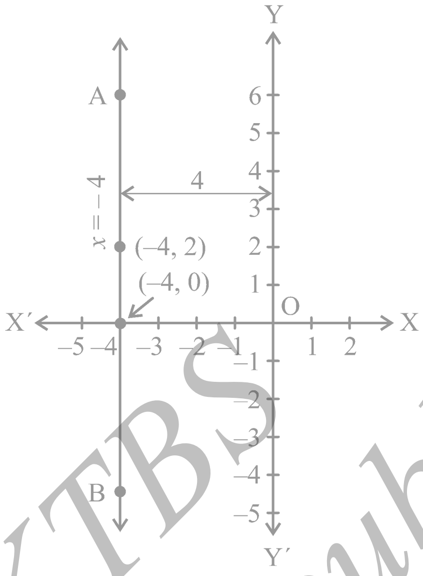
(i) संख्या रेखा पर हल के निरूपण को आकृति 10.9 में दिखाया गया है, जहाँ $x = -4$ को एक चर वाला समीकरण माना गया है।




आकृति 10.9

(ii) हम जानते हैं कि चर $x$ और $y$ वाले रैखिक समीकरण के रूप में हम $x = -4$ को $x + 0.y = -4$ के रूप में लिख सकते हैं। इसे एक रेखा से निरूपित किया जाता है। अब $y$ के सभी मान मान्य होते हैं, क्योंकि $0.y$ सदा ही शून्य होता है। फिर भी $x$ को संबंध $x = -4$ को अवश्य संतुष्ट करना चाहिए। अतः दिए हुए समीकरण के दो हल $x = -4$, $y = 0$ और $x = -4$, $y = 2$ हैं।

ध्यान दीजिए कि आलेख AB, $y$-अक्ष के समांतर एक रेखा है जो इसके बायीं ओर 4 एकक की दूरी पर है (देखिए आकृति 10.10)।




आकृति 10.10

इसी प्रकार, $y = 3$ या $0.x + 1.y = 3$ के प्रकार के समीकरणों के संगत, हम $x$-अक्ष के समांतर एक रेखा प्राप्त कर सकते हैं।

## प्रश्नावली 10.4

**1.** (i) एक चर वाले (ii) दो चर वाले

समीकरण के रूप में $y = 3$ का ज्यामितीय निरूपण कीजिए।

**2.** (i) एक चर वाले (ii) दो चर वाले

समीकरण के रूप में $2x + 9 = 0$ का ज्यामितीय निरूपण कीजिए।

## 10.6 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है:

**1.** $ax + by + c = 0$ के रूप के समीकरण को जहाँ, $a$, $b$ और $c$ वास्तविक संख्याएँ हैं और $a$ और $b$ दोनों शून्य नहीं हैं, दो चरों वाला रैखिक समीकरण कहा जाता है।

**2.** दो चरों वाले रैखिक समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं।

**3.** दो चरों वाले प्रत्येक रैखिक समीकरण का आलेख एक सरल रेखा होता है।

**4.** $x = 0$, $y$-अक्ष का समीकरण है और $y = 0$, $x$-अक्ष का समीकरण है।

**5.** $x = a$ का आलेख $y$-अक्ष के समांतर एक सरल रेखा होता है।

**6.** $y = a$ का आलेख $x$-अक्ष के समांतर एक सरल रेखा होता है।

**7.** $y = mx$ के प्रकार का समीकरण मूलबिंदु से होकर जाने वाली एक रेखा को निरूपित करता है।

**8.** दो चरों वाले रैखिक समीकरण के आलेख पर स्थित प्रत्येक बिंदु रैखिक समीकरण का एक हल होता है। साथ ही, रैखिक समीकरण का प्रत्येक हल रैखिक समीकरण के आलेख पर स्थित एक बिंदु होता है।

अध्याय 11

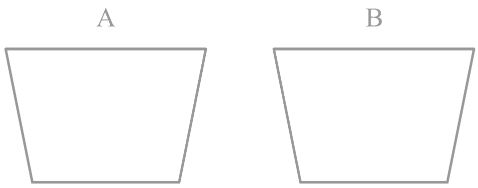
# समांतर चतुर्भुजों और त्रिभुजों के क्षेत्रफल



## 11.1 भूमिका

अध्याय 5 में, आप देख चुके हैं कि ज्यामिति के अध्ययन का उद्गम खेतों की परिसीमाओं को पुनःनिर्मित करने और उन्हें उपयुक्त भागों में बाँटने की प्रक्रिया में निहित भूमि मापनों के साथ हुआ। उदाहरणार्थ, एक किसान *बुधिया* के पास एक त्रिभुजाकार खेत था और वह उसको अपनी दो पुत्रियों और एक पुत्र को बराबर-बराबर बाँटना चाहती थी। उसने त्रिभुजाकार खेत का क्षेत्रफल परिकलित किए बिना, केवल एक भुजा को तीन बराबर भागों में बाँट लिया और इस भुजा को विभाजित करने वाले दोनों बिंदुओं को सम्मुख शीर्ष बिंदु से मिला दिया। इस प्रकार, खेत तीन बराबर भागों में विभाजित हो गया और उसने अपने प्रत्येक बच्चे को एक-एक भाग दे दिया। क्या आप सोचते हैं कि इस प्रकार जो उसने तीन भाग प्राप्त किए थे वे वास्तव में क्षेत्रफल में बराबर थे? इस प्रकार के प्रश्नों और अन्य संबंधित समस्याओं के उत्तर प्राप्त करने के लिए, यह आवश्यक है कि समतल आकृतियों के क्षेत्रफलों पर पुनर्विचार किया जाए, जिन्हें आप पिछली कक्षाओं में पहले ही पढ़ चुके हैं।

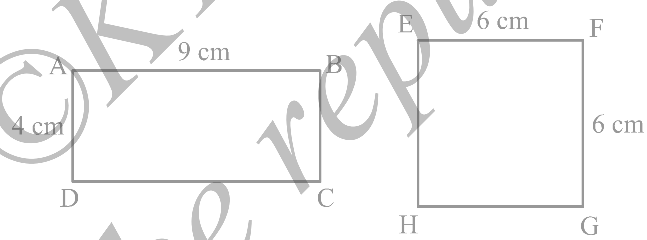
आपको याद होगा कि एक सरल बंद आकृति (simple closed figure) द्वारा तल का घेरा हुआ भाग उस आकृति का संगत *तलीय क्षेत्र* (*planar region*) कहलाता है। इस तलीय क्षेत्र का परिमाण (magnitude) या माप (measure) उस आकृति का *क्षेत्रफल* (*area*) कहलाता है। इस परिमाण या माप को सदैव एक संख्या [किसी मात्रक (unit) में] की सहायता से व्यक्त किया जाता है, जैसे 5 $cm^2$, 8 $m^2$, 3 हेक्टेयर, इत्यादि। अतः, हम कह सकते हैं



आकृति 11.1

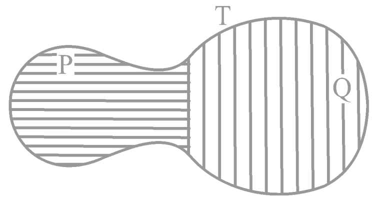
कि किसी आकृति का क्षेत्रफल (किसी मात्रक में) एक संख्या है जो उस आकृति द्वारा घेरे गए तल के भाग से संबद्ध (जुड़ी) होती है।

हम पिछली कक्षाओं और अध्याय 5 के अध्ययन द्वारा सर्वांगसम आकृतियों की अवधारणा से परिचित हैं। *'दो आकृतियाँ सर्वांगसम कही जाती हैं, यदि उनके आकार और माप समान हों।'* दूसरे शब्दों में, *यदि दो आकृतियाँ* A *और* B *सर्वांगसम हों* (देखिए आकृति 11.1), तो आप एक अक्स कागज़ (tracing paper) का प्रयोग करके, एक आकृति को दूसरी आकृति पर इस प्रकार रख सकते हैं कि एक आकृति दूसरी को पूरा-पूरा ढक ले। अतः, *यदि दो आकृतियाँ* A *और* B *सर्वांगसम हैं, तो उनके क्षेत्रफल अवश्य ही बराबर (समान) होने चाहिए।* परन्तु इस कथन का विलोम सत्य *नहीं* है। दूसरे शब्दों में, *बराबर क्षेत्रफलों वाली दो आकृतियों का सर्वांगसम होना आवश्यक नहीं है।* उदाहरणार्थ, आकृति 11.2 में, आयतों ABCD और EFGH के क्षेत्रफल ($9 \times 4$ cm$^2$ और $6 \times 6$ cm$^2$) बराबर हैं, परन्तु स्पष्टतः ये सर्वांगसम नहीं हैं। (क्यों)?




आकृति 11.2

आइए अब नीचे दी आकृति 11.3 को देखें :




आकृति 11.3

आप देख सकते हैं कि आकृति T द्वारा निर्मित तलीय क्षेत्र आकृतियों P और Q द्वारा निर्मित दो तलीय क्षेत्रों से मिल कर बना है। आप सरलता से देख सकते हैं कि

आकृति T का क्षेत्रफल = आकृति P का क्षेत्रफल + आकृति Q का क्षेत्रफल

आप आकृति A के क्षेत्रफल को ar(A), आकृति B के क्षेत्रफल को ar(B), आकृति T के क्षेत्रफल को ar(T), इत्यादि से व्यक्त कर सकते हैं। अब आप कह सकते हैं कि *किसी आकृति का क्षेत्रफल उस आकृति द्वारा घेरे गए तल के भाग से संबद्ध (किसी मात्रक में) नीचे दिए दो गुणों के साथ एक संख्या है :*

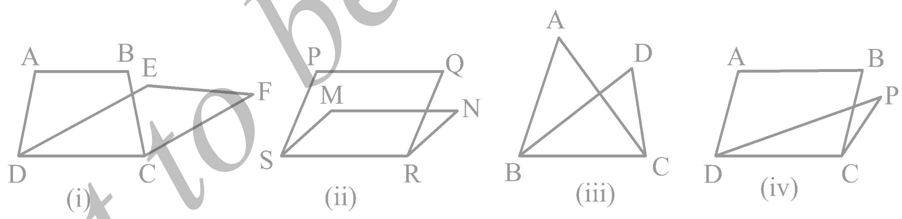
(1) *यदि* A *और* B *दो सर्वांगसम आकृतियाँ हैं, तो ar* (A) = *ar* (B) है तथा

(2) *यदि एक आकृति* T *द्वारा निर्मित क्षेत्र दो आकृतियों* P *और* Q *द्वारा निर्मित अनातिव्यापी* (*non-overlapping*) *तलीय क्षेत्रों से मिल कर बना है, तो ar* (T) = *ar* (P) + *ar* (Q) होगा।

आप अपनी पिछली कक्षाओं से विभिन्न आकृतियों, जैसे आयत, वर्ग, समांतर चतुर्भुज, त्रिभुज, इत्यादि के क्षेत्रफलों को ज्ञात करने वाले कुछ सूत्रों के बारे में भी जानते हैं। इस अध्याय में, इन ज्यामितीय आकृतियों के क्षेत्रफलों के बीच संबंध का उस प्रतिबंध के अंतर्गत अध्ययन करके जब ये एक ही आधार पर स्थित हों और एक ही समांतर रेखाओं के बीच में हों उपरोक्त सूत्रों के ज्ञान को अधिक प्रबल बनाने का प्रयत्न किया जाएगा। यह अध्ययन त्रिभुजों की समरूपता के कुछ परिणामों को समझने में भी बहुत उपयोगी रहेगा।

## 11.2 एक ही आधार पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच आकृतियाँ

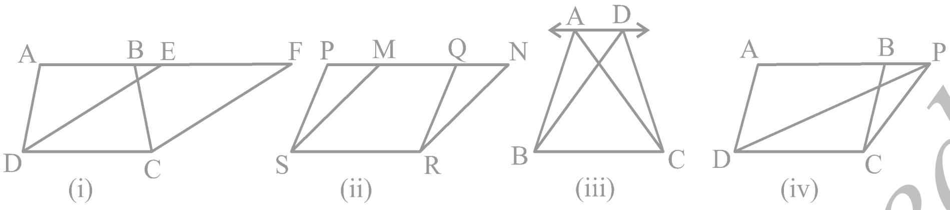
नीचे दी हुई आकृतियों को देखिए :




आकृति 11.4

आकृति 11.4(i) में, समलंब ABCD और समांतर चतुर्भुज EFCD में एक भुजा DC उभयनिष्ठ है। हम कहते हैं कि समलंब ABCD और समांतर चतुर्भुज EFCD *एक ही आधार* (*same base*) DC *पर स्थित हैं।* इसी प्रकार, आकृति 11.4 (ii) में, समांतर चतुर्भुज PQRS और MNRS एक ही आधार SR पर स्थित हैं; आकृति 11.4(iii) में, त्रिभुज ABC और DBC एक ही आधार BC पर स्थित हैं तथा आकृति 11.4(iv) में, समांतर चतुर्भुज ABCD और त्रिभुज PDC एक ही आधार DC पर स्थित हैं।

अब नीचे दी गई आकृतियों को देखिए :

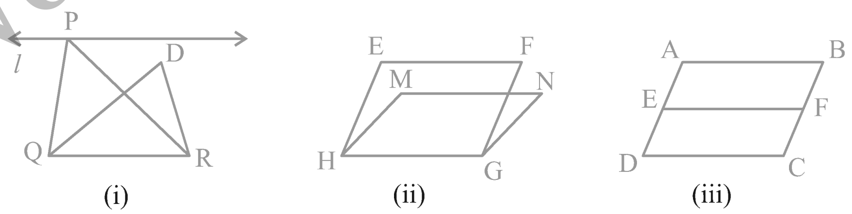



आकृति 11.5

आकृति 11.5(i) में, स्पष्टतः समलंब ABCD और समांतर चतुर्भुज EFCD एक ही आधार DC पर स्थित हैं। उपरोक्त के अतिरिक्त, (समलंब ABCD के) आधार DC के सम्मुख शीर्ष A और B तथा (समांतर चतुर्भुज EFCD के) आधार DC के सम्मुख शीर्ष E और F, DC के समांतर एक रेखा AF पर स्थित हैं। हम कहते हैं कि समलंब ABCD और समांतर चतुर्भुज EFCD *एक ही आधार* DC *तथा एक ही समांतर रेखाओं* AF *और* DC *के बीच स्थित हैं।* इसी प्रकार, समांतर चतुर्भुज PQRS और MNRS एक ही आधार SR तथा एक ही समांतर रेखाओं PN और SR के बीच स्थित हैं [देखिए आकृति 11.5 (ii)], जिसमें PQRS के शीर्ष P और Q तथा MNRS के शीर्ष M और N आधार SR के समांतर रेखा PN पर स्थित हैं। इसी प्रकार, त्रिभुज ABC और DBC एक ही आधार BC और एक ही समांतर रेखाओं AD और BC के बीच स्थित हैं [देखिए आकृति 11.5 (iii)] तथा समांतर चतुर्भुज ABCD और त्रिभुज PCD एक ही आधार DC और एक ही समांतर रेखाओं AP और DC के बीच स्थित हैं [देखिए आकृति 11.5(iv)]।

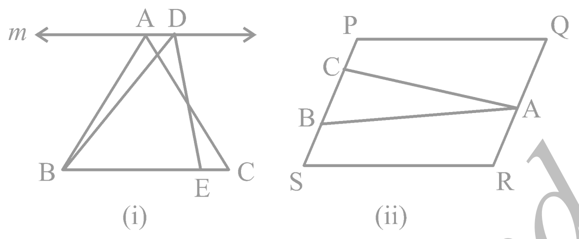
इसीलिए, *दो आकृतियाँ एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित कही जाती हैं, यदि उनका एक उभयनिष्ठ आधार (भुजा) हो तथा उभयनिष्ठ आधार के सम्मुख प्रत्येक आकृति के शीर्ष (या का शीर्ष) उस आधार के समांतर किसी रेखा पर स्थित हों।*

उपरोक्त कथन को दृष्टिगत रखते हुए, आप यह *नहीं* कह सकते कि आकृति 11.6 (i) के $\Delta$ PQR और $\Delta$ DQR एक ही समांतर रेखाओं $l$ और QR के बीच स्थित हैं। इसी प्रकार, आप यह नहीं कह सकते कि आकृति 11.6 (ii) के समांतर चतुर्भुज EFGH और MNGH




आकृति 11.6

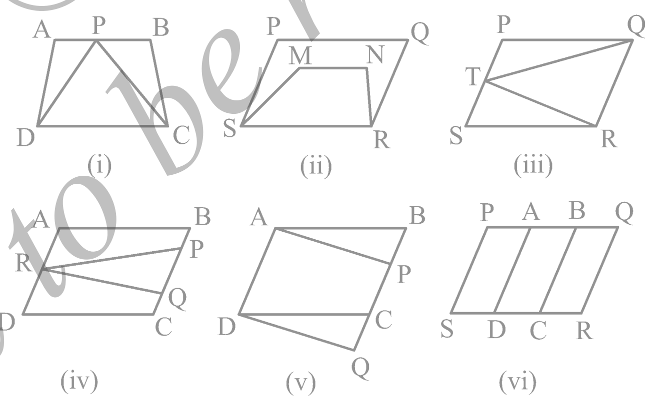
एक ही समांतर रेखाओं EF और HG के बीच स्थित हैं तथा यह कि आकृति 11.6 (iii) के समांतर चतुर्भुज ABCD और EFCD एक ही समांतर रेखाओं AB और DC के बीच स्थित हैं (यद्यपि इनमें एक उभयनिष्ठ आधार DC है और ये समांतर रेखाओं AD और BC के बीच स्थित हैं)। अत:, *यह स्पष्ट रूप से ध्यान रखना चाहिए कि दोनों समांतर रेखाओं में से एक उभयनिष्ठ आधार को अंतर्विष्ट करने वाली रेखा होनी चाहिए।* ध्यान दीजिए कि आकृति 11.7(i) के $\Delta ABC$ और $\Delta DBE$ उभयनिष्ठ आधार पर स्थित नहीं हैं। इसी प्रकार, आकृति 11.7(ii) के $\Delta ABC$ और समांतर चतुर्भुज PQRS एक ही आधार पर स्थित नहीं हैं।



आकृति 11.7

## प्रश्नावली 11.1

1. निम्नलिखित आकृतियों में से कौन-सी आकृतियाँ एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हैं? ऐसी स्थिति में, उभयनिष्ठ आधार और दोनों समांतर रेखाएँ लिखिए।

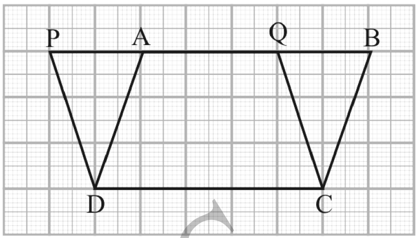


आकृति 11.8

## 11.3 एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच समांतर चतुर्भुज

आइए अब एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित दो समांतर चतुर्भुजों के क्षेत्रफलों के मध्य एक संबंध, यदि कोई है तो, ज्ञात करने का प्रयत्न करें। इसके लिए, आइए निम्नलिखित क्रियाकलाप करें :

**क्रियाकलाप 1 :** आइए एक आलेख (graph) कागज लें और उस पर आकृति 11.9 में दर्शाए अनुसार दो समांतर चतुर्भुज ABCD और PQCD खींचें।

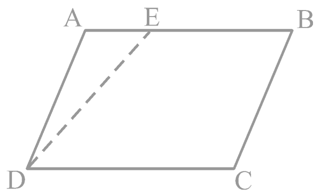


आकृति 11.9

उपरोक्त दोनों समांतर चतुर्भुज एक ही आधार DC और एक ही समांतर रेखाओं PB और DC के बीच स्थित हैं। आपको याद होगा कि इन समांतर चतुर्भुजों का क्षेत्रफल वर्गों को गिनकर किस प्रकार ज्ञात किया जा सकता है।

इस विधि में, दी हुई आकृति द्वारा घेरे गए पूर्ण वर्गों की संख्या, उन वर्गों की संख्या जिसका आधे से अधिक भाग इस आकृति से घिरा हुआ है तथा उन वर्गों की संख्या जिनका आधा भाग इस आकृति से घिरा हुआ है गिनकर इस दी हुई आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात किया जा सकता है। उन वर्गों को छोड़ दिया जाता है जिनका आधे से कम भाग इस आकृति से घिरा हुआ है। आप पाएँगे कि इन दोनों समांतर चतुर्भुजों का क्षेत्रफल लगभग 15 वर्ग मात्रक है। आलेख कागज़ पर कुछ और समांतर चतुर्भुज खींचकर इस क्रियाकलाप* को दोहराइए। आप क्या देखते हैं? क्या दोनों समांतर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल भिन्न-भिन्न हैं या बराबर हैं? वास्तव में, ये बराबर हैं। इसलिए, इससे आप इस निष्कर्ष पर पहुँच सकते हैं कि *एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने समांतर चतुर्भुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।* परन्तु, ध्यान रखिए यह केवल एक सत्यापन ही है।

**क्रियाकलाप 2 :** कागज़ की एक मोटी शीट या गत्ते पर एक समांतर चतुर्भुज ABCD खींचिए। अब, एक रेखाखंड DE आकृति 11.10 में दर्शाए अनुसार खींचिए।

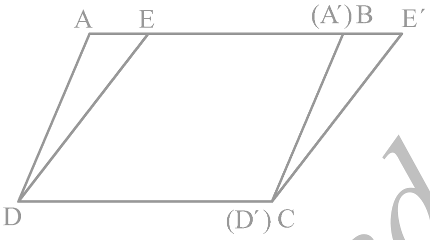


आकृति 11.10

अब एक अलग शीट या गत्ते पर एक अक्स कागज की सहायता से त्रिभुज A′ D′ E′ त्रिभुज

*इस क्रियाकलाप को एक जियोबोर्ड (geoboard) का प्रयोग करके भी किया जा सकता है।

ADE के सर्वांगसम खींचिए और शीट में से इसे काट लीजिए। अब $\Delta A'D'E'$ को इस प्रकार रखिए कि $A'D'$ भुजा BC के संपाती हो, जैसा कि आकृति 11.11 में दर्शाया गया है। ध्यान दीजिए कि यहाँ दो समांतर चतुर्भुज ABCD और $EE'CD$ हैं, जो एक ही आधार DC और एक ही समांतर रेखाओं $AE'$ और DC के बीच स्थित हैं। इनके क्षेत्रफलों के बारे में आप क्या कह सकते हैं?




आकृति 11.11

चूंकि $\Delta ADE \cong \Delta A'D'E'$

अतः, $ar\ (ADE) = ar\ (A'D'E')$

साथ ही, $ar\ (ABCD) = ar\ (ADE) + ar\ (EBCD)$

$= ar\ (A'D'E') + ar\ (EBCD)$

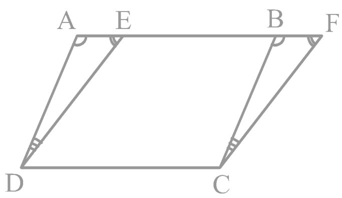
$= ar\ (EE'CD)$

अतः, दोनों समांतर चतुर्भुज क्षेत्रफल में बराबर हैं।

आइए अब ऐसे दो समांतर चतुर्भुजों के बीच में इस संबंध को सिद्ध करने का प्रयत्न करें।

**प्रमेय 11.1 :** *एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित समांतर चतुर्भुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।*

**उपपत्ति :** दो समांतर चतुर्भुज ABCD और EFCD दिए हुए हैं, जो एक ही आधार DC और एक ही समांतर रेखाओं AF और DC के बीच स्थित हैं (देखिए आकृति 11.12)।




आकृति 11.12

हमें $ar\ (ABCD) = ar\ (EFCD)$ सिद्ध करना है।

$\Delta ADE$ और $\Delta BCF$ में,

$\angle DAE = \angle CBF$ ($AD \parallel BC$ और तिर्यक रेखा AF से संगत कोण) (1)

$\angle AED = \angle BFC$ ($ED \parallel FC$ और तिर्यक रेखा AF से संगत कोण) (2)

इसलिए, $\angle ADE = \angle BCF$ (त्रिभुज का कोण योग गुण) (3)

साथ ही, $AD = BC$ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ) (4)

अतः, $\Delta\, ADE \cong \Delta\, BCF$ [ASA नियम तथा (1), (3) और (4) द्वारा]

इसलिए, ar (ADE) = ar (BCF) (सर्वांगसम आकृतियों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं) (5)

अब, ar (ABCD) = ar (ADE) + ar (EDCB)

= ar (BCF) + ar (EDCB) [(5) से ]

= ar (EFCD)

अतः, समांतर चतुर्भुज ABCD और EFCD क्षेत्रफल में बराबर हैं। ■

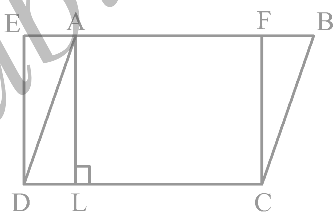
आइए अब इस प्रमेय का उपयोग दर्शाने के लिए कुछ उदाहरण लें :

**उदाहरण 1 :** आकृति 11.13 में, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है और EFCD एक आयत है।

साथ ही, $AL \perp DC$ है। सिद्ध कीजिए कि

(i) ar (ABCD) = ar (EFCD)

(ii) ar (ABCD) = DC × AL




आकृति 11.13

**हल :** (i) चूँकि आयत एक समांतर चतुर्भुज भी होता है, इसलिए

ar (ABCD) = ar (EFCD) (प्रमेय 11.1)

(ii) उपरोक्त परिणाम से,

ar (ABCD) = DC × FC (आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई ) (1)

चूँकि $AL \perp DC$ है, इसलिए AFCL एक आयत है।

अतः, AL = FC (2)

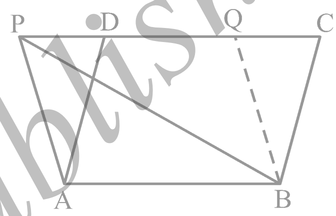
इसलिए, ar (ABCD) = DC × AL [(1) और (2) से]

क्या आप उपरोक्त परिणाम (ii) से यह देख सकते हैं कि *एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल उसकी एक भुजा और संगत शीर्षलम्ब का गुणनफल होता है?* क्या आपको याद है कि समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल के इस सूत्र को आप कक्षा VII में पढ़ चुके हैं? इस सूत्र के आधार पर, प्रमेय 11.1 को इस रूप में लिखा जा सकता है : *एक ही आधार या बराबर आधारों और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने समांतर चतुर्भुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।*

क्या आप उपरोक्त कथन का विलोम लिख सकते हैं? यह इस प्रकार है : *एक ही आधार (या बराबर आधारों) और बराबर क्षेत्रफलों वाले समांतर चतुर्भुज एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित होते हैं।* क्या यह विलोम सत्य है? समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल के सूत्र का प्रयोग करके, इस विलोम को सिद्ध कीजिए।

**उदाहरण 2 :** यदि एक त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हों, तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज का क्षेत्रफल समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।

**हल :** मान लीजिए $\Delta$ ABP और समांतर चतुर्भुज ABCD एक ही आधार AB और एक ही समांतर रेखाओं AB और PC के बीच स्थित हैं (देखिए आकृति 11.14)।



आकृति 11.14

आप सिद्ध करना चाहते हैं कि ar (PAB) = $\frac{1}{2}$ ar (ABCD) है।

एक अन्य समांतर चतुर्भुज ABQP प्राप्त करने के लिए, BQ $\parallel$ AP खींचिए। अब समांतर चतुर्भुज ABQP और ABCD एक ही आधार AB और एक ही समांतर रेखाओं AB और PC के बीच स्थित हैं।

अतः, ar (ABQP) = ar (ABCD) (प्रमेय 11.1 द्वारा) (1)

परन्तु $\Delta$ PAB $\cong$ $\Delta$ BQP (विकर्ण PB समांतर चतुर्भुज ABQP को दो सर्वांगसम त्रिभुजों में बाँटता है)

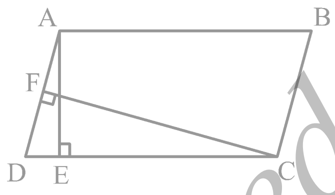
अतः, ar (PAB) = ar (BQP) (2)

इसलिए, ar (PAB) = $\frac{1}{2}$ ar (ABQP) [(2) से] (3)

इससे प्राप्त होता है ar (PAB) = $\frac{1}{2}$ ar (ABCD) [(1) और (3) से]

## प्रश्नावली 11.2

1. आकृति 11.15 में, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है, AE ⊥ DC और CF ⊥ AD है। यदि AB = 16 cm, AE = 8 cm और CF = 10 cm है, तो AD ज्ञात कीजिए।




आकृति 11.15

2. यदि E,F,G और H क्रमशः समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजाओं के मध्य-बिन्दु हैं, तो दर्शाइए कि $\text{ar (EFGH)} = \frac{1}{2}\text{ ar (ABCD)}$ है।

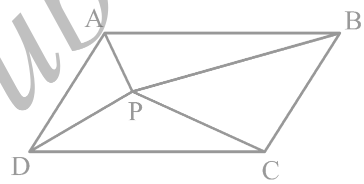
3. P और Q क्रमशः समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजाओं DC और AD पर स्थित बिन्दु हैं। दर्शाइए कि ar (APB) = ar (BQC) है।

4. आकृति 11.16 में, P समांतर चतुर्भुज ABCD के अभ्यंतर में स्थित कोई बिन्दु है। दर्शाइए कि

   (i) $\text{ar (APB)} + \text{ar (PCD)} = \frac{1}{2}\text{ ar (ABCD)}$

   (ii) ar (APD) + ar (PBC) = ar (APB) + ar (PCD)

   [*संकेत*: P से होकर AB के समांतर एक रेखा खींचिए। ]

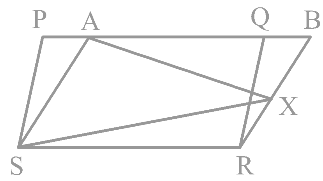



आकृति 11.16

5. आकृति 11.17 में, PQRS और ABRS समांतर चतुर्भुज हैं तथा X भुजा BR पर स्थित कोई बिन्दु है। दर्शाइए कि

   (i) ar (PQRS) = ar (ABRS)

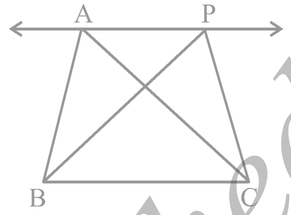
   (ii) $\text{ar (AX S)} = \frac{1}{2}\text{ ar (PQRS)}$




आकृति 11.17

6. एक किसान के पास समांतर चतुर्भुज PQRS के रूप का एक खेत था। उसने RS पर स्थित कोई बिन्दु A लिया और उसे P और Q से मिला दिया। खेत कितने भागों में विभाजित हो गया है? इन भागों के आकार क्या हैं? वह किसान खेत में गेहूँ और दालें बराबर-बराबर भागों में अलग-अलग बोना चाहती है। वह ऐसा कैसे करे?

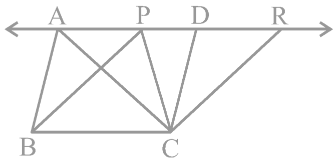
## 11.4 एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुज




आकृति 11.18

आइए आकृति 11.18 को देखें। इसमें आप दो त्रिभुज ABC और PBC ऐसे देखेंगे जो एक ही आधार BC और एक ही समांतर रेखाओं BC और AP के बीच स्थित हैं। ऐसे त्रिभुजों के क्षेत्रफलों के बारे में आप क्या कह सकते हैं? इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए, आप एक आलेख कागज पर एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच त्रिभुजों के कई युग्म बनाकर और वर्गों को गिनकर उनके क्षेत्रफलों को ज्ञात करने का क्रियाकलाप कर सकते हैं। प्रत्येक बार आप पाएँगे कि ऐसे दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफल (लगभग) बराबर हैं। इस क्रियाकलाप को एक जियोबोर्ड लेकर भी किया जा सकता है। आप पुनः पाएँगे कि दोनो क्षेत्रफल (लगभग) बराबर हैं।

इस प्रश्न का एक तर्कसंगत उत्तर प्राप्त करने के लिए, आप निम्न प्रकार आगे बढ़ सकते हैं :




आकृति 11.19

आकृति 11.18 में, CD || BA और CR || BP इस प्रकार खींचिए कि D और R रेखा AP पर स्थित हों (देखिए आकृति 11.19)।

इससे आप दो समांतर चतुर्भुज PBCR और ABCD प्राप्त करते हैं, जो एक ही आधार BC और एक ही समांतर रेखाओं BC और AR के बीच स्थित हैं।

अतः, $\quad \text{ar (ABCD)} = \text{ar (PBCR)}$ (क्यों?)

अब, $\quad \Delta\, \text{ABC} \cong \Delta\, \text{CDA}$ और $\Delta\, \text{PBC} \cong \Delta\, \text{CRP}$ (क्यों?)

अतः, $\quad \text{ar (ABC)} = \frac{1}{2}\,\text{ar (ABCD)}$ और $\text{ar (PBC)} = \frac{1}{2}\,\text{ar (PBCR)}$ (क्यों?)

इसलिए, $\quad \text{ar (ABC)} = \text{ar (PBC)}$

इस प्रकार, आप निम्न प्रमेय पर पहुँच गए हैं :

**प्रमेय 11.2 :** *एक ही आधार (या बराबर आधारों) और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।*

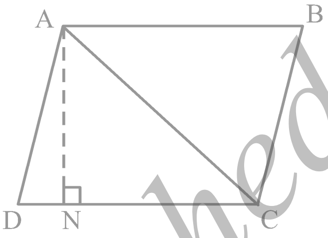
अब, मान लीजिए ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसका एक विकर्ण AC है (देखिए आकृति 11.20)। आइए मान लें कि AN $\perp$ DC है। ध्यान दीजिए कि

$\Delta$ ADC $\cong$ $\Delta$ CBA (क्यों?)

अतः, ar (ADC) = ar (CBA) (क्यों?)

इसलिए, $\text{ar (ADC)} = \frac{1}{2}\text{ ar (ABCD)}$

$= \frac{1}{2}(\text{DC} \times \text{AN})$ (क्यों?)



आकृति 11.20

अतः, $\Delta$ ADC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ $\times$ आधार DC $\times$ संगत शीर्षलम्ब AN

दूसरे शब्दों में, *किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल उसके आधार (एक भुजा) और संगत शीर्षलम्ब (या ऊँचाई) के गुणनफल के आधे के बराबर होता है।* क्या आपको याद है कि आप त्रिभुज के क्षेत्रफल के इस सूत्र के बारे में कक्षा VII में पढ़ चुके हैं? इस सूत्र से, आप देख सकते हैं कि एक ही *आधार (या बराबर आधारों) वाले और बराबर क्षेत्रफलों वाले त्रिभुज बराबर संगत शीर्षलम्बों वाले होंगे।*

बराबर संगत शीर्षलंब होने के लिए, त्रिभुजों को एक ही समांतर भुजाओं के बीच स्थित होना चाहिए। इससे आप प्रमेय 11.2 के निम्न विलोम पर पहुँच जाएँगे :

**प्रमेय 11.3 :** *एक ही आधार (या बराबर आधारों) वाले और बराबर क्षेत्रफलों वाले त्रिभुज एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित होते हैं।*

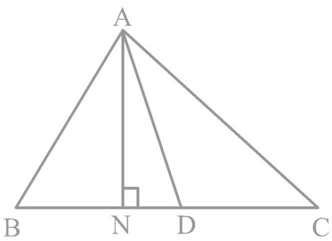
आइए अब इन परिणामों का प्रयोग दर्शाने के लिए कुछ उदाहरण लें।

**उदाहरण 3 :** दर्शाइए कि त्रिभुज की एक माध्यिका उसे बराबर क्षेत्रफलों वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है।

**हल :** मान लीजिए ABC एक त्रिभुज है और AD उसकी एक माध्यिका है (देखिए आकृति 11.21)। आप यह दर्शाना चाहते हैं कि

ar (ABD) = ar (ACD)

चूँकि त्रिभुज के क्षेत्रफल में शीर्षलम्ब समबद्ध होता है, इसलिए आइए AN $\perp$ BC खींचें।



आकृति 11.21

अब, $\text{ar(ABD)} = \frac{1}{2}$ $\times$ आधार $\times$ शीर्षलम्ब ($\Delta$ ABD का)

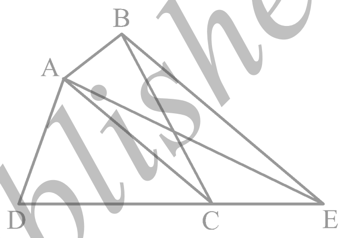
$= \frac{1}{2} \times BD \times AN$

$= \frac{1}{2} \times CD \times AN$ (चूँकि BD = CD)

$= \frac{1}{2}$ × आधार × शीर्षलम्ब ( Δ ACD का)

= ar(ACD)

**उदाहरण 4 :** आकृति 11.22 में, ABCD एक चतुर्भुज है और BE || AC इस प्रकार है कि BE बढ़ाई गई DC को E पर मिलती है। दर्शाइए कि त्रिभुज ADE का क्षेत्रफल चतुर्भुज ABCD के क्षेत्रफल के बराबर है।



आकृति 11.22

**हल :** आकृति को ध्यानपूर्वक देखिए।

Δ BAC और Δ EAC एक ही आधार AC और एक ही समांतर रेखाओं AC और BE के बीच स्थित हैं।

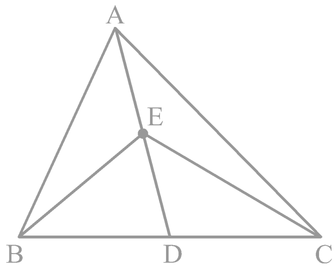
अतः, ar (BAC) = ar (EAC) (प्रमेय 11.2 द्वारा)

इसलिए, ar (BAC) + ar (ADC) = ar (EAC) + ar (ADC)

(एक ही क्षेत्रफल दोनों पक्षों में जोड़ने पर)

या ar (ABCD) = ar (ADE)

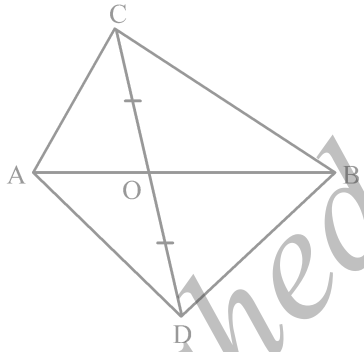
## प्रश्नावली 11.3



आकृति 11.23

1. आकृति 11.23 में, Δ ABC की एक माध्यिका AD पर स्थित E कोई बिन्दु है। दर्शाइए कि ar (ABE) = ar (ACE) है।
2. Δ ABC में, E माध्यिका AD का मध्य-बिन्दु है। दर्शाइए कि ar (BED) = $\frac{1}{4}$ ar(ABC) है।
3. दर्शाइए कि समांतर चतुर्भुज के दोनों विकर्ण उसे बराबर क्षेत्रफलों वाले चार त्रिभुजों में बाँटते हैं।

4. आकृति 11.24 में, ABC और ABD एक ही आधार AB पर बने दो त्रिभुज हैं। यदि रेखाखंड CD रेखाखंड AB से बिन्दु O पर समद्विभाजित होता है, तो दर्शाइए कि ar (ABC) = ar (ABD) है।



आकृति 11.24

5. D, E और F क्रमशः त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA और AB के मध्य-बिन्दु हैं। दर्शाइए कि

(i) BDEF एक समांतर चतुर्भुज है  (ii) ar (DEF) = $\frac{1}{4}$ ar (ABC)

(iii) ar (BDEF) = $\frac{1}{2}$ ar (ABC)

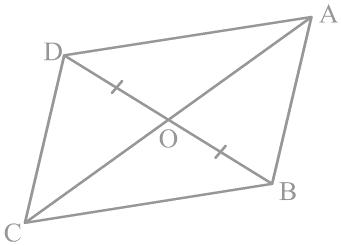
6. आकृति 11.25 में, चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिन्दु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि OB = OD है। यदि AB = CD है, तो दर्शाइए कि

(i) ar (DOC) = ar (AOB)

(ii) ar (DCB) = ar (ACB)

(iii) DA || CB या ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

[*संकेत*: D और B से AC पर लम्ब खींचिए।]



आकृति 11.25

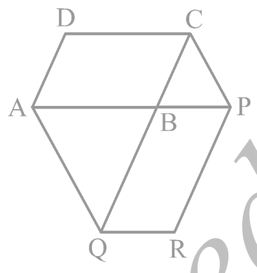
7. बिन्दु D और E क्रमशः Δ ABC की भुजाओं AB और AC पर इस प्रकार स्थित हैं कि ar (DBC) = ar (EBC) है। दर्शाइए कि DE || BC है।

8. XY त्रिभुज ABC की भुजा BC के समांतर एक रेखा है। यदि BE || AC और CF || AB रेखा XY से क्रमशः E और F पर मिलती हैं, तो दर्शाइए कि:

ar (ABE) = ar (ACF)

**9.** समांतर चतुर्भुज ABCD की एक भुजा AB को एक बिन्दु P तक बढ़ाया गया है। A से होकर CP के समांतर खींची गई रेखा बढ़ाई गई CB को Q पर मिलती है और फिर समांतर चतुर्भुज PBQR को पूरा किया गया है (देखिए आकृति 11.26)। दर्शाइए कि ar (ABCD) = ar (PBQR) है।

[*संकेत*: AC और PQ को मिलाइए। अब ar (ACQ) और ar (APQ) की तुलना कीजिए।]



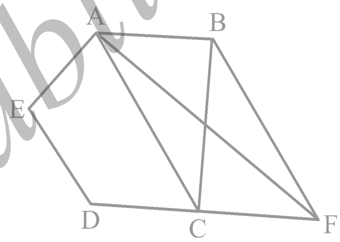
आकृति 11.26

**10.** एक समलंब ABCD, जिसमें AB || DC है, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि ar (AOD) = ar (BOC) है।

**11.** आकृति 11.27 में, ABCDE एक पंचभुज है। B से होकर AC के समांतर खींची गई रेखा बढ़ाई गई DC को F पर मिलती है। दर्शाइए कि

(i) ar (ACB) = ar (ACF)

(ii) ar (AEDF) = ar (ABCDE)



आकृति 11.27

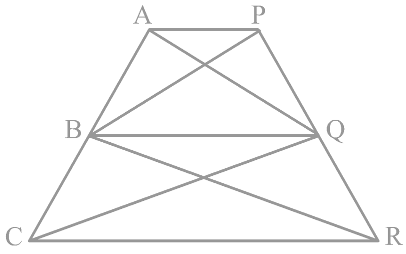
**12.** गाँव के एक निवासी इतवारी के पास एक चतुर्भुजाकार भूखंड था। उस गाँव की ग्राम पंचायत ने उसके भूखंड के एक कोने से उसका कुछ भाग लेने का निर्णय लिया ताकि वहाँ एक स्वास्थ्य केन्द्र का निर्माण कराया जा सके। इतवारी इस प्रस्ताव को इस प्रतिबन्ध के साथ स्वीकार कर लेता है कि उसे इस भाग के बदले उसी भूखंड के संलग्न एक भाग ऐसा दे दिया जाए कि उसका भूखंड त्रिभुजाकार हो जाए। स्पष्ट कीजिए कि इस प्रस्ताव को किस प्रकार कार्यान्वित किया जा सकता है।

**13.** ABCD एक समलंब है, जिसमें AB || DC है। AC के समांतर एक रेखा AB को X पर और BC को Y पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि ar (ADX) = ar (ACY) है।

[*संकेत*: CX को मिलाइए।]

**14.** आकृति 11.28 में, AP || BQ || CR है। सिद्ध कीजिए कि

ar (AQC) = ar (PBR) है।

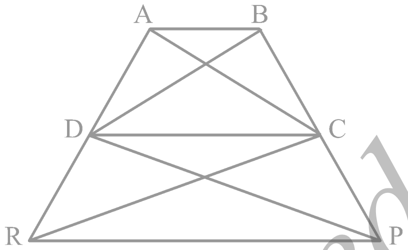


आकृति 11.28

**15.** चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिन्दु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि

ar (AOD) = ar (BOC) है। सिद्ध कीजिए कि ABCD एक समलंब है।

**16.** आकृति 11.29 में, ar (DRC) = ar (DPC) है और ar (BDP) = ar (ARC) है। दर्शाइए कि दोनों चतुर्भुज ABCD और DCPR समलंब हैं।



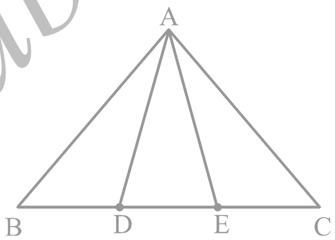

आकृति 11.29

## प्रश्नावली 11.4 (ऐच्छिक)*

**1.** समांतर चतुर्भुज ABCD और आयत ABEF एक ही आधार पर स्थित हैं और उनके क्षेत्रफल बराबर हैं। दर्शाइए कि समांतर चतुर्भुज का परिमाप आयत के परिमाप से अधिक है।

**2.** आकृति 11.30 में, भुजा BC पर दो बिन्दु D और E इस प्रकार स्थित हैं कि BD = DE = EC है। दर्शाइए कि ar (ABD) = ar (ADE) = ar (AEC) है।

क्या आप अब उस प्रश्न का उत्तर दे सकते हैं, जो आपने इस अध्याय की 'भूमिका' में छोड़ दिया था कि "क्या *बुधिया* का खेत वास्तव में बराबर क्षेत्रफलों वाले तीन भागों में विभाजित हो गया है"?




आकृति 11.30

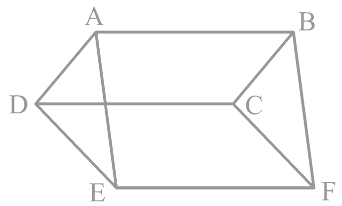
[**टिप्पणी:** ध्यान दीजिए कि BD = DE = EC लेने से ΔABC तीन त्रिभुजों ABD, ADE और AEC में विभाजित हो जाता है जिनके क्षेत्रफल बराबर हैं। इसी प्रकार, BC को $n$ बराबर भागों में विभाजित करके और इस भुजा को विभाजित करने वाले बिन्दुओं को सम्मुख शीर्ष A से मिला कर आप इस त्रिभुज को बराबर क्षेत्रफलों वाले $n$ त्रिभुजों में विभाजित कर सकते हैं।

**3.** आकृति 11.31 में, ABCD, DCFE और ABFE समांतर चतुर्भुज हैं। दर्शाइए कि ar (ADE) = ar (BCF) है।

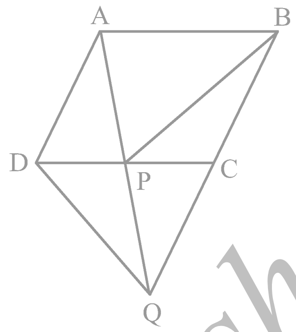
**4.** आकृति 11.32 में, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है और BC को एक बिन्दु Q तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि AD = CQ है। यदि AQ भुजा DC को P पर प्रतिच्छेद करती है, तो दर्शाइए कि ar (BPC) = ar (DPQ) है।

[*संकेत*: AC को मिलाइए।]

*यह प्रश्नावली परीक्षा की दृष्टि से नहीं दी गई है।




आकृति 11.31




आकृति 11.32

**5.** आकृति 11.33 में, ABC और BDE दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि D भुजा BC का मध्य-बिन्दु है। यदि AE भुजा BC को F पर प्रतिच्छेद करती है, तो दर्शाइए कि

(i) $ar(BDE) = \frac{1}{4} ar(ABC)$

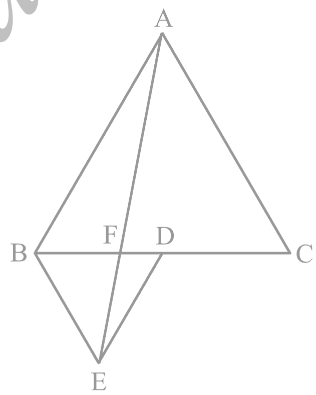
(ii) $ar(BDE) = \frac{1}{2} ar(BAE)$

(iii) $ar(ABC) = 2\, ar(BEC)$

(iv) $ar(BFE) = ar(AFD)$

(v) $ar(BFE) = 2\, ar(FED)$

(vi) $ar(FED) = \frac{1}{8} ar(AFC)$




आकृति 11.33

[*संकेत*: EC और AD को मिलाइए। दर्शाइए कि $BE \parallel AC$ और $DE \parallel AB$ है, इत्यादि।]

**6.** चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि $ar(APB) \times ar(CPD) = ar(APD) \times ar(BPC)$ है।

[*संकेत*: A और C से BD पर लम्ब खींचिए।]

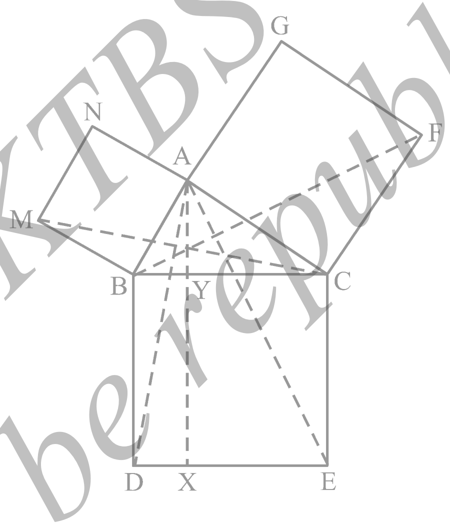
**7.** P और Q क्रमश: त्रिभुज ABC की भुजाओं AB और BC के मध्य-बिन्दु हैं तथा R रेखाखंड

AP का मध्य-बिन्दु है। दर्शाइए कि:

(i) ar (PRQ) = $\frac{1}{2}$ ar (ARC) (ii) ar (RQC) = $\frac{3}{8}$ ar (ABC)

(iii) ar (PBQ) = ar (ARC)

**8.** आकृति 11.34 में, ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण A समकोण है। BCED, ACFG और ABMN क्रमश: भुजाओं BC, CA और AB पर बने वर्ग हैं। रेखाखंड AX $\perp$ DE भुजा BC को बिन्दु Y पर मिलता है। दर्शाइए कि:




आकृति 11.34

(i) $\Delta$ MBC $\cong$ $\Delta$ ABD (ii) ar (BYXD) = 2 ar (MBC)

(iii) ar (BYXD) = ar (ABMN) (iv) $\Delta$ FCB $\cong$ $\Delta$ ACE

(v) ar (CYXE) = 2 ar (FCB) (vi) ar (CYXE) = ar (ACFG)

(vii) ar (BCED) = ar (ABMN) + ar (ACFG)

टिप्पणी : परिणाम (vii) प्रसिद्ध (सुपरिचित) पाइथागोरस प्रमेय है। इस प्रमेय की एक सरलतम उपपत्ति आप कक्षा X में पढ़ेंगे।

## 11.5 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिन्दुओं का अध्ययन किया है :

1. एक आकृति का क्षेत्रफल उस आकृति द्वारा घेरे गए तल के भाग से संबद्ध (किसी मात्रक में) एक संख्या होती है।
2. दो सर्वांगसम आकृतियों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं, परन्तु इसका विलोम आवश्यक रूप से सत्य नहीं है।
3. यदि एक आकृति T द्वारा निर्मित कोई तलीय क्षेत्र किन्हीं दो आकृतियों P और Q द्वारा निर्मित दो अनातिव्यापी तलीय क्षेत्रों से मिल कर बना है, तो $ar(T) = ar(P) + ar(Q)$ है, जहाँ $ar(X)$ आकृति X का क्षेत्रफल व्यक्त करता है।
4. दो आकृतियाँ एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित कही जाती हैं, यदि उनमें एक उभयनिष्ठ आधार (एक भुजा) हो तथा उभयनिष्ठ आधार के सम्मुख प्रत्येक आकृति के शीर्ष (का शीर्ष) उस आधार के समांतर किसी रेखा पर स्थित हों।
5. एक ही आधार (या बराबर आधारों) वाले और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित समांतर चतुर्भुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।
6. समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल उसके आधार और संगत शीर्षलम्ब का गुणनफल होता है।
7. एक ही आधार (या बराबर आधारों) वाले और बराबर क्षेत्रफलों वाले समांतर चतुर्भुज एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित होते हैं।
8. यदि एक त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।
9. एक ही आधार (या बराबर आधारों) वाले और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।
10. त्रिभुज का क्षेत्रफल उसके आधार और संगत शीर्षलम्ब के गुणनफल का आधा होता है।
11. एक ही आधार (या बराबर आधारों) वाले और बराबर क्षेत्रफलों वाले त्रिभुज एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित होते हैं।
12. त्रिभुज की एक माध्यिका उसे बराबर क्षेत्रफलों वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है।

**अध्याय 12**

# वृत्त

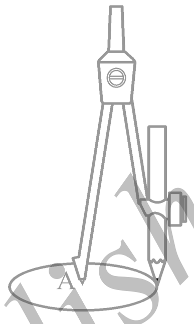
## 12.1 भूमिका

आप अपने दैनिक जीवन में, बहुत सी ऐसी वस्तुओं के संपर्क में अवश्य आए होंगे जिनके आकार गोल हों : जैसे किसी गाड़ी का पहिया, चूड़ियाँ, कई घड़ियों के डायल, 50 पैसे, एक रुपया और पाँच रुपए मूल्य के सिक्के, चाबी के गुच्छे, कमीज के बटन आदि (देखिए आकृति 12.1)। घड़ी में आपने ध्यान दिया होगा कि सेकेंड की सुई घड़ी के डायल के ऊपर जल्दी-जल्दी चक्कर लगाती है तथा इसका एक सिरा एक गोल पथ में चलता है। सेकेंड की सुई के सिरे से बनता हुआ पथ एक **वृत्त** (**circle**) कहलाता है। इस अध्याय में, आप वृत्त, इससे संबंधित अन्य पदों तथा वृत्त के कुछ गुणों के बारे में अध्ययन करेंगे।


आकृति 12.1

## 12.2 वृत्त और इससे संबंधित पद : एक पुनरावलोकन

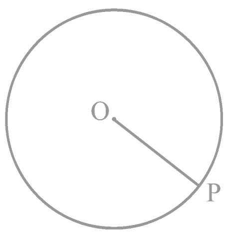
एक परकार लीजिए तथा इसमें एक पेंसिल लगाइए। इसका नुकीला सिरा एक कागज के पृष्ठ के एक बिन्दु पर रखिए। दूसरी भुजा को कुछ दूरी तक खोलिए। नुकीले सिरे को उसी बिन्दु पर स्थिर कर दूसरी भुजा को एक चक्कर घुमाइए। पेंसिल से कागज पर बनी आकृति क्या है? जैसा कि आप जानते हैं कि यह एक वृत्त है (देखिए आकृति 12.2)। आपने वृत्त कैसे प्राप्त किया? आपने एक बिन्दु A को स्थिर रखा तथा वे सभी बिन्दु बनाए जो A से एक स्थिर दूरी पर हैं। इस प्रकार, हमें निम्न परिभाषा प्राप्त हुई :




आकृति 12.2

*एक तल पर उन सभी बिन्दुओं का समूह, जो तल के एक स्थिर बिन्दु से एक स्थिर दूरी पर स्थित हों, एक वृत्त कहलाता है।*

स्थिर बिन्दु को वृत्त का *केन्द्र* (*centre*) कहते हैं तथा स्थिर दूरी को वृत्त की *त्रिज्या* (*radius*) कहते हैं। आकृति 12.3 में, O वृत्त का केन्द्र तथा लम्बाई OP वृत्त की त्रिज्या है।

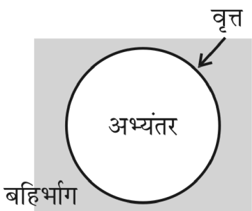



आकृति 12.3

**टिप्पणी :** ध्यान दीजिए कि केन्द्र को वृत्त के किसी बिन्दु से मिलाने वाला रेखाखंड भी वृत्त की त्रिज्या कहलाता है। अर्थात् 'त्रिज्या' को दो अर्थों में प्रयोग किया जाता है – रेखाखंड के रूप में तथा इसकी लम्बाई के रूप में।

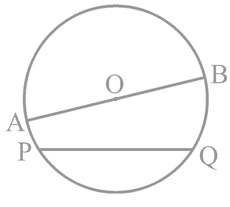
आपको कक्षा 6 से निम्न में से कुछ अवधारणाओं का ज्ञान है। हम केवल उनका पुनः स्मरण करते हैं।

एक वृत्त उस तल को, जिस पर वह स्थित है, तीन भागों में विभाजित करता है। ये हैं :(i) वृत्त के अन्दर का भाग, जिसे *अभ्यंतर* (*interior*) भी कहते हैं, (ii) वृत्त एवं (iii) वृत्त के बाहर का भाग, जिसे *बहिर्भाग* (*exterior*) भी कहते हैं (देखिए आकृति 12.4)। वृत्त तथा इसका अभ्यंतर मिलकर *वृत्तीय क्षेत्र* (*circular region*) बनाते हैं।




आकृति 12.4

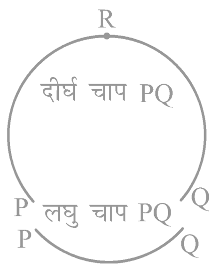
यदि एक वृत्त पर दो बिन्दु P तथा Q लें, तो रेखाखंड PQ वृत्त की एक *जीवा* कहलाता है। (देखिए आकृति 12.5)। उस जीवा को जो वृत्त के केन्द्र से होकर जाती है, वृत्त का *व्यास* कहते हैं। त्रिज्या के समान शब्द 'व्यास' को भी दो अर्थों में प्रयुक्त किया जाता है, अर्थात् एक रेखाखंड के रूप में तथा इसकी लम्बाई के रूप में। क्या आपको वृत्त में व्यास से बड़ी कोई और जीवा प्राप्त हो सकती है? नहीं। आप देख सकते हैं कि व्यास वृत्त की सबसे लम्बी जीवा होती है तथा सभी व्यासों की लम्बाई समान होती है जो त्रिज्या की दो गुनी होती है। आकृति 12.5 में, AOB वृत्त का एक व्यास है। एक वृत्त में कितने व्यास हो सकते हैं? एक वृत्त खींचिए और देखिए कि आप कितने व्यास बना सकते हैं?



आकृति 12.5

दो बिन्दुओं के बीच के वृत्त के भाग को एक *चाप* (*arc*) कहते हैं। आकृति 12.6 में, बिन्दुओं P तथा Q के बीच के वृत्त के भागों को देखिए। आप पाएँगे कि दोनों भागों में से एक बड़ा है तथा एक छोटा है (देखिए आकृति 12.7)। बड़े भाग को *दीर्घ चाप* (*major arc*) PQ कहते हैं तथा छोटे भाग को *लघु चाप* (*minor arc*) कहते हैं। लघु चाप PQ को $\overset{\frown}{PQ}$ से व्यक्त करते हैं तथा दीर्घ चाप PQ को $\overset{\frown}{PRQ}$ से, जहाँ R चाप पर P तथा Q के बीच में कोई बिन्दु है। जब तक अन्यथा कहा न जाए, चाप PQ या $\overset{\frown}{PQ}$ लघु चाप को प्रदर्शित करता है। जब P और Q एक व्यास के सिरे हों, तो दोनों चाप बराबर हो जाते हैं और प्रत्येक चाप को *अर्धवृत्त* (*semicircle*) कहते हैं।

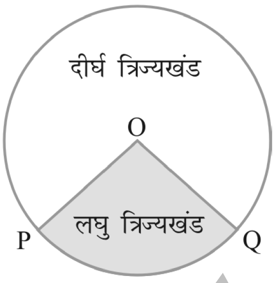
आकृति 12.6



आकृति 12.7

संपूर्ण वृत्त की लम्बाई को उसकी *परिधि* (*circumference*) कहते हैं। जीवा तथा प्रत्येक चाप के मध्य क्षेत्र को वृत्तीय क्षेत्र का खंड या सरल शब्दों में *वृत्तखंड* कहते हैं। आप पाएँगे कि दो प्रकार के वृत्तखंड होते हैं। ये हैं: *दीर्घ वृत्तखंड* (*major segment*) तथा *लघु वृत्तखंड* (*minor segment*) (देखिए आकृति 12.8)। केन्द्र को एक चाप के सिरों से मिलाने वाली त्रिज्याओं एवं चाप के बीच के क्षेत्र को *त्रिज्यखंड* (*sector*) कहते हैं। वृत्तखंड की तरह, आप पाते हैं कि लघु चाप लघु त्रिज्यखंड के तथा दीर्घ चाप दीर्घ त्रिज्यखंड के संगत है। आकृति 12.9 में, क्षेत्र OPQ *लघु त्रिज्यखंड* (*minor sector*) तथा शेष वृत्तीय क्षेत्र *दीर्घ त्रिज्यखंड* (*major sector*) है। जब दोनों चाप बराबर हो जाते हैं, अर्थात् प्रत्येक अर्धवृत्त होता है, तो दोनों वृत्तखंड तथा दोनों त्रिज्यखंड एक समान हो जाते हैं और प्रत्येक को *अर्धवृत्तीय क्षेत्र* (*semi circular region*) कहते हैं।


आकृति 12.8




आकृति 12.9

## प्रश्नावली 12.1

**1.** खाली स्थान भरिए :

(i) वृत्त का केन्द्र वृत्त के ____________ में स्थित है (बहिर्भाग/अभ्यंतर)।

(ii) एक बिन्दु, जिसकी वृत्त के केन्द्र से दूरी त्रिज्या से अधिक हो, वृत्त के ____________ में स्थित होता है (बहिर्भाग/अभ्यंतर)।

(iii) वृत्त की सबसे बड़ी जीवा वृत्त का ____________ होता है।

(iv) एक चाप ____________ होता है, जब इसके सिरे एक व्यास के सिरे हों।

(v) वृत्तखंड एक चाप तथा ____________ के बीच का भाग होता है।

(vi) एक वृत्त, जिस तल पर स्थित है, उसे ____________ भागों में विभाजित करता है।

**2.** लिखिए, सत्य या असत्य। अपने उत्तर के कारण दीजिए।

(i) केन्द्र को वृत्त पर किसी बिन्दु से मिलाने वाला रेखाखंड वृत्त की त्रिज्या होती है।

(ii) एक वृत्त में समान लंबाई की परिमित जीवाएँ होती हैं।

(iii) यदि एक वृत्त को तीन बराबर चापों में बाँट दिया जाए, तो प्रत्येक भाग दीर्घ चाप होता है।

(iv) वृत्त की एक जीवा, जिसकी लम्बाई त्रिज्या से दो गुनी हो, वृत्त का व्यास है।

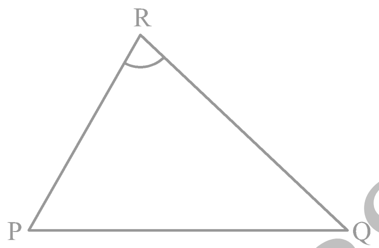
(v) त्रिज्यखंड, जीवा एवं संगत चाप के बीच का क्षेत्र होता है।

(vi) वृत्त एक समतल आकृति है।

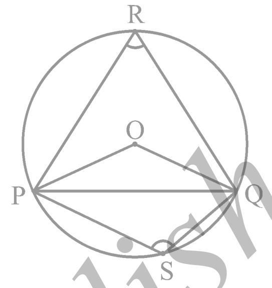
## 12.3 जीवा द्वारा एक बिन्दु पर अंतरित कोण

एक रेखाखंड PQ तथा एक बिन्दु R, जो रेखा PQ पर स्थित न हो, लीजिए। PR तथा QR को मिलाइए (देखिए आकृति 12.10)। तब कोण PRQ, रेखाखंड PQ द्वारा बिन्दु R पर

*अंतरित कोण* कहलाता है। आकृति 12.11 में कोण POQ, PRQ तथा PSQ क्या कहलाते हैं? $\angle$ POQ जीवा PQ द्वारा केन्द्र O पर अंतरित कोण है, $\angle$ PRQ तथा $\angle$ PSQ क्रमश: PQ द्वारा दीर्घ चाप PQ तथा लघु चाप PQ पर स्थित बिन्दुओं R और S पर अंतरित कोण हैं।

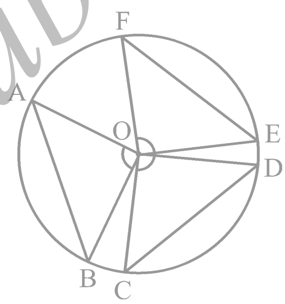



आकृति 12.10




आकृति 12.11

आइए हम जीवा की माप तथा उसके द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण में संबंध की जाँच करें। आप एक वृत्त में विभिन्न जीवाएँ खींचकर तथा उनके द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोणों को बनाकर देख सकते हैं कि जीवा यदि बड़ी होगी, तो उसके द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण भी बड़ा होगा। क्या होगा यदि आप दो बराबर जीवाएँ लेंगे? क्या केन्द्र पर अंतरित कोण समान होंगे या नहीं?

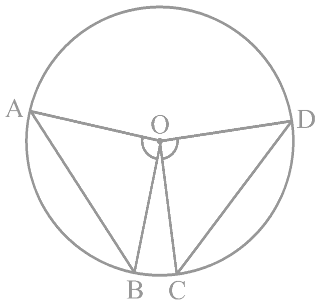



आकृति 12.12

एक वृत्त की दो या अधिक बराबर जीवाएँ खींचिए तथा केन्द्र पर उनके द्वारा अंतरित कोणों को मापिए (देखिए आकृति 12.12)। आप पाएँगे कि उनके द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण बराबर हैं। आइए इस तथ्य की हम उपपत्ति दें।

**प्रमेय 12.1 :** *वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।*

**उपपत्ति :** आपको एक वृत्त, जिसका केन्द्र O है, की दो बराबर जीवाएँ AB और CD दी हुई हैं (देखिए आकृति 12.13) तथा आप सिद्ध करना चाहते हैं कि $\angle AOB = \angle COD$ है।




आकृति 12.13

त्रिभुजों AOB तथा COD में,

OA = OC (एक वृत्त की त्रिज्याएँ)

OB = OD (एक वृत्त की त्रिज्याएँ)

AB = CD (दिया है)

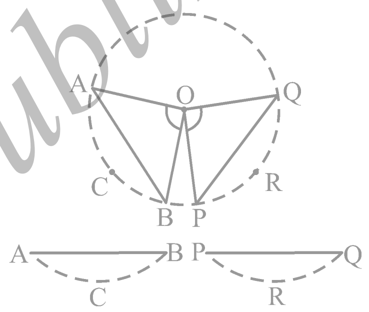
अतः, $\Delta\ AOB \cong \Delta\ COD$ (SSS नियम)

इस प्रकार, हम पाते हैं कि $\angle\ AOB = \angle\ COD$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

**टिप्पणी :** सुविधा के लिए 'सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग' के स्थान पर संक्षेप में CPCT का प्रयोग किया जाएगा, क्योंकि जैसा कि आप देखेंगे कि इसका हम बहुधा प्रयोग करते हैं।

अब यदि एक वृत्त की दो जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करें, तो उन जीवाओं के बारे में आप क्या कह सकते हैं? क्या वे बराबर हैं अथवा नहीं? आइए हम इसकी निम्न क्रियाकलाप द्वारा जाँच करें।

एक अक्स कागज़ (tracing paper) लीजिए और इस पर एक वृत्त खींचिए। इसे वृत्त के अनुदिश काटकर एक चकती (disc) प्राप्त कीजिए। इसके केन्द्र O पर एक कोण AOB बनाइए, जहाँ A, B वृत्त पर स्थित बिन्दु हैं। केन्द्र पर, एक दूसरा कोण POQ कोण AOB के बराबर बनाइए। चकती को इन कोणों के सिरों को मिलाने वाली जीवाओं के अनुदिश काटें (देखिए आकृति 12.14)। आप दो वृत्तखंड ACB तथा PRQ प्राप्त करेंगे। यदि आप एक को दूसरे के ऊपर रखेंगे, तो आप क्या अनुभव करेंगे? वे एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेंगे, अर्थात् वे सर्वांगसम होंगे। इसलिए AB = PQ है।




आकृति 12.14

यद्यपि आपने इसे एक विशेष दशा में ही देखा है, इसे आप अन्य समान कोणों के लिए दोहराइए। निम्न प्रमेय के कारण सभी जीवाएँ बराबर होंगी:

**प्रमेय 12.2 :** *यदि एक वृत्त की जीवाओं द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण बराबर हों, तो वे जीवाएँ बराबर होती हैं।*

उपर्युक्त प्रमेय, प्रमेय 12.1 का विलोम है। ध्यान दीजिए कि आकृति 12.13 में यदि आप $\angle\ AOB = \angle\ COD$ लें, तो

$$\Delta\ AOB \cong \Delta\ COD \text{ (क्यों?)}$$

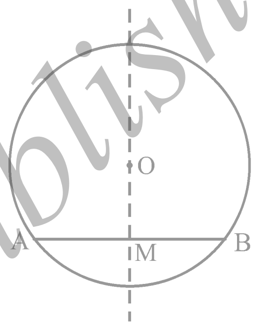
क्या अब आप देख सकते हैं कि AB = CD है?

## प्रश्नावली 12.2

1. याद कीजिए कि दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं, यदि उनकी त्रिज्याएँ बराबर हों। सिद्ध कीजिए कि सर्वांगसम वृत्तों की बराबर जीवाएँ उनके केन्द्रों पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।
2. सिद्ध कीजिए कि यदि सर्वांगसम वृत्तों की जीवाएँ उनके केन्द्रों पर बराबर कोण अंतरित करें, तो जीवाएँ बराबर होती हैं।

## 12.4 केन्द्र से जीवा पर लम्ब

**क्रियाकलाप :** एक अक्स कागज पर एक वृत्त खींचिए। माना इसका केन्द्र O है। एक जीवा AB खींचिए। कागज को O से जाने वाली एक रेखा के अनुदिश इस प्रकार मोड़िए कि जीवा का एक भाग दूसरे भाग पर पड़े। मान लीजिए कि मोड़ का निशान AB को M पर काटता है। तब $\angle OMA = \angle OMB = 90°$ अथवा OM, AB पर लम्ब है (देखिए आकृति 12.15)। क्या बिन्दु B, A के संपाती होता है?



आकृति 12.15

हाँ, यह होगा। इसलिए MA = MB है।

OA और OB को मिलाकर तथा समकोण त्रिभुजों OMA और OMB को सर्वांगसम सिद्ध कर इसकी उपपत्ति स्वयं दीजिए। यह उदाहरण निम्न परिणाम का विशेष दृष्टांत है:

**प्रमेय 12.3 :** *एक वृत्त के केन्द्र से एक जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।*

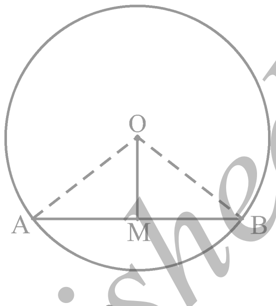
इस प्रमेय का विलोम क्या है? इसको लिखने के लिए, सर्वप्रथम हमें स्पष्ट होना है कि प्रमेय 12.3 में क्या दिया गया है और क्या सिद्ध करना है। दिया है कि केन्द्र से जीवा पर लंब खींचा गया है और सिद्ध करना है कि वह जीवा को समद्विभाजित करता है। अतः विलोम में परिकल्पना है 'यदि एक केन्द्र से जाने वाली रेखा वृत्त की एक जीवा को समद्विभाजित करे' और सिद्ध करना है 'रेखा जीवा पर लम्ब है'। इस प्रकार, विलोम है :

**प्रमेय 12.4 :** *एक वृत्त के केन्द्र से एक जीवा को समद्विभाजित करने के लिए खींची गई रेखा जीवा पर लंब होती है।*

क्या यह सत्य है? इसको कुछ स्थितियों में प्रयत्न करके देखिए। आप देखेंगे कि यह इन सभी स्थितियों में सत्य है। निम्न अभ्यास करके देखिए कि क्या यह कथन व्यापक रूप में सत्य

है। हम इसके कुछ कथन देंगे और आप इनके कारण दीजिए।

मान लीजिए कि एक वृत्त, जिसका केन्द्र O है, की AB एक जीवा है और O को AB के मध्य-बिन्दु M से मिलाया गया है। आपको सिद्ध करना है कि $OM \perp AB$ है। OA और OB को मिलाइए (देखिए आकृति 12.16)। त्रिभुजों OAM तथा OBM में,




आकृति 12.16

$OA = OB$ (क्यों?)

$AM = BM$ (क्यों?)

$OM = OM$ (उभयनिष्ठ)

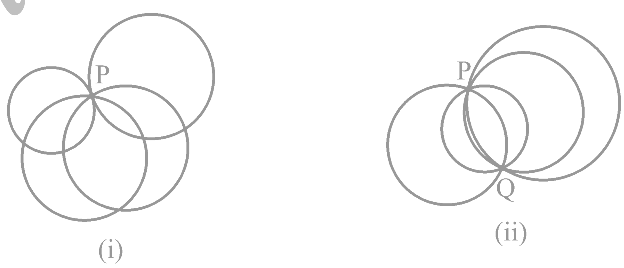
अत:, $\Delta OAM \cong \Delta OBM$ (क्यों?)

इससे प्राप्त होता है: $\angle OMA = \angle OMB = 90°$ (क्यों?)

## 12.5 तीन बिन्दुओं से जाने वाला वृत्त

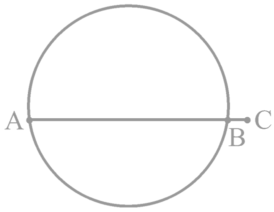
अध्याय 3 में आपने पढ़ा है कि एक रेखा को निर्धारित करने के लिए दो बिन्दु पर्याप्त हैं। अर्थात् दो बिन्दुओं से होकर जाने वाली एक और केवल एक ही रेखा है। एक स्वाभाविक प्रश्न उठता है: एक वृत्त को बनाने के लिए कितने बिन्दु पर्याप्त हैं?

एक बिन्दु P लीजिए। इस बिन्दु से होकर जाने वाले कितने वृत्त खींचे जा सकते हैं? आप देखते हैं कि इस बिन्दु से होकर जाने वाले जितने चाहें उतने वृत्त खींचे जा सकते हैं [देखिए आकृति 12.17(i)]। अब दो बिन्दु P और Q लीजिए। आप फिर से देखेंगे कि P तथा Q से होकर जाने वाले अनगिनत वृत्त खींचे जा सकते हैं [आकृति 12.17(ii)]। क्या होगा यदि आप तीन बिन्दु A, B और C लें?




आकृति 12. 17

क्या आप तीन संरेखी बिन्दुओं से एक वृत्त खींच सकते हैं? नहीं। यदि बिन्दु एक रेखा पर स्थित हों, तो तीसरा बिन्दु दो बिन्दुओं से होकर जाने वाले वृत्त के अंदर या बाहर होगा (देखिए आकृति 12.18)।




आकृति 12.18

अतः आइए हम तीन बिन्दु A, B और C लें, जो एक रेखा पर स्थित न हों या दूसरे शब्दों में, वे संरेखी न हों [देखिए आकृति 12.19(i)]। AB तथा BC के क्रमशः लम्ब समद्विभाजक PQ और RS खींचिए। मान लीजिए ये लम्ब समद्विभाजक एक बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं (ध्यान दीजिए कि PQ और RS परस्पर प्रतिच्छेद करेंगे, क्योंकि वे समांतर नहीं हैं) [देखिए आकृति 12.19(ii)]।


आकृति 12.19

अब क्योंकि O, AB के लम्ब समद्विभाजक PQ पर स्थित है, इसलिए OA = OB है। [ध्यान दीजिए कि अध्याय 5 में सिद्ध किया गया है कि रेखाखंड के लम्ब समद्विभाजक का प्रत्येक बिन्दु उसके अंत बिन्दुओं से बराबर दूरी पर होता है।]

इसी प्रकार, क्योंकि O, BC के लम्ब समद्विभाजक RS पर स्थित हैं, इसलिए आप पाते हैं कि

$$OB = OC$$

इसीलिए OA = OB = OC है, जिसका अर्थ है कि बिन्दु A, B और C बिन्दु O से समान दूरी पर हैं। अतः यदि आप O को केन्द्र तथा OA त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचे, तो वह B और C से भी होकर जाएगा। यह दर्शाता है कि तीन बिन्दुओं A, B और C से होकर जाने वाला एक वृत्त है। आप जानते हैं कि दो रेखाएँ (लम्ब समद्विभाजक) केवल एक बिन्दु पर

प्रतिच्छेद कर सकती हैं। दूसरे शब्दों में, A, B और C से होकर जाने वाला एक अद्वितीय वृत्त है। आपने अब निम्न प्रमेय को सिद्ध कर लिया है:

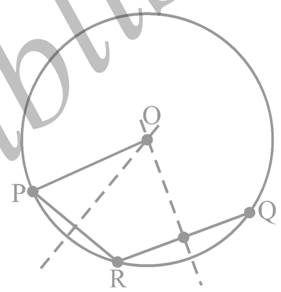
**प्रमेय 12.5 :** *तीन दिए हुए असरेखी बिन्दुओं द्वारा होकर जाने वाला एक और केवल एक वृत्त है।*

**टिप्पणी :** यदि ABC एक त्रिभुज हो, तो प्रमेय 12.5 से शीर्षों A, B और C से होकर एक अद्वितीय वृत्त खींचा जा सकता है। इस वृत्त को $\Delta$ ABC का *परिवृत्त* कहते हैं। इसका केन्द्र तथा त्रिज्या क्रमशः त्रिभुज के *परिकेन्द्र* तथा *परित्रिज्या* कहलाते हैं।

**उदाहरण 1 :** एक वृत्त का चाप दिया हुआ है। इस वृत्त को पूरा कीजिए।

**हल :** मान लीजिए एक वृत्त का चाप PQ दिया हुआ है। हमें वृत्त को पूरा करना है। इसका अर्थ है कि हमें इसका केन्द्र एवं त्रिज्या ज्ञात करनी है। चाप पर एक बिन्दु R लीजिए। PR तथा RQ को मिलाइए। प्रमेय 12.5 को सिद्ध करने के लिए की गई रचना का उपयोग करके केन्द्र तथा त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

इन्हीं केन्द्र तथा त्रिज्या को लेकर वृत्त को पूरा कीजिए (देखिए आकृति 12.20)।



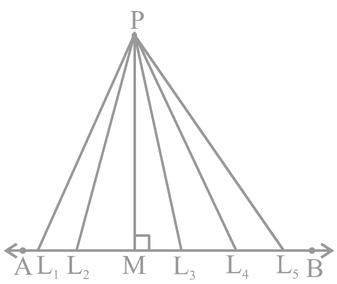

आकृति 12.20

## प्रश्नावली 12.3

1. वृत्तों के कई जोड़े (युग्म) खींचिए। प्रत्येक जोड़े में कितने बिन्दु उभयनिष्ठ हैं? उभयनिष्ठ बिन्दुओं की अधिकतम संख्या क्या है?
2. मान लीजिए आपको एक वृत्त दिया है। एक रचना इसके केन्द्र को ज्ञात करने के लिए दीजिए।
3. यदि दो वृत्त परस्पर दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करें, तो सिद्ध कीजिए कि उनके केन्द्र उभयनिष्ठ जीवा के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित हैं।

## 12.6 समान जीवाएँ और उनकी केन्द्र से दूरियाँ

मान लीजिए AB एक रेखा है और P कोई बिन्दु है। क्योंकि एक रेखा पर असंख्य बिन्दु होते हैं, इसलिए यदि आप इन सभी को P से मिलाएँ तो आपको असंख्य रेखाखंड $PL_1$, $PL_2$, PM, $PL_3$, $PL_4$, आदि मिलेंगे। इनमें से कौन सी बिन्दु P से AB की दूरी है? आप थोड़ा सोचकर



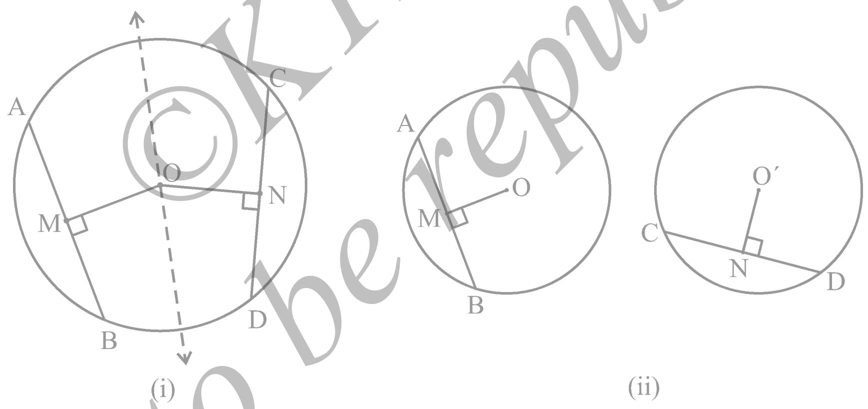

आकृति 12.21

इसका उत्तर प्राप्त कर सकते हैं। इन रेखाखंडों, में से P से AB पर लम्ब रेखाखंड अर्थात् आकृति 12.21 में PM सबसे छोटा होगा। गणित में इस सबसे छोटी लम्बाई PM को **P से AB की दूरी** के रूप में परिभाषित करते हैं। अत:, आप कह सकते हैं कि :

*एक बिन्दु से एक रेखा पर लम्ब की लम्बाई रेखा की बिन्दु से दूरी होती है।*

ध्यान दीजिए कि यदि बिन्दु रेखा पर स्थित है, तो रेखा की इससे दूरी शून्य है।

एक वृत्त में असंख्य जीवाएँ हो सकती हैं। आप एक वृत्त में जीवाएँ खींचकर जाँच कर सकते हैं कि लंबी जीवा, छोटी जीवा की तुलना में केन्द्र के निकट होती है। इसको आप विभिन्न लम्बाई की कई जीवाएँ की खींचकर तथा उनकी केन्द्र से दूरियाँ मापकर जाँच कर सकते हैं। व्यास, जो वृत्त की सबसे बड़ी जीवा है, की केन्द्र से क्या दूरी है? क्योंकि केन्द्र इस पर स्थित है, अत: इसकी दूरी शून्य है। क्या आप सोचते हैं कि जीवा की लम्बाई और उसकी केन्द्र से दूरी में कोई संबंध है? आइए देखें कि क्या ऐसा है।

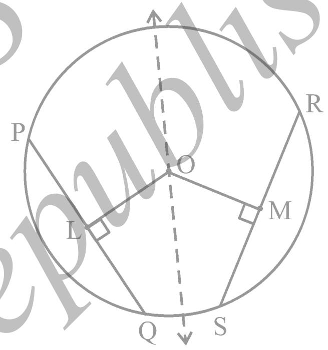



आकृति 12.22

**क्रियाकलाप :** किसी त्रिज्या का अक्स कागज पर एक वृत्त खींचिए। इसकी दो बराबर जीवाएँ AB तथा CD खींचिए तथा इन पर केन्द्र O से लम्ब OM तथा ON भी बनाइए। आकृति को इस प्रकार मोड़िए कि D, B पर तथा C, A पर पड़े [देखिए आकृति 12.22 (i)]। आप पाएँगे कि O मोड़ के निशान पर पड़ता है और N, M पर पड़ता है। अत:, OM = ON है। इस क्रियाकलाप को केन्द्रों O तथा O′ के सर्वांगसम वृत्त खींचकर और अलग-अलग बराबर जीवाएँ AB तथा CD लेकर दोहराएँ। उन पर लम्ब OM तथा O′N खींचिए [देखिए आकृति 12.22(ii)]। इनमें से एक वृत्ताकार चकती को काटकर दूसरे वृत्त पर इस प्रकार रखें कि AB, CD को पूर्ण रूप से ढक ले। तब आप पाएँगे कि O, O′ पर पड़ता है तथा M, N पर पड़ता है। इस प्रकार, आपने निम्न को सत्यापित किया है:

**प्रमेय 12.6 :** *एक वृत्त की (या सर्वांगसम वृत्तों की) बराबर जीवाएँ केन्द्र से (या केन्द्रों से) समान दूरी पर होती है।*

अब यह देखा जाए कि क्या इसका विलोम सत्य है अथवा नहीं। इसके लिए केन्द्र O वाला एक वृत्त खींचिए। केन्द्र O से वृत्त के भीतर रहने वाले दो बराबर लम्बाई के रेखाखंड OL तथा OM खींचिए [देखिए आकृति 12.23 (i)]। अब क्रमशः दो जीवाएँ PQ और RS खींचिए जो OL और OM पर लम्ब हों [देखिए आकृति 12.23(ii)]। PQ और RS की लम्बाइयाँ मापिए। क्या ये असमान हैं? नहीं, दोनों बराबर हैं। क्रियाकलाप को और अधिक समान रेखाखंडों तथा उन पर लम्ब जीवाएँ खींचकर दोहराइए। इस प्रकार, प्रमेय 12.6 का विलोम

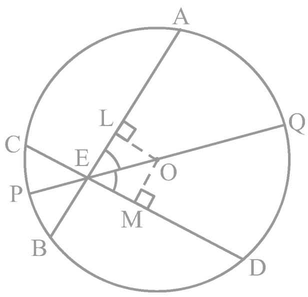

आकृति 12.23

सत्यापित हो जाता है, जिसका कथन नीचे दिया गया है:

**प्रमेय 12.7 :** *एक वृत्त के केन्द्र से समदूरस्थ जीवाएँ लम्बाई में समान होती हैं।*

अब हम उपर्युक्त परिणामों पर आधारित एक उदाहरण लेते हैं।

**उदाहरण 2 :** यदि एक वृत्त की दो प्रतिच्छेदी जीवाएँ प्रतिच्छेद बिन्दु से जाने वाले व्यास से समान कोण बनाएँ, तो सिद्ध कीजिए कि वे जीवाएँ बराबर हैं।




आकृति 12.24

**हल :** दिया है कि एक वृत्त, जिसका केन्द्र O है, की दो जीवाएँ AB और CD बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करती हैं। E से जाने वाला PQ एक ऐसा व्यास है कि $\angle AEQ = \angle DEQ$ है (देखिए आकृति 12.24)। आपको सिद्ध करना है कि AB = CD है। जीवाओं AB और CD पर क्रमशः OL तथा OM लम्ब खींचिए। अब,

$\angle$ LOE = 180° – 90° – $\angle$ LEO = 90° – $\angle$ LEO (त्रिभुज के कोणों के योग का गुण)
= 90° – $\angle$ AEQ = 90° – $\angle$ DEQ
= 90° – $\angle$ MEO = $\angle$ MOE

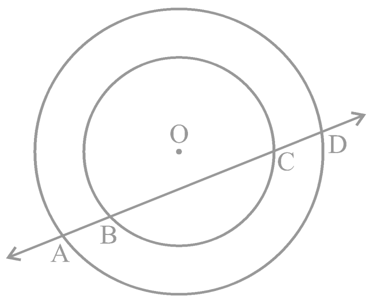
त्रिभुजों OLE तथा OME में,

| | | |
|---|---|---|
| | $\angle$ LEO = $\angle$ MEO | (दिया है) |
| | $\angle$ LOE = $\angle$ MOE | (ऊपर सिद्ध किया है) |
| | EO = EO | (उभयनिष्ठ) |
| अत:, | $\Delta$ OLE $\cong$ $\Delta$ OME | (क्यों?) |
| इससे प्राप्त होता है: | OL = OM | (CPCT) |
| इसलिए, | AB = CD | (क्यों?) |



## प्रश्नावली 12.4

1. 5 cm तथा 3 cm त्रिज्या वाले दो वृत्त दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं तथा उनके केन्द्रों के बीच की दूरी 4 cm है। उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
2. यदि एक वृत्त की दो समान जीवाएँ वृत्त के अन्दर प्रतिच्छेद करें, तो सिद्ध कीजिए कि एक जीवा के खंड दूसरी जीवा के संगत खंडों के बराबर हैं।
3. यदि एक वृत्त की दो समान जीवाएँ वृत्त के अन्दर प्रतिच्छेद करें, तो सिद्ध कीजिए कि प्रतिच्छेद बिन्दु को केन्द्र से मिलाने वाली रेखा जीवाओं से बराबर कोण बनाती है।
4. यदि एक रेखा दो संकेन्द्री वृत्तों (एक ही केन्द्र वाले वृत्त) को, जिनका केन्द्र O है, A, B, C और D पर प्रतिच्छेद करे, तो सिद्ध कीजिए AB = CD है (देखिए आकृति 12.25)।
5. एक पार्क में बने 5 m त्रिज्या वाले वृत्त पर खड़ी तीन लड़कियाँ रेशमा, सलमा एवं मनदीप खेल रही हैं। रेशमा एक गेंद को सलमा के पास, सलमा मनदीप के पास तथा मनदीप रेशमा के पास फेंकती है। यदि रेशमा तथा सलमा के बीच और सलमा तथा मनदीप के बीच की प्रत्येक दूरी 6 m हो, तो रेशमा और मनदीप के बीच की दूरी क्या है?



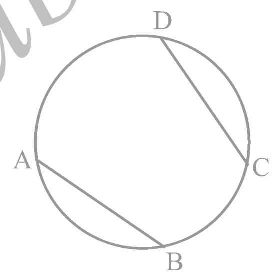

आकृति 12.25

**6.** 20 m त्रिज्या का एक गोल पार्क (वृत्ताकार) एक कालोनी में स्थित है। तीन लड़के अंकुर, सैय्यद तथा डेविड इसकी परिसीमा पर बराबर दूरी पर बैठे हैं और प्रत्येक के हाथ में एक खिलौना टेलीफोन आपस में बात करने के लिए है। प्रत्येक फोन की डोरी की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

## 12.7 एक वृत्त के चाप द्वारा अंतरित कोण

आपने देखा है कि एक जीवा के अंत बिन्दु (व्यास के अतिरिक्त) वृत्त को दो चापों में एक (दीर्घ तथा दूसरा लघु) विभाजित करते हैं। यदि आप बराबर जीवाएँ लें, तो आप उन चापों की मापों के बारे में क्या कह सकते हैं? क्या एक जीवा द्वारा बना चाप दूसरी जीवा के द्वारा बने चाप के बराबर है? वास्तव में, ये बराबर लम्बाई से भी कुछ अधिक है। यह इस अर्थ में, कि यदि एक चाप को दूसरे चाप के ऊपर रखा जाए, तो बिना ऐंठे या मोड़े वे एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेंगे।

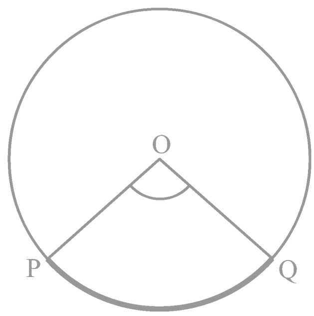
इस तथ्य को आप जीवा CD के संगत चाप को वृत्त से CD के अनुदिश काटकर तथा उसे बराबर जीवा AB के संगत चाप पर रखकर सत्यापित कर सकते हैं। आप पाएँगे कि चाप CD, चाप AB को पूर्णरूप से ढक लेता है (देखिए आकृति 12.26)। यह दर्शाता है कि बराबर जीवाएँ सर्वांगसम चाप बनाती हैं तथा विलोमत: सर्वांगसम चाप वृत्त की बराबर जीवाएँ बनाते हैं। इसका निम्न प्रकार से कथन दे सकते हैं:



आकृति 12.26

*यदि किसी वृत्त की दो जीवाएँ बराबर हों, तो उनके संगत चाप सर्वांगसम होते हैं तथा विलोमत: यदि दो चाप सर्वांगसम हों, तो उनके संगत जीवाएँ बराबर होती हैं।*

चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण भी संगत जीवा द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण से इस अर्थ में परिभाषित किया जाता है कि लघु चाप कोण को अंतरित करता है और दीर्घ चाप संगत प्रतिवर्ती कोण अंतरित करता है। अत: आकृति 12.27 में, लघु चाप PQ द्वारा O पर अंतरित कोण POQ है तथा दीर्घ चाप PQ द्वारा O पर अंतरित संगत प्रतिवर्ती कोण POQ है।



आकृति 12.27

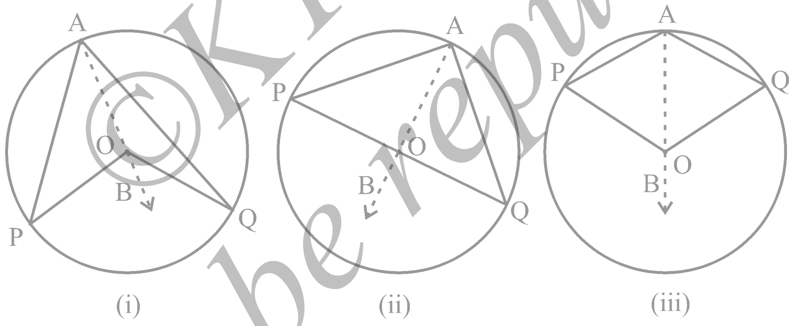
उपरोक्त गुण एवं प्रमेय 12.1 के संदर्भ में निम्न परिणाम सत्य है :

*किसी वृत्त के सर्वांगसम चाप (या बराबर चाप) केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करते हैं।*

अत:, किसी वृत्त की जीवा द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण संगत (लघु) चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण के बराबर होता है। निम्न प्रमेय एक चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण तथा वृत्त के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण में संबंध देती है।

**प्रमेय 12.8 :** *एक चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।*

**उपपत्ति :** एक वृत्त का चाप PQ दिया है, जो केन्द्र O पर $\angle POQ$ तथा वृत्त के शेष भाग के एक बिन्दु A पर $\angle PAQ$ अंतरित करता है। हमें सिद्ध करना है कि $\angle POQ = 2 \angle PAQ$ है।




आकृति 12.28

आकृति 12.28 में दी गई तीन विभिन्न स्थितियों पर विचार कीजिए।

(i) में चाप PQ लघु है, (ii) में चाप PQ अर्धवृत्त है तथा (iii) में चाप PQ दीर्घ है।

आइए हम AO को मिलाकर एक बिन्दु B तक बढ़ाएँ।

सभी स्थितियों में,

$$\angle BOQ = \angle OAQ + \angle AQO$$

(क्योंकि त्रिभुज का बहिष्कोण उसके दो अभिमुख अंत: कोणों के योग के बराबर होता है।)

साथ ही $\Delta\, OAQ$ में,

$$OA = OQ \qquad \text{(एक वृत्त की त्रिज्याएँ)}$$

अत:, $$\angle OAQ = \angle AQO \qquad \text{(प्रमेय 5.5)}$$

इससे प्राप्त होता है: $\angle BOQ = 2 \angle OAQ$ (1)

इसी प्रकार, $\angle BOP = 2 \angle OAP$ (2)

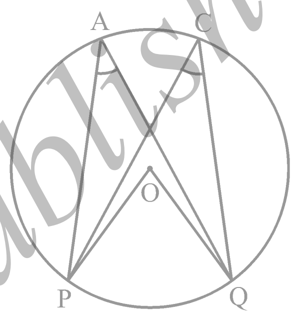
(1) और (2) से, $\angle BOP + \angle BOQ = 2(\angle OAP + \angle OAQ)$

अर्थात्, $\angle POQ = 2 \angle PAQ$ (3)

स्थिति (iii) के लिए, जहाँ PQ दीर्घ चाप है, (3) के स्थान पर

प्रतिवर्ती कोण $POQ = 2 \angle PAQ$ होगा।

**टिप्पणी :** मान लीजिए कि उपर्युक्त आकृतियों में हम P और Q को मिलाकर जीवा PQ बनाते हैं। तब, $\angle PAQ$ *को वृत्तखंड PAQP में बना कोण भी कहते हैं।*



आकृति 12.29

प्रमेय 12.8 में वृत्त के शेष भाग पर कोई भी बिन्दु A हो सकता है। इसलिए यदि आप वृत्त के शेष भाग पर एक और बिन्दु C लें (देखिए आकृति 12.29), तो आप पाएँगे:

$$\angle POQ = 2 \angle PCQ = 2 \angle PAQ$$

अत:, $\angle PCQ = \angle PAQ$

यह निम्न को सिद्ध करता है :

**प्रमेय 12.9 :** *एक ही वृत्तखंड के कोण बराबर होते हैं।*

आइए अब प्रमेय 12.8 की स्थिति (ii) की अलग से विवेचना करें। यहाँ $\angle PAQ$ उस वृत्तखंड में एक कोण है जो अर्धवृत्त है। साथ ही, $\angle PAQ = \frac{1}{2} \angle POQ = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$ है। यदि आप कोई और बिन्दु C अर्धवृत्त पर लें, तो भी आप पाते हैं कि

$$\angle PCQ = 90°$$

इस प्रकार, आप वृत्त का एक और गुण पाते हैं जो निम्न है:

*अर्धवृत्त का कोण समकोण होता है।*

प्रमेय 12.9 का विलोम भी सत्य है, जिसका इस प्रकार कथन दिया जा सकता है:

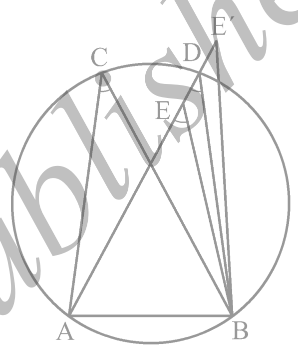
**प्रमेय 12.10 :** *यदि दो बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड, उसको अंतर्विष्ट करने वाली रेखा के एक ही ओर स्थित दो अन्य बिन्दुओं पर समान कोण अंतरित करे, तो चारों बिन्दु एक वृत्त पर स्थित होते हैं (अर्थात् वे चक्रीय होते हैं)।*

आप इस कथन की सत्यता निम्न प्रकार से देख सकते हैं :

आकृति 12.30 में AB एक रेखाखंड है, जो दो बिन्दुओं C और D पर समान कोण अंतरित करता है। अर्थात्

$$\angle ACB = \angle ADB$$

यह दर्शाने के लिए कि बिन्दु A, B, C और D एक वृत्त पर स्थित हैं, बिन्दुओं A, C और B से जाने वाला एक वृत्त खींचिए। मान लीजिए कि वह D से होकर नहीं जाता है। तब, वह AD (अथवा बढ़ी हुई AD) को एक बिन्दु E (अथवा E′) पर काटेगा।




आकृति 12.30

यदि बिन्दु A, C, E और B एक वृत्त पर स्थित हैं, तो

$\angle ACB = \angle AEB$ (क्यों?)

परन्तु दिया है कि $\angle ACB = \angle ADB$

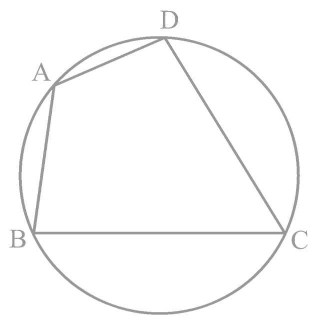
अतः, $\angle AEB = \angle ADB$

यह तब तक संभव नहीं है जब तक E, D के संपाती न हो। (क्यों?)

इसी प्रकार, E′ भी D के संपाती होना चाहिए।

## 12.8 चक्रीय चतुर्भुज

एक चतुर्भुज ABCD *चक्रीय* कहलाता है, यदि इसके चारों शीर्ष एक वृत्त पर स्थित होते हैं (देखिए आकृति 12.31)। इन चतुर्भुजों में आप एक विशेष गुण पाएँगे। अलग-अलग भुजाओं वाले कई चक्रीय चतुर्भुज खींचिए और प्रत्येक का नाम ABCD रखिए (इसको विभिन्न त्रिज्याओं के कई वृत्त खींचकर तथा प्रत्येक पर चार बिन्दु लेकर किया जा सकता है)। सम्मुख कोणों को मापिए और आप अपने प्रेक्षण आगे दी गई सारणी में लिखिए :




आकृति 12.31

| चतुर्भुज की क्रम संख्या | $\angle A$ | $\angle B$ | $\angle C$ | $\angle D$ | $\angle A + \angle C$ | $\angle B + \angle D$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | | | | | | |
| 2. | | | | | | |
| 3. | | | | | | |
| 4. | | | | | | |
| 5. | | | | | | |
| 6. | | | | | | |

इस सारणी से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

यदि मापने में कोई त्रुटि न हुई हो, तो यह निम्न को सत्यापित करता है:

**प्रमेय 12.11 :** *चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म का योग* $180°$ *होता है।*

वास्तव में इस प्रमेय का विलोम, जिसका कथन निम्न प्रकार से है, भी सत्य है:

**प्रमेय 12.12 :** *यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के एक युग्म का योग* $180°$ *हो, तो चतुर्भुज चक्रीय होता है।*

इस प्रमेय की सत्यता आप प्रमेय 12.10 में दी गई विधि की तरह से जाँच सकते हैं।

**उदाहरण 3 :** आकृति 12.32 में, AB वृत्त का एक व्यास है और CD त्रिज्या के बराबर एक जीवा है। AC और BD बढ़ाए जाने पर एक बिन्दु E पर मिलती हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle AEB = 60°$ है।

**हल :** OC, OD और BC को मिलाइए।

त्रिभुज ODC एक समबाहु त्रिभुज है। (क्यों?)

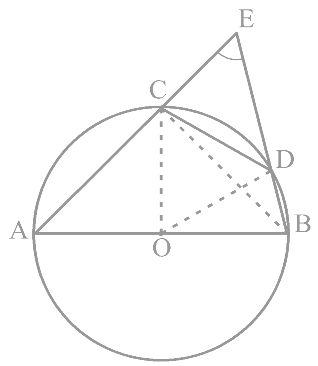
अतः, $\angle COD = 60°$

अब, $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$ (प्रमेय 12.8)

इससे प्राप्त होता है: $\angle CBD = 30°$

पुनः, $\angle ACB = 90°$ (क्यों?)

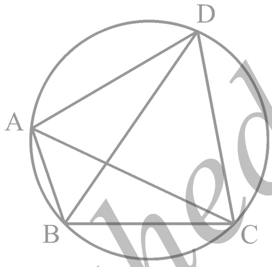
इसलिए, $\angle BCE = 180° - \angle ACB = 90°$




आकृति 12.32

जिससे $\angle CEB = 90° - 30° = 60°$, अर्थात् $\angle AEB = 60°$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 4 : आकृति 12.33 में, ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है, जिसमें AC और BD विकर्ण हैं। यदि $\angle DBC = 55°$ तथा $\angle BAC = 45°$ हो, तो $\angle BCD$ ज्ञात कीजिए।




आकृति 12.33

हल : $\angle CAD = \angle DBC = 55°$ (एक वृत्तखंड के कोण)

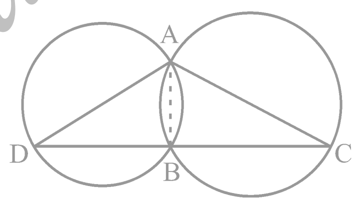
अतः, $\angle DAB = \angle CAD + \angle BAC$

$= 55° + 45° = 100°$

परन्तु, $\angle DAB + \angle BCD = 180°$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

इसलिए, $\angle BCD = 180° - 100° = 80°$

उदाहरण 5 : दो वृत्त दो बिन्दुओं A और B पर प्रतिच्छेद करते हैं। AD और AC दोनों वृत्तों के व्यास हैं (देखिए आकृति 12.34)। सिद्ध कीजिए कि B रेखाखंड DC पर स्थित है।




आकृति 12.34

हल : AB को मिलाइए। अब,

$\angle ABD = 90°$ (अर्धवृत्त का कोण)

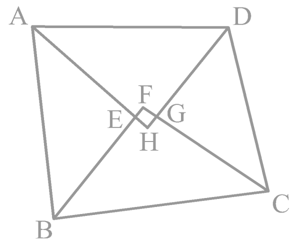
$\angle ABC = 90°$ (अर्धवृत्त का कोण)

इसलिए, $\angle ABD + \angle ABC = 90° + 90° = 180°$

अतः, DBC एक रेखा है। अर्थात् B रेखाखंड DC पर स्थित है।

उदाहरण 6 : सिद्ध कीजिए कि किसी चतुर्भुज के अंतः कोणों के समद्विभाजकों से बना चतुर्भुज (यदि संभव हो) चक्रीय होता है।

हल : आकृति 12.35 में, ABCD एक चतुर्भुज है जिसके अंतःकोणों A, B, C और D के क्रमशः कोण समद्विभाजक AH, BF, CF और DH एक चतुर्भुज EFGH बनाते हैं।




आकृति 12.35

अब, $\angle FEH = \angle AEB = 180° - \angle EAB - \angle EBA$ (क्यों?)

$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$$

तथा $\angle FGH = \angle CGD = 180° - \angle GCD - \angle GDC$ (क्यों?)

$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$$

अतः, $\angle FEH + \angle FGH = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) + 180° - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$

$$= 360° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 360° - \frac{1}{2} \times 360°$$

$$= 360° - 180° = 180°$$

इसलिए, प्रमेय 12.12 से चतुर्भुज EFGH चक्रीय है।

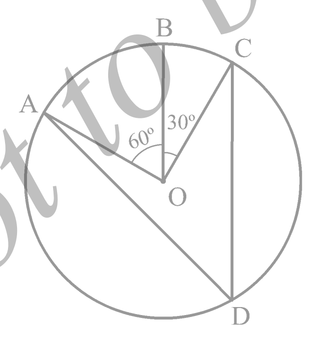


## प्रश्नावली 12.5

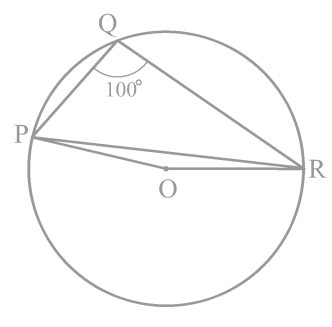
**1.** आकृति 12.36 में, केन्द्र O वाले एक वृत्त पर तीन बिन्दु A,B और C इस प्रकार हैं कि $\angle BOC = 30°$ तथा $\angle AOB = 60°$ है। यदि चाप ABC के अतिरिक्त वृत्त पर D एक बिन्दु है, तो $\angle ADC$ ज्ञात कीजिए।

**2.** किसी वृत्त की एक जीवा वृत्त की त्रिज्या के बराबर है। जीवा द्वारा लघु चाप के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण ज्ञात कीजिए तथा दीर्घ चाप के किसी बिन्दु पर भी अंतरित कोण ज्ञात कीजिए।

**3.** आकृति 12.37 में, $\angle PQR = 100°$ है, जहाँ P, Q तथा R, केन्द्र O वाले एक वृत्त पर स्थित बिन्दु हैं। $\angle OPR$ ज्ञात कीजिए।

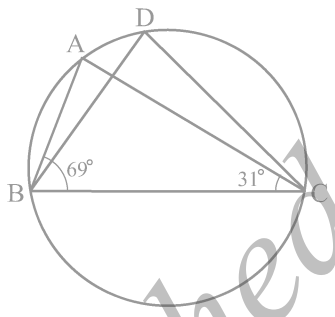



आकृति 12.36



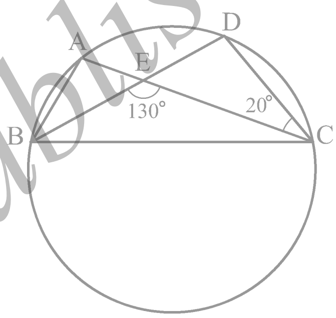

आकृति 12.37

4. आकृति 12.38 में, $\angle ABC = 69°$ और $\angle ACB = 31°$ हो, तो $\angle BDC$ ज्ञात कीजिए।




आकृति 12.38

5. आकृति 12.39 में, एक वृत्त पर A, B, C और D चार बिन्दु हैं। AC और BD एक बिन्दु E पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $\angle BEC = 130°$ तथा $\angle ECD = 20°$ है। $\angle BAC$ ज्ञात कीजिए।



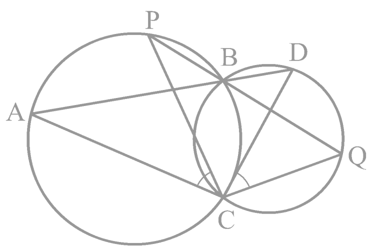

आकृति 12.39

6. ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसके विकर्ण एक बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $\angle DBC = 70°$ और $\angle BAC = 30°$ हो, तो $\angle BCD$ ज्ञात कीजिए। पुन: यदि $AB = BC$ हो, तो $\angle ECD$ ज्ञात कीजिए।

7. यदि एक चक्रीय चतुर्भुज के विकर्ण उसके शीर्षों से जाने वाले वृत्त के व्यास हों, तो सिद्ध कीजिए कि वह एक आयत है।

8. यदि एक समलंब की असमांतर भुजाएँ बराबर हों, तो सिद्ध कीजिए कि वह चक्रीय है।

9. दो वृत्त दो बिन्दुओं B और C पर प्रतिच्छेद करते हैं। B से जाने वाले दो रेखाखंड ABD और PBQ वृत्तों को A, D और P, Q पर क्रमश: प्रतिच्छेद करते हुए खींचे गए हैं (देखिए आकृति 12.40)। सिद्ध कीजिए कि $\angle ACP = \angle QCD$ है।




आकृति 12.40

**10.** यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को व्यास मानकर वृत्त खींचे जाएँ, तो सिद्ध कीजिए कि इन वृत्तों का प्रतिच्छेद बिन्दु तीसरी भुजा पर स्थित है।

**11.** उभयनिष्ठ कर्ण AC वाले दो समकोण त्रिभुज ABC और ADC हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle CAD = \angle CBD$ है।

**12.** सिद्ध कीजिए कि चक्रीय समांतर चतुर्भुज आयत होता है।

### प्रश्नावली 12.6 (ऐच्छिक)*

**1.** सिद्ध कीजिए कि दो प्रतिच्छेद करते हुए वृत्तों की केन्द्रों की रेखा दोनों प्रतिच्छेद बिन्दुओं पर समान कोण अंतरित करती है।

**2.** एक वृत्त की 5 cm तथा 11 cm लम्बी दो जीवाएँ AB और CD समांतर हैं और केन्द्र की विपरीत दिशा में स्थित हैं। यदि AB और CD के बीच की दूरी 6 cm हो, तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

**3.** किसी वृत्त की दो समांतर जीवाओं की लम्बाइयाँ 6 cm और 8 cm हैं। यदि छोटी जीवा केन्द्र से 4 cm की दूरी पर हो, तो दूसरी जीवा केन्द्र से कितनी दूर है?

**4.** मान लीजिए कि कोण ABC का शीर्ष एक वृत्त के बाहर स्थित है और कोण की भुजाएँ वृत्त से बराबर जीवाएँ AD और CE काटती हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle ABC$ जीवाओं AC तथा DE द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोणों के अंतर का आधा है।

**5.** सिद्ध कीजिए कि किसी समचतुर्भुज की किसी भुजा को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त उसके विकर्णों के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाता है।

**6.** ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। A, B और C से जाने वाला वृत्त CD (यदि आवश्यक हो तो बढ़ाकर) को E पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए कि AE = AD है।

**7.** AC और BD एक वृत्त की जीवाएँ हैं जो परस्पर समद्विभाजित करती हैं। सिद्ध कीजिए (i) AC और BD व्यास हैं, (ii) ABCD एक आयत है।

**8.** एक त्रिभुज ABC के कोणों A, B और C के समद्विभाजक इसके परिवृत्त को क्रमशः D, E और F पर प्रतिच्छेद करते हैं। सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज DEF के कोण $90° - \frac{1}{2}A$, $90° - \frac{1}{2}B$ तथा $90° - \frac{1}{2}C$ हैं।

**9.** दो सर्वांगसम वृत्त परस्पर बिन्दुओं A और B पर प्रतिच्छेद करते हैं। A से होकर कोई रेखाखंड

*यह प्रश्नावली परीक्षा की दृष्टि से नहीं दी गई है।

PAQ इस प्रकार खींचा गया है कि P और Q दोनों वृत्तों पर स्थित हैं। सिद्ध कीजिए कि BP = BQ है।

**10.** किसी त्रिभुज ABC में, यदि $\angle A$ का समद्विभाजक तथा BC का लम्ब समद्विभाजक प्रतिच्छेद करें, तो सिद्ध कीजिए कि वे $\Delta ABC$ के परिवृत्त पर प्रतिच्छेद करेंगे।

## 12.9 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्न बिन्दुओं का अध्ययन किया है :

**1.** एक वृत्त किसी तल के उन सभी बिन्दुओं का समूह होता है, जो तल के एक स्थिर बिन्दु से समान दूरी पर हों।

**2.** एक वृत्त की (या सर्वांगसम वृत्तों की) बराबर जीवाएँ केन्द्र (या संगत केन्द्रों) पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।

**3.** यदि किसी वृत्त की (या सर्वांगसम वृत्तों की) दो जीवाएँ केन्द्र पर (या संगत केन्द्रों पर) बराबर कोण अंतरित करें, तो जीवाएँ बराबर होती हैं।

**4.** किसी वृत्त के केन्द्र से किसी जीवा पर डाला गया लम्ब उसे समद्विभाजित करता है।

**5.** केन्द्र से होकर जाने वाली और किसी जीवा को समद्विभाजित करने वाली रेखा जीवा पर लम्ब होती है।

**6.** तीन असरेखीय बिन्दुओं से जाने वाला एक और केवल एक वृत्त होता है।

**7.** एक वृत्त की (या सर्वांगसम वृत्तों की) बराबर जीवाएँ केन्द्र से (या संगत केन्द्रों से) समान दूरी पर होती हैं।

**8.** एक वृत्त के केन्द्र (या सर्वांगसम वृत्तों के केन्द्रों) से समान दूरी पर स्थित जीवाएं बराबर होती हैं।

**9.** यदि किसी वृत्त के दो चाप सर्वांगसम हों, तो उनकी संगत जीवाएँ बराबर होती हैं और विलोमत: यदि किसी वृत्त की दो जीवाएँ बराबर हों, तो उनके संगत चाप (लघु, दीर्घ) सर्वांगसम होते हैं।

**10.** किसी वृत्त की सर्वांगसम चाप केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करते हैं।

**11.** किसी चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण उसके द्वारा वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।

**12.** एक वृत्तखंड में बने कोण बराबर होते हैं।

**13.** अर्धवृत्त का कोण समकोण होता है।

**14.** यदि दो बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड उसको अंतर्विष्ट करने वाली रेखा के एक ही ओर स्थित दो अन्य बिन्दुओं पर समान कोण अंतरित करे, तो चारों बिन्दु एक वृत्त पर स्थित होते हैं।

**15.** चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म का योग $180^{\circ}$ होता है।

**16.** यदि किसी चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के किसी एक युग्म का योग $180^{\circ}$ हो, तो चतुर्भुज चक्रीय होता है।

अध्याय 13

# पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

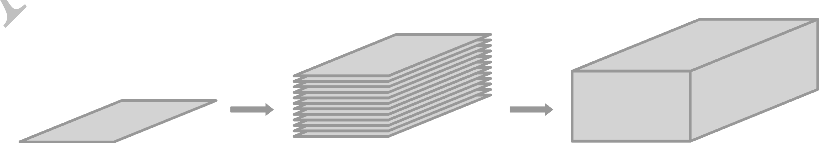


## 13.1 भूमिका

हम जिस ओर भी देखें, प्रायः हमें ठोस (solid) ही दिखाई देते हैं। अभी तक हम उन्हीं आकृतियों का अध्ययन करते आ रहे हैं, जिन्हें हम अपनी अभ्यासपुस्तिका अथवा श्यामपट्ट (blackboard) पर खींच सकते हैं। ये *समतल आकृतियाँ* (*plane figures*) कहलाती हैं। हम समझ गए हैं कि आयत, वर्ग, वृत्त इत्यादि क्या हैं, उनके परिमाप और क्षेत्रफलों का क्या तात्पर्य है तथा हम इन्हें किस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं। हम इनके बारे में पिछली कक्षाओं में पढ़ चुके हैं। यह देखना रोचक होगा कि यदि हम एक ही आकार और एक ही माप की अनेक समतल आकृतियों को गत्ते में से काट कर एक के ऊपर एक रख कर एक ऊर्ध्वाधर ढेरी बनाएँ, तो क्या होता है। इस प्रक्रिया से, हम कुछ *ठोस आकृतियाँ* (*solid figures*) प्राप्त करेंगे (जिन्हे प्रायः ठोस कहा जाता है), जैसे कि एक घनाभ (cuboid), एक बेलन (cylinder), इत्यादि। पिछली कक्षाओं में, हम घनाभ, घन और बेलनों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों और आयतनों को ज्ञात करना भी सीख चुके हैं। अब हम घनाभों और बेलनों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों और आयतनों के बारे में विस्तार से अध्ययन करेंगे तथा इस अध्ययन को कुछ अन्य ठोसों, जैसे कि शंकु और गोले, के लिए विस्तृत करेंगे।

## 13.2 घनाभ और घन के पृष्ठीय क्षेत्रफल

क्या आपने कागज के अनेक पन्नों (शीटों) के एक बंडल को देखा है? यह कैसा दिखता है? क्या यह ऐसा दिखाई देता है, जैसा कि आप आकृति 13.1 में देख रहे हैं?



आकृति 13.1

इससे घनाभ बनता है। यदि आप इस घनाभ को ढकना चाहते हैं, तो कितने रंगीन कागज की आवश्यकता पड़ेगी? आइए देखें!

पहले हमें इस बंडल के तल (bottom) को ढकने के लिए एक आयताकार टुकड़े की आवश्यकता होगी। यह आकृति 13.2 (a) जैसा होगा।

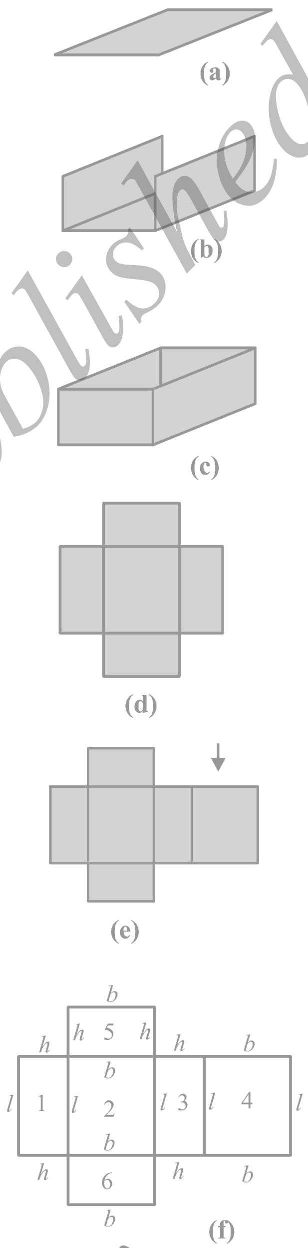
फिर हमें इधर-उधर के दो सिरों को ढकने के दो लंबे आयताकार टुकड़ों की आवश्यकता होगी। अब यह आकृति 13.2 (b) जैसा दिखाई देगा।

अब, सामने और पीछे के सिरों को ढकने के लिए, हमें एक भिन्न माप के दो और आयताकार टुकड़ों की आवश्यकता होगी। इनके साथ, हमें आकृति 13.2(c) जैसी आकृति प्राप्त होगी।

यह आकृति खोलने पर आकृति 13.2 (d) जैसी दिखाई देगी।

अंत में, बंडल के ऊपरी सिरे को ढकने के लिए, हमें एक अन्य आयताकार टुकड़े की आवश्यकता होगी, जो ठीक तल (आधार) के टुकड़े जैसा होगा, जिसे उपरोक्त आकृति में दाईं ओर लगाने पर, हमें आकृति 13.2(e) प्राप्त होगी।

इस प्रकार, घनाभ की ऊपरी पृष्ठ को पूर्णतया: ढकने के लिए, हमने छः आयताकार टुकड़ों का प्रयोग किया है।




आकृति 13.2

उपरोक्त चर्चा यह दर्शाती है कि एक घनाभ की बाहरी पृष्ठ छः आयतों (वास्तव में, आयताकार क्षेत्रों, जो घनाभ के फलक कहलाते हैं) से मिल कर बनी है, जिनमें से प्रत्येक का क्षेत्रफल उसकी लंबाई और चौड़ाई का गुणा करके प्राप्त किया जा सकता है और फिर सभी छः क्षेत्रफलों को जोड़ लिया जाता है।

अब, यदि हम घनाभ की लम्बाई $l$, चौड़ाई $b$ और ऊँचाई $h$ मान लें, तो इन विमाओं (dimensions) के साथ यह आकृति ऐसे आकार की दिखाई देगी, जैसी कि आकृति 13.2(f) में दर्शाई गई है।

अतः सभी छः आयतों के क्षेत्रफलों का योग निम्न है :

आयत 1 का क्षेत्रफल $(= l \times h)$

$+$

आयत 2 का क्षेत्रफल $(= l \times b)$

$+$

आयत 3 का क्षेत्रफल $(= l \times h)$

$+$

आयत 4 का क्षेत्रफल $(= l \times b)$

$+$

आयत 5 का क्षेत्रफल $(= b \times h)$

$+$

आयत 6 का क्षेत्रफल $(= b \times h)$

$= 2(l \times b) + 2(b \times h) + 2(l \times h)$

$= 2(lb + bh + hl)$

इससे हमें प्राप्त होता है :

**घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\mathbf{2(lb + bh + hl)}$**

जहाँ $l$, $b$ और $h$ क्रमशः घनाभ के तीन किनारे (कोर) हैं।

**टिप्पणी :** क्षेत्रफल के मात्रक (unit) को वर्ग इकाई (वर्ग मात्रक) लिया जाता है, क्योंकि हम एक क्षेत्र के परिमाण को मापने के लिए उसे मात्रक (या इकाई) लम्बाई की भुजा वाले वर्गों से भरते हैं।

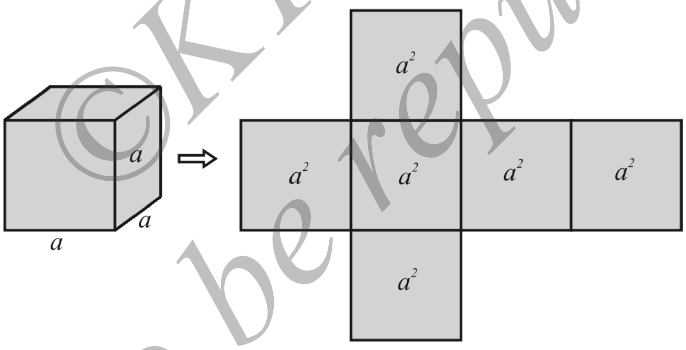
उदाहरण के तौर पर, यदि हमारे पास एक घनाभ जिसकी लंबाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई क्रमशः 15 cm, 10 cm तथा 20 cm हों, तो इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल होगा:

$$2[(15 \times 10) + (10 \times 20) + (20 \times 15)] \text{ cm}^2$$
$$= 2(150 + 200 + 300) \text{ cm}^2$$
$$= 2 \times 650 \text{ cm}^2$$
$$= 1300 \text{ cm}^2$$

याद कीजिए कि घनाभ जिसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई बराबर हों एक *घन* (*cube*) कहलाता है। यदि घन का प्रत्येक किनारा या कोर (edge) या भुजा (side) $a$ हो, तो उसका पृष्ठीय क्षेत्रफल $2(a \times a + a \times a + a \times a)$ अर्थात् $2\ (a^2 + a^2 + a^2)$, अर्थात् $6a^2$ होगा (देखिए आकृति 13.3), जिससे हमें प्राप्त होता है :

**घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6a^2$**

जहाँ $a$ घन

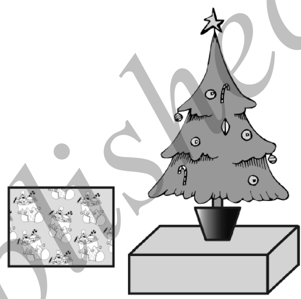



आकृति 13.3

मान लीजिए हम घनाभ के छः फलकों (faces) में से केवल चार फलकों के क्षेत्रफल, निचले और ऊपरी फलकों को छोड़कर, ज्ञात करें। ऐसी स्थिति में, इन चारों फलकों का क्षेत्रफल घनाभ का **पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल (lateral surface area)** कहलाता है। अतः, *एक घनाभ जिसकी लम्बाई* $l$, *चौड़ाई* $b$ और ऊँचाई $h$ *हो, तो उसका पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल* $2lh + 2bh$, *अर्थात्* $2(l + b)h$ होता है। इसी प्रकार, *किनारे* $a$ *वाले एक घन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल* $4a^2$ *होता है।* उपरोक्त को दृष्टिगत रखते हुए, घनाभ (या घन) के पृष्ठीय क्षेत्रफल को कभी-कभी **सम्पूर्ण** या **कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल (total surface area)** भी कहा जाता है। आइए कुछ उदाहरण हल करें।

उदाहरण 1 : मैरी अपने क्रिसमस वृक्ष को सजाना चाहती है। वह इस वृक्ष को लकड़ी के एक घनाभाकार बॉक्स (box) पर रखना चाहती है, जिसे सान्ता क्लॉज के चित्र के साथ एक रंगीन कागज़ से ढका जाना है (देखिए आकृति 13.4)। उसका यह जानना आवश्यक है कि उसे कितना कागज़ खरीदना चाहिए। यदि उपरोक्त बॉक्स की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 80 cm, 40 cm और 20 cm हैं, तो उसे 40 cm भुजा वाली कागज की कितनी वर्गाकार शीटों की आवश्यकता होगी?

हल: चूँकि मैरी बॉक्स के ऊपरी पृष्ठ को कागज से ढकना चाहती है, इसलिए इस कार्य के लिए आवश्यक कागज़ इस बॉक्स के पृष्ठीय क्षेत्रफल के बराबर होगा, जो एक घनाभ के आकार का है।


आकृति 13.4

बॉक्स की लंबाई 80 cm, चौड़ाई 40 cm और ऊँचाई 20 cm है।

अतः, बॉक्स का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(lb + bh + hl)$

$= 2[(80 \times 40) + (40 \times 20) + (20 \times 80)]\ \text{cm}^2$

$= 2[3200 + 800 + 1600]\ \text{cm}^2$

$= 2 \times 5600\ \text{cm}^2 = 11200\ \text{cm}^2$

अब, प्रत्येक शीट का क्षेत्रफल $= 40 \times 40\ \text{cm}^2 = 1600\ \text{cm}^2$

अतः, वांछित शीटों की संख्या $= \dfrac{\text{बक्स का पृष्ठीय क्षेत्रफल}}{\text{एक शीट का क्षेत्रफल}}$

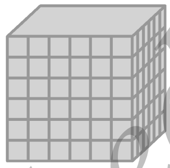
$$= \frac{11200}{1600} = 7$$

इसलिए मैरी को कागज़ की 7 शीटों की आवश्यकता है।

उदाहरण 2 : हमीद ने अपने घर के लिए, ढक्कन वाली एक घनाकार (cubical) पानी की टंकी बनवाई है, जिसका प्रत्येक बाहरी किनारा 1.5m लम्बा है। वह इस टंकी के बाहरी पृष्ठ पर, तली को छोड़ते हुए, 25 cm भुजा वाली वर्गाकार टाइलें (tiles) लगवाता है (देखिए आकृति 13.5)। यदि टाइलों की लागत ₹ 360 प्रति दर्जन है, तो उसे टाइल लगवाने में कितना व्यय करना पड़ेगा?

**हल :** हमीद पाँच बाहरी फलकों पर टाइलें लगवाता है। टाइलों की संख्या ज्ञात करने के लिए, इन पाँचों फलकों का क्षेत्रफल ज्ञात करना आवश्यक है।

अब, घनाकार टंकी का एक किनारा = 1.5 m = 150 cm



आकृति 13.5

अतः, टंकी का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $5 \times 150 \times 150$ $cm^2$

एक टाइल का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा = $25 \times 25$ $cm^2$

$$\text{अतः, टाइलों की वांछित संख्या} = \frac{\text{टंकी का पृष्ठीय क्षेत्रफल}}{\text{एक टाइल का क्षेत्रफल}}$$

$$= \frac{5 \times 150 \times 150}{25 \times 25} = 180$$

अब 1 दर्जन, अर्थात् 12 टाइलों की लागत = ₹ 360

$$\text{इसलिए, 1 टाइल की लागत} = ₹\ \frac{360}{12}\ \text{रुपए} = ₹\ 30$$

अतः, 180 टाइलों की लागत = ₹ $180 \times 30$ = ₹ 5400 रुपए



## प्रश्नावली 13.1

1. 1.5 m लंबा, 1.25 m चौड़ा और 65 cm गहरा प्लास्टिक का एक डिब्बा बनाया जाना है। इसे ऊपर से खुला रखना है। प्लास्टिक शीट की मोटाई को नगण्य मानते हुए, निर्धारित कीजिए:
   (i) डिब्बा बनाने के लिए आवश्यक प्लास्टिक शीट का क्षेत्रफल।
   (ii) इस शीट का मूल्य, यदि 1 $m^2$ शीट का मूल्य ₹ 20 है।
2. एक कमरे की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 5 m, 4 m और 3 m हैं। ₹ 7.50 प्रति $m^2$ की दर से इस कमरे की दीवारों और छत पर सफेदी कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।
3. किसी आयताकार हॉल के फर्श का परिमाप 250 m है। यदि ₹ 10 प्रति $m^2$ की दर से चारों दीवारों पर पेंट कराने की लागत ₹ 15000 है, तो इस हॉल की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
   [**संकेत :** चारों डिब्बों का क्षेत्रफल = पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल]
4. किसी डिब्बे में भरा हुआ पेंट 9.375 $m^2$ के क्षेत्रफल पर पेंट करने के लिए पर्याप्त है। इस डिब्बे के पेंट से 22.5 cm × 10 cm × 7.5 cm विमाओं वाली कितनी ईंट पेंट की जा सकती हैं?

**5.** एक घनाकार डिब्बे का एक किनारा 10 cm लंबाई का है तथा एक अन्य घनाभाकार डिब्बे की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 12.5 cm, 10 cm और 8 cm हैं।

(i) किस डिब्बे का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल अधिक है और कितना अधिक है?

(ii) किस डिब्बे का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल कम है और कितना कम है?

**6.** एक छोटा पौधा घर (green house) सम्पूर्ण रूप से शीशे की पट्टियों से (आधार भी सम्मिलित है) घर के अंदर ही बनाया गया है और शीशे की पट्टियों को टेप द्वारा चिपका कर रोका गया है। यह पौधा घर 30 cm लंबा, 25 cm चौड़ा और 25 cm ऊँचा है।

(i) इसमें प्रयुक्त शीशे की पट्टियों का क्षेत्रफल क्या है?

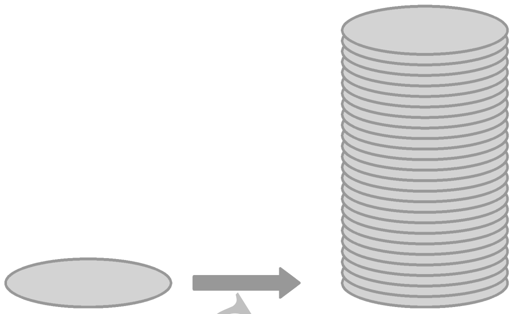
(ii) सभी 12 किनारों के लिए कितने टेप की आवश्यकता है?

**7.** शांति स्वीट स्टाल अपनी मिठाइयों को पैक करने के लिए गत्ते के डिब्बे बनाने का ऑर्डर दे रहा था। दो मापों के डिब्बों की आवश्यकता थी। बड़े डिब्बों की माप 25 cm $\times$ 20 cm $\times$ 5 cm और छोटे डिब्बों की माप 15 cm $\times$ 12 cm $\times$ 5 cm थीं। सभी प्रकार की अतिव्यापिकता (overlaps) के लिए कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल के 5% के बराबर अतिरिक्त गत्ता लगेगा। यदि गत्ते की लागत ₹ 4 प्रति 1000 $cm^2$ है, तो प्रत्येक प्रकार के 250 डिब्बे बनवाने की कितनी लागत आएगी?

**8.** परवीन अपनी कार खड़ी करने के लिए, एक संदूक के प्रकार के ढाँचे जैसा एक अस्थाई स्थान तिरपाल की सहायता से बनाना चाहती है, जो कार को चारों ओर से और ऊपर से ढक ले (सामने वाला फलक लटका हुआ होगा जिसे घुमाकर ऊपर किया जा सकता है)। यह मानते हुए कि सिलाई के समय लगा तिरपाल का अतिरिक्त कपड़ा नगण्य होगा, आधार विमाओं 4 मीटर $\times$ 3 मीटर और ऊँचाई 2.5 मीटर वाले इस ढाँचे को बनाने के लिए कितने तिरपाल की आवश्यकता होगी?

## 13.3 एक लंब वृत्तीय बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

यदि हम कागज की अनेक वृत्ताकार शीट लें और उन्हें उसी प्रकार एक के ऊपर एक रखकर एक उर्ध्वाधर ढेरी बनाएँ जैसी पहले आयताकार कागज की शीटों से बनाई थी, तो हमें क्या प्राप्त होगा (देखिए आकृति 13.6)?

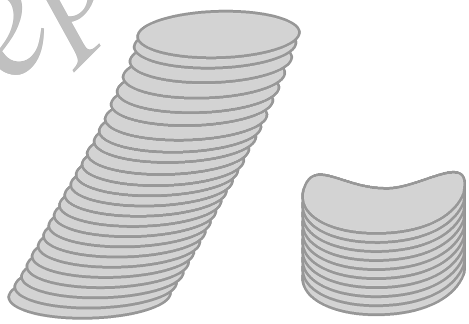


आकृति 13.6

यदि हम इस ढेरी को सीधा ऊर्ध्वाधर रखते हैं, तो जो हमें प्राप्त होगा वह एक *लम्ब वृत्तीय बेलन (right circular cylinder)* कहलाता है। इसका कारण यह है कि इसका आधार वृत्ताकार है और ढेरी को आधार से लाम्बिक रूप (समकोण बनाते हुए) से रखा गया है। आइए देखें कि किस प्रकार का बेलन लम्ब वृत्तीय बेलन *नहीं* होता है।

आकृति 13.7 (a) में, आप एक बेलन को देख रहे हैं, जो निश्चित रूप से वृत्ताकार है, परंतु आधार से समकोण पर नहीं है। इसलिए, हम इसे लम्ब वृत्तीय बेलन नहीं कह सकते।

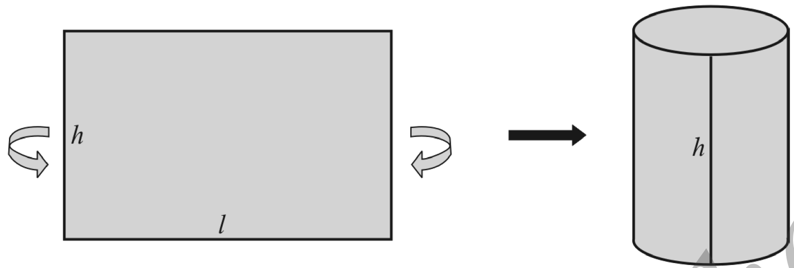
निःसंदेह, यदि बेलन का आधार वृत्तीय न हो, जैसा कि आप आकृति 13.7 (b) में देख रहे हैं, तो भी हम इसे लंब वृत्तीय बेलन नहीं कह सकते हैं।




आकृति 13.7

**टिप्पणी :** यहाँ हम केवल लंब वृत्तीय बेलनों का ही अध्ययन करेंगे। अत:, जब तक अन्यथा न कहा जाए, 'बेलन' से हमारा तात्पर्य लंब वृत्तीय बेलन से होगा।

अब, यदि किसी बेलन को एक रंगीन कागज से ढकना हो, तो हम कागज की न्यूनतम मात्रा से इसे कैसे करेंगे? पहले कागज की एक आयताकार शीट ऐसी लीजिए जिसकी लंबाई ऐसी हो कि कागज बेलन के चारों ओर बस एक बार घूम जाए और उसकी चौड़ाई बेलन की ऊँचाई के बराबर हो, जैसा कि आकृति 13.8 में दर्शाया गया है।




आकृति 13.8

इस शीट का क्षेत्रफल हमें बेलन के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल देगा। ध्यान दीजिए कि शीट की लंबाई वृत्तीय आधार की परिधि के बराबर है, जो $2\pi r$ है।

अत:, बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = आयताकार शीट का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

= बेलन के आधार का परिमाप × ऊँचाई

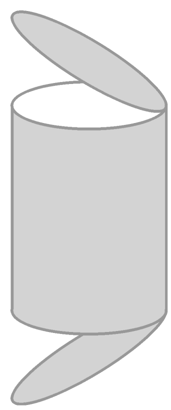
= $2\pi r \times h$

इसलिए, **बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi rh$**

जहाँ $r$ बेलन के आधार की त्रिज्या है और $h$ उसकी ऊँचाई है।

टिप्पणी : बेलन की स्थिति में, जब तक अन्यथा न कहा जाए, 'बेलन की त्रिज्या' से हमारा तात्पर्य उसके आधार की त्रिज्या से होगा।

यदि बेलन के ऊपरी और निचले सिरों को भी ढकना हो, तो हमें दो वृत्तों (वास्तव में वृत्ताकार क्षेत्रों) की और आवश्यकता पड़ेगी, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या $r$ होगी और क्षेत्रफल $\pi r^2$ होगा (देखिए आकृति 13.9)। तब इससे हमें बेलन का संपूर्ण या कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h)$ प्राप्त होगा।



आकृति 13.9

इसलिए, **बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r(r + h)$**

जहाँ $r$ और $h$ बेलन की क्रमशः त्रिज्या और ऊँचाई हैं।

टिप्पणी : आपको अध्याय 1 से यह याद होगा कि $\pi$ एक अपरिमेय संख्या है। इसलिए, $\pi$

का एक असांत और अनावर्ती दशमलव निरूपण होता है। परन्तु जब हम इसका मान अपने परिकलनों में प्रयोग करते हैं, तो प्राय: हम यह मान लगभग $\frac{22}{7}$ या 3.14 के बराबर लेते हैं।

**उदाहरण 3 :** सावित्री को अपने विज्ञान के प्रोजेक्ट के लिए एक बेलनाकार केलिडोस्कोप (kaleidoscope) का मॉडल बनाना था। वह इस केलिडोस्कोप की वक्र पृष्ठ बनाने के लिए चार्ट कागज़ (chart paper) का प्रयोग करना चाहती थी (देखिए आकृति 13.10)। यदि वह 25 cm लम्बाई और 3.5 cm त्रिज्या का केलिडोस्कोप बनाना चाहती है, तो उसे चार्ट कागज के कितने क्षेत्रफल की आवश्यकता होगी? $\left(\pi = \frac{22}{7} \text{ लीजिए}\right)$

**हल :** बेलनाकार केलिडोस्कोप की त्रिज्या $(r) = 3.5$ cm

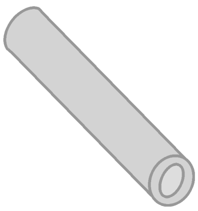
केलिडोस्कोप की ऊँचाई (लंबाई) $(h) = 25$ cm

अत:, आवश्यक चार्ट कागज़ का क्षेत्रफल = बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2\pi rh$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 25 \text{ cm}^2$$

$$= 550 \text{ cm}^2$$



आकृति 13.10



## प्रश्नावली 13.2

जब तक अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।

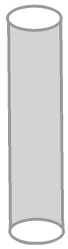
1. ऊँचाई 14 cm वाले एक लम्ब वृत्तीय बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 88 $cm^2$ है। बेलन के आधार का व्यास ज्ञात कीजिए।
2. धातु की एक चादर से 1 m ऊँची और 140 cm व्यास के आधार वाली एक बंद बेलनाकार टंकी बनाई जानी है। इस कार्य के लिए कितने वर्ग मीटर चादर की आवश्यकता होगी?
3. धातु का एक पाइप 77 cm लम्बा है। इसके एक अनुप्रस्थकाट का आंतरिक व्यास 4 cm है और बाहरी व्यास 4.4 cm है (देखिए आकृति 13.11)।

   ज्ञात कीजिए :

   (i) आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

   (ii) बाहरी वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

   (iii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल



आकृति 13.11

**4.** एक रोलर (roller) का व्यास 84 cm है और लंबाई 120 cm है। एक खेल के मैदान को एक बार समतल करने के लिए 500 चक्कर लगाने पड़ते हैं। खेल के मैदान का $m^2$ में क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

**5.** किसी बेलनाकार स्तंभ का व्यास 50 cm है और ऊँचाई 3.5 m है। ₹ 12.50 प्रति $m^2$ की दर से इस स्तंभ के वक्र पृष्ठ पर पेंट कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

**6.** एक लंब वृत्तीय बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 4.4 $m^2$ है। यदि बेलन के आधार की त्रिज्या 0.7 m है, तो उसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

**7.** किसी वृत्ताकार कुएँ का आंतरिक व्यास 3.5 m है और यह 10 m गहरा है। ज्ञात कीजिए:

(i) आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल।

(ii) ₹ 40 प्रति $m^2$ की दर से इसके वक्र पृष्ठ पर प्लास्टर कराने का व्यय।

**8.** गरम पानी द्वारा गरम रखने वाले एक संयत्र में 28 m लंबाई और 5 cm व्यास वाला एक बेलनाकार पाइप है। इस संयत्र में गर्मी देने वाला कुल कितना पृष्ठ है?

**9.** ज्ञात कीजिए :

(i) एक बेलनाकार पेट्रोल की बंद टंकी का पार्श्व या वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल, जिसका व्यास 4.2 m है और ऊँचाई 4.5 m है।

(ii) इस टंकी को बनाने में कुल कितना इस्पात (steel) लगा होगा, यदि कुल इस्पात का $\frac{1}{12}$ भाग बनाने में नष्ट हो गया है?

**10.** आकृति 13.12 में, आप एक लैंपशेड का फ्रेम देख रहे हैं। इसे एक सजावटी कपड़े से ढका जाना है। इस फ्रेम के आधार का व्यास 20 cm है और ऊँचाई 30 cm है। फ्रेम के ऊपर और नीचे मोड़ने के लिए दोनों ओर 2.5 cm अतिरिक्त कपड़ा भी छोड़ा जाना है। ज्ञात कीजिए कि लैंपशेड को ढकने के लिए कुल कितने कपड़े की आवश्यकता होगी।

आकृति 13.12

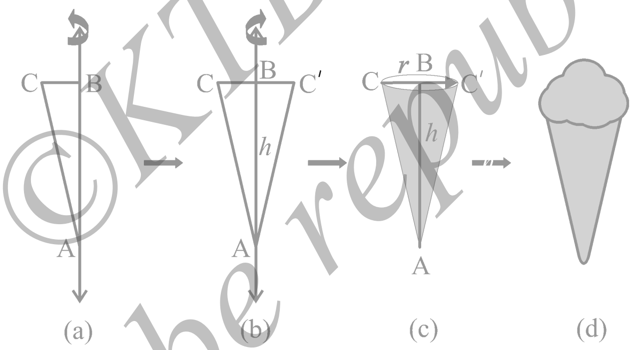
**11.** किसी विद्यालय के विद्यार्थियों से एक आधार वाले बेलनाकार कलमदानों को गत्ते से बनाने और सजाने की प्रतियोगिता में भाग लेने के लिए कहा गया। प्रत्येक कलमदान को 3 cm त्रिज्या और 10.5 cm ऊँचाई का होना था। विद्यालय को इसके लिए प्रतिभागियों को गत्ता देना था। यदि इसमें 35 प्रतिभागी थे, तो विद्यालय को कितना गत्ता खरीदना पड़ा होगा?

### 13.4 एक लंब वृत्तीय शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल

अभी तक हम सर्वांगसम आकृतियों को एक के ऊपर एक रख कर ठोस जनित कर रहे थे।

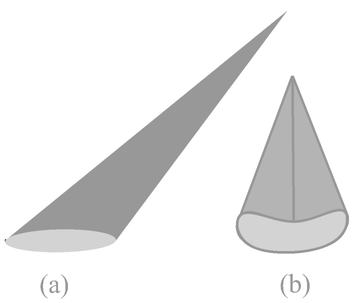
संयोग से इन आकृतियों को *प्रिज्म* (*prism*) कहते हैं। अब एक अन्य प्रकार के ठोसों को देखें जो प्रिज्म नहीं हैं। (इस प्रकार के ठोस पिरामिड (pyramids) कहलाते हैं।) आइए देखें कि इनको किस प्रकार जनित किया (बनाया) जाता है।

**क्रियाकलाप :** एक समकोण त्रिभुज ABC जिसका कोण B समकोण हो, काट लीजिए। दोनों लंब भुजाओं में से किसी एक, मान लीजिए AB, के अनुदिश एक लंबी और मोटी डोरी चिपका दीजिए [देखिए आकृति 13.13(a)]। डोरी को दोनों हाथों से त्रिभुज के दोनों ओर से पकड़े हुए, त्रिभुज को डोरी के अनुदिश कई बार घुमाइए। आप क्या देखते हैं? जब त्रिभुज डोरी के अनुदिश घूम रहा है, तो जो वह आकृति बना रहा है, क्या आप उसे पहचानते हैं [देखिए आकृति 13.13(b)]? क्या आपको इस बात की याद दिलाती है कि इसी आकार के एक छोटे बर्तन (पात्र) में भरी आपने कभी आइसक्रीम खाई थी [देखिए आकृति 13.13 (c) और (d)]?




आकृति 13.13

यह आकृति एक *लंब वृत्तीय शंकु* (*right circular cone*) कहलाती है। आकृति 13.13(c) में बिन्दु A इस लम्ब वृत्तीय शंकु का *शीर्ष* (*vertex*) कहलाता है, AB इसकी *ऊँचाई* कहलाती है और BC आधार की *त्रिज्या* कहलाती है। AC इस शंकु की *तिर्यक ऊँचाई* (*slant height*) कहलाती है। यहाँ B वृत्तीय आधार का केंद्र (centre) है। शंकु की ऊँचाई, त्रिज्या और तिर्यक ऊँचाई को प्रायः क्रमशः $h$, $r$ और $l$ से व्यक्त किया जाता है। एक बार पुनः देखें कि किस प्रकार के शंकु को हम लंब वृत्तीय शंकु *नहीं* कह सकते हैं। आप आकृति 13.14 को देखिए। इनमें जो आप



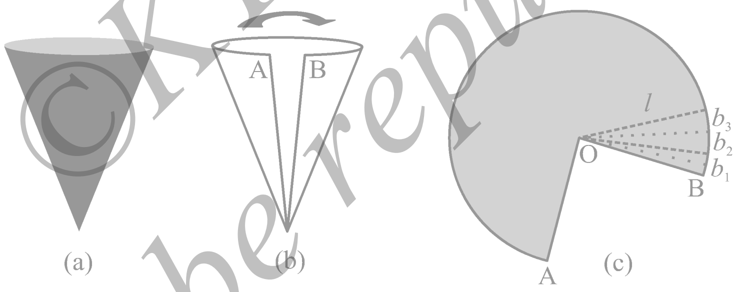

आकृति 13.14

शंकु देख रहे हैं वे लंब वृत्तीय शंकु नहीं हैं। (a) में, शीर्ष को आधार के केंद्र से मिलाने वाली रेखा आधार पर लंब नहीं है और (b) में, आधार वृत्तीय नहीं है।

जैसा कि बेलन की स्थिति में था, जब तक अन्यथा न कहा जाए, 'शंकु' से हमारा तात्पर्य लंब वृत्तीय 'शंकु' से ही होगा।

**क्रियाकलाप :** (i) एक साफ बने हुए कागज़ के शंकु को उसके शीर्ष से जाने वाली किसी भुजा या किनारे के अनुदिश काटिए जिसमें कोई अतिव्यापिकता न हो तथा खोल कर देखिए कि किस आकार के कागज़ से शंकु का पृष्ठ बना था। (जिस भुजा या किनारे के अनुदिश आप शंकु को काटेंगे वह उसकी *तिर्यक ऊँचाई* होगी जिसे $l$ से व्यक्त किया जाता है।) खोला हुआ कागज़ आपको एक गोल केक के भाग की तरह दिखाई देगा।

(ii) यदि आप उन भुजाओं, जिनके सिरों पर A और B अंकित है, को मोड़ कर मिला लें, तो आप देखेंगे कि आकृति 13.15 (c) का वक्रित भाग शंकु का वृत्तीय आधार बनाता है।




आकृति 13.15

(iii) यदि आकृति 13.15 (c) में दिए कागज़ को O से जाती हुई रेखाओं द्वारा सैकड़ों छोटे-छोटे टुकड़ों में विभाजित कर लिया जाए, तो ये कटे हुए भाग लगभग त्रिभुज के आकारों के हैं और इनमें से प्रत्येक की ऊँचाई शंकु की तिर्यक ऊँचाई $l$ के बराबर है।

(iv) अब प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ प्रत्येक त्रिभुज का आधार $\times\, l$

अतः, पूरे कागज़ का क्षेत्रफल

= सभी त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का योग

$$= \frac{1}{2}b_1 l + \frac{1}{2}b_2 l + \frac{1}{2}b_3 l + \cdots = \frac{1}{2}l\left(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots\right)$$

$= \frac{1}{2} \times l \times$ [आकृति 13.15(c) की पूरी वक्रित परिसीमा की लंबाई]

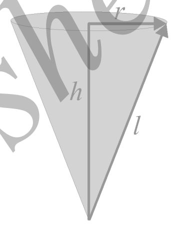
(चूँकि $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$ मिलकर इस आकृति के वक्रित भाग को बनाते हैं)

परन्तु इस वक्रित भाग से शंकु का आधार बनता है।

साथ ही, इस आधार की परिधि $= 2\pi r$, जहाँ $r$ आधार की त्रिज्या है।

इसलिए, **शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= \boldsymbol{\frac{1}{2} \times l \times 2\pi r = \pi r l}$

जहाँ $r$ आधार की त्रिज्या है और $l$ तिर्यक ऊँचाई हैं।




आकृति 13.16

ध्यान दीजिए कि $l^2 = r^2 + h^2$ होता है, जिसे हम आकृति 13.16 से देख सकते हैं (पाइथागोरस प्रमेय से)। यहाँ $h$ शंकु की ऊँचाई है।

अतः, $l = \sqrt{r^2 + h^2}$ होगा।

अब यदि शंकु के आधार को बंद रखा जाता है, तो ढकने के लिए $r$ त्रिज्या वाले एक वृत्ताकार कागज के टुकड़े की आवश्यकता और होगी। इसका क्षेत्रफल स्पष्टतः $\pi r^2$ है।

इसलिए, **शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= \boldsymbol{\pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r)}$

उदाहरण 4 : एक लंब वृत्तीय शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी तिर्यक ऊँचाई 10 cm है और आधार की त्रिज्या 7 cm है।

हल : वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r l$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 10 \text{ cm}^2$$

$$= 220 \text{ cm}^2$$

उदाहरण 5 : एक शंकु की ऊँचाई 16 cm है और आधार की त्रिज्या 12 cm है। इस शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)

हल : यहाँ, $h = 16$ cm और $r = 12$cm है।

इसलिए, $l^2 = h^2 + r^2$ से हमें प्राप्त होता है :

$$l = \sqrt{16^2 + 12^2} \text{ cm} = 20 \text{ cm}$$

अतः, वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl$

$= 3.14 \times 12 \times 20 \text{ cm}^2$

$= 753.6 \text{ cm}^2$

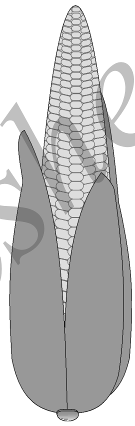
साथ ही, कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl + \pi r^2$

$= (753.6 + 3.14 \times 12 \times 12) \text{ cm}^2$

$= (753.6 + 452.16) \text{ cm}^2$

$= 1205.76 \text{ cm}^2$

**उदाहरण 6 :** एक भुट्टा कुछ-कुछ शंकु जैसे आकार का है (देखिए आकृति 13.17) जिसके सबसे चौड़े सिरे की त्रिज्या 2.1 cm है और इसकी लम्बाई (ऊँचाई) 20 cm है। यदि भुट्टे के प्रत्येक 1 cm² पृष्ठ पर औसतन चार दानें हों, तो ज्ञात कीजिए कि पूरे भुट्टे पर कुल कितने दानें होंगे?.



आकृति 13.17

**हल :** चूँकि भुट्टे के दानें उसके वक्र पृष्ठ पर ही होते हैं, इसलिए हमें दानों की संख्या ज्ञात करने के लिए भुट्टे के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल को ज्ञात करना होगा। यहाँ हमें शंकु की ऊँचाई दी है। इसलिए, हमें पहले शंकु की तिर्यक ऊँचाई ज्ञात करनी पड़ेगी।

अब, $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(2.1)^2 + 20^2}$ cm

$= \sqrt{404.41}$ cm $= 20.11$ cm

अतः, भुट्टे का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 2.1 \times 20.11 \text{ cm}^2 = 132.726 \text{ cm}^2 = 132.73 \text{ cm}^2$ (लगभग)

अतः 1 cm² क्षेत्रफल पर दानों की संख्या $= 4$

इसलिए, पूरे भुट्टे पर कुल दानों की संख्या $= 132.73 \times 4 = 530.92 = 531$ (लगभग)

अतः, इस भुट्टे पर लगभग 531 दानें होंगे।

## प्रश्नावली 13.3

जब तक अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।

**1.** एक शंकु के आधार का व्यास 10.5 cm है और इसकी तिर्यक ऊँचाई 10 cm है। इसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

**2.** एक शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी तिर्यक ऊँचाई 21 m है और आधार का व्यास 24 m है।

**3.** एक शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 308 $cm^2$ है और इसकी तिर्यक ऊँचाई 14 cm है। ज्ञात कीजिए :

(i) आधार की त्रिज्या (ii) शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

**4.** शंकु के आकार का एक तंबू 10 m ऊँचा है और उसके आधार की त्रिज्या 24 m है। ज्ञात कीजिए :

(i) तंबू की तिर्यक ऊँचाई

(ii) तंबू में लगे केनवास (canvas) की लागत, यदि 1 $m^2$ केनवास की लागत 70 रुपए है।

**5.** 8 m ऊँचाई और आधार की त्रिज्या 6 m वाले एक शंकु के आकार का तंबू बनाने में 3 m चौड़े तिरपाल की कितनी लंबाई लगेगी? यह मान कर चलिए कि इसकी सिलाई और कटाई में 20 cm तिरपाल अतिरिक्त लगेगा। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए।)

**6.** शंकु के आधार की एक गुंबज की तिर्यक ऊँचाई और आधार व्यास क्रमश: 25 m और 14 m हैं। इसकी वक्र पृष्ठ पर ₹ 210 प्रति 100 $m^2$ की दर से सफेदी कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

**7.** एक जोकर की टोपी एक शंकु के आकार की है, जिसके आधार की त्रिज्या 7 cm और ऊँचाई 24 cm है। इसी प्रकार की 10 टोपियाँ बनाने के लिए आवश्यक गत्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

**8.** किसी बस स्टाप को पुराने गत्ते से बने 50 खोखले शंकुओं द्वारा सड़क से अलग किया हुआ है। प्रत्येक शंकु के आधार का व्यास 40 cm है और ऊँचाई 1 m है। यदि इन शंकुओं की बाहरी पृष्ठों को पेंट करवाना है और पेंट की दर ₹ 12 प्रति $m^2$ है, तो इनको पेंट कराने में कितनी लागत आएगी? ($\pi = 3.14$ और $\sqrt{1.04} = 1.02$ का प्रयोग कीजिए।)

## 13.5 गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

एक गोला (sphere) क्या होता है? क्या यह एक वृत्त की तरह ही है? क्या आप एक कागज पर वृत्त खींच सकते हैं? हाँ, आप खींच सकते हैं, क्योंकि यह एक बंद समतल आकृति है

जिसका प्रत्येक बिंदु एक निश्चित बिंदु (जिसे वृत्त का केंद्र कहते हैं) से एक निश्चित दूरी पर रहता है (जिसे वृत्त की *त्रिज्या* कहते हैं)। अब यदि आप एक वृत्ताकार चकती (disc) के एक व्यास के अनुदिश एक डोरी चिपका दें और इसे वैसे ही घुमाएँ जैसे आपने पिछले अनुच्छेद में त्रिभुज को घुमाया था, तो आप एक नया ठोस देखेंगे (देखिए आकृति 13.18)। यह किस वस्तु से मिलता-जुलता लगता है? एक गेंद? हाँ, ऐसा ही है। यह एक **गोला (sphere)** कहलाता है।

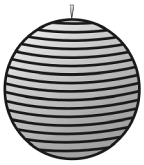
आकृति 13.18

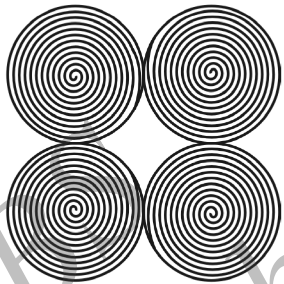
क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि उस वृत्त के केंद्र का क्या होता है जिसे आपने घुमाया है। निःसंदेह, यह गोले का केंद्र भी हो जाता है। इस प्रकार, *गोला एक त्रिविमीय आकृति (three dimensional figure) (ठोस आकृति) है, जो आकाश (स्पेस) (space) में स्थित उन सभी बिंदुओं से मिल कर बनी है जो एक निश्चित बिंदु से (जो गोले का केन्द्र कहलाता है) से एक **अचर** या निश्चित दूरी पर होते हैं (जो गोले की **त्रिज्या** कहलाती है)।*

**टिप्पणी :** गोला एक गेंद की पृष्ठ की तरह होता है। *ठोस गोला* उस ठोस के लिए प्रयोग होता है जिसका पृष्ठ एक गोला हो।

**क्रियाकलाप :** क्या आप कभी लट्टू के साथ खेले हैं या कभी आपने किसी व्यक्ति को लट्टू के साथ खेलते देखा है? आप यह जानते होंगे कि उस पर डोरी किस प्रकार लपेटी जाती है। अब आइए एक रबर की गेंद लें और उसके ऊपर एक कील लगा दें। कील की सहायता लेते हुए, गेंद पर डोरी लपेटना प्रारम्भ कर दीजिए। जब आप ऐसा कर रहे हों, तो डोरी को थामे रखने के लिए, बीच-बीच में पिन लगाते रहिए और डोरी लपेटना तब तक जारी रखिए जब तक कि पूरी गेंद पर डोरी न लिपट जाए [देखिए आकृति 13.19(a)]। डोरी पर प्रारम्भिक और अंतिम बिंदु अंकित कर लीजिए और धीरे-धीरे गेंद से डोरी को हटा

लीजिए। अब अपने शिक्षक से गेंद का व्यास मापने के लिए सहायता देने के लिए कहिए। इससे आपको गेंद की त्रिज्या ज्ञात हो जाएगी। इसके बाद, कागज पर गेंद की त्रिज्या के बराबर चार वृत्त खींच लीजिए। अब जो डोरी आपने गेंद पर लपेटी थी उसी को एक-एक करके इन वृत्तों पर रखकर वृत्तों को भरिए [देखिए आकृति 13.19(b)]।


(a)


(b)

आकृति 13.19



इन सबसे आपको क्या प्राप्त होता है?

वह डोरी जिसने एक गोले के पृष्ठ को पूरा-पूरा ढक दिया था अब उसी गोले की त्रिज्या वाले चार वृत्तों के क्षेत्रों को भर रही है। इसका क्या अर्थ हुआ? इससे यह सुझाव मिलता है कि त्रिज्या $r$ वाले एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

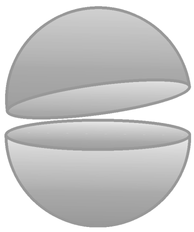
= त्रिज्या $r$ वाले चार वृत्तों का क्षेत्रफल $= 4 \times (\pi r^2)$

इसलिए, $\boxed{\textbf{गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 4\pi r^2}$

जहाँ $r$ गोले की त्रिज्या है।

गोले के पृष्ठ पर आप कितने फलक देखते हैं? केवल एक। यह वक्रीय है।

आइए एक ठोस गोला लें और इसे बीच से इसके केंद्र से जाते हुए एक तल द्वारा दो भागों में काट लें। गोले का क्या होता है? यह दो बराबर भागों में विभाजित हो गया है (देखिए आकृति 13.20)। प्रत्येक आधा भाग क्या कहलाता है यह एक **अर्धगोला** **(hemisphere)** कहलाता है (क्योंकि hemi का अर्थ आधा है)।


आकृति 13.20

अर्धगोले के पृष्ठ के बारे में आप क्या कह सकते हैं? इसके कितने फलक हैं? दो!, इनमें एक वक्रीय है और एक समतल फलक है (आधार)।

अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल का आधा, अर्थात् $\frac{1}{2} \times 4\pi r^2$ है।

अतः, **अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= 2\pi r^2$

जहाँ $r$ उस गोले की त्रिज्या है जिसका अर्धगोला एक भाग है।

अब दोनों फलकों को लेने पर, इसका कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r^2 + \pi r^2$ है।

अतः, **अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= 3\pi r^2$

उदाहरण 7 : 7 cm त्रिज्या वाले एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : 7 cm त्रिज्या वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \text{ cm}^2 = 616 \text{ cm}^2$$

उदाहरण 8 : त्रिज्या 21 cm वाले एक अर्धगोले के लिए, ज्ञात कीजिए:

(i) वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

हल : (i) त्रिज्या 21 cm वाले अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2\pi r^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 2772 \text{ cm}^2$$

(ii) अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 4158 \text{ cm}^2$$

उदाहरण 9 : सर्कस का एक मोटरसाइकिल सवार जिस खोखले गोले के अंदर अपने करतब (खेल) दिखाता है उसका व्यास 7 m है। मोटरसाइकिल सवार के पास ये करतब दिखाने के लिए कितना क्षेत्रफल उपलब्ध है?

हल : गोले का व्यास = 7 m है। इसलिए त्रिज्या 3.5m हुई। अब, करतब दिखाने के लिए,

मोटरसाइकिल सवार को उपलब्ध स्थान इस गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल है।

$$\text{गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \text{ m}^2 = 154 \text{ m}^2$$

**उदाहरण 10 :** किसी भवन का ऊपरी भाग अर्धगोलाकार है और इस पर पेंट किया जाना है (देखिए आकृति 13.21)। यदि इस अर्धगोले के आधार की परिधि 17.6 m है, तो ₹ 5 प्रति 100 $\text{cm}^2$ की दर से इसे पेंट कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

**हल :** चूँकि केवल गोलाकार पृष्ठ पर ही पेंट होगा, इसलिए हमें अर्धगोले के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल को ज्ञात करने की आवश्यकता है।

अब, आधार की परिधि = 17.6 m है।

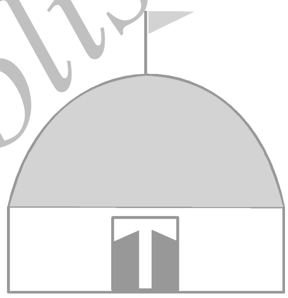
इसलिए, $2\pi r = 17.6$

अर्थात्, $r = \frac{17.6 \times 7}{2 \times 22}$ m = 2.8 m

इसलिए, भवन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8 \text{ m}^2$

$= 49.28 \text{ m}^2$



आकृति 13.21

अब, 100 $\text{cm}^2$ पेंटिंग की लागत = ₹ 5

इसलिए, 1 $\text{m}^2$ पेंटिंग की लागत = ₹ 500

अत:, 49.28 $\text{m}^2$ पेंटिंग की लागत = ₹ 500 × 49.28 = ₹ 24640



## प्रश्नावली 13.4

जब तक अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।

**1.** निम्न त्रिज्या वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

(i) 10.5 cm (ii) 5.6 cm (iii) 14 cm

**2.** निम्न व्यास वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

(i) 14 cm (ii) 21 cm (iii) 3.5 m

**3.** 10 cm त्रिज्या वाले एक अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए।)

**4.** एक गोलाकार गुब्बारे में हवा भरने पर, उसकी त्रिज्या 7 cm से 14 cm हो जाती है। इन दोनों स्थितियों में, गुब्बारे के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

**5.** पीतल से बने एक अर्धगोलाकार कटोरे का आंतरिक व्यास 10.5 cm है। ₹ 16 प्रति 100 $cm^2$ की दर से इसके आंतरिक पृष्ठ पर कलई कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

**6.** उस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 154 $cm^2$ है।

**7.** चन्द्रमा का व्यास पृथ्वी के व्यास का लगभग एक-चौथाई है। इन दोनों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

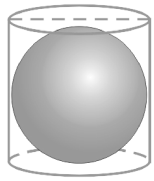
**8.** एक अर्धगोलाकार कटोरा 0.25 cm मोटी स्टील से बना है। इस कटोरे की आंतरिक त्रिज्या 5 cm है। कटोरे का बाहरी वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

**9.** एक लंब वृत्तीय बेलन त्रिज्या $r$ वाले एक गोले को पूर्णतया घेरे हुए है (देखिए आकृति 13.22)। ज्ञात कीजिए:

(i) गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

(ii) बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

(iii) ऊपर (i) और (ii) में प्राप्त क्षेत्रफलों का अनुपात



आकृति 13.22

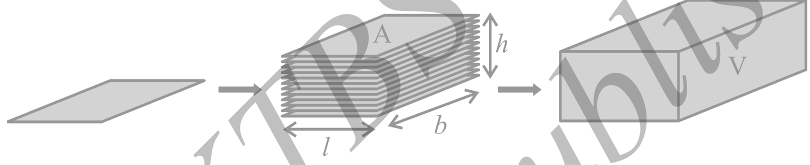
## 13.6 घनाभ का आयतन

आप पिछली कक्षाओं में, कुछ आकृतियों (वस्तुओं) के आयतनों (volumes) के बारे में पहले ही पढ़ चुके हैं। आपको याद होगा कि ठोस वस्तुएँ स्थान घेरती हैं। इस घेरे गए स्थान के माप को उस वस्तु का **आयतन** कहते हैं।

टिप्पणी : यदि कोई वस्तु ठोस है, तो उस वस्तु द्वारा घेरे गए स्थान को मापा जा सकता है और उस माप को वस्तु का **आयतन** कहा जाता है। दूसरी ओर, यदि वस्तु खोखली है, तो उसका अभ्यंतर (interior) रिक्त होता है, जिसे हवा या द्रव से भरा जा सकता है। यह द्रव उस वस्तु (बर्तन) के आकार का हो जाता है। इस स्थिति में, बर्तन के अभ्यंतर में (अंदर) जितनी वस्तु (या द्रव) भरा जाता है वह उसकी *धारिता* (*capacity*) कहलाती है। दूसरे शब्दों में, किसी वस्तु का आयतन उस वस्तु द्वारा घेरे गए स्थान की माप है और किसी वस्तु की धारिता उस वस्तु के अभ्यंतर में भरे जा सकने वाले द्रव (या अन्य वस्तु) का आयतन है। इसलिए इन दोनों के ही मात्रक **घन मात्रक** (cubic units) हैं।

इसलिए यदि हम घनाभ के आयतन की बात करेंगे, तो उसका अर्थ उस घनाभ द्वारा घेरे गए स्थान के माप से होगा।

साथ ही, क्षेत्रफल अथवा आयतन को एक क्षेत्र (region) के परिमाण के रूप में मापा जाता है। इसलिए, यदि सही तौर पर कहा जाए, तो हम वृत्तीय क्षेत्र का क्षेत्रफल या एक घनाभाकार क्षेत्र का आयतन या एक गोलाकार क्षेत्र का आयतन, इत्यादि ही ज्ञात कर रहे होते हैं। परन्तु सरलता के लिए, प्राय: हम यह कहा करते हैं कि वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए या एक घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए या एक गोले का आयतन कीजिए, इत्यादि। ये केवल इन क्षेत्रों की परिसीमाएँ ही हैं।




आकृति 13.23

आकृति 13.23 को देखिए। मान लीजिए, हम कहते हैं कि प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल A है, जिस ऊँचाई तक आयतों का ढेर लगाया गया है वह $h$ है और घनाभ का आयतन V है। क्या आप बता सकते हैं कि V, A और $h$ के बीच में क्या संबंध होगा?

प्रत्येक आयत द्वारा घेरे गए क्षेत्र का क्षेत्रफल × ऊँचाई

= उस घनाभ द्वारा घेरे गए क्षेत्र का आयतन (माप)

इसलिए, हमें $A \times h = V$ प्राप्त होता है।

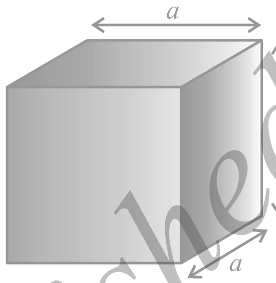
अत:, **घनाभ का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई**

$= l \times b \times h$

जहाँ $l$, $b$ और $h$ क्रमश: घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई हैं।

टिप्पणी : जब हम त्रिविमीय आकाश (space) में घेरे गए क्षेत्र के परिमाण को मापते हैं, अर्थात् ठोस द्वारा घेरे गए क्षेत्र (स्थान) को मापते हैं, तो हम ऐसा उस क्षेत्र में मात्रक लंबाई के घनों की वह संख्या गिनके करते हैं जो उसमें पूर्णतया समाए जा सकते हैं। अत:, आयतन का मात्रक (या घन इकाई) ही लिया जाता है।

साथ ही, $\boxed{\textbf{घन का आयतन} = \textbf{किनारा} \times \textbf{किनारा} \times \textbf{किनारा} = a^3}$




आकृति 13.24

जहाँ $a$ घन का किनारा है (देखिए आकृति 13.24)।

इसलिए, यदि एक घन का किनारा 12 cm है, तो

उसका आयतन = $12 \times 12 \times 12$ cm$^3$ = 1728 cm$^3$

याद कीजिए कि आप इन सूत्रों के बारे में पिछली कक्षाओं में पढ़ चुके हैं। आइए इनके प्रयोग को स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण लें।

**उदाहरण 11 :** एक खुले मैदान में 10 m लंबी एक दीवार का निर्माण किया जाना था। दीवार की ऊँचाई 4 m है और उसकी मोटाई 24 cm है। यदि इस दीवार को 24 cm × 12 cm × 8 cm विमाओं वाली ईंटों से बनाया जाना है, तो इसके लिए कितनी ईंटों की आवश्यकता होगी?

**हल :** चूँकि दीवार द्वारा घेरा गया स्थान सभी ईंटों द्वारा घेरे गए स्थान के बराबर होगा, इसलिए आइए दीवार का आयतन ज्ञात करें, जो एक घनाभ है।

यहाँ, लंबाई = 10 m = 1000 cm,

मोटाई = 24 cm

और ऊँचाई = 4 m = 400 cm

अतः, दीवार का आयतन = लंबाई × मोटाई × ऊँचाई

$= 1000 \times 24 \times 400$ cm$^3$

अब प्रत्येक ईंट विमाओं 24 cm × 12 cm × 8 cm का एक घनाभ है।

इसलिए, एक ईंट का आयतन = लंबाई × चौड़ाई × ऊँचाई

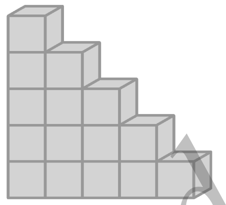
$= 24 \times 12 \times 8$ cm$^3$

$$\text{अतः, वाँछित ईंटों की संख्या} = \frac{\text{दीवार का आयतन}}{\text{एक ईंट का आयतन}}$$

$$= \frac{1000 \times 24 \times 400}{24 \times 12 \times 8} = 4166.6$$

इसलिए, दीवार बनाने में 4167 ईंटें लगेंगी।

**उदाहरण 12 :** एक बच्चा भवन ब्लॉकों से खेल रहा है, जो एक घन के आकार के हैं। उसने इनसे आकृति 13.25 में दर्शाए अनुसार एक ढाँचा बना लिया है। प्रत्येक घन का किनारा 3 cm है। उस बच्चे द्वारा बनाए गए ढाँचे का आयतन ज्ञात कीजिए।



आकृति 13.25

**हल :** प्रत्येक घन का आयतन = किनारा × किनारा × किनारा

$= 3 \times 3 \times 3 \text{ cm}^3 = 27 \text{ cm}^3$

ढाँचे में घनों की संख्या = 15

अत:, ढाँचे का आयतन = $27 \times 15 \text{ cm}^3 = 405 \text{ cm}^3$



## प्रश्नावली 13.5

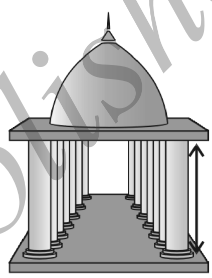
1. माचिस की डिब्बी के माप 4 cm × 2.5 cm × 1.5 cm हैं। ऐसी 12 डिब्बियों के एक पैकेट का आयतन क्या होगा?
2. एक घनाभाकार पानी की टंकी 6 m लंबी, 5 m चौड़ी और 4.5 m गहरी है। इसमें कितने लीटर पानी आ सकता है?
   ($1 \text{ m}^3 = 1000 \, l$)
3. एक घनाभाकार बर्तन 10 m लंबा और 8 m चौड़ा है। इसको कितना ऊँचा बनाया जाए कि इसमें 380 घन मीटर द्रव आ सके?
4. 8 m लंबा, 6 m चौड़ा और 3 m गहरा एक घनाभाकार गढ्ढा खुदवाने में 30 रुपए प्रति $\text{m}^3$ की दर से होने वाला व्यय ज्ञात कीजिए।
5. एक घनाभाकार टंकी की धारिता 50000 लीटर पानी की है। यदि इस टंकी की लंबाई और गहराई क्रमश: 2.5 m और 10 m हैं, तो इसकी चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
6. एक गाँव जिसकी जनसंख्या 4000 है, को प्रतिदिन प्रति व्यक्ति 150 लीटर पानी की आवश्यकता है। इस गाँव में 20 m × 15 m × 6 m मापों वाली एक टंकी बनी हुई है। इस टंकी का पानी वहाँ कितने दिन के लिए पर्याप्त होगा?
7. किसी गोदाम की माप 40 m × 25 m × 15 m हैं। इस गोदाम में 1.5 m × 1.25 m × 0.5 m की माप वाले लकड़ी के कितने अधिकतम क्रेट (crate) रखे जा सकते हैं?
8. 12 cm भुजा वाले एक ठोस घन को बराबर आयतन वाले 8 घनों में काटा जाता है। नए घन की क्या भुजा होगी? साथ ही, इन दोनों घनों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात भी ज्ञात कीजिए।
9. 3 m गहरी और 40 m चौड़ी एक नदी 2 km प्रति घंटा की चाल से बह कर समुद्र में गिरती है। एक मिनट में समुद्र में कितना पानी गिरेगा?

## 13.7 बेलन का आयतन

हम देख चुके हैं कि जैसे समान मापों के आयतों को एक के ऊपर एक रखकर घनाभ बनाया जाता है, उसी प्रकार समान मापों के वृत्तों को एक के ऊपर एक रखकर एक बेलन बनाया जा सकता है। इसलिए, उसी तर्क द्वारा जो हमने घनाभ के लिए दिया था, हम कह सकते हैं कि बेलन का आयतन, आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई होता है। अर्थात् यह आयतन वृत्तीय आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई = $\pi r^2 h$ है।

इसलिए, **बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$**

जहाँ $r$ आधार की त्रिज्या और $h$ बेलन की ऊँचाई है।



आकृति 13.26

**उदाहरण 13 :** किसी मंदिर के खंभे बेलनाकार हैं (देखिए आकृति 13.26)। यदि प्रत्येक खंभे का आधार 20 cm त्रिज्या का एक वृत्तीय क्षेत्र है और ऊँचाई 10 m है, तो ऐसे 14 खंभे बनाने में कितने कंक्रीट मिश्रण की आवश्यकता होगी?

**हल :** चूँकि कंक्रीट मिश्रण जिससे खंभा बनाया जाएगा उस पूरे खंभे के स्थान को भर देगा, इसलिए हमें बेलनों के आयतनों को ज्ञात करने की आवश्यकता है।

बेलन के आधार की त्रिज्या = 20 cm

बेलनाकार खंभे की ऊँचाई = 10 m = 1000 cm

इसलिए, एक खंभे का आयतन = $\pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 1000 \text{ cm}^3$$

$$= \frac{8800000}{7} \text{ cm}^3$$

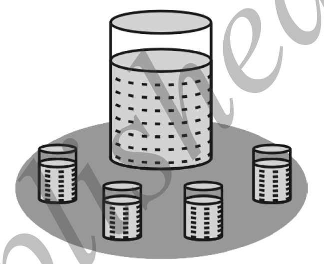
$$= \frac{8.8}{7} \text{ m}^3 \quad (1000000 \text{ cm}^3 = 1\text{m}^3)$$

अत:, 14 खंभों का आयतन $= \frac{8.8}{7} \times 14\ m^3$

$= 17.6\ m^3$

इसलिए, 14 खंभों के लिए 17.6 $m^3$ कंक्रीट मिश्रण की आवश्यकता होगी।

**उदाहरण 14 :** रमजान के एक मेले में, भोज्य पदार्थों के एक स्टॉल पर दुकानदार के पास आधार त्रिज्या 15 cm वाला एक बर्तन था जो 32 cm की ऊँचाई तक संतरे के जूस से भरा हुआ था। जूस को 3 cm त्रिज्या वाले बेलनाकार गिलासों में 8 cm ऊँचाई तक भर कर ₹ 3 प्रति गिलास की दर से बेचा जाता है (देखिए आकृति 13.27)। जूस को पूरा बेचने पर दुकानदार को कुल कितनी राशि प्राप्त हुई?



आकृति 13.27

**हल :** बड़े बर्तन में जूस का आयतन = बेलनाकार बर्तन का आयतन

$= \pi R^2 H$

(जहाँ R और H क्रमश: बर्तन की त्रिज्या और ऊँचाई हैं)

$= \pi \times 15 \times 15 \times 32\ cm^3$

इसी प्रकार, एक गिलास जूस का आयतन $= \pi r^2 h$

(जहाँ $r$ और $h$ क्रमश: गिलास की त्रिज्या और ऊँचाई हैं)

$= \pi \times 3 \times 3 \times 8\ cm^3$

इसलिए, जूस के बेचे गए गिलासों की संख्या

$= \frac{\text{बर्तन का आयतन}}{\text{एक गिलास का आयतन}}$

$= \frac{\pi \times 15 \times 15 \times 32}{\pi \times 3 \times 3 \times 8}$

$= 100$

अत:, दुकानदार द्वारा प्राप्त की गई राशि = ₹ 3 × 100

= ₹ 300

## प्रश्नावली 13.6

जब तक अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।

1. एक बेलनाकार बर्तन के आधार की परिधि 132 cm और उसकी ऊँचाई 25 cm है। इस बर्तन में कितने लीटर पानी आ सकता है? ($1000\ cm^3 = 1$लीटर)

2. लकड़ी के एक बेलनाकार पाइप का आंतरिक व्यास 24 cm है और बाहरी व्यास 28 cm है। इस पाइप की लंबाई 35cm है। इस पाइप का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, यदि $1\ cm^3$ लकड़ी का द्रव्यमान 0.6 ग्राम है।

3. एक सोफ्ट ड्रिंक (soft drink) दो प्रकार के पैकों में उपलब्ध है :– (i) लंबाई 5 cm और चौड़ाई 4 cm वाले एक आयताकार आधार का टिन का डिब्बा जिसकी ऊँचाई 15 cm है और (ii) व्यास 7 cm वाले वृत्तीय आधार और 10 cm ऊँचाई वाला एक प्लास्टिक का बेलनाकार डिब्बा। किस डिब्बे की धारिता अधिक है और कितनी अधिक है?

4. यदि एक बेलन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल $94.2\ cm^2$ है और उसकी ऊँचाई 5 cm है, तो ज्ञात कीजिए :

   (i) आधार की त्रिज्या (ii) बेलन का आयतन ($\pi = 3.14$ लीजिए)

5. 10 m गहरे एक बेलनाकार बर्तन की आंतरिक वक्र पृष्ठ को पेंट कराने का व्यय ₹ 2200 है। यदि पेंट कराने की दर ₹ 20 प्रति $m^2$ है, तो ज्ञात कीजिए :

   (i) बर्तन का आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

   (ii) आधार की त्रिज्या

   (iii) बर्तन की धारिता

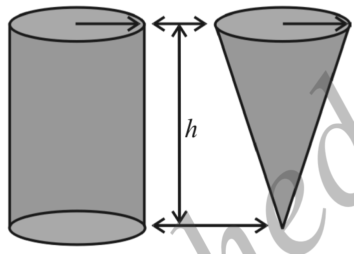
6. ऊँचाई 1 m वाले एक बेलनाकार बर्तन की धारिता 15.4 लीटर है। इसको बनाने के लिए कितने वर्ग मीटर धातु की शीट की आवश्यकता होगी?

7. सीसे की एक पेंसिल (lead pencil) लकड़ी के एक बेलन के अभ्यंतर में ग्रेफाइट (graphite) से बने ठोस बेलन को डाल कर बनाई गई है। पेंसिल का व्यास 7 mm है और ग्रेफाइट का व्यास 1 mm है। यदि पेंसिल की लंबाई 14 cm है, तो लकड़ी का आयतन और ग्रेफाइट का आयतन ज्ञात कीजिए।

8. एक अस्पताल (hospital) के एक रोगी को प्रतिदिन 7 cm व्यास वाले एक बेलनाकार कटोरे में सूप (soup) दिया जाता है। यदि यह कटोरा सूप से 4 cm ऊँचाई तक भरा जाता है, तो इस अस्पताल में 250 रोगियों के लिए प्रतिदिन कितना सूप तैयार किया जाता है?

## 13.8 लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन

आकृति 13.28 में, आप देखते हैं कि इसमें एक ही आधार त्रिज्या वाले और एक ही ऊँचाई वाले बेलन और शंकु दिए हुए हैं।



आकृति 13.28

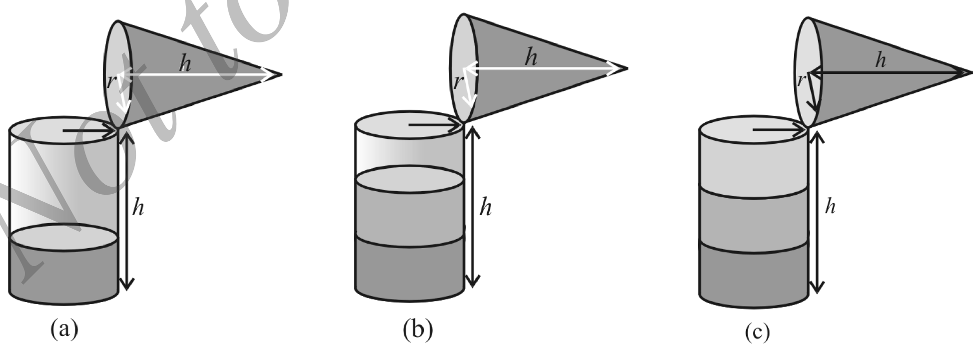
**क्रियाकलाप :** उपरोक्त आकृतियों की ही तरह, एक ही आधार त्रिज्या और एक ही ऊँचाई वाला एक खोखला बेलन और एक खोखला शंकु बनाने का प्रयत्न कीजिए (देखिए आकृति 13.28)। फिर हम एक प्रयोग द्वारा यह ज्ञात करेंगे कि एक शंकु का आयतन क्या है।

आइए इस प्रयोग को प्रारम्भ करें।

शंकु को रेत से एक बार ऊपर तक भरिए और इस रेत को बेलन में डाल दीजिए। हम देखते हैं कि इससे बेलन का कुछ भाग भर गया है [देखिए आकृति 13.29 (a)]।

फिर हम दुबारा शंकु को रेत से भर कर बेलन में रेत को डाल देते हैं। हम देखते हैं कि बेलन अभी भी पूरा नहीं भरा है [देखिए आकृति 13.29(b)]।

अब शंकु को तीसरी बार रेत से भर कर बेलन में डालिए। हम देखते हैं कि बेलन पूरा रेत से भर गया है [देखिए आकृति 13.29(c)]।



आकृति 13.29

इस प्रयोग से, हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि तीन शंकुओं का आयतन बेलन के आयतन के बराबर है। इसका अर्थ है कि यदि शंकु और बेलन की आधार त्रिज्या एक ही हो और ऊँचाई भी एक ही हो, तो शंकु का आयतन बेलन के आयतन का एक-तिहाई होता है।

अतः, $\boxed{\textbf{शंकु का आयतन} = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$

जहाँ $r$ आधार त्रिज्या है और $h$ शंकु की ऊँचाई है।

**उदाहरण 15 :** किसी शंकु की ऊँचाई और तिर्यक ऊँचाई क्रमशः 21 cm और 28 cm हैं। इसका आयतन ज्ञात कीजिए।

**हल :** $l^2 = r^2 + h^2$ से हमें प्राप्त होता है :

$$r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{28^2 - 21^2}\ \text{cm} = 7\sqrt{7}\ \text{cm}$$

अतः, शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{7} \times 7\sqrt{7} \times 21\ \text{cm}^3$

$= 7546\ \text{cm}^3$

**उदाहरण 16 :** मोनिका के पास केनवास का एक टुकड़ा है जिसका क्षेत्रफल 551 m$^2$ है। वह इससे 7 m आधार त्रिज्या वाला एक शंकु का आपतन का तंबू बनवाती है। यह मानते हुए कि सिलाई और कटाई में लगभग 1 m$^2$ केनवास नष्ट हुआ होगा, इससे बनाए जाने वाले शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।

**हल :** केनवास का क्षेत्रफल = 551 m$^2$ है और 1 m$^2$ केनवास सिलाई, इत्यादि में नष्ट हो जाता है।

अतः, तंबू के लिए उपलब्ध केनवास = (551 – 1) m$^2$ = 550 m$^2$

इसलिए, तंबू का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 550 m$^2$

अब, तंबू के आधार की त्रिज्या = 7 m

ध्यान दीजिए कि तंबू की केवल वक्र पृष्ठ ही होती है (तंबू के फर्श को ढका नहीं जाता है)।

अतः, तंबू का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = 550 m$^2$

अर्थात्, $\pi rl = 550$

या, $\frac{22}{7} \times 7 \times l = 550$

या, $l = \frac{550}{22}$ m = 25 m

अब, $l^2 = r^2 + h^2$

इसलिए, $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{25^2 - 7^2}$ m $= \sqrt{625 - 49}$ m $= \sqrt{576}$ m

= 24 m

अत:, तंबू का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24$ m$^3$ = 1232 m$^3$

## प्रश्नावली 13.7

जब तक अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।

**1.** उस लंब वृत्तीय शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए, जिसकी
(i) त्रिज्या 6 cm और ऊँचाई 7 cm है। (ii) त्रिज्या 3.5 cm और ऊँचाई 12 cm है।

**2.** शंकु के आकार के उस बर्तन की लीटरों में धारिता ज्ञात कीजिए जिसकी
(i) त्रिज्या 7 cm और तिर्यक ऊँचाई 25 cm है।
(ii) ऊँचाई 12 cm और तिर्यक ऊँचाई 13 cm है।

**3.** एक शंकु की ऊँचाई 15 cm है। यदि इसका आयतन 1570 cm$^3$ है, तो इसके आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। ($\pi$ = 3.14 प्रयोग कीजिए।)

**4.** यदि 9 cm ऊँचाई वाले एक लंब वृत्तीय शंकु का आयतन 48 $\pi$ cm$^3$ है, तो इसके आधार का व्यास ज्ञात कीजिए।

**5.** ऊपरी व्यास 3.5 m वाले शंकु के आकार का एक गढ्ढा 12 m गहरा है। इसकी धारिता किलोलीटरों में कितनी है?

**6.** एक लंब वृत्तीय शंकु का आयतन 9856 cm$^3$ है। यदि इसके आधार का व्यास 28 cm है, तो ज्ञात कीजिए :
(i) शंकु की ऊँचाई (ii) शंकु की तिर्यक ऊँचाई
(iii) शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

**7.** भुजाओं 5 cm, 12 cm और 13 cm वाले एक समकोण त्रिभुज ABC को भुजा 12 cm के परित घुमाया जाता है। इस प्रकार प्राप्त ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

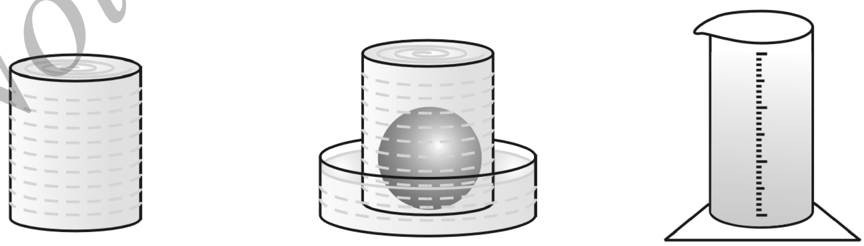
**8.** यदि प्रश्न 7 के त्रिभुज ABC को यदि भुजा 5 cm के परित घुमाया जाए, तो इस प्रकार प्राप्त ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए। प्रश्नों 7 और 8 में प्राप्त किए गए दोनों ठोसों के आयतनों का अनुपात भी ज्ञात कीजिए।

**9.** गेहूँ की एक ढेरी 10.5 m व्यास और ऊँचाई 3 m वाले एक शंकु के आकार की है। इसका आयतन ज्ञात कीजिए। इस ढेरी को वर्षा से बचाने के लिए केनवास से ढका जाना है। वाँछित केनवास का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

## 13.9 गोले का आयतन

आइए अब देखें कि एक गोले का आयतन कैसे मापा जाए। पहले विभिन्न त्रिज्याओं वाले दो या तीन गोले लीजिए। फिर एक बर्तन लीजिए, जिसके अंदर इन गोलों को (केवल एक बार में एक) रखा जा सके। साथ ही, एक बड़ी नाँद (trough) लीजिए जिसमें इस बर्तन को रखा जा सके। अब बर्तन को पूरा ऊपर तक पानी से भरिए [देखिए आकृति 13.30(a)]।

अब लिए गए गोलों में से एक को बर्तन में सावधानीपूर्वक डालिए। बर्तन में से कुछ पानी बाहर निकल कर उस नाँद में जाएगा जिसमें वह बर्तन रखा हुआ है [देखिए आकृति 13.30(b)]। अब नाँद में आए इस पानी को सावधानीपूर्वक एक नापने वाले बेलन [अर्थात् अशांकित बेलनाकार गिलास (graduated cylindrical jar)] में डालिए। मान लीजिए पानी में डुबाए गए गोले की त्रिज्या $r$ है (आप गोले का व्यास माप कर उसकी त्रिज्या ज्ञात कर सकते हैं)। अब $\frac{4}{3}\pi r^3$ का मान निकालिए। क्या आप यह पाते हैं कि यह मान बर्तन से बाहर निकले पानी के आयतन के लगभग बराबर है?



(a) (b) (c)

आकृति 13.30

एक बार फिर इसी प्रक्रिया को एक अन्य माप का गोला लेकर दोहराइए। इस गोले की त्रिज्या R ज्ञात करके $\frac{4}{3}\pi R^3$ का मान निकालिए। एक बार फिर यह मान बर्तन से बाहर निकले पानी के आयतन के लगभग बराबर है। यह हमें क्या बताता है? हम जानते हैं कि गोले का आयतन उसके द्वारा हटाए गए पानी के आयतन के बराबर है। इस प्रयोग को बार-बार करने पर, हम प्राप्त करते हैं कि एक गोले का आयतन गोले की त्रिज्या के घन का $\frac{4}{3}\pi$ गुना है। इससे हमें निम्न सुझाव प्राप्त होता है :

**गोले का आयतन** $= \frac{4}{3}\pi r^3$

जहाँ $r$ गोले की त्रिज्या है।

उच्चतर कक्षाओं में इसे सिद्ध भी किया जा सकता है। परन्तु इस समय तो हम इसे सत्य मान लेते हैं।

अब अर्धगोले के आयतन के बारे में आप क्या अनुमान लगा सकते हैं? हाँ, यह $\frac{4}{3}\pi r^3$ का $\frac{1}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3$ है।

**अतः, अर्धगोले का आयतन** $= \frac{2}{3}\pi r^3$

जहाँ $r$ अर्धगोले की त्रिज्या है।

आइए इन सूत्रों का प्रयोग दर्शाने के लिए कुछ उदाहरण लें।

**उदाहरण 17 :** 11.2 cm त्रिज्या वाले गोले का आयतन ज्ञात कीजिए।

**हल :** वाँछित आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 11.2 \times 11.2 \times 11.2 \text{ cm}^3 = 5887.32 \text{ cm}^3$$

**उदाहरण 18 :** एक शॉट-पट्ट (shot-putt) 4.9 cm त्रिज्या वाला एक धातु का गोला है। यदि इस धातु का घनत्व (density) 7.8 ग्राम प्रति cm³ है, तो शॉट-पट्ट का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।

**हल :** चूँकि शॉट-पट्ट (shot-putt) धातु का एक ठोस गोला है तथा द्रव्यमान आयतन और घनत्व के गुणनफल के बराबर होता है, इसलिए पहले हमें शॉट-पट्ट का आयतन ज्ञात करना चाहिए।

अब, गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9 \times 4.9 \text{ cm}^3$$

$= 493$ $\text{cm}^3$ (लगभग)

साथ ही, 1 $\text{cm}^3$ धातु का द्रव्यमान = 7.8 ग्राम

अत:, शॉट-पट्ट का द्रव्यमान = 7.8 × 493 ग्राम

= 3845.44 ग्राम = 3.85 किलोग्राम (लगभग)

**उदाहरण 19 :** एक अर्धगोलाकार कटोरे की त्रिज्या 3.5 cm है। इसके अंदर भरे जा सकने वाले पानी का आयतन ज्ञात कीजिए।

**हल :** कटोरे में भरे जा सकने वाले पानी का आयतन

$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 3.5 \text{ cm}^3 = 89.8 \text{ cm}^3$$



## प्रश्नावली 13.8

जब अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।

1. उस गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या निम्न है :
   (i) 7 cm (ii) 0.63 m

2. उस ठोस गोलाकार गेंद द्वारा हटाए गए (विस्थापित) पानी का आयतन ज्ञात कीजिए, जिसका व्यास निम्न है :
   (i) 28 cm (ii) 0.21 m

3. धातु की एक गेंद का व्यास 4.2 cm है। यदि इस धातु का घनत्व 8.9 ग्राम प्रति $\text{cm}^3$ है, तो इस गेंद का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।

4. चंद्रमा का व्यास पृथ्वी के व्यास का लगभग एक-चौथाई है। चंद्रमा का आयतन पृथ्वी के आयतन की कौन-सी भिन्न है?

**5.** व्यास 10.5 cm वाले एक अर्धगोलाकार कटोरे में कितने लीटर दूध आ सकता है?

**6.** एक अर्धगोलाकार टंकी 1 cm मोटी एक लोहे की चादर (sheet) से बनी है। यदि इसकी आंतरिक त्रिज्या 1 m है, तो इस टंकी के बनाने में लगे लोहे का आयतन ज्ञात कीजिए।

**7.** उस गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 154 $cm^2$ है।

**8.** किसी भवन का गुंबद एक अर्धगोले के आकार का है। अंदर से, इसमें सफेदी कराने में ₹ 498.96 व्यय हुए। यदि सफेदी कराने की दर ₹ 2 प्रति वर्ग मीटर है, तो ज्ञात कीजिए:

(i) गुंबद का आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (ii) गुंबद के अंदर की हवा का आयतन

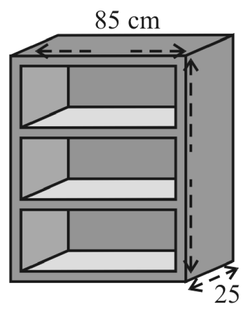
**9.** लोहे के सत्ताइस ठोस गोलों को पिघलाकर, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या $r$ है और पृष्ठीय क्षेत्रफल S है, एक बड़ा गोला बनाया जाता है जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल S′ है। ज्ञात कीजिए:

(i) नए गोले की त्रिज्या $r'$ (ii) S और S′ का अनुपात

**10.** दवाई का एक कैपसूल (capsule) 3.5 mm व्यास का एक गोला (गोली) है। इस कैपसूल को भरने के लिए कितनी दवाई ($mm^3$ में) की आवश्यकता होगी?

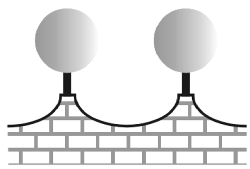
## प्रश्नावली 13.9 (ऐच्छिक)*

**1.** एक लकड़ी के बुकशैल्फ (book-shelf) की बाहरी विमाएँ निम्न हैं:
ऊँचाई = 110 cm, गहराई = 25 cm, चौड़ाई = 85 cm (देखिए आकृति 13.31)। प्रत्येक स्थान पर तख्तों की मोटाई 5 cm है। इसके बाहरी फलकों पर पालिश कराई जाती है और आंतरिक फलकों पर पेंट किया जाना है। यदि पालिश कराने की दर 20 पैसे प्रति $cm^2$ है और पेंट कराने की दर 10 पैसे प्रति cm है, तो इस बुक-शैल्फ पर पालिश और पेंट कराने का कुल व्यय ज्ञात कीजिए।



आकृति 13.31

**2.** किसी घर के कंपाउंड की सामने की दीवार को 21 cm व्यास वाले लकड़ी के गोलों को छोटे आधारों पर टिका कर सजाया जाता है, जैसा कि आकृति 13.32 में दिखाया गया है। इस प्रकार के आठगोलों का प्रयोग इस कार्य के लिए किया जाना है


आकृति 13.32

*यह प्रश्नावली परीक्षा की दृष्टि से नहीं दी गई है।

और इन गोलों को चाँदी वाले रंग में पेंट करवाना है। प्रत्येक आधार 1.5 cm त्रिज्या और ऊँचाई 7 cm का एक बेलन है तथा इन्हें काले रंग से पेंट करवाना है। यदि चाँदी के रंग का पेंट करवाने की दर 25 पैसे प्रति $cm^2$ है तथा काले रंग के पेंट करवाने की दर 5 पैसे प्रति $cm^2$ हो, तो पेंट करवाने का कुल व्यय ज्ञात कीजिए।

3. एक गोले के व्यास में 25% की कमी हो जाती है। उसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल कितने प्रतिशत कम हो गया है?

## 13.10 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. **घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= 2\,(lb + bh + hl)$
2. **घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= 6a^2$
3. **बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= 2\pi rh$
4. **बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= 2\pi r\,(r + h)$
5. **शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= \pi rl$
6. **शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= \pi rl + \pi r^2$, **अर्थात्** $\pi r\,(l + r)$
7. **गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= 4\,\pi\, r^2$
8. **अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= 2\pi r^2$
9. **अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= 3\pi r^2$
10. **घनाभ का आयतन** $= l \times b \times h$
11. **घन का आयतन** $= a^3$
12. **बेलन का आयतन** $= \pi r^2 h$
13. **शंकु का आयतन** $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$
14. **गोले का आयतन** $= \frac{4}{3}\pi r^3$
15. **अर्धगोले का आयतन** $= \frac{2}{3}\pi r^3$

[यहाँ अक्षरों $l, b, h, a, r$, इत्यादि का प्रयोग, अपने संदर्भ के अनुसार, सामान्य अर्थों में प्रयोग किया गया है।]

अध्याय 14

# सांख्यिकी

## 14.1 भूमिका

प्रतिदिन हमें तथ्यों, संख्यात्मक अंकों, सारणियों, आलेखों (ग्राफों) आदि के रूप में विभिन्न प्रकार की सूचनाएँ देखने को मिलती रहती हैं। ये सूचनाएँ हमें समाचार पत्रों, टेलीविजनों, पत्रिकाओं और संचार के अन्य साधनों से उपलब्ध होती रहती हैं। ये सूचनाएँ क्रिकेट की बल्लेबाजी या गेंदबाजी के औसतों, कंपनी के लाभों, नगरों के तापमान, पंचवर्षीय योजना के विभिन्न क्षेत्र एवं मदों में किए गए खर्चों, मतदान के परिणामों आदि से संबंधित हो सकते हैं। एक निश्चित उद्देश्य से एकत्रित किए गए इन तथ्यों या अंकों को, जो संख्यात्मक या अन्य रूप में हो सकते हैं, *आंकड़े* (data) कहा जाता है। अंग्रेजी शब्द "data" लैटिन शब्द *datum* का बहुवचन है। हाँ, यह बात अवश्य है कि आपके लिए 'आंकड़ा' एक नया शब्द नहीं है। पिछली कक्षाओं में आप आंकड़ों और आंकड़ों के प्रबंधन के बारे में पढ़ चुके हैं।

आज हमारी दुनिया अधिक से अधिक सूचना-अभिविन्यास होती जा रही है। हम जीवन पर्यंत किसी न किसी रूप में आंकड़ों का प्रयोग करते रहते हैं। अत: हमारे लिए यह आवश्यक हो जाता है कि इन आंकड़ों से हम अपनी इच्छानुसार अर्थपूर्ण सूचनाएँ उपलब्ध करना जान जाएँ। अर्थपूर्ण सूचनाएँ उपलब्ध करने से संबंधित अध्ययन गणित की एक शाखा में किया जाता है जिसे *सांख्यिकी* (*statistics*) कहा जाता है।

ऐसा प्रतीत होता है कि सांख्यिकी के अंग्रेजी शब्द "statistics" की व्युत्पत्ति लैटिन शब्द "status", जिसका अर्थ एक (राजनैतिक) राज्य है, से हुई है। अपने मूल रूप में सांख्यिकी लोगों के जीवन के विभिन्न पहलुओं से संबंधित उन आंकड़ों का ही संग्रह होता था जो राज्य के लिए उपयोगी होते थे। समय के साथ-साथ इसका कार्य क्षेत्र बढ़ता चला गया और सांख्यिकी का संबंध केवल आंकड़ों के संग्रह और प्रस्तुतिकरण से ही नहीं रह गया है, अपितु

इसका संबंध आंकड़ों से अनुमिति (inference) निकालने और उनका निर्वचन (interpretation) करने से भी हो गया। सांख्यिकी में आंकड़ों के संग्रह करने, व्यवस्थित करने, विश्लेषण करने और निर्वचन करने के बारे में अध्ययन किया जाता है। भिन्न-भिन्न संदर्भों में शब्द 'statistics' का अर्थ भिन्न-भिन्न होता है। आइए हम इस संबंध में निम्नलिखित वाक्यों पर ध्यान दें :

1. क्या मुझे 'भारत के शैक्षिक आंकड़ों' की एक नवीनतम संस्करण की प्रति मिल सकती है।
2. मैं 'सांख्यिकी' का अध्ययन करना चाहता हूँ, क्योंकि इसका प्रयोग दैनिक जीवन में व्यापक रूप से होता रहता है।

ऊपर दिए गए पहले वाक्य में आंकड़ों (statistics) का प्रयोग बहुवचन में किया गया है, जिसका अर्थ है संख्यात्मक आंकड़े। इसके अंतर्गत भारत की विभिन्न शैक्षिक संस्थाएँ, विभिन्न राज्यों की साक्षरता-दर, आदि हो सकती हैं। दूसरे वाक्य में, शब्द सांख्यिकी (statistics) का प्रयोग एकवचन में किया गया है, जिसका अर्थ वह विषय है जिसमें आंकड़ों के संग्रह, प्रस्तुतिकरण, विश्लेषण का अध्ययन करने के साथ-साथ आंकड़ों से अर्थपूर्ण निष्कर्ष निकालने के बारे में भी अध्ययन किया जाता है।

इस अध्याय में हम आंकड़ों से संबंधित इन सभी पहलुओं पर संक्षेप में चर्चा करेंगे।

## 14.2 आंकड़ों का संग्रह

आइए हम निम्नलिखित क्रियाकलाप करके आंकड़ों को एकत्रित करने का कार्य प्रारम्भ करें।

**क्रियाकलाप 1 :** अपनी कक्षा के विद्यार्थियों को चार समूहों में बाँट दीजिए। प्रत्येक समूह को निम्न प्रकार के आंकड़ों में से एक प्रकार के आंकड़ों को संग्रह करने का काम दे दीजिए।

(i) अपनी कक्षा के 20 विद्यार्थियों की लंबाई।

(ii) अपनी कक्षा में किसी एक महीने के प्रत्येक दिन अनुपस्थित रहे विद्यार्थियों की संख्या।

(iii) आपके कक्षा मित्रों के परिवारों के सदस्यों की संख्या।

(iv) आपके विद्यालय में या उसके आस-पास के 15 पौधों की लंबाइयाँ।

आइए अब हम विद्यार्थियों द्वारा एकत्रित किए गए परिणामों को देखें। प्रत्येक समूह ने आंकड़ों का संग्रह किस प्रकार किया है?

(i) क्या सूचनाएँ एकत्रित करने के लिए उन्होंने संबंधित प्रत्येक विद्यार्थी, मकान या व्यक्ति से सूचनाएँ एकत्रित की हैं?

(ii) क्या उन्होंने विद्यालय में उपलब्ध रिकार्ड जैसे कुछ स्रोतों से सूचनाएँ एकत्रित की हैं?

पहली स्थिति में स्वयं अंवेषक ने अपने दिमाग में एक निश्चित उद्देश्य रखकर सूचनाओं को एकत्रित किया है। इस प्रकार एकत्रित किए गए आंकड़ों को *प्राथमिक आंकड़े* (*primary data*) कहा जाता है।

दूसरी स्थिति में, जहाँ किसी स्रोत से, जिसमें सूचनाएँ पहले से ही एकत्रित हैं, आंकड़े प्राप्त किए गए हों उन आंकड़ों को *गौण आंकड़े* (*secondary data*) कहा जाता है। इस प्रकार के आंकड़ों का प्रयोग, जिसे किसी और ने इन्हें अन्य संदर्भ में एकत्रित किया है, यह सुनिश्चित करने के बाद ही कि ये स्रोत विश्वसनीय हैं, काफी सावधानी के साथ करना चाहिए।

अभी तक आप यह अवश्य समझ गए होंगे कि आंकड़े किस प्रकार एकत्रित किए जाते हैं और प्राथमिक आंकड़ों और गौण आंकड़ों में क्या अंतर है।



### प्रश्नावली 14.1

1. उन आंकड़ों के पाँच उदाहरण दीजिए जिन्हें आप अपने दैनिक जीवन से एकत्रित कर सकते हैं।
2. ऊपर दिए गए प्रश्न 1 के आंकड़ों को प्राथमिक आंकड़ों या गौण आंकड़ों में वर्गीकृत कीजिए।

## 14.3 आंकड़ों का प्रस्तुतिकरण

आंकड़ों को एकत्रित करने का काम समाप्त होने के उपरांत ही अंवेषक को इन आंकड़ों को ऐसे रूप में प्रस्तुत करने की विधियों को ज्ञात करना होता है जो अर्थपूर्ण हो, सरलता से समझी जा सकती हों और एक ही झलक में उसके मुख्य लक्षणों को जाना जा सकता हो। आइए अब हम कुछ उदाहरण लेकर आंकड़ों को प्रस्तुत करने की विभिन्न विधियों पर पुनः विचार करें।

**उदाहरण 1 :** गणित की परीक्षा में 10 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए गए अंक लीजिए :

55 36 95 73 60 42 25 78 75 62

इस रूप में प्रस्तुत किए गए आंकड़ों को *यथाप्राप्त आंकड़े* (*raw data*) कहा जाता है।

क्या इस रूप में इसे देखकर आप अधिकतम और न्यूनतम अंक ज्ञात कर सकते हैं? क्या अधिकतम प्राप्तांक और न्यूनतम प्राप्तांक ज्ञात करने में आपको कुछ समय लगा है? यदि इन प्राप्तांकों को आरोही (ascending) या अवरोही (descending) क्रम में रखा जाए, तो अधिकतम अंक और न्यूनतम अंक ज्ञात करने में काफी कम समय लगेगा? अतः आइए हम प्राप्तांकों को आरोही क्रम में इस प्रकार रखें:

25 36 42 55 60 62 73 75 78 95

इस प्रकार हम स्पष्टतया देख सकते हैं कि न्यूनतम प्राप्तांक 25 और अधिकतम प्राप्तांक 95 हैं। आंकड़ों के अधिकतम और न्यूनतम मानों के अंतर को आंकड़ों का *परिसर* (*range*) कहा जाता है। अत: यहाँ पर परिसर 95 – 25 = 70 है।

आंकड़ों को आरोही क्रम या अवरोही क्रम में लिखने पर काफी समय लग सकता है, विशेष रूप से तब, जबकि प्रयोग में प्रेक्षणों की संख्या अधिक हो, जैसा कि अगले उदाहरण में आप देख सकते हैं।

**उदाहरण 2 :** एक विद्यालय की नवीं कक्षा के 30 विद्यार्थियों द्वारा (100 अंकों में से) प्राप्त किए गए अंक लीजिए:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 20 | 36 | 92 | 95 | 40 | 50 | 56 | 60 | 70 |
| 92 | 88 | 80 | 70 | 72 | 70 | 36 | 40 | 36 | 40 |
| 92 | 40 | 50 | 50 | 56 | 60 | 70 | 60 | 60 | 88 |

आपको याद होगा कि एक निश्चित अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या को इस अंक की *बारंबारता* (*frequency*) कहा जाता है। उदाहरण के लिए, यहाँ 4 विद्यार्थियों ने 70 अंक प्राप्त किए हैं। अत: 70 अंक की बारंबारता 4 है। आंकड़ों को और अधिक सरल रूप में समझने के लिए इन्हें हम एक सारणी के रूप में लिखते हैं, जैसा कि नीचे दिया गया है:



**सारणी 14.1**

| अंक | विद्यार्थियों की संख्या (अर्थात् बारंबारता) |
|---|---|
| 10 | 1 |
| 20 | 1 |
| 36 | 3 |
| 40 | 4 |
| 50 | 3 |
| 56 | 2 |
| 60 | 4 |
| 70 | 4 |
| 72 | 1 |
| 80 | 1 |
| 88 | 2 |
| 92 | 3 |
| 95 | 1 |
| **कुल योग** | 30 |

सारणी 14.1 को *अवर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी* (*ungrouped frequency distribution table*) या केवल *बारंबारता बंटन सारणी* (*frequency distribution table*) कहा जाता है। ध्यान दीजिए कि इन सारणियों को बनाने में आप *मिलान चिह्नों* (*tally marks*) का प्रयोग कर सकते हैं, जैसा कि अगले उदाहरण में दिखाया गया है।

**उदाहरण 3 :** वन महोत्सव के दौरान 100 विद्यालयों में से प्रत्येक विद्यालय में 100 पौधे लगाए गए। एक महीने बाद लगाए गए पौधों में से बच गए पौधों की संख्याएँ निम्न थीं:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 95 | 67 | 28 | 32 | 65 | 65 | 69 | 33 | 98 | 96 |
| 76 | 42 | 32 | 38 | 42 | 40 | 40 | 69 | 95 | 92 |
| 75 | 83 | 76 | 83 | 85 | 62 | 37 | 65 | 63 | 42 |
| 89 | 65 | 73 | 81 | 49 | 52 | 64 | 76 | 83 | 92 |
| 93 | 68 | 52 | 79 | 81 | 83 | 59 | 82 | 75 | 82 |
| 86 | 90 | 44 | 62 | 31 | 36 | 38 | 42 | 39 | 83 |
| 87 | 56 | 58 | 23 | 35 | 76 | 83 | 85 | 30 | 68 |
| 69 | 83 | 86 | 43 | 45 | 39 | 83 | 75 | 66 | 83 |
| 92 | 75 | 89 | 66 | 91 | 27 | 88 | 89 | 93 | 42 |
| 53 | 69 | 90 | 55 | 66 | 49 | 52 | 83 | 34 | 36 |

इतनी बड़ी संख्या में आंकड़ों को इस प्रकार प्रस्तुत करने के लिए कि पाठक इसका सरलता से अर्थ निकाल सकें, हम इन आंकड़ों को 20-29, 30-39, . . ., 90-99 जैसे समूहों में रखकर इन्हें छोटा कर लेते हैं (क्योंकि हमारे आंकड़े 23 से 98 के बीच हैं)। इन समूहों को '*वर्ग*' (*classes*) या '*वर्ग अंतराल*' (*class intervals*) कहा जाता है और इनके माप (size) को *वर्ग-माप* (*class size*) या *वर्ग चौड़ाई* (*class width*) कहा जाता है, जो कि यहाँ 10 है। प्रत्येक वर्ग की निम्नतम संख्या को *निम्न वर्ग सीमा* (*lower class limit*) और अधिकतम संख्या को *उपरि वर्ग सीमा* (*upper class limit*) कहा जाता है। जैसे, वर्ग 20-29 में 20 निम्न वर्ग सीमा है और 29 उपरि वर्ग सीमा है।

साथ ही, आप यह भी जानते हैं कि मिलान चिह्नों का प्रयोग करके ऊपर दिए गए आंकड़ों को सारणी रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है, जैसा कि सारिणी 14.2 में दिखाया गया है।

सारणी 14.2

| बचे हुए पौधों की संख्या | मिलान चिह्न | विद्यालयों की संख्या (बारंबारता) |
|---|---|---|
| 20 - 29 | ||| | 3 |
| 30 - 39 | 𝍸 𝍸 |||| | 14 |
| 40 - 49 | 𝍸 𝍸 || | 12 |
| 50 - 59 | 𝍸 ||| | 8 |
| 60 - 69 | 𝍸 𝍸 𝍸 ||| | 18 |
| 70 - 79 | 𝍸 𝍸 | 10 |
| 80 - 89 | 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||| | 23 |
| 90 - 99 | 𝍸 𝍸 || | 12 |
| कुल योग | | 100 |



आंकड़ों को इस रूप में प्रस्तुत करने से आंकड़े सरल और छोटे रूप में हो जाते हैं और हम एक ही दृष्टि में उनके मुख्य लक्षणों को देख सकते हैं। इस प्रकार की सारणी को *वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी* (*grouped frequency distribution table*) कहा जाता है। यहाँ हम यह सरलता से देख सकते हैं कि 8 + 18 + 10 + 23 + 12 = 71 विद्यालयों में 50% या इससे अधिक पौधे बच गए हैं।

यहाँ हम यह देखते हैं कि ऊपर की सारणी में वर्ग अनतिव्यापी (non-overlapping) हैं। ध्यान दीजिए कि यहाँ हम छोटे माप लेकर अधिक संख्या में वर्ग ले सकते थे या बड़े माप लेकर कम संख्या में वर्ग ले सकते थे। उदाहरण के लिए, अंतराल 22-26, 27-31, आदि हो सकते थे। इस कार्य के लिए कोई विशेष नियम नहीं है। नियम केवल यही है कि वर्ग अतिव्यापी (overlapping) नहीं होने चाहिए।

**उदाहरण 4 :** आइए अब हम निम्नलिखित बारंबारता बंटन सारणी लें, जिसमें एक कक्षा के 38 विद्यार्थियों के भार दिए गए हैं:

सारणी 14.3

| भार (kg में) | विद्यार्थियों की संख्या |
|---|---|
| 31 - 35 | 9 |
| 36 - 40 | 5 |
| 41 - 45 | 14 |
| 46 - 50 | 3 |
| 51 - 55 | 1 |
| 56 - 60 | 2 |
| 61 - 65 | 2 |
| 66 - 70 | 1 |
| 71 - 75 | 1 |
| **कुल योग** | 38 |



अब, यदि 35.5 kg और 40.5 kg के भार वाले दो और विद्यार्थी इस कक्षा में आ जाएँ, तो उन्हें किस वर्ग अंतराल में रखा जाएगा? उन्हें न तो हम उन अंतरालों में रख सकते हैं जिनकी अंतिम संख्या 35 या 40 हैं और न ही इन्हें हम उन अंतरालों में रख सकते हैं जो इनके बाद आते हैं। ऐसा इसलिए है, क्योंकि दो क्रमागत वर्गों (consecutive classes) की उपरि और निम्न सीमाओं के बीच रिक्त स्थान है। अतः इस स्थिति में हमें अंतरालों को विभक्त करना होता है, जिससे कि क्रमागत अंतरालों की उपरि और निम्न सीमाएँ समान हो जाएँ। इसके लिए हमें एक वर्ग की उपरि सीमा और उसके बाद के वर्ग की निम्न सीमा के बीच का अंतर ज्ञात करना होता है। तब हम इस अंतर के आधे भाग को प्रत्येक उपरि सीमा में जोड़ देते हैं और इसी राशि को प्रत्येक निम्न सीमा में से घटा देते हैं।

उदाहरण के लिए, वर्ग 31 - 35 और 36 - 40 लीजिए।

36 - 40 की निम्न सीमा = 36

31 - 35 की उपरि सीमा = 35

अंतर = 36 – 35 = 1

अतः, अंतर का आधा = $\frac{1}{2} = 0.5$

इस प्रकार, वर्ग 31 – 35 से बना नया वर्ग अंतराल $(31 - 0.5) - (35 + 0.5) = 30.5 - 35.5$ है।

इसी प्रकार, 36 – 40 से बना नया वर्ग अंतराल

= (36 – 0.5) - (40 + 0.5)

= 35.5 - 40.5

इस प्रक्रिया को आगे बढ़ाने पर निम्नलिखित संतत वर्ग (continuous classes) प्राप्त होते हैं:

30.5-35.5, 35.5-40.5, 40.5-45.5, 45.5-50.5, 50.5-55.5, 55.5-60.5, 60.5 - 65.5, 65.5 - 70.5, 70.5 - 75.5

अब हम इन वर्गों में नए विद्यार्थियों के भार सम्मिलित कर सकते हैं। परन्तु, ऐसा करने से एक और समस्या आती है। वह यह है कि 35.5 दोनों ही वर्गों 30.5−35.5 और 35.5−40.5 में है। वह यह है कि आपके विचार से इस भार को किस वर्ग में रखना चाहिए?

यदि इसे दोनों वर्गों में रखा जाए, तो इसकी गिनती दो बार करनी होगी।

अत: परंपरा के अनुसार, हम 35.5 को वर्ग 35.5−40.5 में रखते हैं न कि वर्ग 30.5−35.5 में। इसी प्रकार, 40.5 को वर्ग 40.5−45.5 में रखा जाता है न कि वर्ग 35.5−40.5 में।

अत:, नए भार 35.5 kg और 40.5 kg को क्रमश: 35.5−40.5 और 40.5−45.5 में सम्मिलित किया जाएगा। अब इन कल्पनाओं को ध्यान में रखने पर एक नई बारंबारता बंटन सारणी प्राप्त होगी, जैसा कि नीचे दिखाई गई है :

सारणी 14.4

| भार (kg में) | विद्यार्थियों की संख्या |
|---|---|
| 30.5-35.5 | 9 |
| 35.5-40.5 | 6 |
| 40.5-45.5 | 15 |
| 45.5-50.5 | 3 |
| 50.5-55.5 | 1 |
| 55.5-60.5 | 2 |
| 60.5-65.5 | 2 |
| 65.5-70.5 | 1 |
| 70.5-75.5 | 1 |
| **कुल योग** | 40 |

आइए अब हम क्रियाकलाप 1 में आपके द्वारा एकत्रित किए गए आंकड़ों को लें। इस बार हम चाहेंगे कि आप इन आंकड़ों को एक बारंबारता बंटन सारणी के रूप में प्रस्तुत करें।

**क्रियाकलाप 2 :** उन्हीं चार समूहों को लेकर आप अपने आंकड़ों को बारंबारता बंटन सारणियों में परिवर्तित करें। आंकड़ों के परिसर और आंकड़ों के प्रकार को ध्यान में रखकर उपयुक्त वर्ग-माप वाले सुविधाजनक वर्ग लीजिए।

## प्रश्नावली 14.2

**1.** आठवीं कक्षा के 30 विद्यार्थियों के रक्त समूह ये हैं:

A, B, O, O, AB, O, A, O, B, A, O, B, A, O, O,
A, AB, O, A, A, O, O, AB, B, A, O, B, A, B, O

इन आंकड़ों को एक बारंबारता बंटन सारणी के रूप में प्रस्तुत कीजिए। बताइए कि इन विद्यार्थियों में कौन-सा रक्त समूह अधिक सामान्य है और कौन-सा रक्त समूह विरलतम रक्त समूह है।

**2.** 40 इंजीनियरों की उनके आवास से कार्य-स्थल की (किलोमीटर में) दूरियाँ ये हैं:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 3 | 10 | 20 | 25 | 11 | 13 | 7 | 12 | 31 |
| 19 | 10 | 12 | 17 | 18 | 11 | 32 | 17 | 16 | 2 |
| 7 | 9 | 7 | 8 | 3 | 5 | 12 | 15 | 18 | 3 |
| 12 | 14 | 2 | 9 | 6 | 15 | 15 | 7 | 6 | 12 |

0-5 को (जिसमें 5 सम्मिलित नहीं है) पहला अंतराल लेकर ऊपर दिए हुए आंकड़ों से वर्ग-माप 5 वाली एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी बनाइए। इस सारणी बद्ध निरूपण में आपको कौन-से मुख्य लक्षण देखने को मिलते हैं?

**3.** 30 दिन वाले महीने में एक नगर की सापेक्ष आर्द्रता (%में) यह रही है:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 98.1 | 98.6 | 99.2 | 90.3 | 86.5 | 95.3 | 92.9 | 96.3 | 94.2 | 95.1 |
| 89.2 | 92.3 | 97.1 | 93.5 | 92.7 | 95.1 | 97.2 | 93.3 | 95.2 | 97.3 |
| 96.2 | 92.1 | 84.9 | 90.2 | 95.7 | 98.3 | 97.3 | 96.1 | 92.1 | 89 |

(i) वर्ग 84-86, 86-88 आदि लेकर एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन बनाइए।

(ii) क्या आप बता सकते हैं कि ये आंकड़े किस महीने या ऋतु से संबंधित हैं?

(iii) इन आंकड़ों का परिसर क्या है?

**4.** निकटतम सेंटीमीटरों में मापी गई 50 विद्यार्थियों की लंबाइयाँ ये हैं:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 161 | 150 | 154 | 165 | 168 | 161 | 154 | 162 | 150 | 151 |
| 162 | 164 | 171 | 165 | 158 | 154 | 156 | 172 | 160 | 170 |
| 153 | 159 | 161 | 170 | 162 | 165 | 166 | 168 | 165 | 164 |
| 154 | 152 | 153 | 156 | 158 | 162 | 160 | 161 | 173 | 166 |
| 161 | 159 | 162 | 167 | 168 | 159 | 158 | 153 | 154 | 159 |

(i) 160−165, 165−170 आदि का वर्ग अंतराल लेकर ऊपर दिए गए आंकड़ों को एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी के रूप में निरूपित कीजिए।

(ii) इस सारणी की सहायता से आप विद्यार्थियों की लंबाइयों के संबंध में क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

**5.** एक नगर में वायु में सल्फर डाई-ऑक्साइड का सांद्रण भाग प्रति मिलियन [parts per million (ppm)] में ज्ञात करने के लिए एक अध्ययन किया गया। 30 दिनों के प्राप्त किए गए आंकड़े ये हैं:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.03 | 0.08 | 0.08 | 0.09 | 0.04 | 0.17 |
| 0.16 | 0.05 | 0.02 | 0.06 | 0.18 | 0.20 |
| 0.11 | 0.08 | 0.12 | 0.13 | 0.22 | 0.07 |
| 0.08 | 0.01 | 0.10 | 0.06 | 0.09 | 0.18 |
| 0.11 | 0.07 | 0.05 | 0.07 | 0.01 | 0.04 |

(i) 0.00−0.04, 0.04−0.08 आदि का वर्ग अंतराल लेकर इन आंकड़ों की एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।

(ii) सल्फर डाई-ऑक्साइड की सांद्रता कितने दिन 0.11 भाग प्रति मिलियन से अधिक रही?

**6.** तीन सिक्कों को एक साथ 30 बार उछाला गया। प्रत्येक बार चित (Head) आने की संख्या निम्न है :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 0 |
| 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 0 |

ऊपर दिए गए आंकड़ों के लिए एक बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।

**7.** 50 दशमलव स्थान तक शुद्ध $\pi$ का मान नीचे दिया गया है :

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510

(i) दशमलव बिंदु के बाद आने वाले 0 से 9 तक के अंकों का एक बारंबारता बंटन बनाइए।

(ii) सबसे अधिक बार और सबसे कम बार आने वाले अंक कौन-कौन से हैं?

**8.** तीस बच्चों से यह पूछा गया कि पिछले सप्ताह उन्होंने कितने घंटों तक टी.वी. के प्रोग्राम देखे। प्राप्त परिणाम ये रहे हैं :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 2 | 3 | 5 | 12 | 5 | 8 | 4 | 8 |
| 10 | 3 | 4 | 12 | 2 | 8 | 15 | 1 | 17 | 6 |
| 3 | 2 | 8 | 5 | 9 | 6 | 8 | 7 | 14 | 12 |

(i) वर्ग-चौड़ाई 5 लेकर और एक वर्ग अंतराल को 5-10 लेकर इन आंकड़ों की एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।

(ii) कितने बच्चों ने सप्ताह में 15 या अधिक घंटों तक टेलीविजन देखा?

**9.** एक कंपनी एक विशेष प्रकार की कार-बैट्री बनाती है। इस प्रकार की 40 बैट्रियों के जीवन-काल (वर्षों में) ये रहे हैं :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.6 | 3.0 | 3.7 | 3.2 | 2.2 | 4.1 | 3.5 | 4.5 |
| 3.5 | 2.3 | 3.2 | 3.4 | 3.8 | 3.2 | 4.6 | 3.7 |
| 2.5 | 4.4 | 3.4 | 3.3 | 2.9 | 3.0 | 4.3 | 2.8 |
| 3.5 | 3.2 | 3.9 | 3.2 | 3.2 | 3.1 | 3.7 | 3.4 |
| 4.6 | 3.8 | 3.2 | 2.6 | 3.5 | 4.2 | 2.9 | 3.6 |

0.5 माप के वर्ग अंतराल लेकर तथा अंतराल 2-2.5 से प्रारंभ करके इन आंकड़ों की एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।

## 14.4 आंकड़ों का आलेखीय निरुपण

सारणियों से आंकड़ों का निरूपण करने के बारे में हम चर्चा कर चुके हैं। आइए अब हम आंकड़ों के अन्य निरूपण, अर्थात् आलेखीय निरूपण (graphical representation) की ओर अपना ध्यान केंद्रित करें। इस संबंध में एक कहावत यह रही है कि एक चित्र हजार शब्द से भी उत्तम होता है। प्राय: अलग-अलग मदों की तुलनाओं को आलेखों (graphs) की सहायता से अच्छी तरह से दर्शाया जाता है। तब वास्तविक आंकड़ों की तुलना में इस निरूपण को समझना अधिक सरल हो जाता है। इस अनुच्छेद में, हम निम्नलिखित आलेखीय निरूपणों का अध्ययन करेंगे।

(A) दंड आलेख (Bar Graph)

(B) एकसमान चौड़ाई और परिवर्ती चौड़ाइयों वाले आयतचित्र (Histograms)

(C) बारंबारता बहुभुज (Frequency Polygons)

### (A) दंड आलेख

पिछली कक्षाओं में, आप दंड आलेख का अध्ययन कर चुके हैं और उन्हें बना भी चुके हैं। यहाँ हम कुछ अधिक औपचारिक दृष्टिकोण से इन पर चर्चा करेंगे। आपको याद होगा कि दंड आलेख आंकड़ों का एक चित्रीय निरूपण होता है जिसमें प्राय: एक अक्ष (मान लीजिए $x$-अक्ष) पर एक चर को प्रकट करने वाले एक समान चौड़ाई के दंड खींचे जाते हैं जिनके बीच में बराबर–बराबर दूरियाँ छोड़ी जाती हैं। चर के मान दूसरे अक्ष (मान लीजिए $y$-अक्ष) पर दिखाए जाते हैं और दंडों की ऊँचाइयाँ चर के मानों पर निर्भर करती हैं।

**उदाहरण 5 :** नवीं कक्षा के 40 विद्यार्थियों से उनके जन्म का महीना बताने के लिए कहा गया। इस प्रकार प्राप्त आंकड़ों से निम्नलिखित आलेख बनाया गया:


आकृति 14.1

ऊपर दिए गए आलेख को देखकर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) नवंबर के महीने में कितने विद्यार्थियों का जन्म हुआ?

(ii) किस महीने में सबसे अधिक विद्यार्थियों का जन्म हुआ?

**हल :** ध्यान दीजिए कि यहाँ चर 'जन्म दिन का महीना' है और चर का मान 'जन्म लेने वाले विद्यार्थियों की संख्या' है।

(i) नवंबर के महीने में 4 विद्यार्थियों का जन्म हुआ।

(ii) अगस्त के महीने में सबसे अधिक विद्यार्थियों का जन्म हुआ।

आइए अब हम निम्नलिखित उदाहरण लेकर इनका पुनर्विलोकन करें कि एक दंड आलेख किस प्रकार बनाया जाता है।

**उदाहरण 6 :** एक परिवार ने जिसकी मासिक आय ₹ 20000 है, विभिन्न मदों के अंतर्गत हर महीने होने वाले खर्च की योजना बनाई थी:

**सारणी 14.5**

| मद | खर्च (हजार रुपयों में) |
|---|---|
| ग्रॉसरी (परचून का सामान) | 4 |
| किराया | 5 |
| बच्चों की शिक्षा | 5 |
| दवाइयाँ | 2 |
| ईंधन | 2 |
| मनोरंजन | 1 |
| विविध | 1 |



ऊपर दिए गए आंकड़ों का एक दंड आलेख बनाइए।

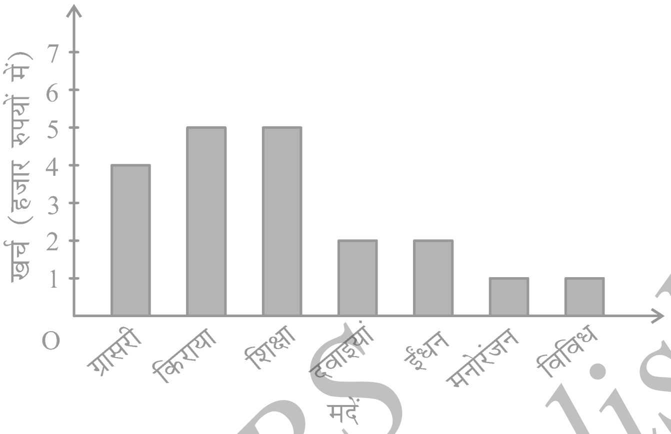
**हल :** हम इन आंकड़ों का दंड आलेख निम्नलिखित चरणों में बनाते हैं। ध्यान दीजिए कि दूसरे स्तंभ में दिया गया मात्रक (unit) 'हजार रुपयों में' है। अत:, ग्रॉसरी (परचून का सामान) के सामने लिखा अंक 4 का अर्थ ₹ 4000 है।

1. कोई भी पैमाना (scale) लेकर हम क्षैतिज अक्ष पर मदों (चर) को निरूपित करते हैं, क्योंकि यहाँ दंड की चौड़ाई का कोई महत्व नहीं होता। परन्तु स्पष्टता के लिए हम सभी दंड समान चौड़ाई के लेते हैं और उनके बीच समान दूरी बनाए रखते हैं। मान लीजिए एक मद को एक सेंटीमीटर से निरूपित किया गया है।

2. हम खर्च (मूल्य) को ऊर्ध्वाधर अक्ष पर निरूपित करते हैं। क्योंकि अधिकतम खर्च ₹ 5000 है, इसलिए हम पैमाना 1 मात्रक = ₹ 1000 ले सकते हैं।

3. अपने पहले मद अर्थात् ग्रॉसरी को निरूपित करने के लिए, हम 1 मात्रक की चौड़ाई 4 मात्रक की ऊँचाई वाला एक आयताकार दंड बनाते हैं।

4. इसी प्रकार, दो क्रमागत दंडों के बीच 1 मात्रक का खाली स्थान छोड़कर अन्य मदों को निरूपित किया जाता है (देखिये आकृति 14.2)।




आकृति 14.2

यहाँ आप एक दृष्टि में ही आंकड़ों के सापेक्ष अभिलक्षणों को सरलता से देख सकते हैं। उदाहरण के लिए, आप यह सरलता से देख सकते हैं कि ग्रॉसरी पर किया गया खर्च दवाइयों पर किए गए खर्च का दो गुना है। अतः, कुछ अर्थों में सारणी रूप की अपेक्षा यह आंकड़ों का एक उत्तम निरूपण है।

**क्रियाकलाप 3 :** क्रियाकलाप 1 के चार समूहों द्वारा प्राप्त आंकड़ों को उपयुक्त दंड आलेखों से निरूपित कीजिए।

आइए अब हम देखें कि किस प्रकार संतत वर्ग अंतरालों की बारंबारता बंटन सारणी को आलेखीय रूप में निरूपित किया जाता है।

### (B) आयतचित्र

यह संतत वर्ग अंतरालों के लिए प्रयुक्त दंड आलेख की भाँति निरूपण का एक रूप है। उदाहरण के लिए, बारंबारता बंटन सारणी 14.6 लीजिए, जिसमें एक कक्षा के 36 विद्यार्थियों के भार दिए गए हैं:

**सारणी 14.6**

| भार (kg में) | विद्यार्थियों की संख्या |
|---|---|
| 30.5 - 35.5 | 9 |
| 35.5 - 40.5 | 6 |
| 40.5 - 45.5 | 15 |
| 45.5 - 50.5 | 3 |
| 50.5 - 55.5 | 1 |
| 55.5 - 60.5 | 2 |
| **कुल योग** | 36 |

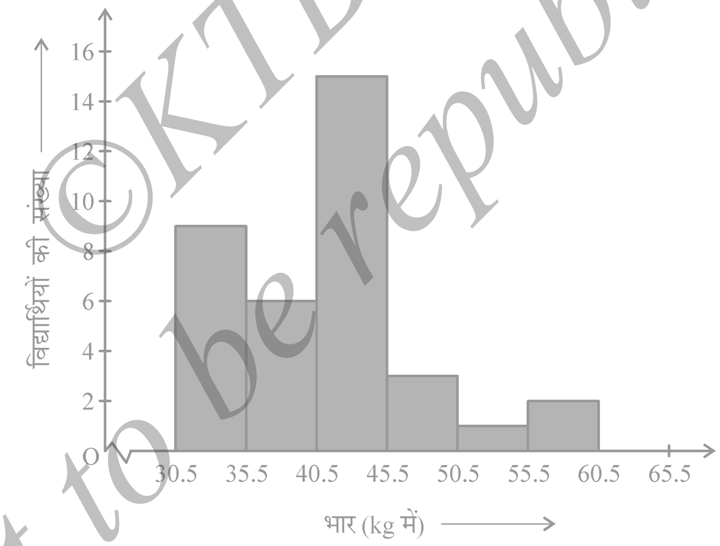
आइए हम ऊपर दिए गए आंकड़ों को आलेखीय रूप में इस प्रकार निरूपित करें:

(i) हम एक उपयुक्त पैमाना लेकर भार को क्षैतिज अक्ष पर निरूपित करें। हम पैमाना 1 सेंटीमीटर = 5 kg ले सकते हैं। साथ ही, क्योंकि पहला वर्ग अंतराल 30.5 से प्रारंभ हो रहा है न कि शून्य से, इसलिए एक निकुंच (kink) का चिह्न बनाकर या अक्ष में एक विच्छेद दिखा कर, इसे हम आलेख पर दर्शा सकते हैं।

(ii) हम एक उपयुक्त पैमाने के अनुसार विद्यार्थियों की संख्या (बारंबारता) को ऊर्ध्वाधर अक्ष पर निरूपित करते हैं। साथ ही, क्योंकि अधिकतम बारंबारता 15 है, इसलिए हमें एक ऐसे पैमाने का चयन करना होता है जिससे कि उसमें यह अधिकतम बारंबारता आ सके।

(iii) अब हम वर्ग अंतराल के अनुसार समान चौड़ाई और संगत वर्ग अंतरालों की बारंबारताओं को लंबाइयाँ मानकर आयत (या आयताकार दंड) बनाते हैं। उदाहरण के लिए, वर्ग अंतराल 30.5-35.5 का आयत 1 सेंटीमीटर की चौड़ाई और 4.5 सेंटीमीटर की लंबाई वाला आयत होगा।

(iv) इस प्रकार हमें जो आलेख प्राप्त होता है, उसे आकृति 14.3 में दिखाया गया है।




**आकृति 14.3**

ध्यान दीजिए कि क्योंकि क्रमागत आयतों के बीच कोई रिक्त स्थान नहीं है, इसलिए परिणामी आलेख एक ठोस आकृति के समान दिखाई पड़ेगा। इस आलेख को *आयतचित्र* (histogram) कहा जाता है, जो कि संतत वर्गों वाले वर्गीकृत बारंबारता बंटन का एक आलेखीय निरूपण होता है। साथ ही, दंड आलेख के विपरीत, इसकी रचना में दंड की चौड़ाई की एक महत्वपूर्ण भूमिका होती है।

वास्तव में, यहाँ खड़े किए गए आयतों के क्षेत्रफल संगत बारंबारताओं के समानुपाती होते हैं। फिर भी, क्योंकि सभी आयतों की चौड़ाईयाँ समान हैं, इसलिए आयतों की लंबाइयाँ बारंबारताओं के समानुपाती होती हैं। यही कारण है कि हम लंबाइयाँ ऊपर (iii) के अनुसार ही लेते हैं।

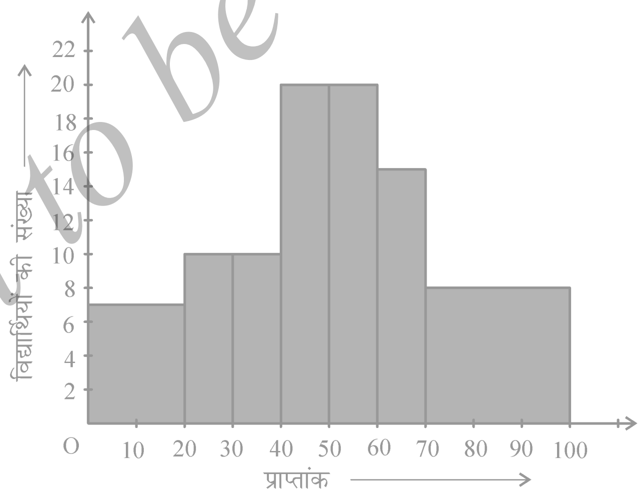
अब, हम पीछे दिखाई गई स्थिति से अलग एक स्थिति लेते हैं।

**उदाहरण 7 :** एक अध्यापिका दो सेक्शनों के विद्यार्थियों के प्रदर्शनों का विश्लेषण 100 अंक की गणित की परीक्षा लेकर करना चाहती है। उनके प्रदर्शनों को देखने पर वह यह पाती है कि केवल कुछ ही विद्यार्थियों के प्राप्तांक 20 से कम है और कुछ विद्यार्थियों के प्राप्तांक 70 या उससे अधिक हैं। अतः, उसने विद्यार्थियों को 0 - 20, 20 - 30, . . ., 60 - 70, 70 - 100 जैसे विभिन्न माप वाले अंतरालों में वर्गीकृत करने का निर्णय लिया। तब उसने निम्नलिखित सारणी बनाई।

**सारणी 14.7**

| अंक | विद्यार्थियों की संख्या |
|---|---|
| 0 - 20 | 7 |
| 20 - 30 | 10 |
| 30 - 40 | 10 |
| 40 - 50 | 20 |
| 50 - 60 | 20 |
| 60 - 70 | 15 |
| 70 - और उससे अधिक | 8 |
| **कुल योग** | 90 |

किसी विद्यार्थी ने इस सारणी का एक आयतचित्र बनाया, जिसे आकृति 14.4 में दिखाया गया है।




**आकृति 14.4**

इस आलेखीय निरूपण की जाँच सावधानी से कीजिए। क्या आप समझते हैं कि यह आलेख आंकड़ों का सही-सही निरूपण करता है? इसका उत्तर है: नहीं। यह आलेख आंकड़ों का

एक गलत चित्र प्रस्तुत कर रहा है। जैसा कि हम पहले बता चुके हैं आयतों के क्षेत्रफल आयतचित्र की बारंबारताओं के समानुपाती होते हैं। पहले इस प्रकार के प्रश्न हमारे सामने नहीं उठे थे, क्योंकि सभी आयतों की चौड़ाइयाँ समान थीं। परन्तु, क्योंकि यहाँ आयतों की चौड़ाइयाँ बदल रही हैं, इसलिए ऊपर दिया गया आयतचित्र आंकड़ों का एक सही-सही चित्र प्रस्तुत नहीं करता। उदाहरण के लिए, यहाँ अंतराल 60–70 की तुलना में अंतराल 70–100 की बारंबारता अधिक है।

अत:, आयतों की लंबाइयों में कुछ परिवर्तन (modifications) करने की आवश्यकता होती है, जिससे कि क्षेत्रफल पुन: बारंबारताओं के समानुपाती हो जाए।

इसके लिए निम्नलिखित चरण लागू करने होते हैं :

1. न्यूनतम वर्ग चौड़ाई वाला एक वर्ग अंतराल लीजिए। ऊपर के उदाहरण में, न्यूनतम वर्ग चौड़ाई 10 है।
2. तब आयतों की लंबाइयों में इस प्रकार परिवर्तन कीजिए जिससे कि वह वर्ग चौड़ाई 10 के समानुपाती हो जाए।

उदाहरण के लिए, जब वर्ग चौड़ाई 20 होती है, तब आयत की लंबाई 7 होती है। अत: जब वर्ग चौड़ाई 10 हो, तो आयत की लंबाई $\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$ होगी।

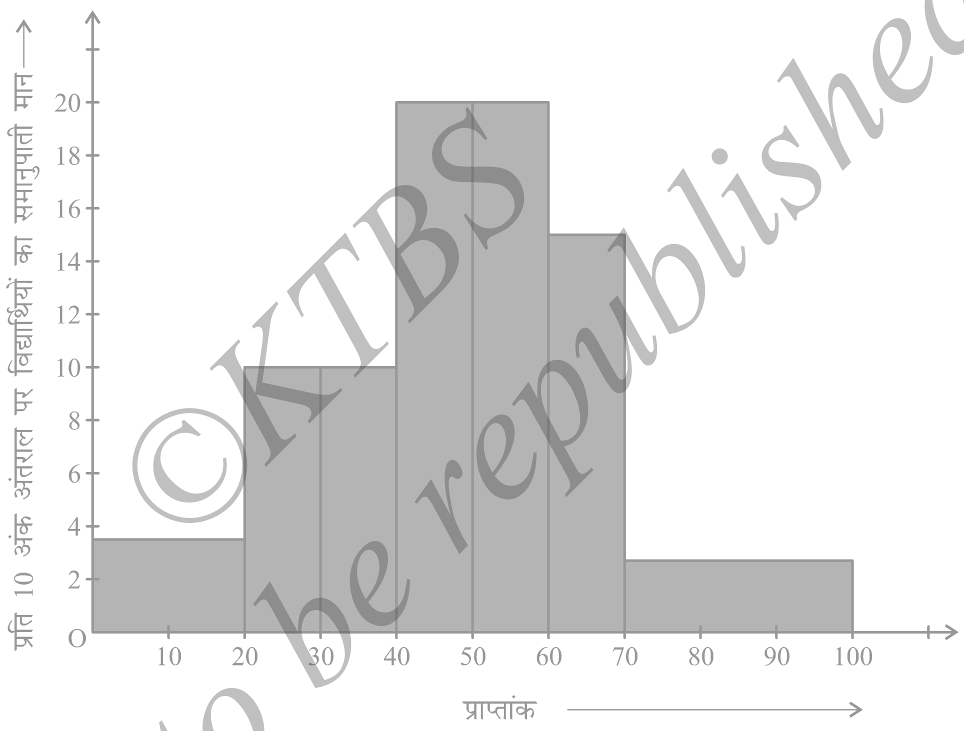
इस प्रक्रिया को लागू करते रहने पर, हमें निम्नलिखित सारणी प्राप्त होती है :

सारणी 14.8

| अंक | बारंबारता | वर्ग की चौड़ाई | आयत की लंबाई |
|---|---|---|---|
| 0 - 20 | 7 | 20 | $\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$ |
| 20 - 30 | 10 | 10 | $\frac{10}{10} \times 10 = 10$ |
| 30 - 40 | 10 | 10 | $\frac{10}{10} \times 10 = 10$ |
| 40 - 50 | 20 | 10 | $\frac{20}{10} \times 10 = 20$ |
| 50 - 60 | 20 | 10 | $\frac{20}{10} \times 10 = 20$ |
| 60 - 70 | 15 | 10 | $\frac{15}{10} \times 10 = 15$ |
| 70 -100 | 8 | 30 | $\frac{8}{30} \times 10 = 2.67$ |

क्योंकि हमने प्रत्येक स्थिति में 10 अंकों के अंतराल पर ये लंबाइयाँ परिकलित की हैं, इसलिए आप यह देख सकते हैं कि हम इन लंबाइयों को 'प्रति 10 अंक अंतराल पर विद्यार्थियों के समानुपाती मान' सकते हैं।

परिवर्ती चौड़ाई वाला सही आयतचित्र आकृति 14.5 में दिखाया गया है।



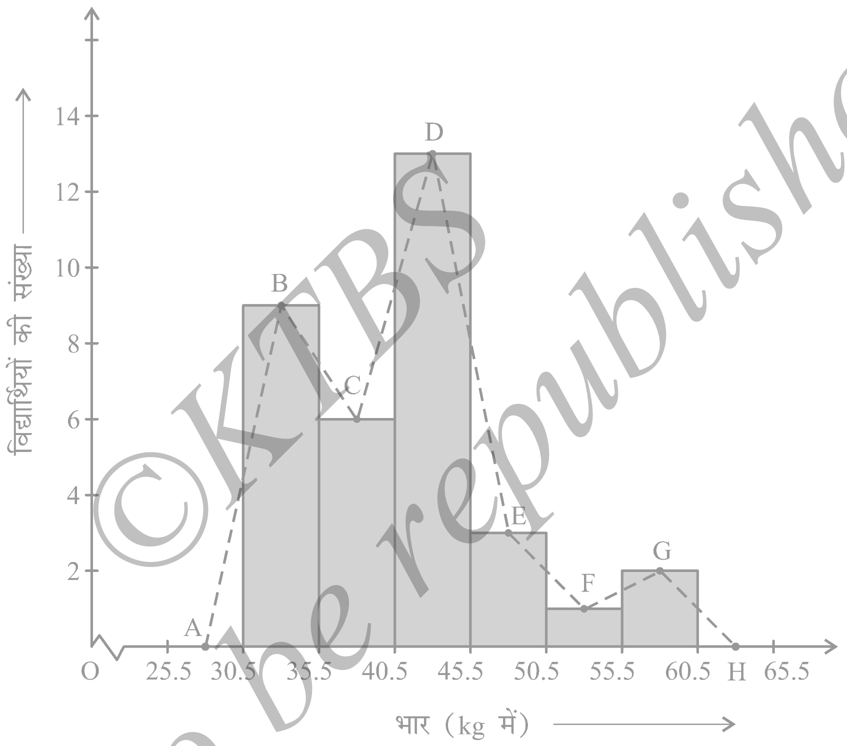

आकृति 14.5



**(C) बारंबारता बहुभुज**

मात्रात्मक आंकड़ों (quantitative data) और उनकी बारंबारताओं को निरूपित करने की एक अन्य विधि भी है। वह है एक बहुभुज (polygon)। बहुभुज का अर्थ समझने के लिए, आइए हम आकृति 14.3 में निरूपित आयतचित्र लें। आइए हम इस आयतचित्र के संगत आयतों की ऊपरी भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को रेखाखंडों से जोड़ दें। आइए हम इन मध्य-बिंदुओं को B, C, D, E, F और G से प्रकट करें। जब इन मध्य-बिंदुओं को हम रेखाखंडों से जोड़ देते हैं, तो हमें आकृति BCDEFG (देखिए आकृति 14.6) प्राप्त होती है। बहुभुज को पूरा करने के लिए यहाँ हम यह मान लेते हैं कि 30.5–35.5 के पहले और 55.5–60.5 के बाद शून्य

बारंबारता वाले एक एक वर्ग अंतराल हैं और इनके मध्य-बिंदु क्रमशः A और H हैं। आकृति 14.3 में दर्शाए गए आंकड़ों का संगत बारंबारता बहुभुज ABCDEFGH (frequency polygon) है। इसे हमने आकृति 14.6 में दर्शाया है।






आकृति 14.6

यद्यपि न्यूनतम वर्ग के पहले और उच्चतम वर्ग के बाद कोई वर्ग नहीं है, फिर भी शून्य बारंबारता वाले दो वर्ग अंतरालों को बढ़ा देने से बारंबारता बहुभुज का क्षेत्रफल वही रहता है, जो आयतचित्र का क्षेत्रफल है। क्या आप बता सकते हैं कि क्यों बांरबारता बहुभुज का क्षेत्रफल वही रहता है जो कि आयतचित्र का क्षेत्रफल है? (**संकेत** : सर्वांगसम त्रिभुजों वाले गुणों का प्रयोग कीजिए।)

अब प्रश्न यह उठता है कि जब प्रथम वर्ग अंतराल के पहले कोई वर्ग अंतराल नहीं होता, तब बहुभुज को हम कैसे पूरा करेंगे? आइए हम ऐसी ही एक स्थिति लें और देखें कि किस प्रकार हम बारंबारता बहुभुज बनाते हैं।

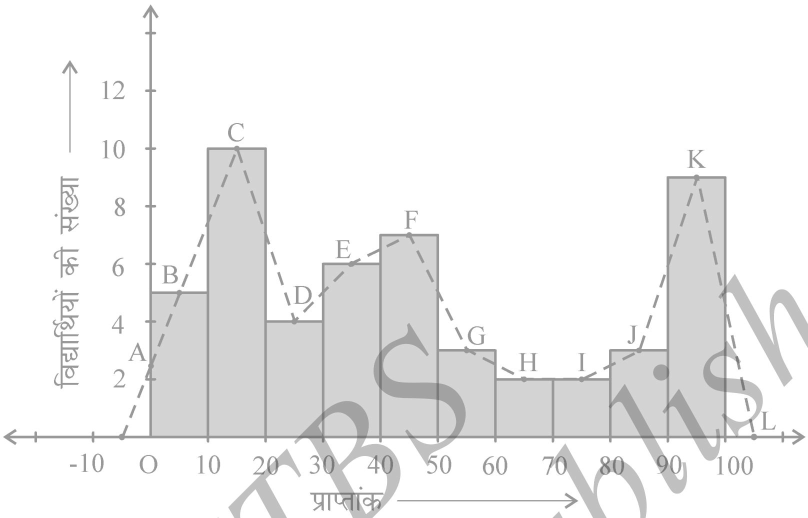
उदाहरण 8 : एक परीक्षा में एक कक्षा के 51 विद्यार्थियों द्वारा 100 में से प्राप्त किए अंक सारणी 14.9 में दिए गए हैं :

सारणी 14.9

| अंक | विद्यार्थियों की संख्या |
|---|---|
| 0 - 10 | 5 |
| 10 - 20 | 10 |
| 20 - 30 | 4 |
| 30 - 40 | 6 |
| 40 - 50 | 7 |
| 50 - 60 | 3 |
| 60 - 70 | 2 |
| 70 - 80 | 2 |
| 80 - 90 | 3 |
| 90 - 100 | 9 |
| **कुल योग** | 51 |

इस बारंबारता बंटन सारणी के संगत बारंबारता बहुभुज बनाइए।

हल : आइए पहले हम इन आंकड़ों से एक आयतचित्र बनाएँ और आयतों की ऊपरी भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को क्रमशः B, C, D, E, F, G, H, I, J, K से प्रकट करें। यहाँ पहला वर्ग 0–10 है। अतः 0–10 से ठीक पहले का वर्ग ज्ञात करने के लिए, हम क्षैतिज अक्ष को ऋणात्मक दिशा में बढ़ाते हैं और काल्पनिक वर्ग अंतराल (–10)–0 का मध्य-बिंदु ज्ञात करते हैं। प्रथम अंत बिंदु (end point), अर्थात् B को क्षैतिज अक्ष की ऋणात्मक दिशा में शून्य बारंबारता वाले इस मध्य-बिंदु से मिला दिया जाता है। वह बिंदु जहाँ यह रेखाखंड ऊर्ध्वाधर अक्ष से मिलता है, उसे A से प्रकट करते हैं। मान लीजिए दिए हुए आंकड़ों के अंतिम वर्ग के ठीक बाद वाले वर्ग का मध्य-बिंदु L है। तब OABCDEFGHIJKL वाँछित बारंबारता बहुभुज है, जिसे आकृति 14.7 में दिखाया गया है।




आकृति 14.7

*आयतचित्र बनाए बिना ही बारंबारता बहुभुजों को स्वतंत्र रूप से भी बनाया जा सकता है।* इसके लिए हमें आंकड़ों में प्रयुक्त वर्ग अंतरालों के मध्य-बिन्दुओं की आवश्यकता होती है। वर्ग अंतरालों के इन मध्य-बिंदुओं को **वर्ग-चिह्न (class-marks)** कहा जाता है।

किसी वर्ग अंतराल का वर्ग-चिह्न ज्ञात करने के लिए, हम उस वर्ग अंतराल की उपरि सीमा (upper limit) और निम्न सीमा (lower limit) का योग ज्ञात करते हैं और इस योग को 2 से भाग दे देते हैं। इस तरह,

$$\textbf{वर्ग-चिह्न} = \frac{\textbf{उपरि सीमा + निम्न सीमा}}{\textbf{2}}$$

आइए अब हम एक उदाहरण लें।

उदाहरण 9 : एक नगर में निर्वाह खर्च सूचकांक (cost of living index) का अध्ययन करने के लिए निम्नलिखित साप्ताहिक प्रेक्षण किए गए :

सारणी 14.10

| निर्वाह खर्च सूचकांक | सप्ताहों की संख्या |
|---|---|
| 140 - 150 | 5 |
| 150 - 160 | 10 |
| 160 - 170 | 20 |
| 170 - 180 | 9 |
| 180 - 190 | 6 |
| 190 - 200 | 2 |
| कुल योग | 52 |

ऊपर दिए गए आंकड़ों का एक बारंबारता बहुभुज (आयतचित्र बनाए बिना) खींचए।

हल : क्योंकि आयतचित्र बनाए बिना हम एक बारंबारता बहुभुज खींचना चाहते हैं, इसलिए आइए हम ऊपर दिए हुए वर्ग अंतरालों, अर्थात् 140 - 150, 150 - 160,.... के वर्ग-चिह्न ज्ञात करें।

वर्ग अंतराल 140 - 150 की उपरि सीमा = 150 और निम्न सीमा = 140 है।

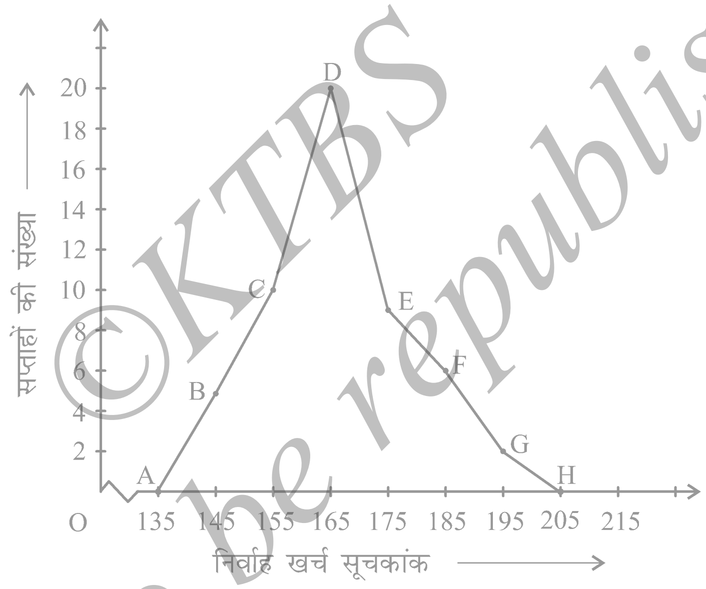
$$\text{अत:, वर्ग-चिह्न} = \frac{150 + 140}{2} = \frac{290}{2} = 145$$

इसी प्रकार, हम अन्य वर्ग अंतरालों के वर्ग-चिह्न ज्ञात कर सकते हैं। इस प्रकार प्राप्त नई सारणी नीचे दिखाई गई है:

सारणी 14.11

| वर्ग | वर्ग-चिह्न | बारंबारता |
|---|---|---|
| 140 - 150 | 145 | 5 |
| 150 - 160 | 155 | 10 |
| 160 - 170 | 165 | 20 |
| 170 - 180 | 175 | 9 |
| 180 - 190 | 185 | 6 |
| 190 - 200 | 195 | 2 |
| कुल योग | | 52 |

अब क्षैतिज अक्ष पर वर्ग-हचह्न आलेखित करके, ऊर्ध्वाधर अक्ष पर बारंबारताएँ आलेखित करके और फिर बिन्दुओं B(145, 5), C(155, 10), D(165, 20), E(175, 9), F(185, 6) और G(195, 2) को आलेखित करके और उन्हें रेखाखंडों से मिलाकर हम बारंबारता बहुभुज खींच सकते हैं। हमें शून्य बारंबारता के साथ वर्ग 130–140 (जो निम्नतम वर्ग 140–150 के ठीक पहले है) के वर्ग चिह्न के संगत बिंदु A(135, 0) को और G(195, 2) के तुरन्त बाद में आने वाले बिंदु H(205, 0) को आलेखित करना भूलना नहीं चाहिए। इसलिए परिणामी बारंबारता बहुभुज ABCDEFGH होगा (देखिए आकृति 14.8)।




आकृति 14.8

बारंबारता बहुभुज का प्रयोग तब किया जाता है जबकि आंकड़े संतत और बहुत अधिक होते हैं। यह समान प्रकृति के दो अलग-अलग आंकड़ों की तुलना करने में, अर्थात् एक ही कक्षा के दो अलग-अलग सेक्शनों के प्रदर्शनों की तुलना करने में अधिक उपयोगी होता है।



## प्रश्नावली 14.3

1. एक संगठन ने पूरे विश्व में 15-44 (वर्षों में) की आयु वाली महिलाओं में बीमारी और मृत्यु के कारणों का पता लगाने के लिए किए गए सर्वेक्षण से निम्नलिखित आंकड़े (% में) प्राप्त किए:

| क्र. सं. | कारण | महिला मृत्यु दर (%) |
|---|---|---|
| 1. | जनन स्वास्थ्य अवस्था | 31.8 |
| 2. | तंत्रिका मनोविकारी अवस्था | 25.4 |
| 3. | क्षति | 12.4 |
| 4. | हृदय वाहिका अवस्था | 4.3 |
| 5. | श्वसन अवस्था | 4.1 |
| 6. | अन्य कारण | 22.0 |

(i) ऊपर दी गई सूचनाओं को आलेखीय रूप में निरूपित कीजिए।

(ii) कौन-सी अवस्था पूरे विश्व की महिलाओं के खराब स्वास्थ्य और मृत्यु का बड़ा कारण है?

(iii) अपनी अध्यापिका की सहायता से ऐसे दो कारणों का पता लगाने का प्रयास कीजिए जिनकी ऊपर (ii) में मुख्य भूमिका रही हो।

**2.** भारतीय समाज के विभिन्न क्षेत्रों में प्रति हजार लड़कों पर लड़कियों की (निकटतम दस तक की) संख्या के आंकड़े नीचे दिए गए हैं:

| क्षेत्र | प्रति हजार लड़कों पर लड़कियों की संख्या |
|---|---|
| अनुसूचित जाति | 940 |
| अनुसूचित जनजाति | 970 |
| गैर अनुसूचित जाति/जनजाति | 920 |
| पिछड़े जिले | 950 |
| गैर पिछड़े जिले | 920 |
| ग्रामीण | 930 |
| शहरी | 910 |

(i) ऊपर दी गई सूचनाओं को एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए।

(ii) कक्षा में चर्चा करके, बताइए कि आप इस आलेख से कौन-कौन से निष्कर्ष निकाल सकते हैं।

**3.** एक राज्य के विधान सभा के चुनाव में विभिन्न राजनैतिक पार्टियों द्वारा जीती गई सीटों के परिणाम नीचे दिए गए हैं :

| **राजनैतिक पार्टी** | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **जीती गई सीटें** | 75 | 55 | 37 | 29 | 10 | 37 |

(i) मतदान के परिणामों को निरूपित करने वाला एक दंड आलेख खींचिए।

(ii) किस राजनैतिक पार्टी ने अधिकतम सीटें जीती हैं?

**4.** एक पौधे की 40 पत्तियों की लंबाइयाँ एक मिलीमीटर तक शुद्ध मापी गई हैं और प्राप्त आंकड़ों को निम्नलिखित सारणी में निरूपित किया गया है :

| **लंबाई ( मिलीमीटर में )** | **पत्तियों की संख्या** |
|---|---|
| 118 - 126 | 3 |
| 127 - 135 | 5 |
| 136 - 144 | 9 |
| 145 - 153 | 12 |
| 154 - 162 | 5 |
| 163 - 171 | 4 |
| 172 - 180 | 2 |

(i) दिए हुए आंकड़ों को निरूपित करने वाला एक आयतचित्र खींचिए।

(ii) क्या इन्हीं आंकड़ों को निरूपित करने वाला कोई अन्य उपयुक्त आलेख है?

(iii) क्या यह सही निष्कर्ष है कि 153 मिलीमीटर लम्बाई वाली पत्तियों की संख्या सबसे अधिक है? क्यों?

**5.** नीचे की सारणी में 400 नियॉन लैम्पों के जीवन काल दिए गए हैं :

| **जीवन काल ( घंटों में )** | **लैम्पों की संख्या** |
|---|---|
| 300 - 400 | 14 |
| 400 - 500 | 56 |
| 500 - 600 | 60 |
| 600 - 700 | 86 |
| 700 - 800 | 74 |
| 800 - 900 | 62 |
| 900 - 1000 | 48 |

(i) एक आयतचित्र की सहायता से दी हुई सूचनाओं को निरूपित कीजिए।

(ii) कितने लैम्पों के जीवन काल 700 घंटों से अधिक हैं?

**6.** नीचे की दो सारणियों में प्राप्त किए गए अंकों के अनुसार दो सेक्शनों के विद्यार्थियों का बंटन दिया गया है :

| **सेक्शन A** | | **सेक्शन B** | |
|---|---|---|---|
| **अंक** | **बारंबारता** | **अंक** | **बारंबारता** |
| 0 - 10 | 3 | 0 - 10 | 5 |
| 10 - 20 | 9 | 10 - 20 | 19 |
| 20 - 30 | 17 | 20 - 30 | 15 |
| 30 - 40 | 12 | 30 - 40 | 10 |
| 40 - 50 | 9 | 40 - 50 | 1 |

दो बारंबारता बहुभुजों की सहायता से एक ही आलेख पर दोनों सेक्शनों के विद्यार्थियों के प्राप्तांक निरूपित कीजिए। दोनों बहुभुजों का अध्ययन करके दोनों सेक्शनों के निष्पादनों की तुलना कीजिए।

**7.** एक क्रिकेट मैच में दो टीमों A और B द्वारा प्रथम 60 गेंदों मे बनाए गए रन नीचे दिए गए हैं:

| **गेंदों की संख्या** | **टीम A** | **टीम B** |
|---|---|---|
| 1 - 6 | 2 | 5 |
| 7 - 12 | 1 | 6 |
| 13 - 18 | 8 | 2 |
| 19 - 24 | 9 | 10 |
| 25 - 30 | 4 | 5 |
| 31 - 36 | 5 | 6 |
| 37 - 42 | 6 | 3 |
| 43 - 48 | 10 | 4 |
| 49 - 54 | 6 | 8 |
| 55 - 60 | 2 | 10 |

बारंबारता बहुभुजों की सहायता से एक ही आलेख पर दोनों टीमों के आंकड़े निरूपित कीजिए।

(**संकेत :** पहले वर्ग अंतरालों को संतत बनाइए)

**8.** एक पार्क में खेल रहे विभिन्न आयु वर्गों के बच्चों की संख्या का एक यादृच्छिक सर्वेक्षण (random survey) करने पर निम्नलिखित आंकड़े प्राप्त हुए :

| आयु ( वर्षों में ) | बच्चों की संख्या |
|---|---|
| 1 - 2 | 5 |
| 2 - 3 | 3 |
| 3 - 5 | 6 |
| 5 - 7 | 12 |
| 7 - 10 | 9 |
| 10 - 15 | 10 |
| 15 - 17 | 4 |

ऊपर दिए आंकड़ों को निरूपित करने वाला एक आयतचित्र खींचिए।

**9.** एक स्थानीय टेलीफोन निर्देशिका से 100 कुलनाम (surname) यदृच्छया लिए गए और उनसें अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षरों की संख्या का निम्न बारंबारता बंटन प्राप्त किया गया :

| वर्णमाला के अक्षरों की संख्या | कुलनामों की संख्या |
|---|---|
| 1 - 4 | 6 |
| 4 - 6 | 30 |
| 6 - 8 | 44 |
| 8 - 12 | 16 |
| 12 - 20 | 4 |

(i) दी हुई सूचनाओं को निरूपित करने वाला एक आयतचित्र खींचिए।

(ii) वह वर्ग अंतराल बताइए जिसमें अधिकतम संख्या में कुलनाम हैं।

## 14.5 केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

अभी तक इस अध्याय में, हमने बारंबारता बंटन सारणियों, दंड-आलेखों, आयतचित्रों और बारंबारता बहुभुजों की सहायता से आंकड़ों को विभिन्न रूपों में प्रस्तुत किया है। अब प्रश्न यह उठता है कि क्या आंकड़ों को अर्थपूर्ण बनाने के लिए हमें सदैव ही सभी आंकड़ों का अध्ययन करने की आवश्यकता होती है या क्या हम इन आंकड़ों के केवल कुछ प्रतिनिधि लेकर इनके कुछ महत्वपूर्ण अभिलक्षणों का पता लगा सकते हैं। केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों (measures of central tendency) या औसतों की सहायता से ऐसा किया जा सकता है।

एक ऐसी स्थिति लीजिए जहाँ दो विद्यार्थियों मैरी और हरि को उनकी परीक्षा कापियाँ दी गई हैं। परीक्षा में 10-10 अंकों के पाँच प्रश्न थे। इस परीक्षा में उनके प्राप्तांक ये थे:

| **प्रश्न की क्रम संख्या** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| **मैरी के प्राप्तांक** | 10 | 8 | 9 | 8 | 7 |
| **हरि के प्राप्तांक** | 4 | 7 | 10 | 10 | 10 |

परीक्षा की कापियाँ प्राप्त होने पर दोनों के औसत प्राप्तांक ये थे :

$$\text{मैरी का औसत प्राप्तांक} = \frac{42}{5} = 8.4$$

$$\text{हरि का औसत प्राप्तांक} = \frac{41}{5} = 8.2$$

क्योंकि मैरी का औसत प्राप्तांक हरि के औसत प्राप्तांक से अधिक था, इसलिए मैरी का कहना था कि परीक्षा में हरि की तुलना में उसका प्रदर्शन अच्छा रहा है। परन्तु हरि इससे सहमत नहीं था। उसने दोनों के प्राप्तांकों को आरोही क्रम में रखा और मध्य प्राप्तांक इस प्रकार प्राप्त किया:

| **मैरी का प्राप्तांक** | 7 | 8 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| **हरि का प्राप्तांक** | 4 | 7 | 10 | 10 | 10 |

हरि का कहना था कि उसका सबसे मध्य का प्राप्तांक 10 था, जो कि मैरी के सबसे मध्य के प्राप्तांक अर्थात् 8 से अधिक था। इसलिए परीक्षा में उसके प्रदर्शन को उत्तम माना जाना चाहिए।

परन्तु मैरी उसके तर्क से सहमत नहीं थी। मैरी को अपने कथन से सहमत कराने के लिए हरि ने एक अन्य युक्ति अपनाई। उसने बताया कि उसने 10 अंक अधिक बार (3 बार) प्राप्त किए हैं जबकि मैरी ने 10 अंक केवल एक बार प्राप्त किए हैं। अत:, परीक्षा में उसका प्रदर्शन उत्तम रहा है।

हरि और मैरी के इस विवाद को सुलझाने के लिए उनके द्वारा अपनाए गए तीन मापों को देखें और यह पता लगाएँ कि इन तीनों मापों में से कौन-सा माप निर्णायक सिद्ध होता है।

पहली स्थिति में मैरी ने जो औसत प्राप्तांक प्राप्त किया था वह *माध्य* (*mean*) है। मध्य प्राप्तांक जिसको हरि ने अपने तर्क में प्रयोग किया था वह *माध्यक* (*median*) है। अपनी दूसरी युक्ति में हरि ने अधिक बार अधिक अंक प्राप्त करने की बात कही थी वह *बहुलक* (*mode*) है।

आइए पहले हम माध्य पर विस्तार से चर्चा करें।

अनेक प्रेक्षणों का **माध्य** (या **औसत**) सभी प्रेक्षणों के मानों के योग को प्रेक्षणों की कुल संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है।

इसे प्रतीक $\bar{x}$ से, जिसे $x$ दंड ($x$ *bar*) पढ़ा जाता है, प्रकट किया जाता है।

आइए हम एक उदाहरण लें:

**उदाहरण 10 :** 5 व्यक्तियों से यह पूछा गया कि अपने समुदाय के सामाजिक कार्य करने में वे एक सप्ताह में कितना समय देते हैं। उनका कहना था: क्रमशः 10, 7, 13, 20 और 15 घंटे। एक सप्ताह में उनके द्वारा सामाजिक कार्य में लगाए समयों का माध्य (या औसत) ज्ञात कीजिए।

**हल :** हम अपनी पिछली कक्षाओं में यह पढ़ चुके हैं कि प्रेक्षणों का माध्य

$$= \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की कुल संख्या}}\text{।}$$

माध्य ज्ञात करने की विधि को सरल बनाने के लिए आइए हम एक चर $x_i$ लें, जो $i$ वें प्रेक्षण को प्रकट करता है। यहाँ पर $i$, 1 से 5 तक कोई भी मान ले सकता है। अतः हमारा पहला प्रेक्षण $x_1$ है, दूसरा प्रेक्षण $x_2$ है और इस प्रकार पाँचवा प्रेक्षण $x_5$ है।

साथ ही, $x_1 = 10$ का अर्थ यह है कि पहले प्रेक्षण का मान, जिसे $x_1$ से प्रकट किया गया है, 10 है। इसी प्रकार, $x_2 = 7, x_3 = 13, x_4 = 20$ और $x_5 = 15$ है।

अतः, $$\text{माध्य } \bar{x} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की कुल संख्या}}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$$

$$= \frac{10 + 7 + 13 + 20 + 15}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

अतः, 5 व्यक्तियों द्वारा एक सामाजिक कार्य करने में एक सप्ताह में लगाया गया माध्य समय 13 घंटे था।

अब 30 व्यक्तियों द्वारा सामाजिक कार्य करने में लगाया गया माध्य समय ज्ञात करने के लिए, हमें $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{30}$ लिखना होगा, जो एक कठिन कार्य है। हम संकलन (summation) के लिए ग्रीक प्रतीक Σ (अक्षर सिग्मा के लिए) का प्रयोग करते हैं। अतः

$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{30}$ के स्थान पर, हम $\sum_{i=1}^{30} x_i$ लिखते हैं, जिसे $x_i$ का योग पढ़ा जाता है, जबकि $i$ का मान 1 से 30 तक विचरण करता है।

अतः, $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{30}$$

इसी प्रकार, यदि प्रेक्षणों की संख्या $n$ हो, तो

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

**उदाहरण 11 :** एक विद्यालय की नवीं कक्षा के 30 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए गए अंकों, जो उदाहरण 2 में दिए गए हैं, का माध्य ज्ञात कीजिए।

**हल :** $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{30}}{30}$ का प्रयोग करने पर, माध्य इस प्रकार ज्ञात किया जाएगा:

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 10 + 20 + 36 + 92 + 95 + 40 + 50 + 56 + 60 + 70 + 92 + 88 + 80 + 70 + 72 + 70 + 36 + 40 + 36 + 40 + 92 + 40 + 50 + 50 + 56 + 60 + 70 + 60 + 60 + 88 = 1779$$

अतः, $$\bar{x} = \frac{1779}{30} = 59.3$$

क्या इस प्रक्रिया को लागू करने में काफी समय नहीं लगता है? क्या हम इस प्रक्रिया को सरल बना सकते हैं? ध्यान दीजिए कि हम इन आंकड़ों की एक बारंबारता सारणी पहले ही बना चुके हैं (देखिए सारणी 14.1)।

इस सारणी को देखने से यह पता चलता है कि 1 विद्यार्थी ने 10 अंक प्राप्त किए थे, 1 विद्यार्थी ने 20 अंक प्राप्त किए थे, 3 विद्यार्थियों ने 36 अंक प्राप्त किए थे, 4 विद्यार्थियों ने 40 अंक प्राप्त किए थे, 3 विद्यार्थियों ने 50 अंक प्राप्त किए थे, 2 विद्यार्थियों ने 56 अंक प्राप्त किए थे, 4 विद्यार्थियों ने 60 अंक प्राप्त किए थे, 4 विद्यार्थियों ने 70 अंक प्राप्त किए थे, 1 विद्यार्थी ने 72 अंक प्राप्त किए थे, 1 विद्यार्थी ने 80 अंक प्राप्त किए थे, 2 विद्यार्थियों ने 88 अंक प्राप्त किए थे, 3 विद्यार्थियों ने 92 अंक प्राप्त किए थे और 1 विद्यार्थी ने 95 अंक प्राप्त किए थे।

अतः प्राप्त किए गए कुल अंक $= (1 \times 10) + (1 \times 20) + (3 \times 36) + (4 \times 40) + (3 \times 50) + (2 \times 56) + (4 \times 60) + (4 \times 70) + (1 \times 72) + (1 \times 80) + (2 \times 88) + (3 \times 92) + (1 \times 95)$

$= f_1 x_1 + \ldots + f_{13}\, x_{13}$, जबकि $f_i$ सारणी 14.1 में $i$ वीं प्रविष्टि की बारंबारता है।

संक्षेप में, हम इसे $\sum_{i=1}^{13} f_i x_i$ लिख सकते हैं।

इसलिए, प्राप्त किए गए कुल अंक $= \sum_{i=1}^{13} f_i x_i = f_1 x_1 + \ldots + f_{13} x_{13}$

$= 10 + 20 + 108 + 160 + 150 + 112 + 240 + 280 + 72 + 80 + 176 + 276 + 95 = 1779$

अब, प्रेक्षणों की कुल संख्या $= f_1 + f_2 + \ldots + f_{13}$ $(= \sum_{i=1}^{13} f_i)$

$= 1 + 1 + 3 + 4 + 3 + 2 + 4 + 4 + 1 + 1 + 2 + 3 + 1 = 30$

अतः, माध्य $\bar{x} = \dfrac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की कुल संख्या}} = \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{13} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{13} f_i}\right)$

$= \dfrac{1779}{30}$

इस प्रक्रम को सारणी के रूप में इस प्रकार प्रदर्शित किया जा सकता है, जो कि सारणी 14.1 का परिवर्तित रूप है:

सारणी 14.12

| **अंक** ($x_i$) | **विद्यार्थियों की संख्या** ($f_i$) | $f_i x_i$ |
|---|---|---|
| 10 | 1 | 10 |
| 20 | 1 | 20 |
| 36 | 3 | 108 |
| 40 | 4 | 160 |
| 50 | 3 | 150 |
| 56 | 2 | 112 |
| 60 | 4 | 240 |
| 70 | 4 | 280 |
| 72 | 1 | 72 |
| 80 | 1 | 80 |
| 88 | 2 | 176 |
| 92 | 3 | 276 |
| 95 | 1 | 95 |
| | $\sum_{i=1}^{13} f_i = 30$ | $\sum_{i=1}^{13} f_i x_i = 1779$ |

अतः, अवर्गीकृत बारंबारता बंटन में माध्य परिकलित करने के लिए, आप सूत्र

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

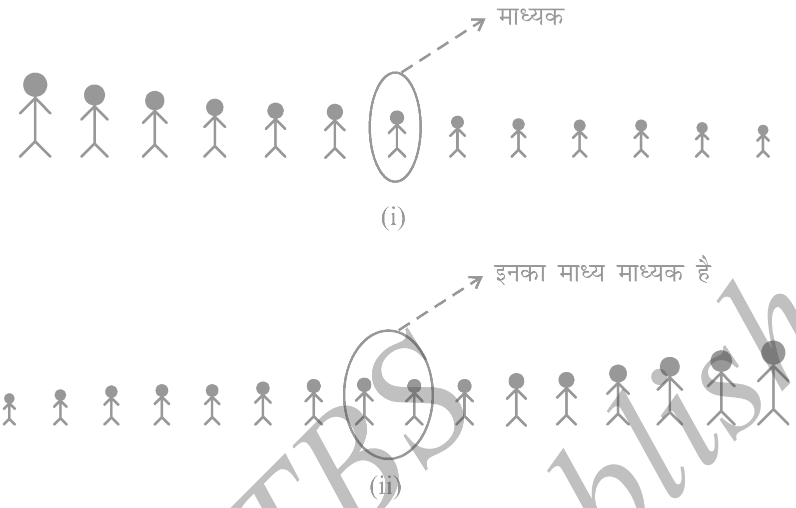
का प्रयोग कर सकते हैं।

आइए अब हम हरि और मैरी के बीच हुए विवाद वाली स्थिति पर पुनः लौट आएँ और उस दूसरी स्थिति पर विचार करें जिसमें अधिकतम मध्य अंक प्राप्त करके हरि ने अपना प्रदर्शन उत्तम बताया था। जैसा कि पहले बताया जा चुका है, केन्द्रीय प्रवृत्ति (central tendency) के इस माप को *माध्यक* (*median*) कहा जाता है।

**माध्यक** दिए हुए प्रेक्षणों में वह मान होता हैं जो इसे ठीक-ठीक दो भागों में विभक्त कर देता है। अतः जब आंकड़ों को आरोही (या अवरोही) क्रम में लिखते हैं, तब अवर्गीकृत आंकड़ों के माध्यक का परिकलन इस प्रकार किया जाता है :

(i) जब प्रेक्षणों की संख्या ($n$) विषम होती है, तब माध्यक $\left(\frac{n+1}{2}\right)$वें प्रेक्षण का मान होता है। उदाहरण के लिए, यदि $n$ है, = 13, तो $\left(\frac{13+1}{2}\right)$वें, अर्थात् 7वें प्रेक्षण का मान माध्यक होगा [देखिए आकृति 14.9 (i)]।

(ii) जब प्रेक्षणों की संख्या ($n$) सम होती है, तब माध्यक $\left(\frac{n}{2}\right)$वें और $\left(\frac{n}{2}+1\right)$वें प्रेक्षणों का माध्य होता है। उदाहरण के लिए, यदि $n = 16$ है, तो $\left(\frac{16}{2}\right)$वें और $\left(\frac{16}{2}+1\right)$वें प्रेक्षणों के मानों का माध्य, अर्थात् 8वें और 9वें प्रेक्षणों के मानों का माध्य ही माध्यक होगा [देखिए आकृति 14.9 (ii)]।




आकृति 14.9



आइए अब हम कुछ उदाहरणों की सहायता से इसे और अच्छी तरह से समझने का प्रयास करें।

**उदाहरण 12 :** एक कक्षा के 9 विद्यार्थियों की (सेंटीमीटरों में) लंबाइयाँ ये हैं:

155 160 145 149 150 147 152 144 148

इन आंकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

**हल :** सबसे पहले हम इन आंकड़ों को आरोही क्रम में इस प्रकार लिखते हैं:

144 145 147 148 149 150 152 155 160

क्योंकि विद्यार्थियों की संख्या 9 है, अर्थात् विषम है, इसलिए हम $\left(\frac{n+1}{2}\right)$वें $=\left(\frac{9+1}{2}\right)$वें $= 5$ वें विद्यार्थी की लंबाई, जो कि 149 सेंटीमीटर है, ज्ञात करके माध्यक प्राप्त कर लेते हैं।

अतः माध्यक लंबाई 149 सेंटीमीटर है।

**उदाहरण 13 :** कबड्डी की एक टीम द्वारा अनेक मैचों में प्राप्त किए गए अंक ये हैं:

17, 2, 7, 27, 15, 5, 14, 8, 10, 24, 48, 10, 8, 7, 18, 28

टीम द्वारा प्राप्त किए गए अंकों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

**हल :** टीम द्वारा प्राप्त किए गए अंकों को आरोही क्रम में लिखने पर, हमें यह प्राप्त होता है :

2, 5, 7, 7, 8, 8, 10, 10, 14, 15, 17, 18, 24, 27, 28, 48.

यहाँ 16 पद हैं। इसलिए यहाँ दो मध्य पद हैं। ये $\frac{16}{2}$ वें और $\left(\frac{16}{2}+1\right)$ वें अर्थात् 8 वें और 9 वें पद हैं।

अत:, 8वें और 9वें पदों के मानों का माध्य ही माध्यक होगा है।

इसलिए, माध्यक $= \frac{10+14}{2} = 12$

अत:, कबड्डी टीम द्वारा प्राप्त किए गए माध्यक अंक 12 हैं।

आइए अब हम पुन: हेरि और मैरी के बीच हुए विवादों वाली स्थिति को लें।

औसत ज्ञात करने के लिए हरि द्वारा अपनाया गया तीसरा माप *बहुलक* (*mode*) था।

**बहुलक** प्रेक्षण का वह मान होता है जो बार-बार घटित होता रहता है, अर्थात् अधिकतम बारंबारता वाले प्रेक्षण को बहुलक कहा जाता है।

रेडीमेड गार्मेन्ट (सिले सिलाए वस्त्र) उद्योग और जूता उद्योग केन्द्रीय प्रवृत्ति के इस माप का प्रयोग काफी करते हैं। बहुलक की सहायता से ये उद्योग यह निर्णय ले लेते हैं कि किस साइज या माप का उत्पादन अधिक वृहत् संख्या में करनी चाहिए।

इसे और अच्छी तरह से समझने के लिए आइए हम एक उदाहरण लें।

**उदाहरण 14 :** 20 विद्यार्थियों द्वारा (10 में से) प्राप्त किए गए निम्नलिखित अंकों का बहुलक ज्ञात कीजिए

4, 6, 5, 9, 3, 2, 7, 7, 6, 5, 4, 9, 10, 10, 3, 4, 7, 6, 9, 9

**हल :** हम इन आंकड़ों को निम्न रूप में लिखते हैं :

2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 9, 10, 10

यहाँ 9 सबसे अधिक बार, अर्थात् चार बार आया है। अत:, बहुलक 9 है।

**उदाहरण 15 :** एक फैक्टरी की एक छोटी इकाई लीजिए जहाँ 5 व्यक्ति काम करते हैं, जिनमें एक सुपरवाइजर है और चार मजदूर हैं। प्रत्येक मजदूर को प्रति माह ₹ 5000 वेतन मिलता है, जबकि सुपरवाइजर को प्रति माह ₹ 15000 वेतन मिलता है। फैक्टरी की इस इकाई के वेतनों के माध्य, माध्यक और बहुलक परिकलित कीजिए।

हल : माध्य = $\dfrac{5000 + 5000 + 5000 + 5000 + 15000}{5} = \dfrac{35000}{5} = 7000$

अत:, माध्य वेतन ₹ 7000 प्रति माह है।

माध्यक ज्ञात करने के लिए, हम वेतनों को इस प्रकार आरोही क्रम में इस प्रकार रखते हैं:

5000, 5000, 5000, 5000, 15000

क्योंकि फैक्टरी की इकाई में काम करने वाले लोगों की संख्या 5 है, इसलिए माध्यक प्रेक्षण $\dfrac{5+1}{2}$ वाँ $= \dfrac{6}{2}$ वाँ = तीसरा प्रेक्षण होगा। अत:, माध्यक तीसरे प्रेक्षण का मान, अर्थात् 5000 रु प्रति माह होगा।

वेतनों का बहुलक, अर्थात् बहुलक वेतन ज्ञात करने के लिए, यहाँ हम यह पाते हैं कि आंकड़ों 5000, 5000, 5000, 5000, 15000 में 5000 अधिकतम बार आता है। इसलिए, बहुलक वेतन ₹ 5000 प्रति माह है।

अब ऊपर के उदाहरण में दिए गए आंकड़ों के केन्द्रीय प्रवृत्ति के तीनों मापों की तुलना कीजिए। यहाँ आप यह देख सकते हैं कि 7000 रु के माध्य वेतन से मजदूरों की मजदूरियों का कोई भी सन्निकट आकलन (approximate estimate) प्राप्त नहीं होता। जबकि 5000 रु के माध्यक और बहुलक वेतनों से आंकड़ों का एक निरूपण अधिक प्रभावशाली ढंग से प्राप्त हो जाता है।

आंकड़ों के चरम मानों से माध्य प्रभावित होता है। यह माध्य की एक दुर्बलता है। यदि आंकड़ों के कुछ अंकों में अंतर बहुत अधिक हो (जैसे 1, 7, 8, 9, 9), तो इस स्थिति में माध्य इन आंकड़ों का उत्तम प्रतिनिधित्व नहीं करता। क्योंकि आंकड़ों में उपस्थित चरम मानों से माध्यक और बहुलक प्रभावित नहीं होते हैं, इसलिए इस स्थिति में इनसेदिए हुए आंकड़ों का एक उत्तम प्रतिनिधित्व होता है।

आइए अब हम पुन: हरि और मैरी वाली स्थिति लें और केन्द्रीय प्रवृत्ति के तीन मापों की तुलना करें।

| **केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापक** | **हरि** | **मैरी** |
|---|---|---|
| माध्य | 8.2 | 8.4 |
| माध्यक | 10 | 8 |
| बहुलक | 10 | 8 |

इस हल की सहायता से केन्द्रीय प्रवृत्ति के केवल इन तीन मापों के ज्ञान से यह नहीं बताया जा सकता है कि हरि और मैरी में किसका प्रदर्शन अधिक उत्तम है। इसके लिए कुछ और अधिक जानकारी का होना आवश्यक है, जिनका अध्ययन आप उच्च कक्षाओं में करेंगे।

## प्रश्नावली 14.4

**1.** एक टीम ने फुटबाल के 10 मैचों में निम्नलिखित गोल किए :

2, 3, 4, 5, 0, 1, 3, 3, 4, 3

इन गोलों के माध्य, माध्यक और बहुलक ज्ञात कीजिए।

**2.** गणित की परीक्षा में 15 विद्यार्थियों ने (100 में से) निम्नलिखित अंक प्राप्त किए :

41, 39, 48, 52, 46, 62, 54, 40, 96, 52, 98, 40, 42, 52, 60

इन आंकड़ों के माध्य, माध्यक और बहुलक ज्ञात कीजिए।

**3.** निम्नलिखित प्रेक्षणों को आरोही क्रम में व्यवस्थित किया गया है। यदि आंकड़ों का माध्यक 63 हो, तो $x$ का मान ज्ञात कीजिए :

29, 32, 48, 50, $x$, $x+2$, 72, 78, 84, 95

**4.** आंकड़ों 14, 25, 14, 28, 18, 17, 18, 14, 23, 22, 14, 18 का बहुलक ज्ञात कीजिए।

**5.** निम्न सारणी से एक फैक्टरी में काम कर रहे 60 कर्मचारियों का माध्य वेतन ज्ञात कीजिए:

| वेतन (रुपयों में) | कर्मचारियों की संख्या |
|---|---|
| 3000 | 16 |
| 4000 | 12 |
| 5000 | 10 |
| 6000 | 8 |
| 7000 | 6 |
| 8000 | 4 |
| 9000 | 3 |
| 10000 | 1 |
| **कुल योग** | 60 |

6. निम्न स्थिति पर आधारित एक उदाहरण दीजिए
   (i) माध्य ही केन्द्रीय प्रवृत्ति का उपयुक्त माप है।
   (ii) माध्य केन्द्रीय प्रवृत्ति का उपयुक्त माप नहीं है, जबकि माध्यक एक उपयुक्त माप है।

## 14.6 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. एक निश्चित उद्देश्य से एकत्रित किए गए तथ्यों या अंकों को आंकड़े कहा जाता है।
2. सांख्यिकी अध्ययन का वह क्षेत्र है जिसमें आंकड़ों के प्रति प्रस्तुतिकरण, विश्लेषण तथा निर्वचन पर विचार किया जाता है।
3. किस प्रकार आंकड़ों को आलेखों, आयतचित्रों तथा बारंबारता बहुभुजों द्वारा आलेखीय रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है।
4. अवर्गीकृत आंकड़ों की केन्द्रीय प्रवृत्ति के तीन माप हैं :

   (i) माध्य: प्रेक्षणों के सभी मानों के योग को प्रेक्षणों की कुल संख्या से भाग देने पर यह प्राप्त हो जाता है। इसे $\bar{x}$ से प्रकट किया जाता है।

   अत:, $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ है। अवर्गीकृत बारंबारता बंटन के लिए यह $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$ होता है।

   (ii) माध्यक : यह सबसे मध्य वाले प्रेक्षण का मान होता है।

   यदि $n$ विषम संख्या है, तो माध्यक = $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$वें प्रेक्षण का मान

   यदि $n$ सम संख्या है, तो माध्यक = $\left(\dfrac{n}{2}\right)$वें और $\left(\dfrac{n}{2}+1\right)$वें प्रेक्षणों के मानों का माध्य।

   (iii) बहुलक : बहुलक सबसे अधिक बार आने वाला प्रेक्षण का मान होता है।

**अध्याय 15**

# प्रायिकता

*It is remarkable that a science, which began with the consideration of games of chance, should be elevated to the rank of the most important subject of human knowledge.*

*(उल्लेखनीय है कि वह विज्ञान जिसकी व्युत्पत्ति संयोग के खेल से हुई है, वह मानव ज्ञान के अति महत्वपूर्ण विषय की ऊँचाइयों तक पहुँच जाती है।)*

— ***Pierre Simon Laplace***



## 15.1 भूमिका

हमें अपने दैनिक जीवन में इस प्रकार के कथन सुनने को मिलते रहते हैं :

(1) **संभवतः** आज वर्षा होगी।

(2) मुझे **संदेह** है कि वह इस परीक्षा में उत्तीर्ण होगा।

(3) वार्षिक परीक्षा में कविता के प्रथम आने की **संभावना सबसे अधिक** है।

(4) डीज़ल की कीमत बढ़ने का **संयोग** काफी अधिक है।

(5) आज के मैच में भारत के टॉस जीतने का **संयोग** 50-50 है।

यहाँ ऊपर के कथनों में प्रयुक्त 'संभवतः', 'संदेह', 'संयोग' आदि शब्दों में अनिश्चितता की भावना बनी रहती है। उदाहरण के लिए, (1) में 'संभवतः वर्षा होगी' का अर्थ यह होगा कि वर्षा हो भी सकती है और नहीं भी हो सकती है। वर्षा होने की प्रागुक्ति (prediction) हम अपने उन पिछले अनुभवों से करते हैं जबकि इसी प्रकार की अवस्थाओं के होने पर वर्षा हुई थी। इसी प्रकार की प्रागुक्तियाँ (2) से (5) तक की स्थितियों के संबंध में भी की जाती है।

अनेक स्थितियों में 'प्रायिकता' (probability) की सहायता से 'संभवतः' आदि जैसी अनिश्चितता का संख्यात्मक रूप से मापन किया जा सकता है।

यद्यपि प्रायिकता की व्युत्पत्ति जुए के खेल से हुई थी, फिर भी इसका व्यापक प्रयोग भौतिक विज्ञान, वाणिज्य, जैविक विज्ञान, आयुर्विज्ञान, मौसम का पूर्वानुमान आदि क्षेत्रों में हो रहा है।

## 15.2 प्रायिकता – एक प्रायोगिक दृष्टिकोण

**ब्लेज पास्कल**
**(1623–1662)**
आकृति 15.1

**पियरे डि फर्मा**
**(1601–1665)**
आकृति 15.2

प्रायिकता (probability) की संकल्पना का विकास एक आश्चर्यजनक ढंग से हुआ था। 1654 में शेवेलियर डि मेरे नामक जुआरी पासा संबंधी कुछ समस्याओं को लेकर सत्रहवीं शताब्दी के एक सुप्रसिद्ध फ्रांसीसी दार्शनिक और गणितज्ञ ब्लेज पास्कल के पास पहुँचा। पास्कल को इन समस्याओं को हल करने में काफी रूचि आने लगी, वह इन समस्याओं पर अध्ययन करने लगा और एक अन्य फ्रांसीसी गणितज्ञ पियरे दि फर्मा के साथ चर्चा भी की। पास्कल और फर्मा ने इन समस्याओं को स्वतंत्र रूप से अलग-अलग हल किया। यह कार्य ही प्रायिकता सिद्धांत (probability theory) का प्रारंभ था।

इस विषय पर पहली पुस्तक इतालवी गणितज्ञ जे. कार्डन (1501–1576) ने लिखी थी। इस पुस्तक का शीर्षक 'Book on Games of Chance' (Liber de Ludo Aleae) था जोकि 1663 में प्रकाशित हुई थी। इस विषय पर गणितज्ञों जे. बर्नूली (1654–1705), पी. लाप्लास (1749–1827), ए.ए. मार्कोव (1856–1922) और ए.एन. कोल्मोगोरोव (जन्म 1903) का भी महत्वपूर्ण योगदान रहा है।

पिछली कक्षाओं में आप प्रायिकता का आभास कुछ प्रयोग जैसे सिक्के उछालना, पासा फेंकना आदि में कर चुके हैं और उनके *परिणाम* (outcome) देख चुके हैं। अब आप देखेंगे कि एक प्रयोग में एक विशेष परिणाम के घटने का संयोग (chance) किस प्रकार मापा जाता है।

**क्रियाकलाप 1 :** (i) एक सिक्का लीजिए, उसे दस बार उछालिए और देखिए कि कितनी बार चित आता है और कितनी बार पट आता है। आप अपने प्रेक्षणों को आगे आने वाली सारणी के रूप में लिखिए।

सारणी 15.1

| सिक्का उछालने की संख्या | चित आने की संख्या | पट आने की संख्या |
|---|---|---|
| 10 | — | — |

नीचे दी गई भिन्नों के मान लिखिए :

$$\frac{\text{चित आने की संख्या}}{\text{सिक्का उछालने की कुल संख्या}}$$

और

$$\frac{\text{पट आने की संख्या}}{\text{सिक्का उछालने की कुल संख्या}}$$

(ii) सिक्के को बीस बार उछालिए और ऊपर की भाँति आप अपने प्रेक्षण लिख लीजिए। प्रेक्षणों के इस संग्रह के लिए ऊपर दिए गए भिन्नों के मान पुनः ज्ञात कीजिए।

(iii) सिक्के को और अधिक बार उछालकर इस प्रयोग को पुनः कीजिए और चित और पट आने की संख्या लिख लीजिए। इसके बाद संगत भिन्नों के मान ज्ञात कीजिए।

आप देखेंगे कि आप जैसे-जैसे सिक्का उछालने की संख्या बढ़ाते जाएँगे, उतना ही भिन्नों का मान 0.5 के निकट होता जाएगा। यह देखने के लिए कि सिक्के को अधिक से अधिक उछालने पर क्या होता है, निम्नलिखित सामूहिक क्रियाकलाप भी किया जा सकता है।

**क्रियाकलाप 2 :** आप कक्षा को 2 या 3 विद्यार्थियों के वर्गों में बाँट दीजिए। मान लीजिए प्रत्येक वर्ग का एक विद्यार्थी सिक्के को 15 बार उछालता है। प्रत्येक वर्ग के अन्य विद्यार्थी को चाहिए कि वह चित और पट आने के प्रेक्षणों को लिखता जाए (ध्यान दीजिए कि सभी वर्गों को समान मूल्य के सिक्कों का ही प्रयोग करना चाहिए। सिक्कों को उछालते समय ऐसा प्रतीत होना चाहिए कि सभी वर्गों द्वारा केवल एक ही सिक्का उछाला जा रहा है।)

अब श्यामपट्ट पर सारणी 15.2 की भाँति एक सारणी बनाइए। पहले वर्ग 1 अपना प्रेक्षण लिख सकता है और परिणामी भिन्नों का परिकलन कर सकता है। इसके बाद वर्ग 2 अपना प्रेक्षण लिख सकता है, परन्तु उसे भिन्नों का परिकलन वर्ग 1 और वर्ग 2 के संयोजित

आंकड़ों के लिए करना होगा, और इसी प्रकार इस प्रक्रिया को आगे बढ़ाते जाइए। [हम इन भिन्नों को *संचयी भिन्न* (cumulative fractions) कह सकते हैं।] हमने एक कक्षा के विद्यार्थियों द्वारा किए गए प्रेक्षणों के आधार पर सारणी में प्रथम तीन पंक्तियाँ लिखी हैं।

सारणी 15.2

| वर्ग (1) | चितों की संख्या (2) | पटों की संख्या (3) | चितों की संचयी संख्या / सिक्का उछालने की कुल संख्या (4) | पटों की संचयी संख्या / सिक्का उछालने की कुल संख्या (5) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 12 | $\frac{3}{15}$ | $\frac{12}{15}$ |
| 2 | 7 | 8 | $\frac{7+3}{15+15}=\frac{10}{30}$ | $\frac{8+12}{15+15}=\frac{20}{30}$ |
| 3 | 7 | 8 | $\frac{7+10}{15+30}=\frac{17}{45}$ | $\frac{8+20}{15+30}=\frac{28}{45}$ |
| 4 | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

इस सारणी में आप क्या देखते हैं? आप देखते हैं कि सिक्के के उछालने की संख्या में वृद्धि होने पर स्तंभ (4) और (5) के भिन्नों के मान 0.5 के और निकट होते जाते हैं।

**क्रियाकलाप 3 :** (i) एक पासे* को 20 बार फेंकिए और पासे पर जो संख्या जैसे 1, 2, 3, 4, 5, 6 जितनी बार आती है उसे लिखते जाइए। अपने प्रेक्षणों को सारणी में लिखिए जैसा, कि सारणी 15.3 में दिया है।

सारणी 15.3

| पासा फेंकने की संख्या | पासे पर इन अंकों के आने की संख्या | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 20 | | | | | | |

*पासा एक संतुलित घन होता है जिसमें छः फलक होते हैं, जिन पर 1 से 6 तक की संख्या अंकित होती है। एक फलक पर केवल एक संख्या अंकित होती है। कभी-कभी फलकों पर संख्या के स्थान पर उतने ही बिन्दु बने होते हैं।

निम्नलिखित भिन्नों के मान ज्ञात कीजिए :

$$\frac{\text{पासे पर 1 के आने की संख्या}}{\text{पासा फेंकने की कुल संख्या}}$$

$$\frac{\text{पासे पर 2 के आने की संख्या}}{\text{पासा फेंकने की कुल संख्या}}$$

⋮

$$\frac{\text{पासे पर 6 के आने की संख्या}}{\text{पासा फेंकने की कुल संख्या}}$$

(ii) अब पासे को 40 बार फेंकिए, प्रेक्षणों को लिख लीजिए और (i) की भांति भिन्नों को परिकलित कीजिए।

आप देखेंगे कि पासे के फेंकने की संख्या में वृद्धि होने के साथ-साथ (i) और (ii) में परिकलित किए गए प्रत्येक भिन्न का मान $\frac{1}{6}$ के और निकट आता जाता है।

इसे देखने के लिए आप एक सामूहिक क्रियाकलाप उसी प्रकार कर सकते हैं जिस प्रकार आपने क्रियाकलाप 2 में किया है। आप अपनी कक्षा के विद्यार्थियों को छोटे-छोटे वर्गों में बाँट दीजिए। प्रत्येक वर्ग के एक विद्यार्थी को एक पासा दस बार फेंकने के लिए कहिए। प्रेक्षणों को लिख लीजिए और संचयी भिन्न परिकलित कर लीजिए।

संख्या 1 के लिए भिन्नों के मान सारणी 15.4 में लिखे जा सकते हैं। इस सारणी में ही दूसरी संख्याओं से संबंधित भिन्नों को भी लिखा जा सकता है या अन्य संख्याओं के लिए इसी प्रकार की अन्य सारणियाँ भी बनाई जा सकती हैं।

**सारणी 15.4**

| **वर्ग** (1) | **एक वर्ग में एक पासे के फेंके जाने की कुल संख्या** (2) | $\frac{\text{1 के आने की संचयी संख्या}}{\text{पासे के फेंके जाने की कुल संख्या}}$ (3) |
|---|---|---|
| 1 | — | — |
| 2 | — | — |
| 3 | — | — |
| 4 | — | — |

सभी वर्गों में प्रयुक्त पासे लगभग समान रूप और समान साइज के होना चाहिए। तब ऐसा मान लिया जाएगा कि फेंके गए सभी पासे एक ही पासे द्वारा फेंके गए हैं।

इन सारणियों में आप क्या देखते हैं?

आप देखेंगे कि जैसे-जैसे पासा फेंके जाने की संख्या बढ़ती जाएगी, वैसे-वैसे स्तंभ (3) की भिन्नें $\frac{1}{6}$ के निकट होती जाएँगी।

**क्रियाकलाप 4 :** (i) दो सिक्कों को एक साथ दस बार उछालिए और अपने प्रेक्षणों को नीचे दी गई सारणी के रूप में लिखिए:

**सारणी 15.5**

| दो सिक्कों को उछालने की संख्या | चित न आने की संख्या | एक चित आने की संख्या | दो चित आने की संख्या |
|---|---|---|---|
| 10 | — | — | — |

भिन्नों के मान लिखिए :

$$A = \frac{\text{चित न आने की संख्या}}{\text{दो सिक्कों को उछालने की कुल संख्या}}$$

$$B = \frac{\text{एक चित आने की संख्या}}{\text{दो सिक्कों को उछालने की कुल संख्या}}$$

$$C = \frac{\text{दो चित आने की संख्या}}{\text{दो सिक्कों को उछालने की कुल संख्या}}$$

इन भिन्नों के मान परिकलित कीजिए।

अब (क्रियाकलाप 2 की भाँति) सिक्का उछालने की संख्या बढ़ाइए। आप देखेंगे कि उछालने की संख्या जितनी बढ़ती जाएगी, उतने ही A, B और C के मान क्रमश: 0.25, 0.5 और 0.25 के निकट होते जाएँगे।

क्रियाकलाप 1 में, सिक्के की प्रत्येक उछाल को एक *अभिप्रयोग* (trial) कहा जाता है। इसी प्रकार, क्रियाकलाप 3 में पासे की प्रत्येक फेंक को एक *अभिप्रयोग* कहा जाता है तथा क्रियाकलाप 4 में दो सिक्कों को एक साथ उछालने की प्रत्येक उछाल को भी एक अभिप्रयोग कहा जाता है।

अतः, *अभिप्रयोग एक क्रिया है जिससे एक या अधिक परिणाम प्राप्त होते हैं।* क्रियाकलाप 1 में संभव परिणाम चित और पट थे, जबकि क्रियाकलाप 3 में संभव परिणाम 1, 2, 3, 4, 5 और 6 थे।

क्रियाकलाप 1 में, एक विशेष उछाल पर एक चित का आना *परिणाम चित वाली एक घटना* (*event*) है। इसी प्रकार, *एक पट का आना परिणाम पट वाली एक घटना है।* क्रियाकलाप 2 में, एक विशेष संख्या, मान लीजिए 1, का आना परिणाम 1 वाली एक घटना है।

यदि हमारा प्रयोग पासा फेंकने पर एक सम संख्या प्राप्त करना हो, तो घटना में तीन परिणाम 2, 4 और 6 होंगे।

अतः, *एक प्रयोग में घटना प्रयोग के कुछ परिणामों का संग्रह होती है।* उच्च कक्षाओं में, आप घटना की औपचारिक परिभाषा का अध्ययन करेंगे।

अतः, क्या अब आप यह बता सकते हैं कि क्रियाकलाप 4 में घटनाएँ कौन-कौन सी हैं?

इस पृष्ठभूमि के साथ, आइए अब हम देखें कि प्रायिकता क्या होती है। अपने अभिप्रयोगों के परिणामों को सीधे देखने पर हम *प्रायोगिक* (*experimental*) या *आनुभविक* (*empirical*) प्रायिकता प्राप्त करते हैं।

मान लीजिए अभिप्रयोगों की कुल संख्या $n$ है। घटना E के घटने की *आनुभविक प्रायिकता* (*empirical probability*) निम्न से परिभाषित है :

$$P(E) = \frac{\text{अभिप्रयोगों की संख्या जिनमें घटना घटी है}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$$

इस अध्याय में, हम आनुभविक प्रायिकता ज्ञात करेंगे। तथा सुविधा के लिए आनुभविक प्रायिकता के स्थान पर केवल 'प्रायिकता' का प्रयोग करेंगे।

आइए हम कुछ उदाहरण लें।

आइए सबसे पहले हम क्रियाकलाप 2 पर वापिस आ जाएँ और सारणी 15.2 लें। इस सारणी के स्तंभ (4) में वह भिन्न क्या है जिसे आपने परिकलित किया है? जो परिकलित किया है वह और कुछ नहीं है, अपितु चित प्राप्त करने की आनुभविक प्रायिकता है। ध्यान दीजिए कि अभिप्रयोगों की संख्या और इन अभिप्रयोगों में चित आने की संख्या के अनुसार प्रायिकता में परिवर्तन होता रहता है। इसी प्रकार, पट आने की आनुभविक प्रायिकता सारणी 15.2 के स्तंभ (5) में प्राप्त की गई है। प्रारंभ में यह $\frac{12}{15}$ है, इसके बाद $\frac{2}{3}$ है और फिर $\frac{28}{45}$ है, आदि-आदि।

अत:, आनुभविक प्रायिकता किए गए अभिप्रयोगों की संख्या और इन अभिप्रयोगों में प्राप्त हुए परिणामों की संख्या पर निर्भर करती है।

**क्रियाकलाप 5 :** आगे अध्ययन करने से पहले, उन सारणियों को देखें जिन्हें आपने क्रियाकलाप 3 करते समय बनाया था। एक पासे को अनेक बार फेंकने पर 3 के आने की प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए। साथ ही, यह भी दिखाइए कि अभिप्रयोगों की संख्या बढ़ाने पर इसमें किस प्रकार परिवर्तन होता है।

आइए अब हम कुछ अन्य उदाहरण लें।

**उदाहरण 1 :** एक सिक्के को 1000 बार उछालने पर निम्नलिखित बारंबारताएँ प्राप्त होती हैं:

चित : 455, पट : 545

प्रत्येक घटना की प्रायिकता अभिकलित कीजिए।

**हल :** क्योंकि सिक्के को 1000 बार उछाला गया है, इसलिए अभिप्रयोगों की कुल संख्या 1000 है। मान लीजिए हम एक चित के आने की घटना को E से और एक पट के आने की घटना को F से प्रकट करते हैं। तब E के घटने की संख्या, अर्थात् चित के आने की संख्या 455 है।

इसलिए, $$\text{E की प्रायिकता} = \frac{\text{चितों के आने की संख्या}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$$

अर्थात् $$P(E) = \frac{455}{1000} = 0.455$$

इसी प्रकार, $$\text{एक पट के आने की घटना की प्रायिकता} = \frac{\text{पटों के आने की संख्या}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$$

अर्थात् $$P(F) = \frac{545}{1000} = 0.545$$

ध्यान दीजिए कि $P(E) + P(F) = 0.455 + 0.545 = 1$ है, तथा प्रत्येक अभिप्रयोग में E और F ही केवल दो संभव परिणाम हैं।

**उदाहरण 2 :** दो सिक्कों को एक साथ 500 बार उछालने पर, हमें यह प्राप्त होता है

दो चित : 105 बार

एक चित : 275 बार

कोई भी चित नहीं : 120 बार

इनमें से प्रत्येक घटना के घटने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

**हल :** आइए हम दो चितों के आने की घटना को $E_1$ से, एक चित के आने की घटना को $E_2$ से और कोई भी चित न आने की घटना को $E_3$ से प्रकट करें।

अत:,
$$P(E_1) = \frac{105}{500} = 0.21$$
$$P(E_2) = \frac{275}{500} = 0.55$$
$$P(E_3) = \frac{120}{500} = 0.24$$

**यहाँ आप यह देख सकते हैं कि $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 1$ है। साथ ही, $E_1$, $E_2$ और $E_3$ में एक अभिप्रयोग के सभी परिणाम आ जाते हैं।**

**उदाहरण 3 :** एक पासे को 1000 बार फेंकने पर प्राप्त परिणामों 1, 2, 3, 4, 5 और 6 की बारंबारताएँ सारणी 15.6 में दी गई हैं :

**सारणी 15.6**

| परिणाम | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| बारंबारता | 179 | 150 | 157 | 149 | 175 | 190 |

प्रत्येक परिणाम के प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

**हल :** मान लीजिए $E_i$ परिणाम $i$ के प्राप्त होने की घटना को प्रकट करता है, जहाँ $i = 1$, 2, 3, 4, 5, 6 है। तब,

$$\text{परिणाम 1 की प्रायिकता} = P(E_1) = \frac{\text{1 की बारंबारता}}{\text{पासा फेंकने की कुल संख्या}}$$
$$= \frac{179}{1000} = 0.179$$

इसी प्रकार, $P(E_2) = \frac{150}{1000} = 0.15$, $P(E_3) = \frac{157}{1000} = 0.157$, $P(E_4) = \frac{149}{1000} = 0.149$,

$P(E_5) = \frac{175}{1000} = 0.175$ और $P(E_6) = \frac{190}{1000} = 0.19$ है।

**ध्यान दीजिए कि $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) + P(E_5) + P(E_6) = 1$ है।**

साथ ही, यह भी देखिए कि:

(i) प्रत्येक घटना की प्रायिकता 0 और 1 के बीच होती है।

(ii) सभी प्रायिकताओं का योगफल 1 होता है।

(iii) $E_1, E_2, \ldots, E_6$ में एक अभिप्रयोग के सभी संभव परिणाम आ जाते हैं।

**उदाहरण 4 :** एक टेलीफोन निर्देशिका के एक पृष्ठ पर 200 टेलीफोन नंबर हैं। उनके इकाई स्थान वाले अंक का बारंबारता बंटन (उदाहरण के लिए संख्या 25828573 में इकाई के स्थान पर अंक 3 है) सारणी 15.7 में दिया गया है :

**सारणी 15.7**

| **अंक** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **बारंबारता** | 22 | 26 | 22 | 22 | 20 | 10 | 14 | 28 | 16 | 20 |

पृष्ठ को देखे बिना, इन संख्याओं में से किसी एक संख्या पर अपनी पेंसिल रख दीजिए, अर्थात् संख्या को यादृच्छया चुना गया है। इकाई के स्थान पर अंक 6 के होने की प्रायिकता क्या होगी?

**हल :** इकाई के स्थान पर अंक 6 के होने की प्रायिकता

$$= \frac{6 \text{ की बारंबारता}}{\text{चुनी गए टेलीफोन नंबरों की कुल संख्या}}$$

$$= \frac{14}{200} = 0.07$$

इसी प्रकार, आप उन संख्याओं के आने की प्रायिकता प्राप्त कर सकते हैं जिनमें इकाई के स्थान पर कोई अन्य अंक हो।

**उदाहरण 5 :** एक मौसम केंद्र के रिकार्ड को देखने से पता चलता है कि पिछले 250 क्रमागत दिनों में किए गए मौसम पूर्वानुमानों में से 175 बार उसके पूर्वानुमान सही रहे हैं।

(i) एक दिए हुए दिन पर पूर्वानुमान के सही होने की प्रायिकता क्या होगी?

(ii) दिए हुए दिन पर पूर्वानुमान के सही न होने की प्रायिकता क्या होगी?

**हल :** दिनों की कुल संख्या जिनके रिकार्ड उपलब्ध हैं = 250

(i) P(दिए हुए दिन पर पूर्वानुमान सही था)

$$= \frac{\text{उन दिनों की संख्या जिस दिन का पूर्वानुमान सही था}}{\text{उन दिनों की कुल संख्या जिनके रिकार्ड उपलब्ध हैं}}$$

$$= \frac{175}{250} = 0.7$$

(ii) उन दिनों की संख्या जिस दिन का पूर्वानुमान सही नहीं था = 250 – 175 = 75

अत:, P(दिए हुए दिन पर पूर्वानुमान सही नहीं था) = $\frac{75}{250} = 0.3$

**ध्यान दीजिए कि :**

**P(दिए हुए दिन का पूर्वानुमान सही था) + P(दिए हुए दिन का पूर्वानुमान सही नहीं था)**

$= 0.7 + 0.3 = 1$

**उदाहरण 6 :** टायर बनाने वाली एक कंपनी तय की गई उन दूरियों का एक रिकार्ड रखती थी, जिसके पहले टायर को बदल देने की आवश्यकता पड़ी। सारणी में 1000 स्थितियों के परिणाम दिखाए गए हैं।

**सारणी 15.8**

| **दूरी (km में)** | 4000 से कम | 4000 से 9000 तक | 9001 से 14000 तक | 14000 से अधिक |
|---|---|---|---|---|
| **बारंबारता** | 20 | 210 | 325 | 445 |

यदि आप इस कंपनी से एक टायर खरीदते हैं, तो इस बात की प्रायिकता क्या होगी कि

(i) 4000 km की दूरी तय करने से पहले ही इसे बदलना आवश्यक होगा?

(ii) यह 9000 km से भी अधिक दूरी तक चलेगा?

(iii) 4000 km और 14000 km के बीच की कोई दूरी तय करने के बाद इसे बदलना आवश्यक होगा?

**हल :** अभिप्रयोगों की कुल संख्या = 1000

(i) उस टायर की बारंबारता, जिसे 4000 km की दूरी तय करने से पहले बदलना आवश्यक हो, 20 है।

अत:, P(4000 km की दूरी तय करने से पहले टायर बदलना आवश्यक हो)

$$= \frac{20}{1000} = 0.02$$

(ii) उस टायर की बारंबारता जो 9000 km से भी अधिक दूरी तय करेगा

$$= 325 + 445 = 770$$

अत:, P(टायर 9000 km से भी अधिक दूरी तक चलेगा) $= \frac{770}{1000} = 0.77$

(iii) उस टायर की बारंबारता जिसे 4000 km और 14000 km के बीच की कोई दूरी तय कर लेने के बाद बदलना आवश्यक होगा $= 210 + 325 = 535$

अत:, P(4000 km और 14000 km के बीच की कोई दूरी तय करने के बाद टायर को बदलना आवश्यक हो) $= \frac{535}{1000} = 0.535$

उदाहरण 7 : एक विद्यार्थी द्वारा मासिक यूनिट परीक्षा में प्राप्त किए गए अंकों का प्रतिशत नीचे दिया गया है:

सारणी 15.9

| यूनिट परीक्षा | I | II | III | IV | V |
|---|---|---|---|---|---|
| प्राप्त अंकों का प्रतिशत | 69 | 71 | 73 | 68 | 74 |

इन आंकड़ों के आधार पर इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि एक यूनिट परीक्षा में वह विद्यार्थी 70% से अधिक अंक प्राप्त करता है।

हल : ली गई यूनिट परीक्षाओं की कुल संख्या 5 है।

उन यूनिट परीक्षाओं की संख्या, जिनमें विद्यार्थी 70% से अधिक अंक प्राप्त करता है, 3 है।

अत:, P(70% से अधिक अंक प्राप्त करना) $= \frac{3}{5} = 0.6$



Downloaded from https:// www.studiestoday.com

**उदाहरण 8 :** एक बीमा कंपनी ने आयु और दुर्घटनाओं के बीच के संबंध को ज्ञात करने के लिए एक विशेष नगर के 2000 ड्राइवरों का यदृच्छया चयन किया (किसी ड्राइवर को कोई विशेष वरीयता दिए बिना)। प्राप्त किए गए आंकड़े नीचे सारणी में दिए गए हैं :

**सारणी 15.10**

| ड्राइवरों की आयु (वर्षों में) | एक वर्ष में घटी दुर्घटनाएँ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **0** | **1** | **2** | **3** | **3 से अधिक** |
| 18 - 29 | 440 | 160 | 110 | 61 | 35 |
| 30 - 50 | 505 | 125 | 60 | 22 | 18 |
| 50 से अधिक | 360 | 45 | 35 | 15 | 9 |

नगर से यदृच्छया चुने गए एक ड्राइवर के लिए निम्नलिखित घटनाओं की प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए :

(i) 18–29 वर्ष की आयु का जिसके साथ एक वर्ष में ठीक-ठीक 3 दुर्घटनाएँ घटी हैं।

(ii) 30–50 वर्ष की आयु का जिसके साथ एक वर्ष में एक या अधिक दुर्घटनाएँ घटी हैं।

(iii) जिसके साथ एक वर्ष में कोई दुर्घटना नहीं घटी।

**हल :** ड्राइवरों की कुल संख्या = 2000

(i) उन ड्राइवरों की संख्या, जिनकी आयु 18–29 वर्ष है और जिनके साथ एक वर्ष में ठीक-ठीक तीन दुर्घटनाएँ घटी हैं, 61 है।

अतः, P (ड्राइवर 18–29 वर्ष का हो जिसके साथ ठीक-ठीक तीन दुर्घटनाएँ घटी)

$$= \frac{61}{2000}$$

$$= 0.0305 \approx 0.031$$

(ii) उन ड्राइवरों की संख्या, जिनकी आयु 30–50 वर्ष है और जिनके साथ एक वर्ष में एक या अधिक दुर्घटनाएँ घटी हैं, 125 + 60 + 22 + 18, अर्थात् 225 है।

अतः, P (ड्राइवर 35–50 वर्ष का हो और जिसके साथ एक या अधिक दुर्घटनाएँ घटी हैं)

$$= \frac{225}{2000} = 0.1125 \approx 0.113$$

(iii) उन ड्राइवरों की संख्या जिनके साथ एक वर्ष में कोई दुर्घटना नहीं घटी $= 440 + 505 + 360 = 1305$

अतः, P(ड्राइवर जिनके साथ कोई दुर्घटना नहीं घटी) $= \frac{1305}{2000} = 0.653$

**उदाहरण 9 :** बारंबारता बंटन सारणी (अध्याय 14 के उदाहरण 4 की सारणी 14.3) लीजिए जिसमें एक कक्षा के 38 विद्यार्थियों के भार दिए गए हैं।

(i) इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए जिसमें कक्षा के एक विद्यार्थी का भार (kg में) अंतराल 46–50 स्थित हो।

(ii) इस संदर्भ में ऐसी दो घटनाएँ बताइए जिनमें एक की प्रायिकता 0 हो और दूसरी की प्रायिकता 1 हो।

**हल :** (i) विद्यार्थियों की कुल संख्या 38 है और 40–50 kg के भार वाले विद्यार्थियों की संख्या 3 है।

अतः, P (विद्यार्थी का भार 46–50 kg है) $= \frac{3}{38} = 0.079$

(ii) उदाहरण के लिए वह घटना लीजिए जिसमें विद्यार्थी का भार 30 kg है। क्योंकि किसी भी विद्यार्थी का भार 30 kg नहीं है, इसलिए इस घटना के घटने की प्रायिकता 0 होगी। इसी प्रकार, एक विद्यार्थी का 30 kg से अधिक भार होने की प्रायिकता $\frac{38}{38} = 1$ है।

**उदाहरण 10 :** बीजों के 5 थैलों में से प्रत्येक थैले से पचास बीज यदृच्छया चुनकर उन्हें ऐसी मानकीकृत अवस्थाओं में रखा गया जो अंकुरण के अनुकूल हैं। 20 दिन बाद प्रत्येक संग्रह में अंकुरित हुए बीजों की संख्या गिन कर नीचे दर्शाए अनुसार एक सारणी में लिखी गई।

**सारणी 15.11**

| थैला | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| अंकुरित बीजों की संख्या | 40 | 48 | 42 | 39 | 41 |

निम्नलिखित बीजों के अंकुरण की प्रायिकता क्या है?

(i) एक थैले में 40 से अधिक बीज?

(ii) एक थैले में 49 बीज

(iii) एक थैले में 35 से अधिक बीज

**हल :** थैलों की कुल संख्या 5 है।

(i) उन थैलों की संख्या, जिनमें 50 बीजों में से 40 से अधिक बीज अंकुरित हुए है, 3 हैं।

अत:, P(एक थैले में 40 से अधिक बीजों का अंकुरण) $= \frac{3}{5} = 0.6$

(ii) उन थैलों की संख्या जिनमें 49 बीज अंकुरित हुए हैं, 0 है।

अत:, P(एक थैले के 49 बीजों का अंकुरण) $= \frac{0}{5} = 0$

(iii) उन थैलों की संख्या, जिनमें 35 से अधिक बीज अंकुरित हुए हैं, 5 है।

अत:, अपेक्षित प्रायिकता $= \frac{5}{5} = 1$

**टिप्पणी :** ऊपर दिए गए सभी उदाहरणों में इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि किसी घटना की प्रायिकता 0 से 1 तक की कोई भी भिन्न हो सकती है।

## प्रश्नावली 15.1

1. एक क्रिकेट मैच में, एक महिला बल्लेबाज खेली गई 30 गेदों में 6 बार चौका मारती है। चौका न मारे जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

2. 2 बच्चों वाले 1500 परिवारों का यदृच्छया चयन किया गया है और निम्नलिखित आंकड़े लिख लिए गए हैं :

| परिवार में लड़कियों की संख्या | 2 | 1 | 0 |
|---|---|---|---|
| परिवारों की संख्या | 475 | 814 | 211 |

यदृच्छया चुने गए उस परिवार की प्रायिकता ज्ञात कीजिए, जिसमें

(i) दो लड़कियाँ हों (ii) एक लड़की हो (iii) कोई लड़की न हो

साथ ही, यह भी जाँच कीजिए कि इन प्रायिकताओं का योगफल 1 है या नहीं।

**3.** अध्याय 14 के अनुच्छेद 14.4 का उदाहरण 5 लीजिए। कक्षा के किसी एक विद्यार्थी का जन्म अगस्त में होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

**4.** तीन सिक्कों को एक साथ 200 बार उछाला गया है तथा इनमें विभिन्न परिणामों की बारंबारताएँ ये हैं:

| **परिणाम** | 3 चित | 2 चित | 1 चित | कोई भी चित नहीं |
|---|---|---|---|---|
| **बारंबारता** | 23 | 72 | 77 | 28 |

यदि तीनों सिक्कों को पुन: एक साथ उछाला जाए, तो दो चित के आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

**5.** एक कंपनी ने यदृच्छया 2400 परिवार चुनकर एक घर की आय स्तर और वाहनों की संख्या के बीच संबंध स्थापित करने के लिए उनका सर्वेक्षण किया। एकत्रित किए गए आंकड़े नीचे सारणी में दिए गए हैं:

| **मासिक आय (₹ में)** | **प्रति परिवार वाहनों की संख्या** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **0** | **1** | **2** | **2 से अधिक** |
| 7000 से कम | 10 | 160 | 25 | 0 |
| 7000 – 10000 | 0 | 305 | 27 | 2 |
| 10000 – 13000 | 1 | 535 | 29 | 1 |
| 13000 – 16000 | 2 | 469 | 59 | 25 |
| 16000 या इससे अधिक | 1 | 579 | 82 | 88 |

मान लीजिए एक परिवार चुना गया है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि चुने गए परिवार

(i) की आय ₹ 10000-13000 प्रति माह है और उसके पास ठीक-ठीक दो वाहन हैं।

(ii) की आय प्रति माह ₹ 16000 या इससे अधिक है और उसके पास ठीक 1 वाहन है।

(iii) की आय ₹ 7000 प्रति माह से कम है और उसके पास कोई वाहन नहीं है।

(iv) की आय 13000–16000 रु प्रति माह है और उसके पास 2 से अधिक वाहन है।

(v) जिसके पास 1 से अधिक वाहन नहीं है।

**6.** अध्याय 14 की सारणी 14.7 लीजिए।

(i) गणित की परीक्षा में एक विद्यार्थी द्वारा 20% कम अंक प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(ii) एक विद्यार्थी द्वारा 60 या इससे अधिक अंक प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

**7.** *सांख्यिकी* के बारे में विद्यार्थियों का मत जानने के लिए 200 विद्यार्थियों का सर्वेक्षण किया गया। प्राप्त आंकड़ों को नीचे दी गई सारणी में लिख लिया गया है:

| मत | विद्यार्थियों की संख्या |
|---|---|
| पसंद करते हैं | 135 |
| पसंद नहीं करते हैं | 65 |

प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यदृच्छया चुना गया विद्यार्थी

(i) सांख्यिकी पसंद करता है (ii) सांख्यिकी पसंद नहीं करता है।

**8.** प्रश्नावली 14.2 का प्रश्न 2 देखिए। इसकी आनुभविक प्रायिकता क्या होगी कि इंजीनियर

(i) अपने कार्यस्थल से 7 km से कम दूरी पर रहती है?

(ii) अपने कार्यस्थल से 7 km या इससे अधिक दूरी पर रहती है?

(iii) अपने कार्यस्थल से $\frac{1}{2}$ km या इससे कम दूरी पर रहती है?

**9.** **क्रियाकलाप :** अपने विद्यालय के गेट के सामने से एक समय-अंतराल में गुजरने वाले दो पहिया, तीन पहिया और चार पहिया वाहनों की बारंबारता लिख लीजिए। आप द्वारा देखे गए वाहनों में से किसी एक वाहन का दो पहिया वाहन होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

**10.** **क्रियाकलाप :** आप अपनी कक्षा के विद्यार्थियों से एक 3 अंक वाली संख्या लिखने को कहिए। आप कक्षा से एक विद्यार्थी को यदृच्छया चुन लीजिए। इस बात की प्रायिकता क्या होगी कि उसके द्वारा लिखी गई संख्या 3 से भाज्य है? याद रखिए कि कोई संख्या 3 से भाज्य होती है, यदि उसके अंकों का योग 4 से भाज्य हो।

**11.** आटे की उन ग्यारह थैलियों में, जिन पर 5 kg अंकित है, वास्तव में आटे के निम्नलिखित भार (kg में) हैं:

4.97 5.05 5.08 5.03 5.00 5.06 5.08 4.98 5.04 5.07 5.00

यदृच्छया चुनी गई एक थैली में 5 kg से अधिक आटा होने की प्रायिकता क्या होगी?

**12.** प्रश्नावली 14.2 के प्रश्न 5 में आपसे 30 दिनों तक एक नगर की प्रति वायु में सल्फर डाई-आक्साइड की भाग प्रति मिलियन में सांद्रता से संबंधित एक बारंबारता बंटन सारणी बनाने के लिए कहा गया था। इस सारणी की सहायता से इनमें से किसी एक दिन अंतराल (0.12-0.16) में सल्फर डाई-ऑक्साइड के सांद्रण होने की की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

**13.** प्रश्नावली 14.2 के प्रश्न 1 में आपसे एक कक्षा के 30 विद्यार्थियों के रक्त-समूह से संबंधित बारंबारता बंटन सारणी बनाने के लिए कहा गया था। इस सारणी की सहायता से इस कक्षा से यदृच्छया चुने गए एक विद्यार्थी का रक्त समूह AB होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

## 15.3 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है:

1. एक प्रयोग की एक घटना प्रयोग के कुछ परिणामों का संग्रह होती है।
2. एक घटना E की आनुभविक (या प्रायोगिक) प्रायिकता P(E) है:

$$P(E) = \frac{\text{अभिप्रयोगों की संख्या जिनमें E घटी है}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$$

3. किसी घटना के घटने की प्रायिकता 0 और 1 के बीच (जिसमें 0 और 1 सम्मिलित हैं) होती है।

**परिशिष्ट 2**

# गणितीय निदर्शन का परिचय



## A2.1 भूमिका

आप प्रारंभिक कक्षाओं से ही, अपने वास्तविक जगत से जुड़ी समस्याएँ हल करते आए हैं। उदाहरण के लिए, आपने साधारण ब्याज के प्रश्न संबंधित सूत्र का प्रयोग करके हल किए हैं। यह सूत्र (या समीकरण) ब्याज और इससे संबंधित अन्य तीन राशियों अर्थात् मूलधन, ब्याज-दर और अवधि के बीच का एक संबंध है। यह सूत्र **गणितीय प्रतिरूप** या **निदर्श (mathematical model)** का एक उदाहरण है। **गणितीय निदर्श** (**प्रतिरूप**) एक गणितीय संबंध होता है जो वास्तविक जीवन से जुड़ी किसी स्थिति की व्याख्या करता है।

गणितीय निदर्शों का प्रयोग वास्तविक जीवन से जुड़ी अनेक स्थितियों का हल ज्ञात करने में किया जाता है, जैसे

- उपग्रह छोड़ना।
- मानसून के आने की प्रागुक्ति करना।
- वाहनों से होने वाले प्रदूषण को नियंत्रित करना।
- बड़े शहरों में ट्रैफिक जाम को कम करना।

इस अध्याय में, हम आपको गणितीय निदर्श बनाने के प्रक्रम से, जिसे **गणितीय प्रतिरूपण** या **गणितीय निदर्शन (mathematical modelling)** कहा जाता है, परिचित कराएँगे। गणितीय निदर्शन में हम वास्तविक जीवन से जुड़ी एक समस्या लेते हैं और इसे एक तुल्य गणितीय समस्या के रूप में लिखते हैं। फिर हम गणितीय समस्या का हल करते हैं और इसके हल का निर्वचन (की व्याख्या) वास्तविक जीवन से जुड़ी समस्या के पदों में करते हैं। इसके बाद, हम देखते हैं कि यह हल वास्तविक जीवन से जुड़ी समस्या के संदर्भ में, किस सीमा तक मान्य है। अतः, गणितीय निदर्शन में लागू होने वाले *चरण* होते हैं: *सूत्रण* (*formulation*), *हल* (*solution*), निर्वचन (*व्याख्या*) (*interpretation*) और *मान्यकरण* (*validation*)।

सबसे पहले हम उस प्रक्रम को लेंगे जिसका प्रयोग आप अनुच्छेद A2.2 में शब्द-समस्याओं को हल करने में करेंगे। यहाँ हम कुछ शब्द-समस्याओं पर चर्चा करेंगे जो आपके द्वारा पिछली कक्षाओं में हल की गई समस्याओं के समान हैं। बाद में चलकर आप यह देखेंगे कि जिन चरणों का प्रयोग आपने शब्द-समस्याओं को हल करने में किया है, उनमें से कुछ चरणों का प्रयोग गणितीय निदर्शन में भी किया जाता है।

अगले अनुच्छेद अर्थात् A2.3 में हम कुछ सरल निदर्शों (models) पर चर्चा करेंगे।

अनुच्छेद A 2.4 में हम निदर्शन के समग्र प्रक्रम (overall process) उसके लाभ और उसकी कुछ सीमाओं पर चर्चा करेंगे।

## A2.2 शब्द समस्याओं का पुनर्विलोकन

इस अनुच्छेद में, हम कुछ शब्द-समस्याओं पर चर्चा करेंगे जो उन समस्याओं के समान हैं जिन्हें आप पिछली कक्षाओं में हल कर चुके हैं। आइए हम सबसे पहले अनुक्रमानुपाती विचरण से संबंधित एक समस्या लें।

**उदाहरण 1 :** मैंने अपनी कार से 432 km की दूरी तय की और इसमें 48 लीटर पेट्रोल लगा। मुझे अपनी कार से उस स्थान तक जाना है जो 180 km दूर है। इसके लिए मुझे कितने पेट्रोल की आवश्यकता होगी?

**हल :** यहाँ हम इस समस्या को हल करने में प्रयुक्त चरणों का उल्लेख करेंगे।

**चरण 1 : सूत्रण :** हम जानते हैं कि हम जितनी अधिक दूरी तय करेंगे उतने ही अधिक पेट्रोल की आवश्यकता होती है, अर्थात् पेट्रोल की मात्रा तय की गई दूरी के अनुक्रमानुपाती होगी।

432 km की दूरी तय करने के लिए आवश्यक पेट्रोल की मात्रा = 48 लीटर

180 km की दूरी तय करने के लिए आवश्यक पेट्रोल की मात्रा = ?

**गणितीय वर्णन :** मान लीजिए

$x$ = मेरे द्वारा तय की जाने वाली दूरी

$y$ = मेरे लिए आवश्यक पेट्रोल की मात्रा

$y$, $x$ के अनुक्रमानुपाती है।

अतः, $y = kx$, जहाँ $k$ एक अचर है।

मैं, 48 लीटर पेट्रोल में 432 km की दूरी तय कर सकता हूँ।

अतः, $y = 48, x = 432$

इसलिए, $k = \dfrac{y}{x} = \dfrac{48}{432} = \dfrac{1}{9}$

क्योंकि $y = kx$ है,

इसलिए $$y = \frac{1}{9}x \qquad (1)$$

समीकरण (या सूत्र) (1) आवश्यक पेट्रोल की मात्रा और तय की गई दूरी के बीच का संबंध बताती है।

चरण 2 : **हल :** हमें 180 km की दूरी तय करने के लिए आवश्यक पेट्रोल की मात्रा ज्ञात करनी है। अत: हमें $y$ का मान ज्ञात करना है, जबकि $x = 180$ है। समीकरण (1) में $x = 180$ रखने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$y = \frac{180}{9} = 20$$

चरण 3 : **निर्वचन ( व्याख्या ) :** क्योंकि $y = 20$ है, इसलिए 180 km की दूरी तय करने के लिए हमें 20 लीटर पेट्रोल की आवश्यकता होगी।

क्या यह बात आपकी समझ में आई है या नहीं कि सभी स्थितियों में सूत्र (1) को लागू नहीं किया जा सकता? उदाहरण के लिए, मान लीजिए कि 432 km वाला मार्ग पहाड़ों में होकर है और 180 km वाला मार्ग समतल मैदान में है। पहाड़ी मार्ग से तो कार में पेट्रोल की खपत कुछ तेज दर से होगी, परन्तु 180 km वाले मार्ग से कार में पेट्रोल की खपत इस दर से नहीं होगी, अपितु धीमी दर से होगी। अत: यह सूत्र तभी लागू होता है जबकि वे सभी स्थितियाँ जो उस दर को प्रभावित करती हैं जिससे दोनों यात्राओं में पेट्रोल की खपत दर समान हो। या, यदि स्थितियों में अंतर हो, तो कार के लिए आवश्यक पेट्रोल की मात्रा पर इस अंतर का प्रभाव बहुत कम होगा। केवल ऐसी स्थिति में ही पेट्रोल की खपत तय की गई दूरी के अनुक्रमानुपाती होगी। समस्या हल करते समय, हम इसे मान कर चलते हैं, अर्थात् इसे हम परिकल्पित कर लेते हैं।

उदाहरण 2 : मान लीजिए सुधीर ने 8% की साधारण वार्षिक ब्याज दर से ₹ 15000 निवेश किए हैं। निवेश से उसे जो धनराशि मिलती है उससे वह एक वाशिंग मशीन, जिसकी कीमत ₹ 19000 है, खरीदना चाहता है। बताइए कि वह कितनी अवधि के लिए ₹ 15000 निवेश करे जिससे कि वाशिंग मशीन खरीदने के लिए उसे पर्याप्त धनराशि प्राप्त हो जाए?

हल : चरण 1 : **समस्या का सूत्रण :** यहाँ हमें मूलधन और ब्याज-दर ज्ञात है। ब्याज वह धनराशि है जो कि वाशिंग मशीन खरीदने के लिए आवश्यक ₹ 15000 से अतिरिक्त धनराशि है। हमें वर्षों की संख्या ज्ञात करनी है।

**गणितीय वर्णन :** साधारण ब्याज का सूत्र $I = \frac{Pnr}{100}$ है,

जहाँ P = मूलधन

$n$ = वर्षों की संख्या

$r$ % = ब्याज-दर

I = अर्जित ब्याज

यहाँ मूलधन = ₹ 15000

सुधीर द्वारा वाशिंग मशीन खरीदने के लिए आवश्यक धन = ₹ 19000

अत:, अर्जित किया जाने वाला ब्याज = ₹ 19000 – 15000

= ₹ 4000

वर्षों की वह संख्या जिसमें ₹ 15000 की राशि जमा की गई है = $n$

8% की दर पर $n$ वर्षों में ₹ 15000 पर ब्याज = I

तब, $$\mathrm{I} = \frac{15000 \times n \times 8}{100}$$

अत:, $$\mathrm{I} = 1200\,n \qquad (1)$$

उपरोक्त से वर्षों की संख्या और ब्याज के बीच का संबंध प्राप्त हो जाता है, जबकि 8% की वार्षिक दर पर ₹ 15000 निवेश किए गए हों।

हमें वह अवधि ज्ञात करना है जिसमें अर्जित ब्याज ₹ 4000 है। समीकरण (1) में I = 4000 रखने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$4000 = 1200\,n \qquad (2)$$

चरण 2 : **समस्या का हल :** समीकरण (2) का हल करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$n = \frac{4000}{1200} = 3\frac{1}{3}$$

चरण 3 : **निर्वचन :** क्योंकि $n = 3\frac{1}{3}$ और एक वर्ष का तिहाई 4 महीने होते हैं, इसलिए 3 वर्ष और 4 महीने बाद सुधीर वाशिंग मशीन खरीद सकता है।

क्या आप उन परिकल्पनाओं का अनुमान लगा सकते हैं, जिन्हें आपको ऊपर के उदाहरण में करना है? हम यहाँ यह मान लेते हैं कि उस अवधि में भी ब्याज-दर वही बनी रहेगी जिसमें हम ब्याज परिकलित करते हैं, अन्यथा सूत्र $\mathrm{I} = \frac{\mathrm{P}nr}{100}$ लागू नहीं होगा। हमने यह भी मान लिया है कि उस समय तक वाशिंग मशीन की कीमत में कोई वृद्धि नहीं होती, जब तक कि सुधीर आवश्यक धनराशि एकत्रित नहीं कर लेता।

**उदाहरण 3 :** एक मोटर-बोट एक नदी में ऊर्ध्वप्रवाह (upstream) जाकर, नदी के किनारे बसे दो नगरों के बीच की दूरी छ: घंटे में तय करती है। यही दूरी वह अनुप्रवाह (downstream) पाँच घंटे में तय करती है। यदि धारा की चाल 2 km/h हो, तो शांत जल में बोट की चाल ज्ञात कीजिए।

**हल : चरण 1 : सूत्रण :** हमें नदी की धारा की चाल और दो स्थानों के बीच की दूरी तय करने का समय ज्ञात है। हमें शांत जल में बोट की चाल ज्ञात करनी है।

**गणितीय वर्णन :** मान लीजिए बोट की चाल $x$ km/h है, लिया गया समय $t$ घंटा है और तय की दूरी $y$ km/h है। तब,

$$y = tx \qquad (1)$$

है। मान लीजिए दो स्थानों के बीच की दूरी $d$ km है।

ऊर्ध्वप्रवाह जाने में बोट की वास्तविक चाल = बोट की चाल – धारा की चाल,

क्योंकि बोट नदी के प्रवाह के विरुद्ध जा रही है।

अत: ऊर्ध्वप्रवाह में, बोट की चाल = $(x – 2)$ km/h

यदि यह ऊर्ध्वप्रवाह दो नगरों के बीच की दूरी तय करने में 6 घंटे लेती हो, तो समीकरण (1) से हमें यह प्राप्त होता है:

$$d = 6(x – 2) \qquad (2)$$

अनुप्रवाह जाते समय बोट की चाल में नदी की चाल जोड़नी होती है।

अत: अनुप्रवाह में, बोट की चाल = $(x + 2)$ km/h

अनुप्रवाह इसी दूरी को तय करने में बोट 5 घंटा लेती है।

अत:, $$d = 5(x + 2) \qquad (3)$$

(2) और (3) से, हमें यह प्राप्त होता है:

$$5(x + 2) = 6(x – 2) \qquad (4)$$

**चरण 2 : हल ज्ञात करना**

समीकरण (4) को $x$ में हल करने पर, हमें $x = 22$ प्राप्त होता है।

**चरण 3 : निर्वचन**

क्योंकि $x = 22$ है, इसलिए शांत जल में मोटर-बोट की चाल 22 km/h होगी।

ऊपर के उदाहरण में, हम जानते हैं कि हर जगह नदी की चाल समान नहीं होती। किनारे के निकट यह धीरे प्रवाहित होती है और बीच धारा में तेज प्रवाहित होती है। बोट किनारे से चलना प्रारंभ करती है और नदी की बीच धारा की ओर जाती है। जब यह गंतव्य स्थान के निकट आ जाती है, तो इसकी चाल किनारे के निकट आते हुए कम होती जाती है। अत: बीच धारा में बोट की चाल और किनारे पर बोट की चाल में थोड़ा अंतर होता है। क्योंकि यह किनारे के निकट बहुत कम समय तक रहती

है, इसलिए नदी की चाल का यह अंतर केवल थोड़ी अवधि के लिए ही प्रभावित करता है। अतः नदी की चाल में हम इस अंतर की उपेक्षा कर सकते हैं। बोट की चाल में हुए थोड़े परिवर्तन की भी हम उपेक्षा कर सकते हैं। साथ ही, नदी की चाल के अतिरिक्त पानी (जल) और बोट की सतह के बीच का घर्षण भी बोट की वास्तविक चाल को प्रभावित करेगा। यहाँ भी हम यह मान लेते हैं कि यह प्रभाव बहुत कम है।

अतः यहाँ हम यह मान लेते हैं कि:

1. नदी की चाल और बोट की चाल पूरे समय अचर बनी रहती है।

2. बोट और पानी के बीच का घर्षण और वायु के कारण हो रहा घर्षण उपेक्षणीय है।

ऊपर की गई परिकल्पनाओं के आधार पर, हमने शांत जल में बोट की चाल ज्ञात की है।

जैसा कि ऊपर दी गई शब्द-समस्याओं में हमने देखा है कि एक शब्द-समस्या का हल करने में तीन चरण लागू होते हैं। ये चरण निम्नलिखित हैं :

1. **सूत्रण :** हम समस्या का विश्लेषण करते हैं और देखते हैं कि समस्या के हल में कौन-कौन से कारकों का अधिक प्रभाव है। ये **सुसंगत कारक (relevant factors)** कहलाते हैं। हमारे पहले उदाहरण में, सुसंगत कारक तय की गई दूरी और खपत किया गया पेट्रोल है। हमने मार्ग की अवस्था, चलाने की चाल जैसे अन्य कारकों की उपेक्षा कर ली है। अन्यथा समस्या इतनी कठिन हो जाएगी कि इसे हल करना अधिक कठिन हो जाएगा। जिन कारकों की हम उपेक्षा कर देते हैं, उन्हें **असंगत कारक (irrelevant factors)** कहा जाता है।

   तब हम एक या अधिक गणितीय समीकरणों के रूप में समस्या की गणितीयतः व्याख्या करते हैं।

2. **हल :** कुछ उपयुक्त विधियों की सहायता से चरण 1 में प्राप्त गणितीय समीकरणों को हल करके, हम समस्या का हल ज्ञात करते हैं।

3. **निर्वचन :** हम देखते हैं कि चरण 2 में प्राप्त हल का अर्थ मूल शब्द-समस्या के संदर्भ में क्या है।

यहाँ आपके लिए कुछ प्रश्न दिए जा रहे हैं। इन प्रश्नों के लिए ऊपर बताए गए तीन चरणों को लागू करके शब्द-समस्याओं को हल करने में जिन चरणों का प्रयोग किया जाता है, उन्हें आपने समझा है या नहीं। इसकी जाँच आप कर सकते हैं।

## प्रश्नावली A 2.1

नीचे दी गई प्रत्येक समस्या में स्पष्ट रूप से बताइए कि ऊपर दिए गए चरणों 1, 2 और 3 को लागू करने में सुसंगत और असंगत कौन-कौन से कारक हैं।

1. मान लीजिए एक कंपनी को कुछ समय के लिए एक कंप्यूटर की आवश्यकता है। कंपनी या तो ₹ 2000 प्रति माह की दर से कंप्यूटर किराए पर ले सकती है या ₹ 25000 में एक

कंप्यूटर खरीद सकती है। यदि कंपनी को लंबी अवधि तक कंप्यूटर का प्रयोग करना है, तो कंपनी को इतना किराया देना पड़ेगा कि इससे सस्ता तो यह होगा कि वह कंप्यूटर खरीद ले। इसके विपरीत, यदि कंपनी को थोड़े समय, अर्थात् केवल एक महीने के लिए ही कंप्यूटर का प्रयोग करना है, तो ऐसी स्थिति में किराए पर कंप्यूटर लेना अधिक सस्ता पड़ेगा। उन महीनों की संख्या बताइए जिसके बाद कंप्यूटर को खरीदना अधिक सस्ता पड़ेगा।

**2.** मान लीजिए एक कार स्थान A से चलना प्रारंभ करती है और वह एक अन्य स्थान B की ओर 40 km/h की चाल से जाती है। उसी समय एक अन्य कार स्थान B से चलना प्रारंभ करती है और वह A की ओर 30 km/h की चाल से जाती है। यदि A और B के बीच की दूरी 100 km है, तो बताइए कि कितने समय बाद एक कार दूसरी कार से मिलेगी।

**3.** पृथ्वी से चंद्रमा लगभग 384000 km की दूरी पर है और पृथ्वी के प्रति परिक्रमा करने का पथ लगभग वृत्तीय है। यह मानकर कि चंद्रमा पृथ्वी की परिक्रमा 24 घंटे में पूरा करता है, बताइए कि किस चाल से चंद्रमा पृथ्वी की परिक्रमा करेगा। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

**4.** एक परिवार उन महीनों में, जिनमें वह वाटर हीटर का प्रयोग नहीं करता, बिजली के लिए औसतन ₹ 1000 भुगतान करता है। जिन महीनों में वह वाटर हीटर का प्रयोग करता है, उन महीनों में बिजली का औसत बिल ₹ 1240 आता है। वाटर हीटर का प्रयोग करने की लागत ₹ 8 प्रति घंटा है। एक दिन में वाटर हीटर का प्रयोग जितने औसत घंटों के लिए किया जाता है उसे ज्ञात कीजिए।

## A2.3 कुछ गणितीय निदर्श

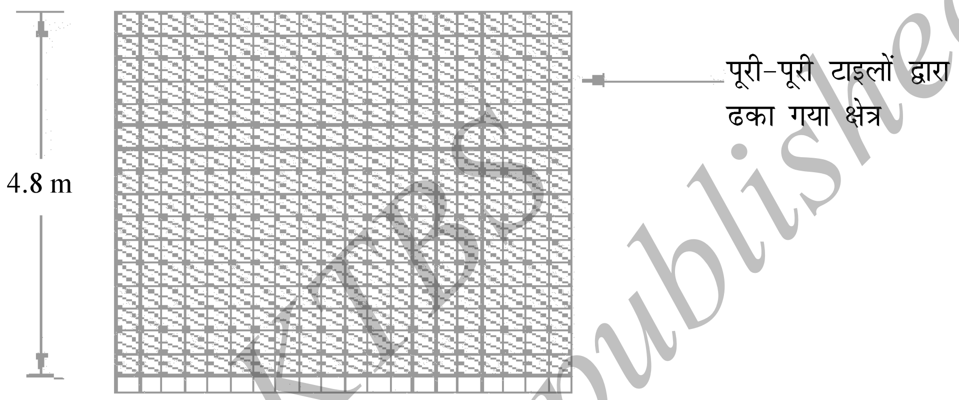
अभी तक अपनी चर्चा में हमने कोई नई बात नहीं कही है। इस अनुच्छेद में, हम पहले बताए गए चरणों में एक और चरण बढ़ा देंगे। इस चरण को **मान्यकरण (validation)** कहा जाता है। मान्यकरण का अर्थ क्या है? आइए हम देखें कि इसका अर्थ क्या है। वास्तविक जीवन से जुड़ी स्थिति में, हम उस निदर्श को स्वीकार नहीं कर सकते जिससे प्राप्त उत्तर वास्तविकता से मेल नहीं खाता हो। वास्तविकता के विरुद्ध उत्तर की जाँच करने और यदि आवश्यक हो तो, गणितीय वर्णन में आपरिवर्तन करने के इस प्रक्रम को *मान्यकरण* कहा जाता है।

यह निदर्शन का एक अति महत्वपूर्ण चरण है। इस अनुच्छेद में, हम आपको इस चरण से परिचित कराएँगे।

इस संदर्भ में आइए पहले हम एक उदाहरण लें, जहाँ हमें मान्यकरण के बाद अपने निदर्श का आपरिवर्तन (modification) करने की आवश्यकता नहीं होती।

**उदाहरण 4 :** मान लीजिए आपके पास 6 मीटर लंबा और 5 मीटर चौड़ा एक कमरा है। आप इस कमरे के फर्श पर 30 cm की भुजा वाली वर्गाकार मोजाइक टाइलों को लगवाना चाहते हैं। इसके लिए कितनी टाइलों की आवश्यकता होगी? एक गणितीय निदर्श बनाकर इसे हल कीजिए।

हल : **सूत्रण :** इस समस्या को हल करने के लिए, हमें कमरे का क्षेत्रफल और एक टाइल का क्षेत्रफल लेना होता है। टाइल की एक भुजा की लंबाई 0.3 मीटर है। क्योंकि कमरे की लंबाई 6 मीटर है, इसलिए कमरे की लंबाई के अनुदिश एक पंक्ति में $\frac{6}{0.3} = 20$ टाइलें लगाई जा सकती हैं (देखिए आकृति A2.1)।




आकृति A2.1



क्योंकि कमरे की चौड़ाई 5 मीटर है, और $\frac{5}{0.3} = 16.67$ है, अतः, एक स्तंभ में हम 16 टाइलें लगा सकते हैं। क्योंकि $16 \times 0.3 = 4.8$ है, इसलिए चौड़ाई के अनुदिश $5 - 4.8 = 0.2$ मीटर स्थान पर टाइलें नहीं लगी होंगी। इस भाग में (खाली स्थान में) साइज के अनुसार टाइलों को काटकर लगाना होगा। टाइल से बिना ढके फर्श की चौड़ाई 0.2 मीटर है, जो टाइल की लंबाई 0.3 m के आधे से अधिक है। अतः, हम एक टाइल को दो बराबर-बराबर आधे भागों में नहीं बाँट सकते और शेष भाग को ढकने के लिए दोनों आधे भागों का प्रयोग नहीं कर सकते।

**गणितीय वर्णन:**

आवश्यक टाइलों की कुल संख्या = (लंबाई के अनुदिश टाइलों की संख्या × चौड़ाई में टाइलों की संख्या) + बिना ढके हुए क्षेत्र पर टाइलों की संख्या (1)

**हल :** जैसा कि हम ऊपर कह चुके हैं कि लंबाई के अनुदिश टाइलों की संख्या 20 है और चौड़ाई के अनुदिश टाइलों की संख्या 16 है। अंतिम पंक्ति के लिए, हमें 20 और टाइलों की आवश्यकता होगी। इन मानों को (1) में प्रतिस्थापित करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$(20 \times 16) + 20 = 320 + 20 = 340$$

**निर्वचन :** फर्श पर लगाने के लिए 340 टाइलों की आवश्यकता होगी।

**मान्यकरण :** व्यावहारिक जीवन में आपका मिस्त्री आपसे कुछ और टाइल मांग सकता है, क्योंकि साइज के अनुसार काटते समय टाइलें टूट-फूट गई थीं। आपका मिस्त्री इस काम में कितना कुशल है उस पर ही टाइलों की संख्या निर्भर करेगी। परन्तु, इसके लिए समीकरण (1) का आपरिवर्तन करने की आवश्यकता नहीं है। इससे हमें एक स्थूल अनुमान (rough estimate) मिल जाता है कि कितनी टाइलों की आवश्यकता होगी। अत:, यहाँ हम रुक सकते हैं।

आइए अब हम एक अन्य स्थिति लें।

**उदाहरण 5 :** वर्ष 2000 में संयुक्त राष्ट्र के 191 सदस्य देशों ने एक घोषणा पर हस्ताक्षर किए। अपनी घोषणा में ये सभी देश, वर्ष 2015 तक कुछ विकास लक्ष्य प्राप्त करने पर सहमत थे। इन लक्ष्यों को *मिलेनियम विकास लक्ष्य* कहा जाता है। इनमें से एक लक्ष्य लिंग समानता को बढ़ाना है। यह लक्ष्य प्राप्त कर लिया गया है कि नहीं, इसका एक सूचक प्राथमिक, माध्यमिक और तृतीयक (tertiary) शिक्षा में लड़कियों और लड़कों का अनुपात है। भारत में, जो कि घोषणा पर हस्ताक्षर करने वाला एक सदस्य देश है, इस अनुपात में वृद्धि हुई है। उन लड़कियों के प्रतिशत आंकड़े, जिन्होंने विद्यालय में प्रवेश लिया है, सारणी A 2.1 में दिए गए हैं।

सारणी A 2.1

| वर्ष | नामांकन (% में) |
|---|---|
| 1991-92 | 41.9 |
| 1992-93 | 42.6 |
| 1993-94 | 42.7 |
| 1994-95 | 42.9 |
| 1995-96 | 43.1 |
| 1996-97 | 43.2 |
| 1997-98 | 43.5 |
| 1998-99 | 43.5 |
| 1999-2000 | 43.6* |
| 2000-01 | 43.7* |
| 2001-02 | 44.1* |

**स्रोत :** *शैक्षिक आंकड़े, वेब पेज, शिक्षा विभाग भारत सरकार*

* *बताता है कि आंकड़े अनंतिम है।*

इन आंकड़ों का प्रयोग करके, गणितीय रूप में वह दर बताइए जिस अनुपात पर प्राथमिक विद्यालयों में भर्ती की गई लड़कियों की संख्या बढ़ रही है। उस वर्ष का भी अनुमान लगाइए जबकि भर्ती की गई लड़कियों की संख्या 50% तक पहुँच जाएगी।

हल : आइए पहले हम इस समस्या को एक गणितीय समस्या में बदल दें।

चरण 1 : **सूत्रण :** *सारणी* A2.1 में वर्ष 1991-92, 1992-93 आदि के नामांकन दिए गए हैं। क्योंकि विद्यार्थी शैक्षिक वर्ष के प्रारंभ में प्रवेश लेते हैं, इसलिए हम वर्षों को 1991, 1992 आदि ले सकते हैं। आइए हम यह मान लें कि प्राथमिक विद्यालयों में प्रवेश लेने वाली लड़कियों के प्रतिशत में उसी दर से वृद्धि होती रहती है जैसा कि सारणी A2.1 में दिया गया है। अत: विशिष्ट वर्ष का महत्व नहीं है, अपितु वर्षों की संख्या का महत्व है (इसी प्रकार की स्थिति तब थी जबकि 8% की दर से तीन वर्षों के लिए ₹ 15000 का साधारण ब्याज ज्ञात किया था। यहाँ इस बात का कोई महत्व नहीं है कि तीन वर्ष की अवधि 1999 से 2003 है या 2001 से 2004 है (महत्वपूर्ण है वर्षों में ब्याज दर का होना)। यहाँ भी, हम यह देखेंगे कि 1991 के बाद नामांकन में किस प्रकार वृद्धि हुई है। ऐसा हम 1992 के बाद बीत गए वर्षों की संख्या और संगत नामांकन की तुलना द्वारा करेंगे। आइए हम 1991 को 0 वाँ वर्ष मान लें और 1992 के लिए 1 लिखें, क्योंकि 1991 के बाद 1992 तक 1 वर्ष निकल गया है। इसी प्रकार, 1993 के लिए 2, 1994 के लिए 3 आदि लिखेंगे। अत:, अब सारणी A2.1, सारणी A 2.2 के समान दिखाई पड़ेगी।

सारणी A2.2

| वर्ष | नामांकन (% में) |
|---|---|
| 0 | 41.9 |
| 1 | 42.6 |
| 2 | 42.7 |
| 3 | 42.9 |
| 4 | 43.1 |
| 5 | 43.2 |
| 6 | 43.5 |
| 7 | 43.5 |
| 8 | 43.6 |
| 9 | 43.7 |
| 10 | 44.1 |

नामांकन में हुई वृद्धि नीचे सारणी में दी गई है:

सारणी A2.3

| वर्ष | नामांकन (% में) | वृद्धि |
|---|---|---|
| 0 | 41.9 | 0 |
| 1 | 42.6 | 0.7 |
| 2 | 42.7 | 0.1 |
| 3 | 42.9 | 0.2 |
| 4 | 43.1 | 0.2 |
| 5 | 43.2 | 0.1 |
| 6 | 43.5 | 0.3 |
| 7 | 43.5 | 0 |
| 8 | 43.6 | 0.1 |
| 9 | 43.7 | 0.1 |
| 10 | 44.1 | 0.4 |



1991 से 1992 तक की एक वर्ष की अवधि में नामांकन 41.9% से बढ़कर 42.6% तक हो गया। अर्थात् नामांकन में 0.7% की वृद्धि हुई है। दूसरे वर्ष के अंत में, इसमें 0.1% की वृद्धि हुई है अर्थात् यह 42.6% से बढ़कर 42.7% हो गया है। ऊपर की सारणी से, हम वर्षों की संख्या और प्रतिशत में कोई निश्चित संबंध प्राप्त नहीं कर सकते। परन्तु वृद्धि अपरिवर्ती बनी रहती है। केवल पहले वर्ष में और दसवें वर्ष में अधिक वृद्धि हुई है। इन मानों का माध्य यह है:

$$\frac{0.7 + 0.1 + 0.2 + 0.2 + 0.1 + 0.3 + 0 + 0.1 + 0.1 + 0.4}{10} = 0.22$$

आइए हम यह मान लें कि नामांकन में अपरिवर्ती रूप से (steadily) 0.22 प्रतिशत की दर से वृद्धि हो रही है।

**गणितीय वर्णन :** हमने यह मान लिया है कि नामांकन में 0.22% प्रति वर्ष की दर से अपरिवर्ती रूप से वृद्धि हो रही है।

अत:, पहले वर्ष में नामांकन प्रतिशत (EP) $= 41.9 + 0.22$

दूसरे वर्ष में, EP $= 41.9 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 2 \times 0.22$

तीसरे वर्ष में, EP $= 41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 3 \times 0.22$

अत:, $n$वें वर्ष में नामांकन प्रतिशत $= 41.9 + 0.22n$, जहाँ $n \geq 1$ है। (1)

अब, हमें वर्षों की वह संख्या भी ज्ञात करनी है जिसमें नामांकन 50% पहुँच जाएगा। अतः हमें निम्नलिखित समीकरण से $n$ का मान ज्ञात करना है:

$$50 = 41.9 + 0.22n \qquad (2)$$

चरण 2 : **हल :** $n$ के लिए (2) को हल करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$n = \frac{50 - 41.9}{0.22} = \frac{8.1}{0.22} = 36.8$$

चरण 3 : **निर्वचन :** क्योंकि वर्षों की संख्या एक पूर्णांकीय मान है, इसलिए हम अगला उच्च पूर्णांक 37 लेंगे। अतः, 1991 + 37 = 2028 में नामांकन प्रतिशत 50% हो जाएगा।

शब्द-समस्या को तो प्रायः हम यहीं तक हल करते हैं। लेकिन, चूँकि हम वास्तविक जीवन से जुड़ी स्थिति पर अध्ययन कर रहे हैं, इसलिए हमें यह देखना होगा कि किस सीमा तक यह मान वास्तविक स्थिति से मेल खाता है।

चरण 4 : **मान्यकरण :** आइए हम यह देखें कि सूत्र (2) वास्तविकता से मेल खाता है कि नहीं। आइए हम सूत्र (2) का प्रयोग करके ज्ञात वर्षों के मान ज्ञात करें और अंतर ज्ञात करके, ज्ञात मानों के साथ इनकी तुलना करें। सारणी A2.4 में ये मान दिए गए हैं।

सारणी A2.4

| वर्ष | नामांकन (% में) | (2) द्वारा दिए गए मान (% में) | अंतर (% में) |
|---|---|---|---|
| 0 | 41.9 | 41.90 | 0 |
| 1 | 42.6 | 42.12 | 0.48 |
| 2 | 42.7 | 42.34 | 0.36 |
| 3 | 42.9 | 42.56 | 0.34 |
| 4 | 43.1 | 42.78 | 0.32 |
| 5 | 43.2 | 43.00 | 0.20 |
| 6 | 43.5 | 43.22 | 0.28 |
| 7 | 43.5 | 43.44 | 0.06 |
| 8 | 43.6 | 43.66 | –0.06 |
| 9 | 43.7 | 43.88 | –0.18 |
| 10 | 44.1 | 44.10 | 0.00 |

जैसा कि आप देख सकते हैं कि सूत्र (2) द्वारा दिए गए कुछ मान वास्तविक मान से लगभग 0.3% से 0.5% तक कम हैं। इससे लगभग 3 से 5 वर्षों का अंतर आ सकता है, क्योंकि वास्तव में प्रति वर्ष वृद्धि 1% से 2% तक है। इतना अंतर स्वीकार्य हो सकता है और हम यहीं रुक सकते हैं। इस स्थिति में, हमारा गणितीय निदर्श (2) है।

मान लीजिए कि यह त्रुटि काफी बड़ी है और हमें इस निदर्श में सुधार लाना है। तब हमें चरण 1 पर पुनः लौटकर जाना होगा, पुनः सूत्रण करना होगा और समीकरण (1) को बदलना होगा। आइए हम इसे करें।

चरण 1 : **पुनःसूत्रण :** हम यहाँ भी यह मान लेंगे कि नामाकंन प्रतिशत के मानों में अपरिवर्ती रूप से 0.22% की वृद्धि हो रही है। परन्तु यहाँ अब हम त्रुटि को कम करने के लिए एक संशुद्धि गुणक (correction factor) का प्रयोग करेंगे। इसके लिए हम सभी त्रुटियों का माध्य ज्ञात करते हैं। माध्य यह है:

$$\frac{0.48+0.36+0.34+0.32+0.2+0.28+0.06-0.06-0.18+0}{10}=0.18$$

हम त्रुटियों का माध्य लेते हैं और इस मान से अपने त्रुटि को संशुद्ध करते हैं।

**संशोधित गणितीय वर्णन :** आइए अब हम (1) में दिए गए नामांकन प्रतिशत के लिए अपने सूत्र में त्रुटियों का माध्य जोड़ दें। अतः, हमारा संशोधित सूत्र यह हो जाएगा:

$n$वें वर्ष में प्रतिशत नामांकन $= 41.9 + 0.22n + 0.18 = 42.08 + 0.22n$, जहाँ $n \geq 1$ (3)

हम अपने समीकरण (2) में भी उपयुक्तरूप से आपरिवर्तन करेंगे। $n$ में हमारा नया समीकरण यह होगा:

$$50 = 42.08 + 0.22n \qquad (4)$$

चरण 2 : **परिवर्तित हल :** $n$ के लिए समीकरण (4) को हल करने पर, हमें यह प्राप्त होता है:

$$n = \frac{50-42.08}{0.22} = \frac{7.92}{0.22} = 36$$

चरण 3 : **निर्वचन :** क्योंकि $n = 36$ है, इसलिए वर्ष $1991 + 36 = 2027$ में प्राथमिक विद्यालयों में लड़कियों का नामांकन 50% तक पहुँच जाएगा।

चरण 4 : **मान्यकरण :** आइए हम पुनः सूत्र (4) की सहायता से प्राप्त मानों की तुलना वास्तविक मानों से करें। सारणी A 2.5 में मानों की यह तुलना दी गई है।

सारणी A2.5

| वर्ष | नामांकन (% में) | (2) द्वारा दिए गए मान | मानों के बीच का अंतर | (4) द्वारा दिए गए मान | मानों के बीच का अंतर |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 41.9 | 41.90 | 0 | 41.9 | 0 |
| 1 | 42.6 | 42.12 | 0.48 | 42.3 | 0.3 |
| 2 | 42.7 | 42.34 | 0.36 | 42.52 | 0.18 |
| 3 | 42.9 | 42.56 | 0.34 | 42.74 | 0.16 |
| 4 | 43.1 | 42.78 | 0.32 | 42.96 | 0.14 |
| 5 | 43.2 | 43.00 | 0.2 | 43.18 | 0.02 |
| 6 | 43.5 | 43.22 | 0.28 | 43.4 | 0.1 |
| 7 | 43.5 | 43.44 | 0.06 | 43.62 | – 0.12 |
| 8 | 43.6 | 43.66 | – 0.06 | 43.84 | – 0.24 |
| 9 | 43.7 | 43.88 | – 0.18 | 44.06 | – 0.36 |
| 10 | 44.1 | 44.10 | 0 | 44.28 | – 0.18 |



जैसा कि आप देख सकते हैं कि (2) से प्राप्त मानों की तुलना में (4) से प्राप्त अनेक मान वास्तविक मान के अधिक निकट हैं। इस स्थिति में त्रुटियों का माध्य 0 है।

हम अपने प्रक्रम को यहीं रोक देंगे। अत:, समीकरण (4) हमारा गणितीय वर्णन है जो कि वर्षों और कुल नामांकन में लड़कियों के प्रतिशत नामांकन के बीच का गणितीय संबंध स्थापित करता है। हमने एक गणितीय निदर्श का निर्माण किया है, जो वृद्धि की व्याख्या करता है।

**वह प्रक्रम, जिसका हमने ऊपर की स्थिति में अनुसरण किया है, उसे गणितीय निदर्शन (mathematical modelling) कहा जाता है।**

हमने उपलब्ध गणितीय साधनों से एक गणितीय निदर्श का निर्माण करने का प्रयास किया है। उपलब्ध आंकड़ों से प्रागुक्तियाँ करने के उत्तम गणितीय साधन भी उपलब्ध हैं। परन्तु वे इस पाठ्यक्रम के अध्ययन क्षेत्र से बाहर हैं। इस निदर्श को बनाने का हमारा उद्देश्य आपको निदर्शन प्रक्रम से परिचित कराना है, न कि इस चरण पर परिशुद्ध प्रागुक्तियाँ (accurate predictions) करना।

आप अभी तक की गई चर्चा को कितना समझ पाए हैं इसके लिए हम चाहेंगे कि आप वास्तविक जीवन से जुड़ी कुछ स्थितियों का निदर्शन करें। यहाँ आपके लिए एक प्रश्नावली दी जा रही है।

### प्रश्नावली A 2.2

1. ओलंपिक खेलों में जबसे 400 मीटर की दौड़ शुरू हुई है तब से स्वर्ण पदक पाने वालों का समय नीचे की सारणी में दिया गया है। वर्षों और समयों से संबंधित एक गणितीय निदर्श बनाइए। इसका प्रयोग अगले ओलंपिक में लगने वाले समय का आकलन करने में कीजिए:

सारणी A 2.6

| वर्ष | समय (सेकंडों में) |
|---|---|
| 1964 | 52.01 |
| 1968 | 52.03 |
| 1972 | 51.08 |
| 1976 | 49.28 |
| 1980 | 48.88 |
| 1984 | 48.83 |
| 1988 | 48.65 |
| 1992 | 48.83 |
| 1996 | 48.25 |
| 2000 | 49.11 |
| 2004 | 49.41 |



## A 2.4 निदर्शन प्रक्रम, इसके लाभ और इसकी सीमाएँ

आइए अब हम गणितीय निदर्शन के उन पहलुओं पर विचार करते हुए, जिन्हें हमने प्रस्तुत उदाहरणों में दिखाया है, अपनी चर्चा यहीं समाप्त करें। पिछले अनुच्छेदों की पृष्ठभूमि से, अब हम इस स्थिति में आ गए हैं कि हम निदर्शन में प्रयुक्त होने वाले चरणों का एक संक्षिप्त परिदृश्य दे सकें।

चरण 1 : **सूत्रण :** अनुच्छेद A 2.2 के उदाहरण 1 के सूत्रण चरण और A 2.3 में चर्चित निदर्श के सूत्रण चरण के बीच के अंतर की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा। उदाहरण 1 में सभी सूचनाएँ तुरंत उपयोगी रूप में हैं। परन्तु A 2.3 में दिए गए निदर्श में ऐसा नहीं है। साथ ही, एक गणितीय वर्णन प्राप्त करने में कुछ समय भी लगा था। हमने अपने पहले सूत्र की जाँच की है, जिसमें पाया कि यह उतना उत्तम नहीं है, जितना कि दूसरा था। व्यापक रूप में, यह प्राय: सत्य होता है। अर्थात् उस स्थिति में जबकि हम वास्तविक जीवन से जुड़ी स्थितियों का निदर्शन करने का प्रयास कर रहे होते हैं, इसमें प्राय: पहले निदर्श को संशोधित करने की आवश्यकता होती है। जब हम वास्तविक जीवन से जुड़ी

समस्या हल कर रहे होते हैं, तो सूत्रण करने में काफी समय लग सकता है। उदाहरण के लिए, न्यूटन के तीन गति-नियम, जो कि गति के गणितीय वर्णन हैं, के कथन सरलता से दिए जा सकते हैं। परन्तु इन नियमों तक पहुँचने के लिए उसे काफी मात्रा में आंकड़ों का अध्ययन करना पड़ा था और उन कार्यों की ओर ध्यान देना पड़ा था जो कि उसके पूर्व के वैज्ञानिकों ने किए थे।

सूत्रण में निम्नलिखित तीन चरण लागू करने होते हैं:

**(i)** **समस्या का कथन :** प्राय: समस्या का कथन स्थूल रूप से दिया जाता है। उदाहरण के लिए, हमारा स्थूल लक्ष्य तो यह सुनिश्चित करना है कि लड़कों और लड़कियों के नामांकन बराबर हैं। इसका अर्थ यह हो सकता है कि विद्यालय जाने वाले आयु के लड़कों की कुल संख्या का 50% और विद्यालय जाने वाली आयु की लड़कियों की कुल संख्या का 50% नामांकित होनी चाहिए। एक अन्य विधि यह है कि यह सुनिश्चित किया जाय कि विद्यालय जाने वाले बच्चों में से 50% लड़कियाँ हैं। हमने अपनी समस्या में दूसरे दृष्टिकोण को अपनाया है।

**(ii)** **सुसंगत कारकों को पहचानना :** पहले यह निर्णय लीजिए कि हमारी समस्या में कौन-कौन सी राशियाँ और संबंध महत्वपूर्ण हैं और कौन-कौन महत्वपूर्ण नहीं हैं, जिनकी उपेक्षा की जा सकती है। उदाहरण के लिए, प्राथमिक विद्यालयों में नामांकन संबंधी हमारी समस्या में पिछले वर्ष में नामांकित लड़कियों का प्रतिशत इस वर्ष नामांकित लड़कियों की संख्या को प्रभावित कर सकता है। ऐसा इसलिए है कि विद्यालय में जैसे-जैसे और लड़कियाँ नामांकित होती जाती हैं वैसे-वैसे उनके माता-पिता अनुभव करने लगेंगे कि वे अपनी लड़कियों को भी विद्यालय में भर्ती कराएं। परन्तु, हमने इस कारक की उपेक्षा कर दी है, क्योंकि एक निश्चित प्रतिशत से अधिक नामांकन हो जाने के बाद ही यह महत्वपूर्ण हो सकता है। साथ ही, इस कारक को बढ़ा देने के बाद निदर्श और अधिक जटिल हो सकता है।

**(iii)** **गणितीय वर्णन :** आइए अब हम यह मान लें कि हमें यह स्पष्ट हो गया है कि समस्या क्या है और इसका कौन-सा पहलू अन्य पहलुओं से अधिक सुसंगत है। तब हमें एक समीकरण, एक आलेख या अन्य उपयुक्त गणितीय वर्णन के रूप में निहित पहलुओं के बीच का संबंध ज्ञात करना होता है। यदि यह एक समीकरण है, तो हमारे गणितीय समीकरण में प्रत्येक महत्वपूर्ण पहलू को एक चर से निरूपित करना चाहिए।

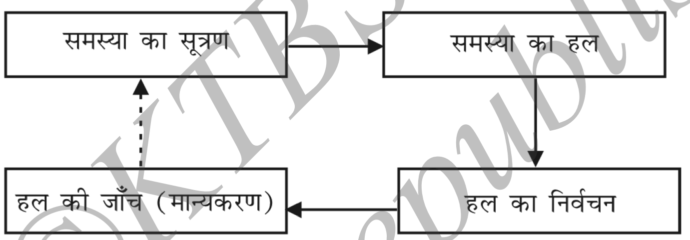
चरण 2 : **हल ज्ञात करना :** गणितीय सूत्रण से हल प्राप्त नहीं होता। हमें समस्या के इस गणितीय तुल्य को हल करना होता है। यही वह स्थल है जहाँ हमारा गणितीय ज्ञान उपयोगी सिद्ध होता है।

चरण 3 : **हल का निर्वचन :** गणितीय हल निदर्श के चरों के कुछ मान होते हैं। हमें वास्तविक जीवन से जुड़ी समस्या को पुन: लेना होगा और यह देखना होगा कि समस्या में इन मानों का क्या अर्थ है।

चरण 4 : **हल का मान्यकरण :** जैसा कि हमने A 2.3 में यह देखा कि हल ज्ञात करने के बाद, हमें यह देखना होगा कि हल वास्तविकता से मेल खाता है कि नहीं। यदि यह मेल खाता है, तो गणितीय निदर्श स्वीकार्य होता है। यदि गणितीय हल मेल नहीं खाता, तो हमें सूत्रण चरण पर पुन: आ जाएँ और हम अपने निदर्श में सुधार लाने का प्रयास करें।

प्रक्रम के इस चरण में शब्द-समस्याओं को हल करने और गणितीय निदर्शन के बीच एक बड़ा अंतर होता है। निदर्शन में यह एक अति महत्वपूर्ण चरण है जो कि शब्द-समस्याओं में नहीं होता है। हाँ, यह संभव है कि वास्तविक जीवन से जुड़ी स्थितियों में हमें अपने उत्तर का मान्यकरण करने की आवश्यकता नहीं होती क्योंकि समस्या सरल है और हमें सीधे सही हल प्राप्त हो जाता है। अनुच्छेद A2.3 में लिए गए निदर्श में ऐसा ही था।

हमने उस क्रम का संक्षिप्त विवरण दिया है जिसमें नीचे दी गई आकृति A2.2 में गणितीय निदर्शन के चरण लागू किए गए हैं। मान्यकरण चरण से सूत्रण चरण की ओर जाने को **बिंदुकित तीर** से दिखाया गया है। ऐसा इसलिए किया गया है कि हो सकता है इस चरण को पुनः लागू करना आवश्यक न भी हो।




आकृति A2.2

अब, क्योंकि आपने गणितीय निदर्शन से संबंधित चरणों का अध्ययन कर लिया है, इसलिए आइए हम इसके कुछ पहलुओं पर चर्चा कर लें।

गणितीय निदर्शन का उद्देश्य वास्तविक जगत से जुड़ी समस्या के बारे में, उसे गणितीय समस्या में रूपांतरित करके कुछ उपयोगी सूचनाएँ प्राप्त करना है। यह विशेष रूप से तब उपयोगी होता है जबकि सीधे प्रेक्षण करके या प्रयोग करने जैसे अन्य साधनों से सूचना प्राप्त करना या तो संभव न हो या बहुत खर्चीला हो।

आपको यह जानकर भी आश्चर्य हो सकता है कि हमें गणितीय निदर्शन का प्रयोग क्यों करना चाहिए? आइए हम निदर्शन के लाभ पर कुछ चर्चा करें। मान लीजिए हम ताजमहल पर मथुरा रिफाइनरी के विसर्जन के संक्षारक प्रभाव पर अध्ययन करना चाहते हैं। हम ताजमहल पर सीधे प्रयोग नहीं करना चाहेंगे, क्योंकि ऐसा करना सुरक्षित नहीं होगा। वास्तव में, हम इस संबंध में ताजमहल का एक छोटा मॉडल ले सकते हैं। परन्तु इसके लिए हमें विशिष्ट सुविधाओं की आवश्यकता हो सकती है, जोकि काफी खर्चीली हो सकती है। यही वह स्थल है जहाँ गणितीय निदर्शन काफी उपयोगी सिद्ध हो सकता है।

मान लीजिए हम यह ज्ञात करना चाहते हैं कि 5 साल बाद कितने प्राथमिक विद्यालयों की आवश्यकता होगी। तब हम एक गणितीय निदर्श का प्रयोग करके, यह समस्या हल कर सकते हैं। इसी प्रकार, केवल निदर्शन करके वैज्ञानिकों ने अनेक परिघटनाओं की व्याख्या की है।

अनुच्छेद A2.4 में आपने यह देखा है कि उत्तम विधियों को लागू करके दूसरे उदाहरण में हम उत्तर में सुधार लाने का प्रयास कर सकते थे। लेकिन हम वहीं रुक गए, क्योंकि हमारे पास कोई गणितीय साधन उपलब्ध नहीं है। ऐसी स्थिति वास्तविक जीवन में भी हो सकती है। प्राय: हमें सन्निकट उत्तरों से ही संतुष्ट हो जाना पड़ता है, क्योंकि गणितीय साधन उपलब्ध नहीं होते हैं। उदाहरण के लिए, मौसम के निदर्शन में प्रयुक्त निदर्श समीकरण इतने जटिल होते हैं कि यथा स्थिति हल ज्ञात करने के गणितीय साधन उपलब्ध नहीं हैं।

आप आश्चर्य कर सकते हैं कि किस सीमा तक हमें अपने निदर्श में सुधार लाना चाहिए। इसमें सुधार लाने के लिए, प्राय: हमें अन्य कारकों को भी ध्यान में रखने की आवश्यकता होती है। जब हम ऐसा करते हैं, तब हम अपने गणितीय समीकरणों में और चर बढ़ा देते हैं। तब हमें एक अति जटिल निदर्श प्राप्त हो सकता है, जिसका प्रयोग करना कठिन होगा। निदर्श इतना सरल होना चाहिए कि उसका प्रयोग किया जा सके। एक उत्तम निदर्श दो कारकों को संतुलित करता है:

1. परिशुद्धता (accuracy), अर्थात् यह वास्तविकता से कितना निकट है।
2. प्रयोग की सरलता

उदाहरण के लिए, न्यूटन के गति के नियम काफी सरल, परन्तु इतने शक्तिशाली हैं कि इससे अनेक भौतिक स्थितियों का निदर्शन किया जा सकता है।

अत:, क्या गणितीय निदर्शन सभी समस्याओं का उत्तर है, बिल्कुल नहीं! इसकी अपनी सीमाएँ हैं।

अत: यह बात हमें अपने मस्तिष्क में रखना चाहिए कि *निदर्श* वास्तविक जीवन से जुड़ी *समस्या का केवल एक सरलीकरण* है और ये दोनों समान नहीं होते। यह बहुत कुछ उस अंतर के समान है जो किसी देश के भौतिक लक्षणों को दर्शाने वाले मानचित्र और स्वयं उस देश में होता है। इस मानचित्र से हम समुद्र तल से एक स्थान की ऊँचाई तो ज्ञात कर सकते हैं परन्तु हम यहाँ के लोगों के अभिलक्षणों के बारे में कुछ ज्ञात नहीं कर सकते। अत: हमें निदर्श का प्रयोग केवल उद्देश्य को ध्यान में रखकर करना चाहिए और यह भी ध्यान रखना होता है कि इसका निर्माण करते समय हमने किन-किन कारकों की उपेक्षा कर दी है। हमें निदर्श का प्रयोग केवल लागू होने वाली सीमाओं के अंदर ही करनी चाहिए। आगे की कक्षाओं में हम इस पहलू पर कुछ विस्तार से चर्चा करेंगे।

## प्रश्नावली A 2.3

**1.** आपकी पाठ्य पुस्तक में दी गई शब्द-समस्याओं को हल करने में और गणितीय निदर्शन के प्रक्रम में क्या अंतर है?

**2.** मान लीजिए आप चौराहे पर खड़े वाहनों के प्रतीक्षा-काल को कम-से-कम करना चाहते हैं। निम्नलिखित कारकों में कौन-से कारक महत्वपूर्ण हैं और कौन-से कारक महत्वपूर्ण नहीं हैं?

(i) पेट्रोल की कीमत।

(ii) वह दर जिससे चार अलग-अलग सड़कों से आने वाले वाहन चौराहे पर पहुँचते हैं।

(iii) साइकिल और रिक्शा आदि जैसी धीमी गति से चलने वाले वाहनों और कार तथा मोटर साइकिल जैसी तेज गति से चलने वाले वाहनों का अनुपात।

## A 2.5 सारांश

इस परिशिष्ट में, आपने निम्नलिखित बिन्दुओं का अध्ययन किया है:

**1.** शब्द-समस्याओं को हल करने में प्रयुक्त चरणों का पुनर्विलोकन करना।

**2.** कुछ गणितीय निदर्शों का निर्माण करना।

**3.** गणितीय निदर्शन में प्रयुक्त नीचे बॉक्स में दिए गए चरणों पर चर्चा:

1. **सूत्रण :**
   (i) समस्या का कथन लिखना
   (ii) सुसंगत कारकों को पहचानना
   (iii) गणितीय वर्णन
2. **हल ज्ञात करना**
3. **वास्तविक जगत से जुड़ी समस्या के संदर्भ में हल का निर्वचन**
4. **यह देखना कि किस सीमा तक निदर्श अध्ययन की जा रही समस्या का एक उत्तम निरूपण है।**

**4.** गणितीय निदर्शन का उद्देश्य, लाभ और सीमाएँ।

# उत्तर/संकेत

## प्रश्नावली 8.1

1. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, $900, 3\text{cm}^2$ 2. ₹ 1650000 3. $20\sqrt{2}\ \text{m}^2$

4. $21\sqrt{11}\ \text{cm}^2$ 5. $9000\ \text{cm}^2$ 6. $9\sqrt{15}\ \text{cm}^2$

## प्रश्नावली 8.2

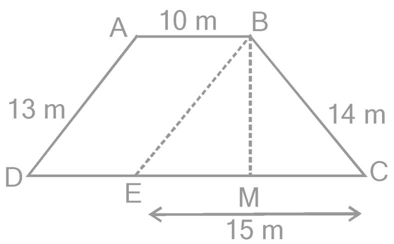
1. $65.5\ \text{m}^2$ (लगभग) 2. $15.2\ \text{cm}^2$ (लगभग) 3. $19.4\ \text{cm}^2$ (लगभग)

4. 12 cm 5. $48\ \text{m}^2$ 6. $1000\sqrt{6}\ \text{cm}^2$, $1000\sqrt{6}\ \text{cm}^2$

7. छाया I का क्षेत्रफल = छाया II का क्षेत्रफल = $256\ \text{cm}^2$ और छाया III का क्षेत्रफल = $17.92\ \text{cm}^2$

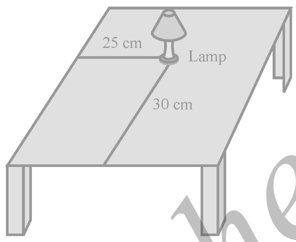
8. ₹ 705.60 9. $196\ \text{m}^2$

[आकृति देखिए। $\Delta$ BEC = $84\ \text{m}^2$, BM की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।]

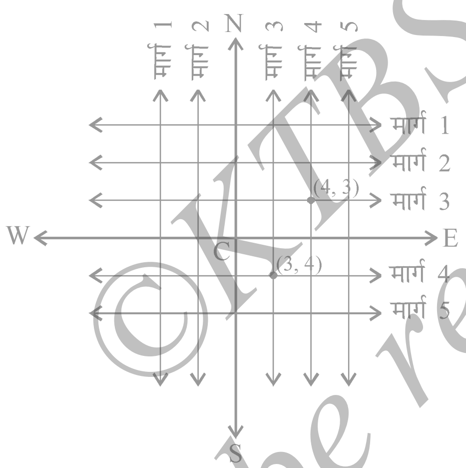


## प्रश्नावली 9.1

1. लैम्प को एक बिन्दु मान लीजिए और मेज को एक समतल। मेज का कोई भी दो लंब कोर लीजिए। बड़े कोर से लैम्प की दूरी माप लीजिए। मान लीजिए यह दूरी 25 सेमी है। अब, छोटे कोर से लैम्प की दूरी मापिए और मानलीजिए यह दूरी 30 सेमी है। जिस क्रम में आपने लैम्प रखा है उसके अनुसार उसकी स्थिति को (30, 25) या (25, 30) लिख सकते हैं।




2. मार्ग योजना नीचे दी गई आकृति में दिखाई गई है



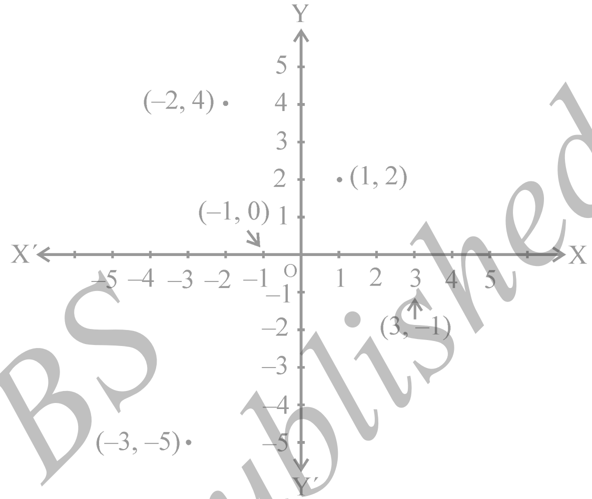

दोनों की क्रास मार्ग ऊपर की आकृति में चिह्नित किए गए हैं। ये अद्वितीयत: प्राप्त किए जाते हैं, क्योंकि दो संदर्भ रेखाओं में हमने स्थान निर्धारण के लिए दोनों का प्रयोग किया है।

## प्रश्नावली 9.2

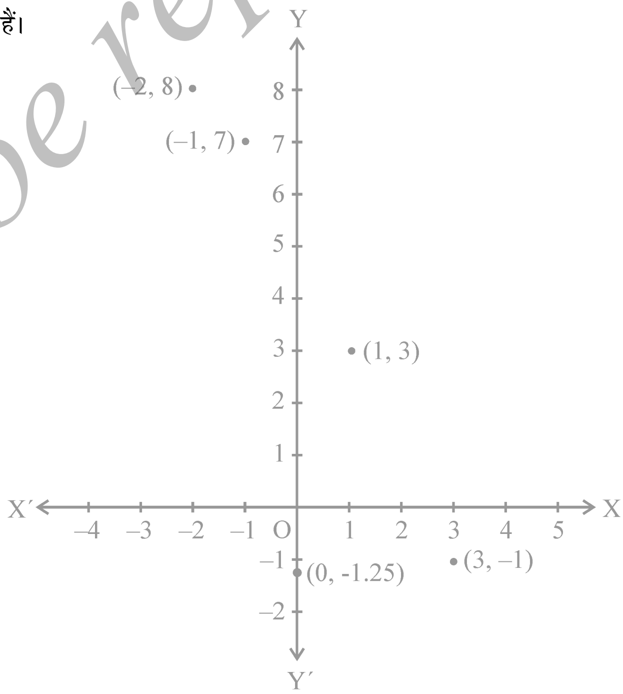
1. (i) $x$ - अक्ष और $y$ - अक्ष (ii) चतुर्थांश (iii) मूल बिन्दु
2. (i) (–5, 2) (ii) (5, –5) (iii) E (iv) G (v) 6 (vi) – 3 (vii) (0, 5) (viii) (–3, 0)

## प्रश्नावली 9.3

1. बिन्दु (–2, 4), चतुर्थाशं II में स्थित है। बिन्दु (3, –1) चतुर्थाशं IV में स्थित है, बिन्दु (–1, 0) ऋण $x$ - अक्ष पर स्थित है, बिन्दु (1, 2) चतुर्थाशं I में स्थित है। और बिन्दु (–3, –5) चतुर्थाशं III में स्थित है। पास की आकृति में बिन्दुओं के स्थान निर्धारण दिखाए गए हैं।




2. संलग्न आकृति में बिन्दुओं की स्थितियाँ बिन्दियों (dots) द्वारा दर्शाई गई हैं।



## प्रश्नावली 10.1

**1.** $x = 2y$ या $x - 2y = 0$

**2.** (i) $2x + 3y - 9.3\overline{5} = 0; a = 2, b = 3, c = -9.3\overline{5}$

(ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0; a = 1, b = \frac{-1}{5}, c = -10$

(iii) $-2x + 3y - 6 = 0; a = -2, b = 3, c = -6$

(iv) $1.x - 3y + 0 = 0; a = 1, b = -3, c = 0$

(v) $2x + 5y + 0 = 0; a = 2, b = 5, c = 0$

(vi) $3x + 0.y + 2 = 0; a = 3, b = 0, c = 2$

(vii) $0.x + 1.y - 2 = 0; a = 0, b = 1, c = -2$

(viii) $-2x + 0.y + 5 = 0; a = -2, b = 0, c = 5$

## प्रश्नावली 10.2

**1.** (iii), क्योंकि $x$ के प्रत्येक मान के लिये, $y$ का एक संगत मान होता है और विलोमत: भी।

**2.** (i) (0, 7), (1, 5), (2, 3), (4, –1) (ii) $(1, 9 - \pi), (0, 9), (-1, 9 + \pi), \left(\frac{9}{\pi}, 0\right)$

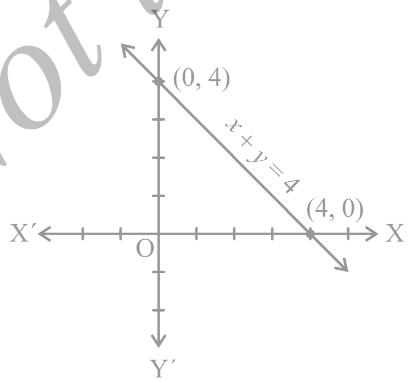
(iii) $(0, 0), (4, 1), (-4, 1), \left(2, \frac{1}{2}\right)$

**3.** (i) नहीं (ii) नहीं (iii) हाँ (iv) नहीं (v) नहीं

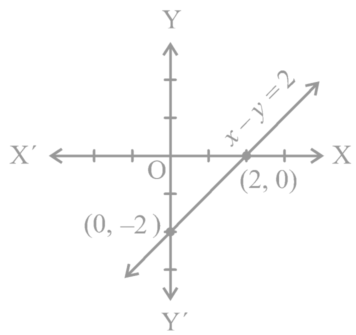
**4.** 7

## प्रश्नावली 10.3

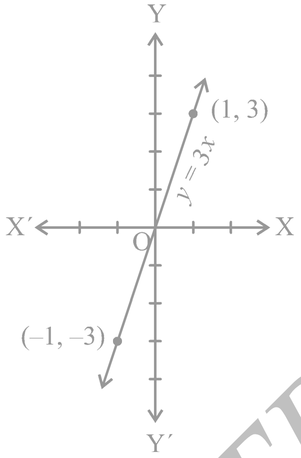
**1.** (i)



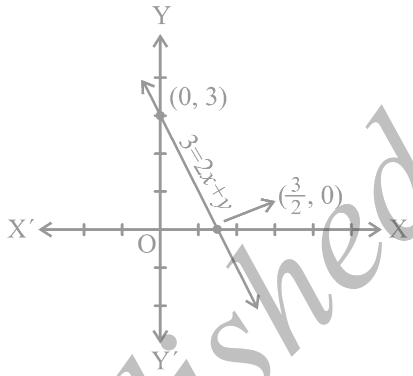

(ii)



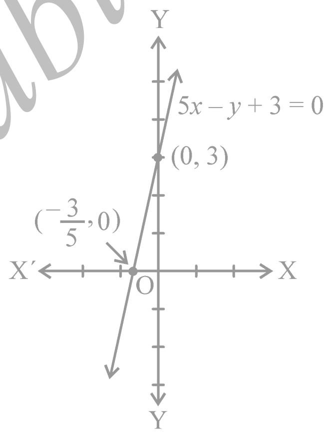
(iii)




(iv)




**2.** $7x - y = 0$ और $x + y = 16$; अनंत: अनेक (एक बिन्दु से होती हुई अनंत: अनेक रेखाएँ खींची जा सकती है।)



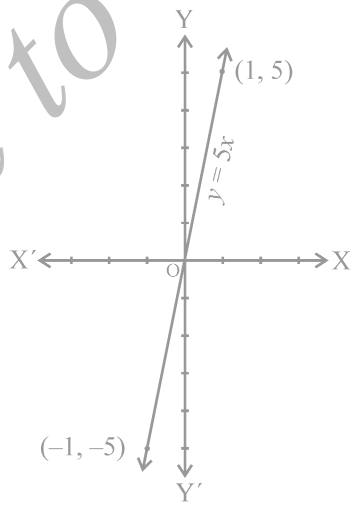

**3.** $\frac{5}{3}$

**4.** $5x - y + 3 = 0$

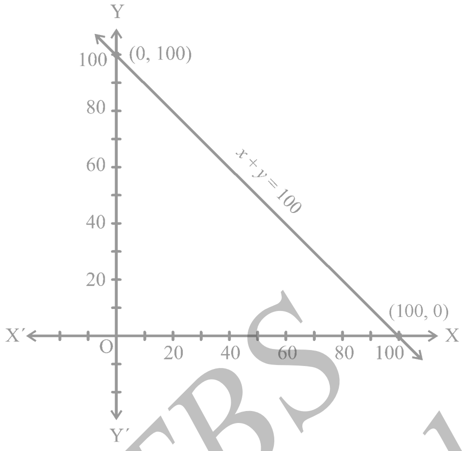
**5.** आकृति 10.6 के लिए, $x + y = 0$ और आकृति 10.7 के लिए, $y = -x + 2$.

**6.** मान लीजिए $x$ दूरी है और $y$ किया गया कार्य है। अत: प्रश्न के अनुसार समीकरण $y = 5x$ होगा।

(i) 10 एकक (ii) 0 एकक



**7.** $x + y = 100$



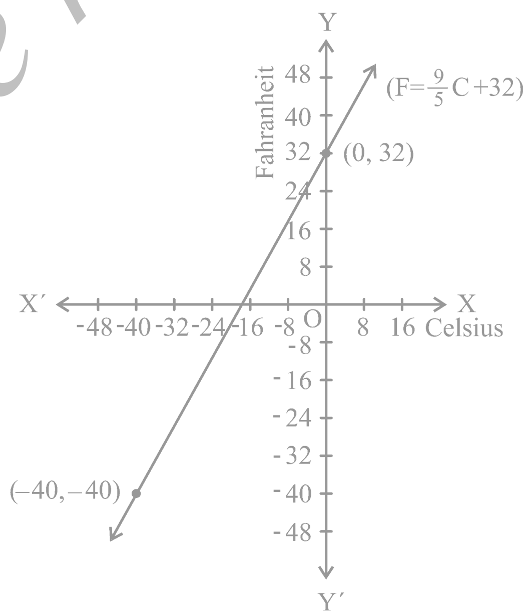

**8.** (i) संलग्न आकृति देखिए।

(ii) 86° F

(iii) 35° C

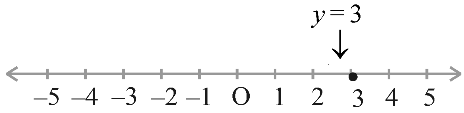
(iv) 32° F, –17.8° C (लगभग)

(v) हाँ, – 40° (F और C दोनों में)

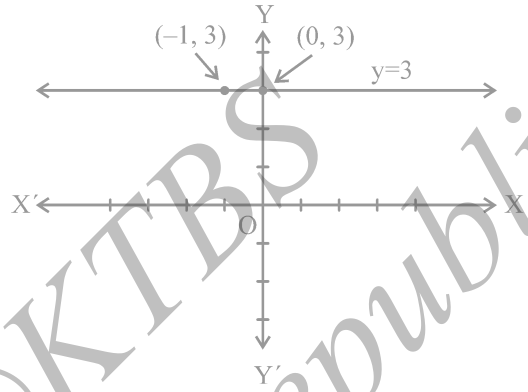


## प्रश्नावली 10.4

**1.** (i)

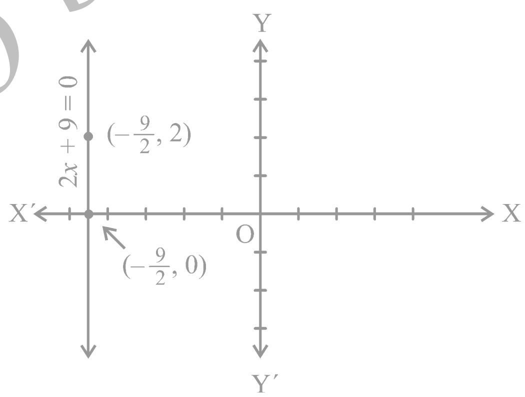



(ii)




**2.** (i)


(ii)







Downloaded from https:// www.studiestoday.com

## प्रश्नावली 11.1

1. (i) आधार DC, समांतर रेखाएँ DC और AB; (iii) आधार QR, समांतर रेखाएँ QR और PS;
   (v) आधार AD, समांतर रेखाएँ AD और BQ

## प्रश्नावली 11.2

1. 12.8 cm  2. EG मिलाइए; उदाहरण 2 के परिणाम का प्रयोग कीजिए।
6. गेहूँ $\Delta$ APQ में और दाल अन्य दो त्रिभुजों में या दाल $\Delta$ APQ में और गेहूँ अन्य दो त्रिभुजों में।

## प्रश्नावली 11.3

4. CM $\perp$ AB और DN $\perp$ AB खींचिए। दिखाइए कि CM = DN है।  12. देखिए उदाहरण 4.

## प्रश्नावली 11.4 (ऐच्छिक)

7. उदाहरण 3 के परिणाम को बार-बार प्रयोग कीजिए।

## प्रश्नावली 12.1

1. (i) अभ्यंतर (ii) वहिर्भाग (iii) व्यास
   (iv) अर्द्धवृत्त (v) जीवा (vi) तीन
2. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य
   (iv) सत्य (v) असत्य (vi) सत्य

## प्रश्नावली 12.2

1. सर्वांगसम वृत्तों की जीवाएँ लेकर ठीक-ठीक प्रमेय 10.1 की भांति सिद्ध कीजिए।
2. SAS सर्वांगसम-अभिगृहीत की सहायता से दिए गए दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता दर्शाइए।

## प्रश्नावली 12.3

1. 0, 1, 2; दो  2. उदाहरण 1 की भांति क्रिया कीजिए।
3. वृतों के केन्द्र O, O′ को उभयनिष्ठ जीवा के मध्य बिन्दु M से मिलाइए। तब दिखाइए कि $\angle$OMA = 90° और $\angle$O′MA = 90°.

## प्रश्नावली 12.4

1. 6 cm; पहले यह दिखाइए कि केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा छोटे वृत्त की त्रिज्या पर लंब है और तब यह दिखाइए कि उभयनिष्ठ जीवा छोटे वृत्त का व्यास है।

2. यदि एक वृत्त जिसका केन्द्र O है की दो समान जीवाएँ AB तथा CD बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करती हैं, $OM \perp AB$ और $ON \perp CD$ खींचिए और OE को मिलाइए। दिखाइए कि समकोण $\Delta$ OME और $\Delta$ ONE सर्वांगसम है।

3. उदाहरण 2 की भाँति हल कीजिए। 4. $OM \perp AD$ खींचिए।

5. रेशमा, सलमा और मंदीप को क्रमशः बिन्दु R, S और M द्वारा दर्शाइए। माना KR = $x$ m (आकृति देखिए)

$\Delta$ ORS का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times x \times 5$

साथ ही, $\Delta$ ORS का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ RS $\times$ OL $= \frac{1}{2} \times 6 \times 4$

$x$ का मान ज्ञात कीजिए। इस प्रकार आप RM का मान भी ज्ञात कर सकते हैं।

6. समबाहु त्रिभुज के गुण तथा पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग कीजिए।

## प्रश्नावली 12.5

1. 45° 2. 150°, 30° 3. 10°

4. 80° 5. 110° 6. $\angle BCD = 80°$ और $\angle ECD = 50°$

8. CD पर लंब AM और BN डालिए (AB || CD और AB < CD). दिखाइए कि $\Delta AMD \cong \Delta BNC$ है। इससे $\angle C = \angle D$ प्राप्त होता है, अत: $\angle A + \angle C = 180°$.

## प्रश्नावली 12.6 (ऐच्छिक)

2. मान लीजिए O, वृत्त का केन्द्र है। तब दो जीवाओं के लंब-अर्धक समान होंगे और O से होकर t k, ssekuy hft , $r$ त्रिज्या है, तब $r^2 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 + x^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + (6 - x)^2$, जहाँ $x$, 11 सेमी की लंबाई वाली जीवा पर O से डाले गए लंब की लंबाई है। इससे $x = 1$ प्राप्त होता है, अत: $r = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ cm

Downloaded from https:// www.studiestoday.com

**3.** 3 cm

**4.** मान लीजिए $\angle AOC = x$ और $\angle DOE = y$ है। मान लीजिए $\angle AOD = z$, तब $\angle EOC = z$ और $x + y + 2z = 360°$.

$\angle ODB = \angle OAD + \angle DOA = 90° - \frac{1}{2}z + z = 90° + \frac{1}{2}z$ तथा $\angle OEB = 90° + \frac{1}{2}z$

**8.** $\angle ABE = \angle ADE$, $\angle ADF = \angle ACF = \frac{1}{2}\angle C$

इसलिए $\angle EDF = \angle ABE + \angle ADF = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = \frac{1}{2}(180° - \angle A) = 90° - \frac{1}{2}\angle A$

**9.** प्रश्नावली 10.2 के प्रश्न 1 और प्रमेय 10.8 का प्रयोग कीजिए।

**10.** मान लीजिए $\angle A$ का कोण-अर्धक $\Delta ABC$ के अर्धवृत्त को D पर काटता है। DC और DB को मिलाइए।

तब $\angle BCD = \angle BAD = \frac{1}{2}\angle A$ और $\angle DBC = \angle DAC = \frac{1}{2}\angle A$. इसलिए, $\angle BCD = \angle DBC$ या DB = DC. अत: D, BC के लंब-अर्धक पर स्थित होता है।



## प्रश्नावली 13.1

**1.** (i) 5.45 m² (ii) ₹ 109 **2.** ₹ 555 **3.** 6 m **4.** 100 ईंट

**5.** (i) घनाकार बक्स का पार्श्व पृष्ठ क्षेत्रफल, 40 cm² बड़ा है।

(ii) घनाकार बक्स का कुल पृष्ठ क्षेत्रफल 10 cm² बड़ा है।

**6.** (i) कांच का 4250 cm² (ii) फीता का 320 cm [सभी कोरों का योगफल परिकलित कीजिए (12 कोरों में 4 लम्बाइयाँ, 4 चौड़ाईयाँ और 4 ऊँचाईयाँ है)]

**7.** ₹ 2184 **8.** 47 m²

## प्रश्नावली 13.2

**1.** 2 cm **2.** 7.48 m² **3.** (i) 968 cm² (ii) 1064.8 cm² (iii) 2038.08 cm²

[एक पाइप का कुल पृष्ठ-क्षेत्रफल (अंत: वक्रित पृष्ठ क्षेत्रफल + बाह्य वक्रित पृष्ठ क्षेत्रफल + दो आधारों का क्षेत्रफल) है। प्रत्येक आधार, $\pi(R^2 - r^2)$ द्वारा दिए गए क्षेत्रफल वाला एक वलय है, जहाँ R = बाह्य त्रिज्या और $r$ = अंत: त्रिज्या।

**4.** 1584 m² **5.** ₹ 68.75 **6.** 1 m

**7.** (i) 110 $m^2$ (ii) ₹ 4400 **8.** 4.4 $m^2$ **9.** (i) 59.4 $m^2$ (ii) 95.04 $m^2$

[मान लीजिए प्रयुक्त इस्पात का वास्तविक क्षेत्रफल $x$ $m^2$ है। क्योंकि वास्तविक रूप में प्रयुक्त इस्पात का $\frac{1}{12}$ भाग व्यर्थ चला गया है, इसलिए टंकी में प्रयुक्त इस्पात का क्षेत्रफल $= x$ का $\frac{11}{12}$. इसका अर्थ यह है कि प्रयुक्त इस्पात का वास्तविक क्षेत्रफल $= \frac{12}{11} \times 87.12 m^2$ ]

**10.** 2200 $cm^2$; बेलन की ऊँचाई $(30 + 2.5 + 2.5)$ cm होनी चाहिए। **11.** 7920 $cm^2$

## प्रश्नावली 13.3

**1.** 165 $cm^2$ **2.** 1244.57 $m^2$ **3.** (i) 7 cm (ii) 462 $cm^2$

**4.** (i) 26 m (ii) 137280 रु **5.** 63 m **6.** 1155 रु

**7.** 5500 $cm^2$ **8.** ₹ 384.34 (लगभग)

## प्रश्नावली 13.4

**1.** (i) 1386 $cm^2$ (ii) 394.24 $cm^2$ (iii) 2464 $cm^2$

**2.** (i) 616 $cm^2$ (ii) 1386 $cm^2$ (iii) 38.5 $m^2$

**3.** 942 $cm^2$ **4.** 1 : 4 **5.** ₹ 27.72

**6.** 3.5 cm **7.** 1 : 16 **8.** 173.25 $cm^2$

**9.** (i) $4\pi r^2$ (ii) $4\pi r^2$ (iii) 1 : 1

## प्रश्नावली 13.5

**1.** 180 $cm^3$ **2.** 135000 लीटर **3.** 4.75 m **4.** ₹ 4320 **5.** 2 m

**6.** 3 दिन **7.** 16000 **8.** 6 cm, 4 : 1 **9.** 4000 $m^3$

## प्रश्नावली 13.6

**1.** 34.65 लीटर

**2.** 3.432 kg [पाइप का आयतन $= \pi h \times (R^2 - r^2)$, जहाँ R बाह्य त्रिज्या है और $r$ अंत: त्रिज्या है।]

**3.** बेलन की धारिता 85 $cm^3$ अधिक है। **4.** (i) 3 cm (ii) 141.3 $cm^3$

**5.** (i) 110 $m^2$ (ii) 1.75 m (iii) 96.25 *kl* **6.** 0.4708 $m^2$

**7.** लकड़ी का आयतन = 5.28 $cm^3$, ग्रेफाइट का आयतन = 0.11 $cm^3$.

**8.** 38500 $cm^3$ या 38.5 लीटर सूप।

## प्रश्नावली 13.7

**1.** (i) 264 $cm^3$ (ii) 154 $cm^3$ **2.** (i) 1.232 $l$ (ii) $\frac{11}{35}\, l$

**3.** 10 cm **4.** 8 cm **5.** 38.5 $kl$

**6.** (i) 48 cm (ii) 50 cm (iii) 2200 $cm^2$ **7.** $100\pi$ $cm^3$ **8.** $240\pi$ $cm^3$; 5 : 12

**9.** 28.875 $m^3$, 99.825 $m^2$

## प्रश्नावली 13.8

**1.** (i) $1437\frac{1}{3}$ $cm^3$ (ii) 1.05 $m^3$ (लगभग) **2.** (i) $11498\frac{2}{3}$ $cm^3$ (ii) 0.004851 $m^3$

**3.** 345.39 g (लगभग) **4.** $\frac{1}{64}$ **5.** 0.303 $l$ (लगभग)

**6.** 0.06348 $m^3$ (लगभग) **7.** $179\frac{2}{3}$ $cm^3$

**8.** (i) 249.48 $m^2$ (ii) 523.9 $m^3$ (लगभग) **9.** (i) $3r$ (ii) 1 : 9

**10.** 22.46 $mm^3$ (लगभग)

## प्रश्नावली 13.9 (ऐच्छिक)

**1.** ₹ 6275

**2.** ₹ 2784.32 (लगभग) [सिल्वर पेंट की लागत का परिकलन करते समय गोले के उस भाग को घटाना न भूलिए जो आधारों पर टिका हुआ है।] **3.** 43.75%

## प्रश्नावली 14.1

**1.** अपने दैनिक कार्यों से एकत्रित किए जाने वाले आंकड़ों के पांच उदाहरण ये हैं :

(i) अपनी कक्षा में छात्रों की संख्या। (ii) अपने विद्यालय में पंखों की संख्या।

(iii) पिछले दो वर्षों के घर की बिजली का बिल। (iv) टेलीविजन या समाचार पत्रों से प्राप्त चुनाव के परिणाम।

(v) शैक्षिक सर्वेक्षण से प्राप्त साक्षरता दर के आंकड़े।

फिर भी आप यह देख सकते हैं कि और भी अनेक अलग-अलग उत्तर हो सकते हैं।

**2.** प्राथमिक आंकड़ा : (i), (ii) और (iii), गौण आंकड़ा : (iv) और (v)

## प्रश्नावली 14.2

**1.**

| रक्त समूह | छात्रों की संख्या |
|---|---|
| A | 9 |
| B | 6 |
| O | 12 |
| AB | 3 |
| **कुल योग** | 30 |

अधिक सामान्य – O , सबसे विरल – AB

**2.**

| ( कि0मी0 में ) (दूरी) | मिलान चिह्न | बारंबारता |
|---|---|---|
| 0 - 5 | $\cancel{||||}$ | 5 |
| 5 - 10 | $\cancel{||||}$ $\cancel{||||}$ \| | 11 |
| 10 - 15 | $\cancel{||||}$ $\cancel{||||}$ \| | 11 |
| 15 - 20 | $\cancel{||||}$ \|\|\|\| | 9 |
| 20 - 25 | \| | 1 |
| 25 - 30 | \| | 1 |
| 30 - 35 | \|\| | 2 |
| **कुल योग** | | 40 |

**3.** (i)

| सापेक्ष आर्द्रता ( % में ) | बारंबारता |
|---|---|
| 84 - 86 | 1 |
| 86 - 88 | 1 |
| 88 - 90 | 2 |
| 90 - 92 | 2 |
| 92 - 94 | 7 |
| 94 - 96 | 6 |
| 96 - 98 | 7 |
| 98 - 100 | 4 |
| **कुल योग** | 30 |

(ii) क्योंकि सापेक्ष आर्द्रता अधिक है, अत: ऐसा प्रतीत होता है कि आँकड़े वर्षा के मौसम में लिए गए हैं। (iii) परिसर = 99.2 – 84.9 = 14.3

**4.** (i)

| लंबाई ( सेमी में ) | बारंबारता |
|---|---|
| 150 - 155 | 12 |
| 155 - 160 | 9 |
| 160 - 165 | 14 |
| 165 - 170 | 10 |
| 170 - 175 | 5 |
| **कुल योग** | 50 |

(ii) ऊपर की सारणी से एक निष्कर्ष हम यह निकाल सकते हैं कि 50% से अधिक छात्रों की लंबाई 165 cm से कम है।

**5.** (i)

| (ppm) में सल्फर डाई-आक्साइड का सांद्रण | बारंबारता |
|---|---|
| 0.00 - 0.04 | 4 |
| 0.04 - 0.08 | 9 |
| 0.08 - 0.12 | 9 |
| 0.12 - 0.16 | 2 |
| 0.16 - 0.20 | 4 |
| 0.20 - 0.24 | 2 |
| **कुल योग** | 30 |

(ii) 8 दिनों तक सल्फर डाई-आक्साइड का सांद्रण 0.11 ppm से अधिक था।

**6.**

| सिरों की संख्या | बारंबारता |
|---|---|
| 0 | 6 |
| 1 | 10 |
| 2 | 9 |
| 3 | 5 |
| **कुल योग** | 30 |

**7.** (i)

| अंक | बारंबारता |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 1 | 5 |
| 2 | 5 |
| 3 | 8 |
| 4 | 4 |
| 5 | 5 |
| 6 | 4 |
| 7 | 4 |
| 8 | 5 |
| 9 | 8 |
| **कुल योग** | 50 |

(ii) सबसे अधिक बार आने वाले अंक 3 और 9 हैं। सबसे कम बार आने वाले अंक 0 है।

**8.** (i)

| घंटों की संख्या | बारंबारता |
|---|---|
| 0 - 5 | 10 |
| 5 - 10 | 13 |
| 10 - 15 | 5 |
| 15 - 20 | 2 |
| **कुल योग** | 30 |

(ii) 2 बच्चे

**9.**

| बैट्री का जीवन-काल (वर्षों में) | बारंबारता |
|---|---|
| 2.0 - 2.5 | 2 |
| 2.5 - 3.0 | 6 |
| 3.0 - 3.5 | 14 |
| 3.5 - 4.0 | 11 |
| 4.0 - 4.5 | 4 |
| 4.5 - 5.0 | 3 |
| **कुल योग** | 40 |

## प्रश्नावली 14.3

**1.** (ii) पुनरुत्पादी स्वास्थ्य अवस्था

**3.** (ii) पार्टी A **4.** (ii) हाँ बारंबारता बहुभुज (iii) नहीं **5.** (ii) 184

**8.**

| आयु (वर्षों में) | बारंबारता | चौड़ाई | आयत की लंबाई |
|---|---|---|---|
| 1 - 2 | 5 | 1 | $\frac{5}{1} \times 1 = 5$ |
| 2 - 3 | 3 | 1 | $\frac{3}{1} \times 1 = 3$ |
| 3 - 5 | 6 | 2 | $\frac{6}{2} \times 1 = 3$ |
| 5 - 7 | 12 | 2 | $\frac{12}{2} \times 1 = 6$ |
| 7 - 10 | 9 | 3 | $\frac{9}{3} \times 1 = 3$ |
| 10 - 15 | 10 | 5 | $\frac{10}{5} \times 1 = 2$ |
| 15 - 17 | 4 | 2 | $\frac{4}{2} \times 1 = 2$ |

अब इन लंबाईयों से आप आयत चित्र खींच सकते हैं।

**9.** (i)

| अक्षरों की संख्या | बारंबारता | अंतराल की चौड़ाई | आयत की लंबाई |
|---|---|---|---|
| 1 - 4 | 6 | 3 | $\frac{6}{3} \times 2 = 4$ |
| 4 - 6 | 30 | 2 | $\frac{30}{2} \times 2 = 30$ |
| 6 - 8 | 44 | 2 | $\frac{44}{2} \times 2 = 44$ |
| 8 - 12 | 16 | 4 | $\frac{16}{4} \times 2 = 8$ |
| 12 - 20 | 4 | 8 | $\frac{4}{8} \times 2 = 1$ |

अब, आयत चित्र खींचिए।

(ii) 6 - 8

## प्रश्नावली 14.4

1. माध्य = 2.8; माध्यिका = 3; बहुलक = 3

2. माध्य = 54.8; माध्यिका = 52; बहुलक = 52

3. $x = 62$ **4.** 14

5. 60 कामगारों का माध्य वेतन ₹ 5083.33 है।

## प्रश्नावली 15.1

**1.** $\frac{24}{30}$ अर्थात् $\frac{4}{5}$ **2.** (i) $\frac{19}{60}$ (ii) $\frac{407}{750}$ (iii) $\frac{211}{1500}$ **3.** $\frac{3}{20}$ **4.** $\frac{9}{25}$

**5.** (i) $\frac{29}{2400}$ (ii) $\frac{579}{2400}$ (iii) $\frac{1}{240}$ (iv) $\frac{1}{96}$ (v) $\frac{1031}{1200}$ **6.** (i) $\frac{7}{90}$ (ii) $\frac{23}{90}$

**7.** (i) $\frac{27}{40}$ (ii) $\frac{13}{40}$ **8.** (i) $\frac{9}{40}$ (ii) $\frac{31}{40}$ (iii) 0 **11.** $\frac{7}{11}$ **12.** $\frac{1}{15}$ **13.** $\frac{1}{10}$

## प्रश्नावली A2.1

**1.** चरण 1: **सूत्रण :**

प्रासंगिक कारक है कंप्यूटर को किराए पर लेने की अवधि और हमें दी गई दो लागत। हम यह मान लेते हैं कि कंप्यूटर को खरीदने या किराए पर लेने पर लागत में कोई सार्थक परिवर्तन नहीं होता। अतः हम किसी भी परिवर्तन को अप्रासंगिक मान लेते हैं। हम यह भी मान लेते हैं कि सभी ब्रांड के कंप्यूटर और पीढ़ियाँ समान हैं अर्थात् ये अंतर भी अप्रासंगिक हैं।

$x$ महिनों के लिए कंप्यूटर को किराए पर लेने पर रु. 2000 $x$ का खर्च आता है। यदि यह राशि कंप्यूटर की कीमत से अधिक है, तो कंप्यूटर खरीदना ही उत्तम होगा। अतः समीकरण यह होता है।

$$2000x = 25000 \qquad (1)$$

चरण 2 : **हल :** (1) हल करने पर, $x = \frac{25000}{2000} = 12.5$

चरण 3 : **निर्वचन :** क्योंकि 12.5 महीने बाद कंप्यूटर को किराए पर लेने पर लागत अधिक आती है। अतः कंप्यूटर खरीदना ही सस्ता तब पड़ेगा, जबकि इसका प्रयोग आप 12 महीने से अधिक अवधि के लिए करना चाहते हैं।

**2.** चरण 1 : **सूत्रण :** हम यहाँ यह मान लेगें कि कार अचर चाल से चल रही है। अतः चाल में हुए किसी भी परिवर्तन को असंगत माना जाएगा। यदि कारें $x$ घंटे के बाद मिलती हैं, तो पहली कार A से $40x$ कि.मी. की दूरी तय करेगी और दूसरी कार $30x$ कि.मी. की दूरी तय करेगी। अतः यह A से $(100 - 30x)$ कि.मी. की दूरी तय करेगी। अतः समीकरण होगा $40x = 100 - 30x$, अर्थात् $70x = 100$.

चरण 2 : **हल :** समीकरण हल करने पर $x = \frac{100}{70}$ प्राप्त होता है।

चरण 3 : **निर्वचन :** $\frac{100}{70}$ लगभग 1.4 घंटा है अतः कारें 1.4 घंटे बाद मिलेंगी।

**3.** चरण 1 : **सूत्रण :** कक्षा में पृथ्वी की परिक्रमा कर रहे चांद की चाल यह है

$$\frac{\text{कक्षा की लंबाई}}{\text{लिया गया समय}}$$

चरण 2 : **हल :** क्योंकि कक्षा लगभग वृत्तीय है, इसलिए लंबाई $2 \times \pi \times 384000$ km $= 2411520$ km

एक कक्षा को पूरा करने में चंद्रमा 24 घंटे लेता है।

अतः चाल $= \frac{2411520}{24} = 100480$ किमी/घंटा

चरण 3 : **निर्वचन :** चाल 100480 किमी/घंटा है।

**4.** **सूत्रण :** यह कल्पना कर ली गई है कि बिल में अंतर होने का कारण केवल वाटर हीटर का प्रयोग है।

मान लीजिए वाटर हीटर के इस्तेमाल होने का औसत समय $= x$ घंटा

वाटर हीटर के इस्तेमाल के कारण प्रति महिने अंतर = ₹ 1240 – ₹ 1000 = ₹ 240

एक घंटे के लिए वाटर हीटर का इस्तेमाल की लागत = ₹ 8

So, the cost of using the water heater for 30 days $= 8 \times 30 \times x$

अतः 30 दिनों तक वाटर हीटर का इस्तेमाल करने की लागत = बिल में अंतर

इसलिए, $240x = 240$

**हल :** इस समीकरण से हमें $x = 1$ प्राप्त होता है।

**निर्वचन :** क्योंकि $x = 1$, इसलिए औसतन प्रति दिन 1 घंटे तक वाटर हीटर का प्रयोग किया जाता है।

## प्रश्नावली A2.2

1. यहाँ हम किसी विशेष हल पर चर्चा नहीं करेंगे। आप यहाँ पिछले उदाहरण में प्रयुक्त विधि का या किसी अन्य उपयुक्त विधि का प्रयोग कर सकते हैं।

## प्रश्नावली A2.3

1. हम यह पहले बता चुके हैं कि वास्तविक जीवन से जुड़ी स्थितियों में सूत्रण भाग ब्यौरेवार हो सकता है। हम शब्द समस्याओं में उत्तर को व्यक्त नहीं करते। इसके अतिरिक्त इस शब्द समस्या का एक सही उत्तर होता है। आवश्यक नहीं है कि यह वास्तविक जीवन से जुड़ी स्थितियाँ ही हों।

2. महत्वपूर्ण कारक (ii) और (iii)। यहाँ (i) एक महत्वपूर्ण कारक नहीं है, यद्यपि इसकी बेची गई वाहनों की संख्या को प्रभावित भी कर सकता है।